METODE-METODE PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan (S.Pd)
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Nathalia Kusumasetyarini
NIM : 931414022
NIRM : 930052010501120021

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2001

Skripsi

METODE-METODE PENYELESAIAN

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA

DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Yang diajukan oleh :

Nathalia Kusumasetyarini

NIM : 931414022

NIRM : 930052010501120021

telah disetujui oleh :

Pembimbing Utama :

Drs. A. Tutoyo, M.Sc. tanggal : 25 September 2001

SKRIPSI

METODE-METODE PENYELESAIAN
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA
DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nathalia Kusumasetyarini
NIM : 931414022
NIRM : 930052010501120021

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 27 Agustus 2001
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. R. Rohandi, M.Ed.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto P., M.T.	....
Anggota	Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	Drs. A. Mardjono	....
Anggota	Andi Rudhito, S.Pd.	....

Yogyakarta, 25 September 2001
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi

Skripsi ini kupersembahkan dengan cinta dan rasa syukur terdalam kepada :

almarhumah eyang Ismaniah Kusumodirdjo,

bapak, ibu, mbak Reny, mbak Retna dan anjing-anjingku.

Amazing grace, how sweet the sound

That saved a wretch like me

I once was lost, but now I'm found

Was blind, but now I see

Was grace that taught my heart to fear

And grace, my fears relieved

How precious did, that grace appear

The hour I first believed

(John Newton, 1779)

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan ini saya menyatakan bahwa di dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak ada karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini serta disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

Nathalia Kusumasetyarini

INTISARI

Masalah skripsi ini adalah menyelesaikan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan koefisien konstan.

Tujuan skripsi ini adalah menguraikan beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan. Penulisan skripsi ini menggunakan metode kepustakaan.

Hasil skripsi ini diuraikan di bawah. Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan yang mempunyai bentuk

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + F_1(t),$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + F_2(t),$$
$$\vdots$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + F_n(t)$$

dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi. Meskipun metode ini diuraikan untuk menyelesaikan sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan, tetapi juga dapat digeneralisasikan untuk menyelesaikan sistem lebih dari dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan. Akan tetapi metode ini kurang praktis dan terlampau sulit untuk menyelesaikan sistem tiga atau lebih persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Sistem linear di atas dapat ditulis dalam notasi matriks $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$. Sistem linear disebut homogen, jika $\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{0}$ dan takhomogen, jika $\mathbf{F}(t) \neq \mathbf{0}$. Metode nilai eigen dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linear homogen. Ada tiga langkah dalam metode ini, pertama, menentukan persamaan karakteristik $|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = 0$; kedua, mendapatkan akar-akar persamaan karakteristik atau nilai-nilai eigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; dan ketiga, menggunakan setiap nilai eigen α untuk menyelesaikan sistem persamaan aljabar linear homogen $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ untuk mendapatkan vektor-vektor eigen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen mempunyai bentuk $\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t)$, dimana $\phi_c(t)$ merupakan penyelesaian umum dari sistem linear homogen yang bersesuaian dan $\phi_p(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen. Metode koefisien taktentu dan variasi parameter dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen.

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan mempunyai beberapa penerapan dalam fisika, misalnya, mekanika, rangkaian listrik dan campuran.

ABSTRACT

The problem of this skripsi was to solve systems of n first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients.

The purpose of this skripsi was to explain some methods could be used to solve systems of n first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients. The literature method used by writer.

The result of this skripsi was described below. A system of n first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients that have the form

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + F_1(t),\\
x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + F_2(t),\\
&\vdots\\
x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + F_n(t)
\end{aligned}
$$

could be solved by using elimination method. Although this method was described to solve a system of two first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients, but it could be generalized also to solve systems of more than two first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients. However, this method was impractical and too difficult to solve systems of three or more first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients.

The linear system above could be written in matrix notation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$. The linear system was called homogenous, if $\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{0}$ and nonhomogenous, if $\mathbf{F}(t) \neq \mathbf{0}$. The eigenvalue method could be used to solving of the homogenous linear system. There were three step in this methods, first, was to make characteristic equation $|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = 0$; second, was to find roots of characteristic equation or eigenvalues α_1, α_2, …, α_n; and third, was to use every eigenvalue α to solve a system of homogenous linear algebra equations $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ to get eigenvector $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$.

A general solution of the nonhomogenous linear system that have the form $\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t)$, where $\phi_c(t)$ was a general solution of the corresponding homogenous linear system and $\phi_p(t)$ was a particular solution of the nonhomogenous linear system. The methods of undetermined coefficients and variation of parameters could be used to find a particular solution of the nonhomogenous linear system.

Systems of n first order simultaneous linear differential equations with constant coefficients had several applications in physics, for example, in mechanics, electric circuits and mixture.

PRAKATA

Puji dan syukur dipanjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat yang telah dikaruniakanNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Metode-Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama Dengan Koefisien Konstan".

Skripsi ini disusun guna memenuhi sebagaian persyaratan untuk mencapai derajat Sarjana Strata Satu Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.

Proses penyusunan skripsi ini tidak dapat dilepaskan dari kerja sama dengan banyak pihak. Untuk itu penulis menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang banyak memberi petunjuk dan bimbingan selama penyelesaian skripsi.
2. Bapak Drs. A. Mardjono dan Bapak Andi Rudhito, S. Pd., selaku dosen penguji yang telah banyak memberi saran dan arahan guna penyempurnaan skripsi.
3. Bapak Narjo dan Bapak Sugeng, selaku karyawan Jurusan Pendidikan MIPA yang memberikan bantuan selama ini.
4. Bapak, Ibu, almarhumah eyang, mbak Reny, mbak Retna dan anjing-anjingku yang selalu memberi semangat dan membantu.
5. Para sahabat yang telah banyak memberi jasa baik.
6. Semua pihak yang tidak dapat disebut satu persatu yang telah memberikan bantuannya baik secara mental maupun fisik.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari, apabila disusun dalam model matematis, menghendaki ketetapan dari suatu fungsi yang memenuhi suatu persamaan yang memuat derivatif-derivatif dari suatu fungsi yang takdiketahui. Persamaan itu disebut persamaan diferensial.

Persamaan diferensial diklasifikasikan atas persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jika fungsi yang takdiketahui dalam persamaan diferensial bergantung pada satu variabel bebas, maka derivatif-derivatifnya merupakan derivatif-derivatif biasa. Persamaan diferensial itu disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang takdiketahui dalam persamaan diferensial bergantung pada dua atau lebih variabel bebas, maka derivatif-derivatifnya merupakan derivatif-derivatif parsial. Persamaan diferensial itu disebut persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa diklasifikasikan atas orde dan derajat. Orde dari persamaan diferensial biasa adalah derivatif orde tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial biasa tersebut. Derajat dari persamaan diferensial biasa adalah pangkat derivatif orde tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial biasa tersebut.

Persamaan diferensial biasa yang selama ini sering kita jumpai adalah persamaan diferensial biasa yang hanya melibatkan satu fungsi yang takdiketahui. Akan tetapi, karena beberapa alasan, antara lain penerapan dan generalisasi, tidak jarang pula kita dihadapkan pada persoalan sistem n persamaan diferensial biasa simultan yang melibatkan n fungsi yang takdiketahui, dimana n adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari atau sama dengan dua. Oleh karena itu sistem n persamaan diferensial biasa simultan merupakan sebuah obyek yang sangat penting dalam matematika.

Bentuk umum sistem n persamaan diferensial biasa simultan adalah

$$G_k(t, y_k, y'_k, \ldots, y^{(p_k)}_k) = 0,$$

dimana $k = 1, 2, \ldots, n$; G_k menyatakan fungsi-fungsi yang diketahui dengan argumen-argumen $t, y_k, y'_k, \ldots, y^{(p_k)}_k$; t menyatakan variabel bebas dan y_k menyatakan fungsi-fungsi yang takdiketahui.

Ilustrasi pertama dalam bidang ekologi, yaitu masalah mangsa dan pemangsa. Misalkan $H(t)$ dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan populasi mangsa dan pemangsa pada waktu t. Dalam ketiadaan pemangsa, mangsa akan tumbuh tanpa batas, sehingga $H' = \alpha H$, $\alpha > 0$ dan $P = 0$. Dalam ketiadaan mangsa, pemangsa akan mati lenyap, sehingga $P' = -\gamma P$, $\gamma > 0$ dan $H = 0$. Model matematis yang diusulkan lebih kurang tahun 1925 oleh Lotka dan Volterra menunjukkan bahwa suatu keseimbangan ekologi dapat dipertahankan apabila kedua spesies ada. Jadi, kita dapat sistem

$$H' = \alpha H - \beta HP,$$

$$P' = -\gamma P + \delta HP,$$

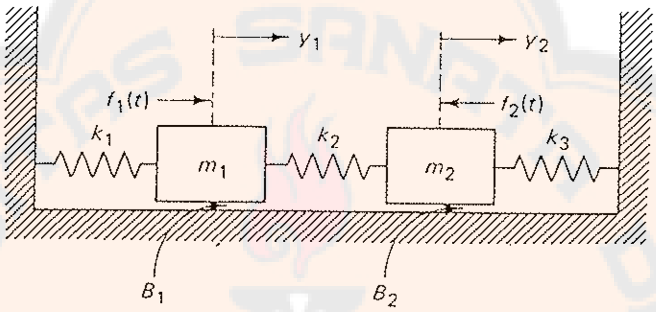
dimana α, β, γ dan δ menyatakan konstanta-konstanta yang bernilai positif, α menyatakan laju pertumbuhan populasi mangsa, γ menyatakan laju kematian populasi pemangsa, β dan δ menyatakan ukuran efek interaksi antara dua spesies dan HP menyatakan suku efek interaksi antara dua spesies (negatif untuk mangsa dan positif untuk pemangsa), adalah sistem dua persamaan diferensial biasa orde pertama simultan.

Ilustrasi kedua dalam bidang fisika, yaitu masalah mekanika. Perhatikan sistem yang terdiri dari dua massa dan tiga pegas linear disusun seperti yang ditunjukkan dalam gambar 1.1. Dua massa m_1 dan m_2 bergerak pada suatu permukaan dengan gaya geseran yang melekat (*viscous frictional forces*) B_1 dan B_2 dan di bawah pengaruh gaya luar (*external forces*) $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ dan mereka berturut-turut ditarik oleh tiga pegas linear k_1, k_2 dan k_3. Menurut hukum Newton kedua mengenai gerak, $m_i y''_i$ sama dengan jumlah gaya yang bekerja pada massa m_i. Jadi, kita dapat sistem

$$\begin{aligned} m_1 y''_1 &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) - B_1 y'_1 + f_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_2 - B_1 y'_1 + f_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 y''_2 &= -k_2(y_2 - y_1) - k_3 y_2 - B_2 y'_2 - f_2(t) \\ &= k_2 y_1 - (k_2 + k_3) y_2 - B_2 y'_2 - f_2(t), \end{aligned}$$

dimana i = 1, 2; koordinat y_i menyatakan pemindahan massa m_i dari posisi statisnya (apabila sistem tidak bergerak, dalam keseimbangan dan $f_i(t) = 0$) dengan ukuran pemindahan positif ke kanan dan k_1, k_2, k_3, B_1 dan B_2 menyatakan konstanta-konstanta, adalah sistem dua persamaan diferensial biasa orde kedua simultan.



gambar 1.1

Ilustrasi ketiga dalam bidang ekonomi, yaitu masalah permintaan dan persediaan. Misalkan laju perubahan persediaan satu barang dagangan berbanding lurus dengan selisih antara permintaan (*demand*) D dan persediaan (*supply*) S pada waktu t. Dalam kasus dua barang dagangan, kita dapat sistem

$S'_1 = h(D_1 - S_1)$,

$S'_2 = k(D_2 - S_2)$,

dimana h dan k menyatakan konstanta-konstanta yang bernilai positif. Kita asumsikan bahwa setiap barang dagangan digunakan dalam pabrik lain, barang dagangan pertama digunakan dalam pabrik sendiri dan tidak ada kontribusi lain yang berarti untuk permintaan kedua barang dagangan. Untuk modelnya kita anggap

$$D_1 = aS_1 + bS_2,$$

$$D_2 = cS_1,$$

dimana a, b dan c menyatakan konstanta-konstanta yang bernilai positif. Jadi, kita dapat sistem

$$S'_1 = h(a-1)S_1 + hbS_2,$$

$$S'_2 = kcS_1 - kS_2,$$

adalah sistem dua persamaan diferensial biasa orde pertama simultan.

Adanya hubungan yang erat antara sistem n persamaan diferensial biasa orde yang lebih tinggi dari satu simultan dan sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan dapat dijelaskan dengan kenyataan bahwa sistem n persamaan diferensial biasa orde yang lebih tinggi dari satu simultan dapat dibangun ke dalam sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan.

Andaikan bahwa sistem

$$G_k(t, y_k, y'_k, \ldots, y^{(p_k)}{}_k) = 0 \qquad (1.1)$$

adalah sistem n persamaan diferensial biasa orde yang lebih tinggi dari satu simultan. Sistem (1.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(p_k)}{}_k = g_k(t, y_k, y'_k, \ldots, y^{(p_k-1)}{}_k). \qquad (1.2)$$

Maka kita dapat membangun sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan dengan mengganti fungsi-fungsi yang takdiketahui y_k dan derivatif-

derivatifnya dengan variabel-variabel baru, yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_{(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n)}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&x_1 = y_1,\ x_2 = y'_1,\ \ldots,\ x_{(p_1)} = y^{(p_1-1)}{}_1,\\
&x_{(p_1+1)} = y_2,\ x_{(p_1+2)} = y'_2,\ \ldots,\ x_{(p_1+p_2)} = y^{(p_2-1)}{}_2,\ \ldots,\\
&x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)} = y_n,\ x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+2)} = y'_n,\ \ldots,\\
&x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)} = y^{(p_n-1)}{}_n.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dengan mensubstitusikan (1.3) ke dalam sistem (1.2), kita dapat sistem

$$\begin{aligned}
&x'_1 = x_2,\\
&\quad\vdots\\
&x'_{(p_1-1)} = x_{(p_1)},\\
&x'_{(p_1)} = g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_{(p_1)}, x_{(p_1+1)}, x_{(p_1+2)}, \ldots, x_{(p_1+p_2)}, \ldots,\\
&\qquad\qquad x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)}, x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+2)}, \ldots, x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)}),\\
&x'_{(p_1+1)} = x_{(p_1+2)},\\
&\quad\vdots\\
&x'_{(p_1+p_2-1)} = x_{(p_1+p_2)},\\
&x'_{(p_1+p_2)} = g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_{(p_1)}, x_{(p_1+1)}, x_{(p_1+2)}, \ldots, x_{(p_1+p_2)}, \ldots,\\
&\qquad\qquad x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)}, x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+2)}, \ldots, x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)}),\\
&\quad\vdots\\
&x'_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)} = x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+2)},\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

$$x'_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n-1)} = x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)},$$

$$x'_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)} = g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_{(p_1)}, x_{(p_1+1)}, x_{(p_1+2)}, \ldots, x_{(p_1+p_2)}, \ldots,$$

$$x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)}, x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+2)}, \ldots,$$

$$x_{(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n)}) \qquad (1.4)$$

adalah sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan.

Sistem (1.4) adalah bentuk khusus sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan. Bentuk umum sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan adalah

$$x'_k = g_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1.5)$$

dimana $k = 1, 2, \ldots, n$; g_k menyatakan fungsi-fungsi yang diketahui dengan argumen-argumen $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$; t menyatakan variabel bebas dan x_k menyatakan fungsi-fungsi yang takdiketahui. Sistem n persamaan diferensial biasa orde pertama simultan diklasifikasikan atas linear dan taklinear. Sistem (1.5) dikatakan linear, jika semua fungsi g_k adalah fungsi linear dari fungsi-fungsi yang takdiketahui $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sistem (1.5) dikatakan taklinear, jika paling sedikit satu fungsi g_k adalah fungsi taklinear dari fungsi-fungsi yang takdiketahui $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Bentuk umum sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan adalah

$$x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t),$$

$$x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t),$$

$$\vdots \tag{1.6}$$

$$x'_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t),$$

dimana i; j = 1, 2, …, n; $a_{ij}(t)$ dan $F_i(t)$ menyatakan fungsi-fungsi yang diketahui dan x_1, x_2, …, x_n menyatakan fungsi-fungsi yang takdiketahui. Fungsi $a_{ij}(t)$ disebut koefisien dari sistem linear (1.6). Jika semua fungsi $a_{ij}(t)$ adalah fungsi konstan, maka sistem linear (1.6) dikatakan mempunyai koefisien konstan. Sistem linear (1.6) dikatakan homogen, jika semua fungsi $F_i(t)$ sama dengan nol. Sistem linear (1.6) dikatakan takhomogen, jika paling sedikit satu fungsi $F_i(t)$ tidak sama dengan nol.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan utama yang dibahas dalam penulisan ini, yaitu :

a. Bagaimana metode-metode penyelesaian sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan;

b. Bagaimana penerapan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

1.3 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk :

a. Memahami metode-metode penyelesaian sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan;

b. Memahami penerapan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

1.4 Pembatasan Masalah

Penulis membatasi permasalahan pada :

a. Metode-metode penyelesaian sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan, yaitu :
   i. Metode eliminasi;
   ii. Metode nilai eigen;
   iii. Metode koefisien taktentu;
   iv. Metode variasi parameter;

b. Penerapan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam bidang fisika. Misalnya mekanika, rangkaian listrik dan campuran.

Hal-hal yang menyangkut persamaan diferensial linear orde lebih tinggi dari atau sama dengan satu dengan koefisien konstan dan metode-metode penyelesaiannya dianggap telah dikuasai.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dalam penulisan ini adalah :

a. Bagi penulis.

Penulisan ini bermanfaat untuk mendalami materi tentang metode-metode penyelesaian sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan dan penerapan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan;

b. Bagi bidang ilmu yang bersangkutan.

Hasil penulisan ini diharapkan dapat memperjelas kegunaan dan penerapan ilmu tersebut dalam kehidupan sehari-hari, sehingga menarik minat untuk mempelajari dan mengembangkan lebih lanjut. Dengan demikian ilmu tersebut akan semakin besar manfaatnya bagi manusia dalam membantu menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupannya.

1.6 Metode Penulisan

Penulisan ini menggunakan metode kepustakaan.

1.7 Sistematika Penulisan

Bab I Pendahuluan

1.1 Latar Belakang Masalah

1.2 Perumusan Masalah

1.3 Tujuan Penulisan

1.4 Pembatasan Masalah

1.5 Manfaat Penulisan

Bab IV Penerapan Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama dengan Koefisien Konstan dalam Bidang Fisika

4.1 Mekanika

4.2 Rangkaian Listrik

4.3 Campuran

Bab V Penutup

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama

Pembahasan mengenai sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan akan diawali dengan mendefinisikan pengertian dari sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan.

Definisi 2.1.1 :

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dalam n fungsi yang takdiketahui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu himpunan n persamaan simultan yang berbentuk

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t), \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

dimana i; j = 1, 2, …, n; $a_{ij}(t)$ dan $F_i(t)$ menyatakan fungsi-fungsi yang diketahui. Fungsi $a_{ij}(t)$ disebut koefisien dari sistem linear (2.1.1). Jika semua fungsi $a_{ij}(t)$ adalah fungsi konstan, maka sistem linear (2.1.1) dikatakan mempunyai koefisien konstan. Sistem linear (2.1.1) dikatakan homogen, jika semua fungsi $F_i(t)$ sama dengan nol. Sistem linear (2.1.1) dikatakan takhomogen, jika paling sedikit satu fungsi $F_i(t)$ tidak sama dengan nol.

Jika $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ menyatakan fungsi yang bernilai matriks bujur sangkar berordo n dan $\mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1}$ dan $\mathbf{F}(t) = [F_i(t)]_{n \times 1}$ menyatakan fungsi-fungsi yang bernilai vektor kolom berordo n x 1, maka sistem linear (2.1.1) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yang tunggal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t). \tag{2.1.2}$$

2.1.1 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama

Langkah selanjutnya dalam membahas sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan adalah tentang penyelesaiannya.

Definisi 2.1.2 :

Suatu penyelesaian dari sistem linear (2.1.2) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi vektor

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

sedemikian hingga komponen-komponen dari fungsi vektor $\phi(t)$ secara identik memenuhi semua persamaan dalam sistem linear (2.1.1) untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

$x' = Ax$

$x'(t) = A(t)\,x(t)$

peny. $x(t) = \phi(t)$

2.1.2 Teorema Eksistensi Ketunggalan dan Masalah Nilai Awal

Sebelum sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan diselesaikan, ada dua hal yang perlu diperhatikan. Pertama, sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan yang akan diselesaikan ada penyelesaiannya. Kedua, hanya ada satu penyelesaian dari sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan tersebut. Untuk itu perlu diketahui tentang teorema eksistensi dan ketunggalan. Di dalam skripsi ini kita tidak membuktikan teorema eksistensi dan ketunggalan.

Teorema 2.1 :

Andaikan bahwa elemen-elemen dari fungsi matriks **A**(t) dan komponen-komponen dari fungsi vektor **F**(t) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $a \leq t \leq b$, maka ada penyelesaian tunggal

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

yang memenuhi sistem linear (2.1.2) pada seluruh interval $a \leq t \leq b$ dan memenuhi syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \leq t \leq b$ dan $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n})^T$ merupakan suatu vektor dari bilangan-bilangan real $\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n}$.

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dan syarat awal disebut masalah nilai awal.

Contoh 2.1 :

Masalah nilai awal

$$x'_1 = 4x_1 + 2x_2 - 15te^{-2t},$$
$$x'_2 = 3x_1 - x_2 - 4te^{-2t}, \qquad (2.1.3)$$
$$\phi_1(0) = 1 \text{ dan } \phi_2(0) = -1$$

dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yang tunggal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (-15, -4)^T te^{-2t}, \qquad (2.1.4)$$

$$\phi(0) = (1, -1)^T.$$

Suatu penyelesaian dari sistem linear (2.1.4) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $-\infty < t < +\infty$ yang mengandung konstanta-konstanta sebarang c_1 dan c_2 adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t} - {}^1/_7(2, 1)^T e^{5t}$$
$$+ {}^1/_{14}[(4 + 28t - 7t^2), (2 + 14t + 21t^2)]^T e^{-2t}, \qquad (2.1.5)$$

karena

$$\phi'(t) = -2c_1(1, -3)^T e^{-2t} + 5c_2(2, 1)^T e^{5t} - {}^5/_7(2, 1)^T e^{5t} + {}^1/_{14}[(28 - 14t),$$
$$(14 + 42t)]^T e^{-2t} - {}^1/_7[(4 + 28t - 7t^2), (2 + 14t + 21t^2)]^T e^{-2t}$$

dan

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \phi(t) + (-15, -4)^T te^{-2t} = \phi'(t).$$

Jadi, suatu penyelesaian dari sistem linear (2.1.4) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $-\infty < t < +\infty$ yang mengandung konstanta-konstanta sebarang c_1 dan c_2 adalah fungsi vektor (2.1.5) sedemikian hingga komponen-komponen dari fungsi vektor (2.1.5) secara identik memenuhi semua persamaan dalam sistem linear (2.1.3) untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$. Dengan mensubstitusikan syarat awal

$$\phi(0) = (1, -1)^T$$

ke dalam fungsi vektor (2.1.5), kita dapat

$$\phi(0) = c_1(1, -3)^T + c_2(2, 1)^T - {}^1/_7(2, 1)^T + {}^1/_{14}(4, 2)^T e^{-2t} = (1, -1)^T$$

atau

$$c_1 + 2c_2 = 1, -3c_1 + c_2 = -1.$$

Dengan menyelesaikan sistem dua persamaan aljabar linear simultan ini, kita dapat

$$c_1 = {}^3/_7 \text{ dan } c_2 = {}^2/_7.$$

Jadi, suatu penyelesaian dari masalah nilai awal (2.1.4), (2.1.5) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = {}^1/_7(2, 1)^T e^{5t} + {}^1/_{14}[(10 + 28t - 7t^2), (-16 + 14t + 21t^2)]^T e^{-2t}. \ \square$$

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Pertama

Kita sekarang akan membahas sistem n persamaan diferensial linear homogen orde pertama simultan dan penyelesaiannya.

Definisi 2.2.1 :

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dikatakan homogen, jika semua fungsi $F_i(t)$ dalam sistem linear (2.1.1) sama dengan nol, yang berarti

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Sistem linear homogen (2.2.1) dalam notasi matriks, yaitu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{2.2.2}$$

Berkat teorema 2.1, kita dengan mudah membuktikan akibat berikut.

Akibat 2.2.1 :

Andaikan bahwa elemen-elemen dari fungsi matriks $\mathbf{A}(t)$ yang didefinisikan dan kontinu pada interval $a \leq t \leq b$, maka masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear homogen (2.2.2) dan syarat awal

$$\phi(t_0) = \mathbf{0},$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \leq t \leq b$, mempunyai penyelesaian tunggal

$$\phi(t) = \mathbf{0},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

Menurut teorema 2.1, ada penyelesaian tunggal

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

yang memenuhi sistem linear (2.1.2) dan memenuhi syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0.$$

Jadi, jika masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear homogen (2.2.2) dan syarat awal

$$\phi(t_0) = \mathbf{0},$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \leq t \leq b$, maka masalah nilai awal itu mempunyai penyelesaian tunggal

$$\phi(t) = \mathbf{0},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. □

2.2.1 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Pertama

Andaikan bahwa penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang didefinisikan dan kontinu pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_k(t) = [\phi_{1k}(t), \phi_{2k}(t), \ldots, \phi_{ik}(t), \ldots, \phi_{nk}(t)]^T,$$

dimana i; k = 1, 2, ..., n dan fungsi $\phi_{ik}(t)$ menyatakan komponen ke-i dari fungsi vektor $\phi_k(t)$. Teorema mengenai prinsip superposisi berikut membuktikan bahwa setiap kombinasi linear dari penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$ merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Teorema 2.2.2 :

Jika fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ merupakan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, maka kombinasi linear

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) \tag{2.2.3}$$

merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Kita buktikan bahwa setiap kombinasi linear yang berbentuk (2.2.3) merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Jika derivatif dari kombinasi linear (2.2.3) adalah

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]' = c_1\phi'_1(t) + c_2\phi'_2(t) + \ldots + c_n\phi'_n(t)$$

dan fungsi-fungsi vektor $\phi_k(t)$ memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$, kita dapat

$$\phi'_k(t) = \mathbf{A}(t)\phi_k(t),$$

dimana k = 1, 2, …, n. Jadi,

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]' = c_1\phi'_1(t) + c_2\phi'_2(t) + \ldots + c_n\phi'_n(t)$$

$$= c_1\mathbf{A}(t)\phi_1(t) + c_2\mathbf{A}(t)\phi_2(t) + \ldots + c_n\mathbf{A}(t)\phi_n(t)$$

$$= \mathbf{A}(t)[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)].$$

Berarti,

$$\vartheta'(t) = \mathbf{A}(t)\vartheta(t),$$

dimana

$$\vartheta(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Dengan demikian terbukti bahwa kombinasi linear

$$\vartheta(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)$$

merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen pada interval $a \le t \le b$. □

Contoh 2.2.1 :

Jika fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}$ dan $\phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}$ merupakan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (2.2.4)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$, karena

$$\mathbf{A}(t)\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}(1, -3)^T e^{-2t} = -2(1, 3)^T e^{-2t} = \phi'_1(t),$$

$$\mathbf{A}(t)\phi_2(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}(2, 1)^T e^{5t} = 2(5, 1)^T e^{5t} = \phi'_2(t)$$

dan c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang, maka kombinasi linear

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}$$

merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Definisi-definisi berikut mengenai himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang takbebas linear dan bebas linear pada interval $a \le t \le b$.

Definisi 2.2.2 :

Himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ dikatakan takbebas linear pada interval $a \le t \le b$, jika ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga persamaan

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = \mathbf{0},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

Definisi 2.2.3 :

Himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ dikatakan bebas linear pada interval $a \le t \le b$, jika persamaan

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = \mathbf{0},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$ hanya dipenuhi oleh

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0.$$

Definisi 2.2.4 :

Determinan berordo n

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) = \begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

disebut Wronskian dari fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$.

Determinan ini berhubungan dengan teorema-teorema berikut yang membuktikan bahwa himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) adalah takbebas linear atau bebas linear pada interval $a \le t \le b$.

Teorema 2.2.3 :

Jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang takbebas linear pada interval $a \le t \le b$, maka Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) = 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Menurut definisi 2.2.2, himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ dikatakan takbebas linear pada interval $a \le t \le b$, jika ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol, sedemikian hingga persamaan

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = \mathbf{0}, \qquad (2.2.5)$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Persamaan (2.2.5) ekuivalen dengan sistem

$$\begin{aligned} c_1\phi_{11}(t) + c_2\phi_{12}(t) + \ldots + c_n\phi_{1n}(t) &= 0, \\ c_1\phi_{21}(t) + c_2\phi_{22}(t) + \ldots + c_n\phi_{2n}(t) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1\phi_{n1}(t) + c_2\phi_{n2}(t) + \ldots + c_n\phi_{nn}(t) &= 0, \end{aligned}$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Ambil suatu titik t_0 dalam interval $a \le t \le b$, kita dapat sistem n persamaan aljabar linear homogen simultan

$$\begin{aligned} \phi_{11}(t_0)c_1 + \phi_{12}(t_0)c_2 + \ldots + \phi_{1n}(t_0)c_n &= 0, \\ \phi_{21}(t_0)c_1 + \phi_{22}(t_0)c_2 + \ldots + \phi_{2n}(t_0)c_n &= 0, \\ &\vdots \qquad (2.2.6) \end{aligned}$$

$$\phi_{n1}(t_0)c_1 + \phi_{n2}(t_0)c_2 + \ldots + \phi_{nn}(t_0)c_n = 0,$$

dalam variabel-variabel c_1, c_2, …, c_n. Sistem (2.2.6) mempunyai penyelesaian yang taktrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisien sistem (2.2.6) sama dengan nol. Syarat ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{vmatrix} \phi_{11}(t_0) & \phi_{12}(t_0) & \ldots & \phi_{1n}(t_0) \\ \phi_{21}(t_0) & \phi_{22}(t_0) & \ldots & \phi_{2n}(t_0) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t_0) & \phi_{n2}(t_0) & \ldots & \phi_{nn}(t_0) \end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = 0.$$

Jadi, jika t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$, maka kita dapat Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) = 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. □

Teorema 2.2.4 :

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \le t \le b$, maka $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang takbebas linear pada interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Perhatikan sistem n persamaan aljabar linear homogen simultan

$$
\begin{aligned}
c_1\phi_{11}(t_0) + c_2\phi_{12}(t_0) + \ldots + c_n\phi_{1n}(t_0) &= 0,\\
c_1\phi_{21}(t_0) + c_2\phi_{22}(t_0) + \ldots + c_n\phi_{2n}(t_0) &= 0,\\
&\vdots \\
c_1\phi_{n1}(t_0) + c_2\phi_{n2}(t_0) + \ldots + c_n\phi_{nn}(t_0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

dalam variabel-variabel $c_1, c_2, \ldots, c_n$; dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$. Jika Wronskian

$$
\begin{vmatrix}
\phi_{11}(t_0) & \phi_{12}(t_0) & \ldots & \phi_{1n}(t_0)\\
\phi_{21}(t_0) & \phi_{22}(t_0) & \ldots & \phi_{2n}(t_0)\\
 & & \vdots & \\
\phi_{n1}(t_0) & \phi_{n2}(t_0) & \ldots & \phi_{nn}(t_0)
\end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = 0,
$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \le t \le b$, maka sistem (2.2.7) mempunyai penyelesaian yang taktrivial. Sistem (2.2.7) ekuivalen dengan persamaan

$$c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \ldots + c_n\phi_n(t_0) = \mathbf{0}, \tag{2.2.8}$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$.

Perhatikan persamaan

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t), \tag{2.2.9}$$

untuk semua t dalam interval $a \le t \le b$. Jika fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_n(t)$ merupakan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$, maka menurut teorema 2.2.2, kombinasi linear yang berbentuk (2.2.9) merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Dari persamaan (2.2.8), kita dapat

$$\phi(t_0) = \mathbf{0},$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$, menurut akibat 2.2.1, kita dapat

$$\phi(t) = \mathbf{0},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Berarti, persamaan (2.2.9) menjadi

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = \mathbf{0}, \qquad (2.2.10)$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Jadi, menurut definisi 2.2.2, jika ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dari persamaan (2.2.10) yang tidak semuanya sama dengan nol, maka himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ dikatakan takbebas linear pada interval $a \le t \le b$. □

Teorema 2.2.5 :

Himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \le t \le b$ jika dan hanya jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Kita buktikan dengan kontradiksi. Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$, maka $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang takbebas linear pada interval $a \leq t \leq b$ (lihat bukti teorema 2.2.4). Jadi, jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$, maka terbukti bahwa Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

($\Leftarrow$)

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) \neq 0,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \leq t \leq b$, maka kita buktikan bahwa $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$.

Menurut definisi 2.2.2, himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ dikatakan takbebas linear pada interval $a \leq t \leq b$, jika ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga persamaan

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = \mathbf{0}, \tag{2.2.11}$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Persamaan (2.2.11) ekuivalen dengan sistem n persamaan aljabar linear homogen simultan

$$\begin{aligned} c_1\phi_{11}(t) + c_2\phi_{12}(t) + \ldots + c_n\phi_{1n}(t) &= 0, \\ c_1\phi_{21}(t) + c_2\phi_{22}(t) + \ldots + c_n\phi_{2n}(t) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1\phi_{n1}(t) + c_2\phi_{n2}(t) + \ldots + c_n\phi_{nn}(t) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

dalam variabel-variabel $c_1, c_2, \ldots, c_n$; untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Sistem (2.2.12) mempunyai penyelesaian yang taktrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisien sistem (2.2.12) sama dengan nol. Syarat ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) = 0.$$

Tetapi, Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) \neq 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$, maka $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang tidak takbebas linear pada interval $a \leq t \leq b$. Jadi, jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) \neq 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$, maka terbukti bahwa $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$. □

Contoh 2.2.2 :

Lanjutan contoh 2.2.1. Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.4) yang bebas linear pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Definisi berikut menyatakan bahwa himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$ disebut himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$.

Definisi 2.2.5 :

Himpunan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 2.2.3 :

Lanjutan contoh 2.2.2. Himpunan $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$, jika $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.4) yang bebas linear pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Teorema berikut membuktikan bahwa setiap sistem linear homogen (2.2.2) mempunyai paling sedikit satu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$.

Teorema 2.2.6 :

Jika fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dan memenuhi syarat-syarat awal

$$\phi_1(t_0) = \mathbf{u}_1,\ \phi_2(t_0) = \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \phi_n(t_0) = \mathbf{u}_n,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$ dan

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T,\ \mathbf{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$$

merupakan vektor-vektor satuan, maka $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Jika fungsi-fungsi vektor $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_n(t)$ memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$ dan memenuhi syarat-syarat awal

$$\phi_1(t_0) = \mathbf{u}_1,\ \phi_2(t_0) = \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \phi_n(t_0) = \mathbf{u}_n,$$

maka menurut teorema 2.1, penyelesaian-penyelesaian ini ada dan tunggal. Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = W(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \le t \le b$, maka Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$ dan menurut teorema 2.2.5, $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$. Jadi, menurut definisi 2.2.5, $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$. □

Teorema berikut membuktikan bahwa setiap penyelesaian sebarang dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari penyelesaian-penyelesaian fundamental sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$.

Teorema 2.2.7 :

Jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dan fungsi vektor $\phi(t)$ merupakan suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, maka ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian hingga

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

Andaikan bahwa

$$\phi(t_0) = \mathbf{u}_0,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$ dan $\mathbf{u}_0 = (u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{n0})^T$ merupakan suatu vektor dari bilangan-bilangan real $u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{n0}$.

Perhatikan sistem n persamaan aljabar linear simultan

$$\begin{aligned} c_1 \phi_{11}(t_0) + c_2 \phi_{12}(t_0) + \ldots + c_n \phi_{1n}(t_0) &= u_{10}, \\ c_1 \phi_{21}(t_0) + c_2 \phi_{22}(t_0) + \ldots + c_n \phi_{2n}(t_0) &= u_{20}, \\ &\vdots \\ c_1 \phi_{n1}(t_0) + c_2 \phi_{n2}(t_0) + \ldots + c_n \phi_{nn}(t_0) &= u_{n0}, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

dalam variabel-variabel $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Sistem (2.2.13) ekuivalen dengan persamaan

$$c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \ldots + c_n\phi_n(t_0) = \mathbf{u}_0 = \phi(t_0). \tag{2.2.14}$$

Menurut definisi 2.2.5, $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$, jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) yang bebas linear pada interval $a \le t \le b$. Maka menurut teorema 2.2.5, Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t_0) = \begin{vmatrix} \phi_{11}(t_0) & \phi_{12}(t_0) & \ldots & \phi_{1n}(t_0) \\ \phi_{21}(t_0) & \phi_{22}(t_0) & \ldots & \phi_{2n}(t_0) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t_0) & \phi_{n2}(t_0) & \ldots & \phi_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, sistem (2.2.13) mempunyai penyelesaian yang tunggal.

Perhatikan persamaan

$$\psi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t), \qquad (2.2.15)$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Menurut teorema 2.2.2, persamaan (2.2.15) merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$. Ambil suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$, sehingga

$$\psi(t_0) = c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \ldots + c_n\phi_n(t_0). \qquad (2.2.16)$$

Dari persamaan (2.2.14) dan (2.2.16), kita dapat

$$\psi(t_0) = \phi(t_0),$$

untuk suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, menurut teorema 2.1, kita dapat

$$\psi(t) = \phi(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Berarti,

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, persamaan

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, merupakan suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$. □

Contoh 2.2.4 :

Lanjutan contoh 2.2.3. Jika $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$ dan $\phi(t)$ merupakan suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$, maka ada konstanta-konstanta sebarang c_1 dan c_2 sedemikian hingga

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t},$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$. □

Definisi berikut menyatakan bahwa penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ merupakan kombinasi linear dari penyelesaian-penyelesaian fundamental sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$.

Definisi 2.2.6 :

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Contoh 2.2.5 :

Lanjutan contoh 2.2.4. Suatu penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Definisi berikut menyatakan bahwa matriks bujur sangkar yang kolom-kolom individualnya terdiri atas penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$ disebut matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$.

Definisi 2.2.7 :

Matriks bujur sangkar berordo n

$$\Phi(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \ldots \quad \phi_n(t)] = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 2.2.6 :

Lanjutan contoh 2.2.5. Matriks bujur sangkar berordo 2

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$, jika $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Teorema 2.2.8 :

Jika $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$ dan fungsi vektor $\phi(t)$ merupakan suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$, maka ada vektor konstan sebarang $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ sedemikian hingga

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Andaikan bahwa $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$, maka kolom-kolom individualnya

$$\phi_k(t),$$

dimana $k = 1, 2, \ldots, n$; menyusun suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \le t \le b$. Jadi, menurut teorema 2.2.7, ada konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian hingga

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t), \qquad (2.2.17)$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Persamaan (2.2.17) ekuivalen dengan sistem

$$\phi_1(t) = c_1\phi_{11}(t) + c_2\phi_{12}(t) + \ldots + c_n\phi_{1n}(t),$$

$$\phi_2(t) = c_1\phi_{21}(t) + c_2\phi_{22}(t) + \ldots + c_n\phi_{2n}(t),$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(t) = c_1\phi_{n1}(t) + c_2\phi_{n2}(t) + \ldots + c_n\phi_{nn}(t).$$

Perhatikan

$$\begin{pmatrix} c_1\phi_{11}(t) + c_2\phi_{12}(t) + \ldots + c_n\phi_{1n}(t) \\ c_1\phi_{21}(t) + c_2\phi_{22}(t) + \ldots + c_n\phi_{2n}(t) \\ \vdots \\ c_1\phi_{n1}(t) + c_2\phi_{n2}(t) + \ldots + c_n\phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix} (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

atau dalam notasi matriks

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]$$

$$= [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \ldots \quad \phi_n(t)](c_1, c_2, \ldots, c_n)^T = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} = \phi(t),$$

dimana $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ merupakan suatu vektor konstan sebarang. □

Teorema ini membuktikan bahwa penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\phi(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c},$$

dimana $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ merupakan suatu vektor konstan sebarang.

Contoh 2.2.7 :

Lanjutan contoh 2.2.6. Suatu penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} (c_1, c_2)^T,$$

dimana matriks bujur sangkar berordo 2

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$ dan $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ merupakan suatu vektor konstan sebarang. □

Teorema berikut membuktikan bahwa penyelesaian dari masalah nilai awal pada interval $a \leq t \leq b$ dapat dinyatakan dengan matriks fundamental.

Teorema 2.2.9 :

Jika $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, maka masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear homogen (2.2.2) dan syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \leq t \leq b$ dan $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n})^T$ merupakan suatu vektor dari bilangan-bilangan real $\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n}$; mempunyai penyelesaian tunggal

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi_0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

Menurut teorema 2.2.8, ada vektor konstan sebarang $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ sedemikian hingga

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c},$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Ambil suatu titik t_0 dalam interval $a \leq t \leq b$, sehingga

$$\phi(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{c}.$$

Dengan menggunakan syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0,$$

kita dapat

$$\phi_0 = \Phi(t_0)\mathbf{c}.$$

Determinan

$$|\Phi(t)|$$

adalah Wronskian dari penyelesaian-penyelesaian fundamental sistem linear homogen (2.2.2) yang menyusun kolom-kolom individual dari matriks fundamental. Jadi, menurut teorema 2.2.5, kita dapat

$$|\Phi(t_0)| \neq 0,$$

sehingga matriks fundamental $\Phi(t_0)$ taksingular dan inversnya $\Phi^{-1}(t_0)$ ada. Jadi, kita dapat

$$\Phi^{-1}(t_0)\phi_0 = \Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{Ic} = \mathbf{c}.$$

Dengan menggunakan nilai **c** ini, kita dapat

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi_0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. □

Contoh 2.2.8 :

Lanjutan contoh 2.2.7. Jika

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (2.2.4) pada interval $-\infty < t < +\infty$. Determinan

$$|\Phi(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

untuk suatu titik $t_0 = 0$ dalam interval $-\infty < t < +\infty$, sehingga matriks fundamental $\Phi(0)$ taksingular dan inversnya

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} {}^1/7 & -{}^2/7 \\ {}^3/7 & {}^1/7 \end{pmatrix}$$

ada, maka masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear homogen (2.2.4) dan syarat awal

$$\phi(0) = (1, -1)^T,$$

dimana $t_0 = 0$ merupakan suatu titik dalam interval $-\infty < t < +\infty$ dan $\phi_0 = (1, -1)^T$, mempunyai penyelesaian tunggal

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\phi_0$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1/7 & -{}^2/7 \\ {}^3/7 & {}^1/7 \end{pmatrix} (1, -1)^T$$

$$= {}^1/7(3e^{-2t} + 4e^{5t}, -9e^{-2t} + 2e^{5t})^T,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$. □

Misalkan kolom-kolom individual dari matriks fundamental $\Phi(t)$ merupakan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, maka teorema berikut membuktikan bahwa $\Phi(t)$ memenuhi persamaan diferensial matriks

$$\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t), \tag{2.2.18}$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

Teorema 2.2.10 :

Fungsi-fungsi vektor

$$\phi_k(t),$$

dimana $k = 1, 2, \ldots, n$; memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$ jika dan hanya jika matriks fundamental

$$\Phi(t)$$

memenuhi persamaan diferensial matriks

$$\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t), \tag{2.2.18}$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Andaikan bahwa fungsi-fungsi vektor

$$\phi_k(t)$$

memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$, kita dapat

$$\phi'_k(t) = \mathbf{A}(t)\phi_k(t),$$

dimana k = 1, 2, …, n; untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Berarti,

$$[\phi'_{1k}(t), \phi'_{2k}(t), \ldots, \phi'_{nk}(t)]^T$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} [\phi_{1k}(t), \phi_{2k}(t), \ldots, \phi_{nk}(t)]^T$$

dan

$$\phi'_{jk}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(t)\phi_{ik}(t),$$

dimana j; k = 1, 2, …, n; untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$. Perhatikan derivatif $\phi'_{jk}(t)$ adalah elemen dalam baris ke-j dan kolom ke-k dari derivatif $\Phi'(t)$. Dengan kata lain, elemen dalam baris ke-j dan kolom ke-k dari hasilkali

$$\mathbf{A}(t)\Phi(t)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

adalah

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(t)\phi_{ik}(t),$$

dimana j; k = 1, 2, …, n; untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, kita dapat

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$.

($\Leftarrow$)

Andaikan bahwa matriks fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t)$$

memenuhi persamaan diferensial matriks

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$, maka dengan mempersamakan kolom-kolom yang bersesuaian dari $\mathbf{\Phi}'(t)$ dan $\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$, kita dapat

$$\phi'_k(t) = \mathbf{A}(t)\phi_k(t),$$

dimana k = 1, 2, …, n; untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, fungsi-fungsi vektor

$$\phi_k(t),$$

dimana k = 1, 2, …, n; memenuhi sistem linear homogen (2.2.2) pada interval $a \leq t \leq b$. $\square$

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Linear TakHomogen Orde Pertama

Kita selanjutnya akan membahas sistem n persamaan diferensial linear takhomogen orde pertama simultan dan penyelesaiannya.

Definisi 2.3.1 :

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dikatakan takhomogen, jika paling sedikit satu fungsi $F_i(t)$ dalam sistem linear (2.1.1) tidak sama dengan nol, yang berarti

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Sistem linear takhomogen (2.3.1) dalam notasi matriks, yaitu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t). \tag{2.3.2}$$

2.3.1 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear TakHomogen Orde Pertama

Bagaimana menyelesaikan sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$? Sebelum membahas metode-metodenya, marilah terlebih dahulu kita mendalami masalah apakah yang diperlukan untuk beralih dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{2.3.3}$$

ke sistem linear takhomogen (2.3.2). Kunci yang menghubungkan sistem linear takhomogen (2.3.2) ke sistem linear homogen (2.3.3) dan yang memberikan kita sebuah rencana untuk menyelesaikan sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ akan dibuktikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.3 :

Jika $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (2.3.3) pada interval $a \leq t \leq b$, fungsi vektor $\phi_p(t)$ merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, maka

a. persamaan

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t) \tag{2.3.4}$$

merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ untuk setiap pilihan dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

b. suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah berbentuk (2.3.4) untuk pilihan yang sesuai dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Bukti :

Pertama, kita buktikan bahwa setiap persamaan yang berbentuk (2.3.4) merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \le t \le b$ untuk setiap pilihan dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Jika derivatif dari persamaan (2.3.4) adalah

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t)]'$$

$$= [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]' + \phi'_p(t),$$

fungsi vektor $\phi_p(t)$ memenuhi sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \le t \le b$, kita dapat

$$\phi'_p(t) = \mathbf{A}(t)\phi_p(t) + \mathbf{F}(t)$$

dan menurut teorema 2.2.2, kombinasi linear

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)$$

memenuhi sistem linear homogen (2.3.3) pada interval $a \le t \le b$, kita dapat

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]'$$

$$= \mathbf{A}(t)[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)].$$

Jadi,

$$[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t)]'$$

$$= [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)]' + \phi'_p(t)$$

$$= \mathbf{A}(t)[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)] + \mathbf{A}(t)\phi_p(t) + \mathbf{F}(t)$$

$$= \mathbf{A}(t)[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t)] + \mathbf{F}(t).$$

Berarti,

$$\psi'(t) = \mathbf{A}(t)\psi(t) + \mathbf{F}(t),$$

dimana

$$\psi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t),$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Dengan demikian terbukti bahwa persamaan

$$\psi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t)$$

merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ untuk setiap pilihan dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Kedua, kita buktikan bahwa setiap penyelesaian sebarang dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah berbentuk (2.3.4) untuk pilihan yang sesuai dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Andaikan bahwa fungsi vektor $\phi(t)$ merupakan suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$, kita dapat

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t) + \mathbf{F}(t),$$

fungsi vektor $\phi_p(t)$ memenuhi sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$, kita dapat

$$\phi'_p(t) = \mathbf{A}(t)\phi_p(t) + \mathbf{F}(t)$$

dan derivatif dari $\phi(t) - \phi_p(t)$ adalah

$$[\phi(t) - \phi_p(t)]' = \phi'(t) - \phi'_p(t).$$

Jadi,

$$[\phi(t) - \phi_p(t)]' = \phi'(t) - \phi'_p(t) = [\mathbf{A}(t)\phi(t) + \mathbf{F}(t)] - [\mathbf{A}(t)\phi_p(t) + \mathbf{F}(t)]$$

yang mereduksi menjadi

$$[\phi(t) - \phi_p(t)]' = \mathbf{A}(t)[\phi(t) - \phi_p(t)].$$

Jadi, $\phi(t) - \phi_p(t)$ memenuhi sistem linear homogen (2.3.3) pada interval $a \leq t \leq b$. Menurut teorema 2.2.7, ada pilihan yang sesuai dari konstanta-konstanta sebarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian hingga

$$\phi(t) - \phi_p(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)$$

atau

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t).$$

Dengan demikian terbukti bahwa suatu penyelesaian sebarang dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah berbentuk

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t),$$

untuk pilihan yang sesuai dari $c_1, c_2, \ldots, c_n$. □

Keadaan ini memberikan konsep berikut.

Definisi 2.3.2 :

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t),$$

dimana fungsi komplementer atau penyelesaian komplementer $\phi_c(t)$ merupakan penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.3.3) pada interval $a \leq t \leq b$ yang mengandung konstanta-konstanta sebarang dan fungsi vektor $\phi_p(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (2.3.2) pada interval $a \leq t \leq b$ yang tidak mengandung konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 2.3 :

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (-15, -4)^T te^{-2t} \qquad (2.3.5)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}$$
$$- {}^1/_7(2, 1)^T e^{5t} + {}^1/_{14}[(4 + 28t - 7t^2), (2 + 14t + 21t^2)]^T e^{-2t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang, menurut contoh 2.2.5, fungsi komplementer atau penyelesaian komplementer

$$\phi_c(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}$$

merupakan penyelesaian umum dari sistem linear homogen (2.3.5) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$ dan fungsi vektor

$$\phi_p(t) = -{}^1/_7(2, 1)^T e^{5t} + {}^1/_{14}[(4 + 28t - 7t^2), (2 + 14t + 21t^2)]^T e^{-2t}$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (2.3.5) pada interval $-\infty < t < +\infty$. $\square$

BAB III

METODE-METODE PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Pada bab ini kita akan membahas metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

3.1 Metode Eliminasi

Metode eliminasi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan yang berbentuk

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + F_1(t), \qquad (3.1.1a)$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + F_2(t). \qquad (3.1.1b)$$

Cara untuk mengeliminasi salah satu fungsi yang takdiketahui dan memperoleh persamaan diferensial linear dari sisa fungsi yang takdiketahui adalah sebagai berikut. Selesaikan persamaan (3.1.1a) untuk x_2 dan subsitusikan nilai x_2 ke dalam persamaan (3.1.1b) atau selesaikan persamaan (3.1.1b) untuk x_1 dan substitusikan nilai x_1 ke dalam persamaan (3.1.1a). Kita menjelaskan rinciannya dengan sebuah contoh yang khas.

Contoh 3.1.1 :

Cari penyelesaian dari masalah nilai awal

$$x'_1 = 4x_1 + 2x_2, \tag{3.1.2a}$$

$$x'_2 = 3x_1 - x_2 + e^{-2t}, \tag{3.1.2b}$$

$$x_1(0) = 0 \text{ dan } x_2(0) = 0$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Langkah pertama. Menyelesaikan sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Dengan menggunakan persamaan (3.1.2a) kita menyatakan x_2 dan derivatifnya dalam bentuk x_1 dan derivatifnya. Hasilnya kita substitusikan ke dalam persamaan (3.1.2b) yang kemudian hanya terdiri atas x_1 dan derivatifnya. Kita selesaikan persamaan ini. Akhirnya kita kembali ke persamaan (3.1.2a) dan menggunakannya untuk menyatakan x_2 dalam bentuk penyelesaian yang baru diperoleh tersebut. Rinciannya adalah sebagai berikut.

Dari persamaan (3.1.2a) kita dapat

$$x_2 = \tfrac{1}{2}x'_1 - 2x_1. \tag{3.1.3}$$

Dengan diferensiasi

$$x'_2 = \tfrac{1}{2}x''_1 - 2x'_1.$$

Dengan mensubstitusi hasil ini dan persamaan (3.1.3) ke dalam persamaan (3.1.2b) kita dapat

$$x''_1 = 4x'_1 + 2(3x_1 - \tfrac{1}{2}x'_1 + 2x_1 + e^{-2t}).$$

Penyederhanaan menghasilkan persamaan diferensial linear takhomogen orde kedua dengan koefisien konstan

$$x''_1 - 3x'_1 - 10x_1 = 2e^{-2t}.$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$ yang mempunyai akar-akar yang real dan berbeda, yaitu -2 dan 5. Metode koefisien taktentu menghasilkan penyelesaian khusus, yaitu $-{}^2/_7te^{-2t}$. Penyelesaian umumnya adalah

$$x_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{5t} - {}^2/_7te^{-2t}. \qquad (3.1.4a)$$

Derivatifnya diberikan oleh

$$x'_1 = -2c_1e^{-2t} + 5c_2e^{5t} + {}^4/_7te^{-2t} - {}^2/_7e^{-2t}.$$

Sekarang kita menghitung x_2 dari hasil ini dan persamaan (3.1.3) kita dapat

$$x_2 = -3c_1e^{-2t} + \tfrac{1}{2}c_2e^{5t} + {}^6/_7te^{-2t} - {}^1/_7e^{-2t}. \qquad (3.1.4b)$$

Langkah kedua. Menentukan penyelesaian khusus dari syarat-syarat awal. Syarat-syarat awalnya adalah

$$x_1(0) = 0 \text{ dan } x_2(0) = 0,$$

sehingga menurut persamaan (3.1.4)

$$x_1(0) = c_1 + c_2 = 0,\ x_2(0) = -3c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 - {}^1/_7 = 0.$$

Dengan menyelesaikan sistem dua persamaan aljabar linear simultan ini, kita dapat

$$c_1 = -{}^2/49 \text{ dan } c_2 = {}^2/49.$$

Dengan demikian penyelesaian dari masalah nilai awal ini pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah

$$x_1 = -{}^2/49e^{-2t} + {}^2/49e^{5t} - {}^2/7te^{-2t},$$

$$x_2 = {}^6/49e^{-2t} + {}^1/49e^{5t} + {}^6/7te^{-2t} - {}^1/7e^{-2t}. \qquad \square$$

Gagasan pokok metode ini adalah pendiferensialan dari persamaan diferensial linear orde kedua dengan koefisien konstan yang hanya terdiri atas satu fungsi yang takdiketahui dan derivatifnya dan penyelesaian persamaan ini. Melalui penyelesaian sistem linear (3.1.1) pada interval $a \leq t \leq b$ dari sumbu-t, kita artikan pasangan fungsi x_1, x_2 dari t yang didefinisikan dan dapat didiferensiasikan pada interval $a \leq t \leq b$ dan apabila disubstitusikan ke dalam sistem linear (3.1.1) akan menyederhanakan atau mereduksi kedua persamaan (3.1.1) ini menjadi persamaan identitas. Perhatikan bahwa di dalam metode yang disajikan kita harus menganggap eksistensi derivatif kedua dari x_1 atau x_2.

Jika $a_{12} = a_{21} = 0$, maka sistem persamaan diferensial linear tersebut terpecah menjadi dua persamaan diferensial linear yang terpisah dan dapat diselesaikan. Jika salah satu dari kedua konstanta ini, katakanlah a_{12}, tidak sama dengan nol, kita mendapatkan hasil sebagai berikut. Dari persamaan (3.1.1a) mula-mula kita dapat

$$a_{12}\,x_2 = x'_1 - a_{11}\,x_1 - F_1(t). \tag{3.1.5}$$

Sekarang kita mendiferensiasi persamaan (3.1.1a). Pada persamaan yang dihasilkan, kita subsitusikan x'_2 yang diberikan oleh persamaan (3.1.1b) dan kemudian $a_{12}\,x_2$ yang diberikan oleh persamaan (3.1.5). Ini menghasilkan

$$x''_1 = a_{11}\,x'_1 + a_{12}\,x'_2 + F'_1(t) = a_{11}\,x'_1 + a_{12}(a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + F_2(t)) + F'_1(t)$$

$$= a_{11}\,x'_1 + a_{12}\,a_{21}\,x_1 + a_{22}(x'_1 - a_{11}\,x_1 - F_1(t)) + a_{12}\,F_2(t)) + F'_1(t).$$

Dengan mengumpulkan suku-sukunya, kita dapat

$$x''_1 - (a_{11} + a_{22})x'_1 + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})x_1 = H(t),$$

dimana

$$H(t) = a_{12}\,F_2(t) - a_{22}\,F_1(t) + F'_1(t).$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini kita memperoleh x_1. Kemudian x_2 diperoleh dari persamaan (3.1.5).

Contoh 3.1.2 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen

$$x'_1 = 4x_1 + 2x_2 - 8t, \tag{3.1.6a}$$

$$x'_2 = 3x_1 - x_2 + 2t + 3, \tag{3.1.6b}$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Dari persamaan (3.1.6a)

$$x_2 = \tfrac{1}{2}x'_1 - 2x_1 + 4t. \tag{3.1.7}$$

Dengan mendiferensiasi persamaan (3.1.6a) dan mensubstitusi x'_2 dari persamaan (3.1.6b) dan x_2 dari persamaan (3.1.7) kita dapat

$$x''_1 = 4x'_1 + 2(3x_1 - \tfrac{1}{2}x'_1 + 2x_1 - 4t + 2t + 3) - 8.$$

Dengan mengumpulkan suku-suku kita mendapatkan persamaan diferensial linear takhomogen orde kedua dengan koefisien konstan

$$x''_1 - 3x'_1 - 10x_1 = -4t - 2.$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$ yang mempunyai akar-akar yang real dan berbeda, yaitu -2 dan 5. Metode koefisien taktentu menghasilkan penyelesaian khusus, yaitu ${}^2/_5t + {}^2/_{25}$. Penyelesaian umumnya adalah

$$x_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{5t} + {}^2/_5t + {}^2/_{25}.$$

Menurut persamaan (3.1.7)

$$x_2 = -3c_1e^{-2t} + \tfrac{1}{2}c_2e^{5t} + {}^{16}/_5t + {}^1/_{25}.$$

Dengan demikian penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.1.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah

$$x_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{5t} + {}^2/_5t + {}^2/_{25}.$$

$$x_2 = -3c_1e^{-2t} + \tfrac{1}{2}c_2e^{5t} + {}^{16}/_5t + {}^1/_{25}. \qquad \square$$

Suatu penyelesaian umum dari sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan melibatkan n konstanta sebarang. Akan tetapi, kadang-kadang metode ini menghasilkan konstanta asing. Konstanta asing ini dapat dieliminasikan dengan melakukan substitusi penyelesaian-penyelesaian ke dalam sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan dan menyamakan koefisien yang serupa. Kita menjelaskan ini dengan sebuah contoh berikut.

Contoh 3.1.3 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$x'_1 = -2x_1 + x_2, \tag{3.1.8a}$$

$$x'_2 = x_1 - 2x_2, \tag{3.1.8b}$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Dari persamaan (3.1.8a) kita dapat

$$x_2 = x'_1 + 2x_1. \tag{3.1.9}$$

Kita mendiferensiasikan persamaan (3.1.8a). Di dalam persamaan yang dihasilkan, pertama kita mensubstitusikan x'_2 seperti yang diberikan oleh persamaan (3.1.8b) dan x_2 seperti yang diberikan oleh persamaan (3.1.9). Substitusi ini menghasilkan

$$x''_1 = -2x'_1 + x'_2 = -2x'_1 + x_1 - 2x_2 = -2x'_1 + x_1 - 2(x'_1 + 2x_1).$$

Dengan mengurutkan dan menyederhanakan suku-sukunya kita mendapatkan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien konstan

$$x''_1 + 4x'_1 + 3x_1 = 0.$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$ yang mempunyai akar-akar yang real dan berbeda, yaitu -1 dan -3. Penyelesaian umumnya adalah

$$x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}. \tag{3.1.10a}$$

Dengan mendiferensiasi

$$x'_1 = -c_1e^{-t} - 3c_2e^{-3t}.$$

Sehingga dari persamaan (3.1.9)

$$x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}. \tag{3.1.10b}$$

Dengan demikian penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.1.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah

$$x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}. \tag{3.1.10a}$$

$$x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}. \tag{3.1.10b}$$

Perhatian. Pemeriksaan dengan substitusi sangat penting, khususnya dalam metode ini, sebab kita dapat memperkenalkan konstanta asing dan substitusi dapat memperlihatkan bahwa kadang-kadang konstanta asing ini tidak seluruhnya sebarang. Untuk melihat hal ini, substitusi persamaan (3.1.10a) ke dalam persamaan (3.1.8b) menghasilkan

$$x'_2 + 2x_2 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}.$$

Persamaan ini dapat diselesaikan. Penyelesaian umumnya adalah

$$x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t} + ce^{-2t}.$$

Penyelesaian umum ini merupakan penyelesaian dari persamaan (3.1.8b) untuk setiap c, tetapi pensubstitusian ke dalam persamaan (3.1.8a) memperlihatkan bahwa haruslah c = 0. Dengan demikian pemeriksaan sangat penting. □

Akan tetapi metode ini kurang praktis dan terlampau sulit apabila digunakan untuk menyelesaikan sistem tiga atau lebih persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

3.2 Metode Nilai Eigen

Metode nilai eigen dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem n persamaan diferensial linear homogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam notasi matriks

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{3.2.1}$$

dimana **A** suatu matriks bujur sangkar konstan real berordo n. Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi-fungsi vektor yang berbentuk

$$\phi(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t}, \tag{3.2.2}$$

dimana α merupakan suatu skalar real dan **v** merupakan suatu vektor konstan real taknol. Dengan mensubstitusikan (3.2.2) dan derivatifnya

$$\phi'(t) = \alpha\mathbf{v}e^{\alpha t}$$

ke dalam sistem linear homogen (3.2.1) menghasilkan

$$\alpha \mathbf{v} e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{v} e^{\alpha t}.$$

Kemudian dengan menghapus faktor skalar taknol $e^{\alpha t}$ dan kita mengenalnya sebagai masalah nilai eigen

$$\alpha \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}. \tag{3.2.3}$$

Kita memerlukan sebuah cara yang sistematis untuk menentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari suatu matriks bujur sangkar konstan real. Pandang suatu matriks bujur sangkar konstan real $\mathbf{A}$ berordo n. Misalkan α merupakan suatu nilai eigen dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan α, sehingga berlaku persamaan (3.2.3) yang dapat pula dituliskan kembali menjadi

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{3.2.4}$$

dimana $\mathbf{I}$ suatu matriks identitas berordo n. Hubungan (3.2.4) ini berupa sistem n persamaan aljabar linear homogen simultan dalam variabel-variabel $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yang merupakan komponen-komponen bagi vektor eigen $\mathbf{v}$ yang dicari. Sistem demikian mempunyai penyelesaian yang taktrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisien sistem tersebut sama dengan nol. Syarat ini dapat dinyatakan sebagai

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = 0. \tag{3.2.5}$$

Akar-akar dari persamaan (3.2.5), yang disebut persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$, merupakan nilai-nilai eigen yang dicari. Jadi, jika diberikan suatu matriks bujur sangkar konstan real $\mathbf{A}$ berordo n, maka kita dapat menentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari **A** dengan menyelesaikan mula-mula persamaan (3.2.5), lalu kemudian sistem (3.2.4). Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi-fungsi vektor yang berbentuk

$$\phi(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t} \qquad (3.2.2)$$

asalkan α merupakan suatu nilai eigen dari matriks koefisien **A** dan **v** merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan α.

Kasus Pertama. Nilai-Nilai Eigen Real dan Berbeda

Misalkan **A** mempunyai nilai-nilai eigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda. Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; maka teorema berikut membuktikan bahwa $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = \mathbf{v}_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Teorema 3.1 :

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = \mathbf{v}_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

Pertama, kita buktikan bahwa penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t},\ \phi_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}.$$

Misalkan $\mathbf{v}_i$ merupakan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen α_i, maka

$$[\phi_i(t)]' = [\mathbf{v}_i e^{\alpha_i t}]' = \alpha_i \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i e^{\alpha_i t} = \mathbf{A}\phi_i(t),$$

dimana $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan demikian terbukti bahwa penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t},$$

dimana $i = 1, 2, \ldots, n$.

Selanjutnya, kita buktikan bahwa $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$.

Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t},\ \phi_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}.$$

Menurut definisi 2.2.4, Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) = W(\mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t})$$

$$= \begin{vmatrix} v_{11}e^{\alpha_1 t} & v_{12}e^{\alpha_2 t} & \cdots & v_{1n}e^{\alpha_n t} \\ v_{21}e^{\alpha_1 t} & v_{22}e^{\alpha_2 t} & \cdots & v_{2n}e^{\alpha_n t} \\ & & \vdots & \\ v_{n1}e^{\alpha_1 t} & v_{n2}e^{\alpha_2 t} & \cdots & v_{nn}e^{\alpha_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)t} \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ & & \vdots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pertama, kita ketahui bahwa fungsi eksponensial

$$e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Selanjutnya, jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear, maka determinan

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ & & \vdots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jadi, Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)(t) \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \leq t \leq b$. Maka menurut teorema 2.2.5, $\{\phi_1(t) = v_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = v_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = v_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bebas linear pada interval $a \leq t \leq b$. Dengan demikian menurut definisi 2.2.5, terbukti bahwa $\{\phi_1(t) = v_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = v_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = v_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.□

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1v_1e^{\alpha_1 t} + c_2v_2e^{\alpha_2 t} + \ldots + c_nv_ne^{\alpha_n t},$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = v_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = v_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, \phi_n(t) = v_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 3.2.1 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \qquad (3.2.6)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t},$$

dimana i = 1, 2.

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\alpha & 2 \\ 3 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 3\alpha - 10.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$ yang ekuivalen dengan $(\alpha + 2)(\alpha - 5) = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = -2$ atau $\alpha_2 = 5$. Jadi, **A** mempunyai dua nilai eigen yang real dan berbeda, yaitu -2 dan 5.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$3v_1 + v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$ adalah $\mathbf{v}_1 = (m, -3m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = m(1, -3)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -3)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -3)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 5$, maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} (v_1, v_2)^T = (0, 0)^T$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$-v_1 + 2v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_2 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 5$ adalah $\mathbf{v}_2 = (2m, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = m(2, 1)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(2, 1)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(2, 1)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 5$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t} \text{ dan } \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}.$$

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Kasus Kedua. Nilai-Nilai Eigen Kompleks

Misalkan **A** mempunyai sepasang nilai eigen sekawan kompleks $\alpha_1 = a + ib$ dan $\alpha_2 = a - ib$, dimana a dan b merupakan bilangan-bilangan real dan $b \neq 0$ dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda. Jika $\mathbf{v}_1 = \lambda + i\mu$ dan $\mathbf{v}_2 = \lambda - i\mu$, dimana komponen-komponen dari vektor λ dan μ merupakan bilangan-bilangan real dan $\mu \neq 0$, merupakan pasangan vektor eigen sekawan kompleks yang berturut-turut bersesuaian dengan $\alpha_1 = a + ib$ dan $\alpha_2 = a - ib$ dan $\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ merupakan vektor-vektor eigen yang berturut-turut bersesuaian dengan $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$; maka teorema berikut membuktikan bahwa $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$.

Teorema 3.2 :

Jika $\mathbf{v}_1 = \lambda + i\mu$ dan $\mathbf{v}_2 = \lambda - i\mu$ merupakan pasangan vektor eigen sekawan kompleks yang berturut-turut bersesuaian dengan sepasang nilai eigen sekawan kompleks $\alpha_1 = a + ib$ dan $\alpha_2 = a - ib$ dan $\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ merupakan vektor-vektor eigen yang berturut-turut bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Pertama, kita buktikan bahwa penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt),$$

$$\phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}.$$

Misalkan $\mathbf{v}_1 = \lambda + i\mu$ dan $\mathbf{v}_2 = \lambda - i\mu$ merupakan pasangan vektor eigen sekawan kompleks yang berturut-turut bersesuaian dengan sepasang nilai eigen sekawan kompleks $\alpha_1 = a + ib$ dan $\alpha_2 = a - ib$, maka penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai kompleks pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t} = (\lambda + i\mu)e^{(a + ib)t} = (\lambda + i\mu)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \text{ dan}$$

$$\phi_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\alpha_2 t} = (\lambda - i\mu)e^{(a - ib)t} = (\lambda - i\mu)e^{at}(\cos bt - i \sin bt).$$

Dengan membagi $\phi_1(t)$ atau $\phi_2(t)$ menjadi bagian yang real dan imajiner, kita dapat

$$\phi_1(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt) + ie^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt) \text{ atau}$$

$$\phi_2(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt) - ie^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt).$$

Jika $\phi_1(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{w}(t)$ dan $\phi_2(t) = \mathbf{u}(t) - i\mathbf{w}(t)$, maka

$$\mathbf{u}(t) = \mathrm{Re}[\mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}] = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt) \text{ dan}$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathrm{Im}[\mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}] = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt).$$

Dengan demikian terbukti bahwa penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \ \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt),$$

$$\phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}.$$

Selanjutnya, kita buktikan bahwa $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$.

Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt),$$

$$\phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}.$$

Menurut definisi 2.2.4, Wronskian

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \phi_3, \ldots, \phi_n)(t)$$

$$= W(e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt),$$

$$\mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}) \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$, maka menurut teorema 2.2.5, $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bebas linear yang bernilai real pada interval $a \le t \le b$. Dengan demikian, menurut definisi 2.2.5, terbukti bahwa $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-

penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \leq t \leq b$. □

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\begin{aligned}\phi_c(t) &= c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{w}(t) + c_3\phi_3(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)\\ &= c_1e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt) + c_2e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt)\\ &\quad + c_3\mathbf{v}_3e^{\alpha_3 t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n e^{\alpha_n t},\end{aligned}$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\mathbf{u}(t) = e^{at}(\lambda \cos bt - \mu \sin bt), \mathbf{w}(t) = e^{at}(\lambda \sin bt + \mu \cos bt), \phi_3(t) = \mathbf{v}_3e^{\alpha_3 t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bernilai real pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 3.2.2 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad (3.2.7)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.7) yang bernilai kompleks pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t},$$

dimana i = 1, 2.

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\alpha & -3 \\ 3 & 4-\alpha \end{vmatrix} = (4-\alpha)^2 + 9.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $(4 - \alpha)^2 + 9 = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = 4 - 3i$ atau $\alpha_2 = 4 + 3i$. Jadi, **A** mempunyai sepasang nilai eigen sekawan kompleks, yaitu $4 - 3i$ dan $4 + 3i$.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 4 - 3i$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 3i & -3 & 0 \\ 3 & 3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$iv_1 - v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 4 - 3i$ adalah $\mathbf{v}_1 = (m, im)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = m(1, i)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, i)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, i)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 4 - 3i$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 4 + 3i$, maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (0, 0)^T$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 & 0 \\ 3 & -3i & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$iv_1 + v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 4 + 3i$ adalah $\mathbf{v}_2 = (m, -im)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = m(1, -i)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -i)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -i)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 4 + 3i$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.7) yang bernilai kompleks pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = (1, i)^T e^{(4-3i)t} \text{ dan } \phi_2(t) = (1, -i)^T e^{(4+3i)t}.$$

Dengan membagi $\phi_1(t)$ atau $\phi_2(t)$ menjadi bagian real dan imajiner, kita dapat

$$\phi_1(t) = (1, i)^T e^{(4-3i)t} = (1, i)^T e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t)$$

$= e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t, \sin 3t + i \cos 3t)^T$ atau

$\phi_2(t) = (1, -i)^T e^{(4+3i)t} = (1, -i)^T e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t)$

$= e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t, \sin 3t - i \cos 3t)^T$.

Jika $\phi_1(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{w}(t)$ dan $\phi_2(t) = \mathbf{u}(t) - i\mathbf{w}(t)$, maka penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.8) yang bernilai real pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$\mathbf{u}(t) = e^{4t}(\cos 3t, \sin 3t)^T$ dan $\mathbf{w}(t) = e^{4t}(-\sin 3t, \cos 3t)^T$.

Jika Wronskian

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{w})(t) = e^{4t} \begin{vmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.8) yang bernilai real pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$\phi_c(t) = e^{4t}(c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t, c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t)^T$,

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\mathbf{u}(t) = e^{4t}(\cos 3t, \sin 3t)^T, \mathbf{w}(t) = e^{4t}(-\sin 3t, \cos 3t)^T\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.8) yang bernilai real pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Kasus Ketiga. Nilai-Nilai Eigen Berulang

Misalkan **A** mempunyai satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m, dimana $1 < m \leq n$ dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) α_{m+1}, $\alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda. Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, dimana $1 \leq p \leq m$, merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan $\alpha_1, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$, maka perhatikan dua subkasus berikut.

a. Untuk $p = m$.

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\alpha_1 t} + \ldots + c_m\mathbf{v}_me^{\alpha_1 t}$$
$$+ c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t} + c_{m+2}\mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_ne^{\alpha_n t},$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = \mathbf{v}_2e^{\alpha_1 t}, \ldots, \phi_m(t) = \mathbf{v}_me^{\alpha_1 t}, \phi_{m+1}(t) = \mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t}, \phi_{m+2}(t) = \mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 3.2.3 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (3.2.8)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t},$$

dimana $i = 1, 2, 3$.

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 9-\alpha & 4 & 0 \\ -6 & -1-\alpha & 0 \\ 6 & 4 & 3-\alpha \end{vmatrix} = (3-\alpha)(15 - 8\alpha + \alpha^2).$$

Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $(3 - \alpha)(15 - 8\alpha + \alpha^2) = 0$ yang ekuivalen dengan $(5 - \alpha)(3 - \alpha)^2 = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = 5$ atau $\alpha_2 =$

3. Jadi, **A** mempunyai satu nilai eigen yang real dan berbeda, yaitu 5 dan satu nilai eigen yang real dan berulang dua kali, yaitu 3.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 5$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

yang bersesuaian dengan sistem dua persamaan aljabar linear simultan

$$v_1 + v_2 = 0,\ v_1 - v_3 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 5$ adalah $\mathbf{v}_1 = (m, -m, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 =$

$m(1, -1, 1)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -1, 1)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -1, 1)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 5$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 3$, maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T,$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$3v_1 + 2v_2 = 0.$$

Karena persamaan ini tidak melibatkan v_3, maka v_3 sebarang. Jika dipilih $v_1 = 0$ dan $v_3 = p$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 3$ adalah $\mathbf{v}_2 = (0, 0, p)^T$, dimana p merupakan suatu konstanta real sebarang dan $p \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = p(0, 0, 1)^T$. Jika dipilih $v_1 = m$ dan $v_3 = 0$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 3$ adalah $\mathbf{v}_3 = (m, -{}^3/2m, 0)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_3$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_3 = m(1, -{}^3/2, 0)^T$. Karena himpunan vektor-vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(0, 0, 1)^T, (1, -{}^3/2, 0)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(0, 0, 1)^T, (1, -{}^3/2, 0)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = 3$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 2.

Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = (1, -1, 1)^T e^{5t},\ \phi_2(t) = (0, 0, 1)^T e^{3t},\ \phi_3(t) = c_3(1, -{}^3/2, 0)^T e^{3t}.$$

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & 0 & e^{3t} \\ -e^{5t} & 0 & -{}^3/2e^{3t} \\ e^{5t} & e^{3t} & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}e^{8t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -1, 1)^T e^{5t} + c_2(0, 0, 1)^T e^{3t} + c_3(1, -{}^3/2, 0)^T e^{3t},$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (1, -1, 1)^T e^{5t}, \phi_2(t) = (0, 0, 1)^T e^{3t}, \phi_3(t) = (1, -{}^3/2, 0)^T e^{3t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

b. Untuk $p < m$.

Jika ada p, dimana p kurang dari m vektor eigen yang bebas linear yang bersesuaian dengan satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m, maka ada p, dimana p kurang dari m penyelesaian dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bebas linear pada interval $a \le t \le b$ yang berbentuk $\mathbf{v}e^{\alpha t}$. Dengan demikian untuk membangun penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$, kita harus mencari penyelesaian-penyelesaian yang lain dari sistem linear homogen (3.2.1) yang bebas linear pada interval $a \le t \le b$ yang mempunyai bentuk yang berbeda yang melibatkan hasilkali polinomial dan fungsi eksponensial.

Untuk $p = 1$.

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m = 2 dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t} + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t} + c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t} + c_{m+2}\mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_ne^{\alpha_n t},$$

dimana $c_1, c_2, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, vektor eigen $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ dan $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}, \phi_2(t) = (\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t}, \phi_{m+1}(t) = \mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t}, \phi_{m+2}(t) = \mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t}, \ldots, \phi_n(t) = \mathbf{v}_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$.

Contoh 3.2.4 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad (3.2.9)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian pertama dari sistem linear homogen (3.2.14) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}.$$

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -3 \\ 3 & 7-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 16.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $\alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0$ yang ekuivalen dengan $(\alpha - 4)^2 = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = 4$. Jadi, **A** mempunyai satu nilai eigen yang real dan berulang dua kali, yaitu 4.

Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 4$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} (v_1, v_2)^T = (0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$v_1 + v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = p$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha = 4$ adalah $\mathbf{v}_1 = (p, -p)^T$, dimana p merupakan suatu konstanta real sebarang dan $p \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = p(1, -1)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -1)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -1)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha = 4$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian pertama dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_1(t) = (-3, 3)^T e^{4t}.$$

Misalkan penyelesaian kedua dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t},$$

dimana vektor eigen $\mathbf{v}_1 = (-3, 3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ dan vektor $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (-3, 3)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear simultan

$$v_1 + v_2 = 1.$$

Jika dipilih $v_2 = m$, maka vektor $\mathbf{v}_2 = (1 - m, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^T + m(-1, 1)^T$. Suku yang melibatkan m hanya menghasilkan kelipatan dari penyelesaian pertama, sehingga dapat dihilangkan. Dengan demikian penyelesaian kedua dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_2(t) = [(-3, 3)^T t + (1, 0)^T]e^{4t} = (-3t + 1, 3t)^T e^{4t}.$$

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} -3e^{4t} & (-3t+1)e^{4t} \\ 3e^{4t} & 3te^{4t} \end{vmatrix} = 3e^{8t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(-3, 3)^T e^{4t} + c_2(-3t + 1, 3t)^T e^{4t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (-3, 3)^T e^{4t}, \phi_2(t) = (-3t + 1, 3t)^T e^{4t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

Untuk p = 1.

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m = 3 dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t} + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t} + c_3(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3)e^{\alpha_1 t}$$
$$+ c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t} + c_{m+2}\mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_ne^{\alpha_n t},$$

dimana c_1, c_2, c_3, c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_n merupakan konstanta-konstanta sebarang, vektor eigen $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, vektor $\mathbf{v}_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ dan $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}$, $\phi_2(t) = (\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t}$, $\phi_3(t) = (\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3)e^{\alpha_1 t}$, $\phi_{m+1}(t) = \mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1}t}$, $\phi_{m+2}(t) = \mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2}t}$, ..., $\phi_n(t) = \mathbf{v}_ne^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 3.2.5 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (3.2.10)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian pertama dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_1(t) = \mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t}.$$

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 & 2 \\ -5 & -3-\alpha & -7 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 1.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $-\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$ yang ekuivalen dengan $-(\alpha + 1)^3 = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = -1$. Jadi, **A** mempunyai satu nilai eigen yang real dan berulang tiga kali, yaitu -1.

Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -1$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan sistem dua persamaan aljabar linear simultan

$v_2 + v_3 = 0$, $v_1 + v_3 = 0$.

Jika dipilih $v_1 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -1$ adalah $\mathbf{v}_1 = (m, m, -m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat di tulis sebagai $\mathbf{v}_1 = m(1, 1, -1)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, 1, -1)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, 1, -1)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -1$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian pertama dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$\phi_1(t) = (-2, -2, 2)^T e^{-t}$.

Misalkan penyelesaian kedua dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$\phi_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\alpha_1 t}$,

dimana vektor eigen $\mathbf{v}_1 = (-2, -2, 2)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ dan vektor $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3)^T$

merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3)^T = (-2, -2, 2)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan sistem dua persamaan aljabar linear simultan

$$v_1 + v_3 = 2,\ -v_2 - v_3 = 4.$$

Jika dipilih $v_3 = m$, maka vektor $\mathbf{v}_2 = (2 - m, -4 - m, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat di tulis sebagai $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0)^T + m(-1, -1, 1)^T$. Suku yang melibatkan m hanya menghasilkan kelipatan dari penyelesaian pertama, sehingga dapat dihilangkan. Dengan demikian penyelesaian kedua dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_2(t) = [(-2, -2, 2)^T t + (2, -4, 0)^T]e^{-t} = (-2t + 2, -2t - 4, 2t)^T e^{-t}.$$

Misalkan penyelesaian ketiga dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_3(t) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3)e^{\alpha_1 t},$$

dimana vektor eigen $\mathbf{v}_1 = (-2, -2, 2)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ dan vektor $\mathbf{v}_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3)^T = (2, -4, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan sistem dua persamaan aljabar linear simultan

$v_1 + v_3 = 0$, $-v_2 - v_3 = -2$.

Jika dipilih $v_3 = m$, maka vektor $\mathbf{v}_3 = (-m, 2 - m, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_3$ ini dapat di tulis sebagai $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)^T + m(-1, -1, 1)^T$. Suku yang melibatkan m hanya menghasilkan kelipatan dari penyelesaian pertama, sehingga dapat dihilangkan. Dengan demikian penyelesaian ketiga dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_3(t) = [\tfrac{1}{2}(-2, -2, 2)^T t^2 + (2, -4, 0)^T t + (0, 2, 0)^T]e^{-t}$$
$$= (-t^2 + 2t, -t^2 - 4t + 2, t^2)^T e^{-t}.$$

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = \begin{vmatrix} -2e^{-t} & (-2t+2)e^{-t} & (-t^2+2t)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t-4)e^{-t} & (-t^2-4t+2)e^{-t} \\ 2e^{-t} & 2te^{-t} & t^2e^{-t} \end{vmatrix} = 8e^{-t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(-2, -2, 2)^T e^{-t} + c_2(-2t + 2, -2t - 4, 2t)^T e^{-t}$$
$$+ c_3(-t^2 + 2t, -t^2 - 4t + 2, t^2)^T e^{-t},$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (-2, -2, 2)^T e^{-t}, \phi_2(t) = (-2t + 2, -2t - 4, 2t)^T e^{-t}, \phi_3(t) = (-t^2 + 2t, -t^2 - 4t + 2, t^2)^T e^{-t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$.

□

Untuk p = 2.

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor eigen yang bebas linear yang berturut-turut bersesuaian dengan satu nilai eigen α_1 yang real dan berulang kelipatan m = 3 dan nilai-nilai eigen yang lain (jika ada) $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ yang real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\alpha_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\alpha_1 t} + c_3(\mathbf{v}_3 t + \mathbf{v}_4)e^{\alpha_1 t}$$
$$+ c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1}e^{\alpha_{m+1} t} + c_{m+2}\mathbf{v}_{m+2}e^{\alpha_{m+2} t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_ne^{\alpha_n t},$$

dimana c_1, c_2, c_3, c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_n merupakan konstanta-konstanta sebarang, vektor eigen $\mathbf{v}_3 = m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2$, dimana m, n merupakan konstanta-konstanta real sebarang dan m, n $\neq 0$, merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{v}_4 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3$ dan $\{\phi_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\alpha_1 t}$, $\phi_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\alpha_1 t}$, $\phi_3(t) = (\mathbf{v}_3 t + \mathbf{v}_4)e^{\alpha_1 t}$, $\phi_{m+1}(t) = \mathbf{v}_{m+1} e^{\alpha_{m+1} t}$, $\phi_{m+2}(t) = \mathbf{v}_{m+2} e^{\alpha_{m+2} t}$, ..., $\phi_n(t) = v_n e^{\alpha_n t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Contoh 3.2.6 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (3.2.11)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Misalkan penyelesaian pertama dan kedua dari sistem linear homogen (3.2.11) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\alpha_i t},$$

dimana i = 1, 2.

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\alpha & 3 & 1 \\ -4 & -4-\alpha & -2 \\ 8 & 12 & 6-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = 0$ yang ekuivalen dengan $(\alpha - 2)^3 = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = 2$. Jadi, **A** mempunyai satu nilai eigen yang real dan berulang tiga kali, yaitu 2.

Misalkan $\mathbf{v}_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 2$, maka $\mathbf{v}_3$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -2 & 0 \\ 8 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear simultan

$$2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = m$ dan $v_2 = n$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 2$ adalah $\mathbf{v}_3 = (m, n, -2m - 3n)^T$, dimana m, n merupakan konstanta-konstanta real sebarang dan $m, n \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_3$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_3 = m(1, 0, -2)^T + n(0, 1, -3)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, 0, -2)^T, (0, 1, -3)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, 0, -2)^T, (0, 1, -3)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 2$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 2.

Dengan demikian penyelesaian pertama dan kedua dari sistem linear homogen (3.2.11) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\phi_1(t) = (1, 0, -2)^T e^{2t} \text{ dan } \phi_2(t) = (0, 1, -3)^T e^{2t}.$$

Misalkan penyelesaian ketiga dari sistem linear homogen (3.2.11) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_3(t) = (\mathbf{v}_3 t + \mathbf{v}_4)e^{\alpha_1 t},$$

dimana vektor eigen $\mathbf{v}_3 = m(1, 0, -2)^T + n(0, 1, -3)^T = (m, n, -2m - 3n)^T$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$

dan vektor $\mathbf{v}_4$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (m, n, -2m - 3n)^T.$$

Dengan mempersamakan koefisien-koefisien, kita dapat sistem tiga persamaan aljabar linear simultan

$$2v_1 + 3v_2 + v_3 = m,\ -4v_1 - 6v_2 - 2v_3 = n,$$

$$8v_1 + 12v_2 + 4v_3 = -2m - 3n. \tag{3.2.12}$$

Karena dua persamaan pertama dalam sistem (3.2.12) konsisten, kita dapat n = -2m. Jika dipilih m = 1, maka matriks lengkap dari sistem (3.2.12) adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -2 & -2 \\ 8 & 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$2v_1 + 3v_2 + v_3 = 1.$$

Jika dipilih $v_1 = 0$ dan $v_2 = 0$, maka vektor $\mathbf{v}_4 = (0, 0, p)^T$, dimana p merupakan suatu konstanta real sebarang dan $p \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_4$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_4 = p(0, 0, 1)^T$. Dengan demikian penyelesaian ketiga dari sistem linear homogen (3.2.9) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_3(t) = [(1, -2, 4)^T t + (0, 0, 1)^T]e^{2t} = [t, -2t, (4t + 1)]^T e^{2t},$$

Jika Wronskian

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -2te^{2t} \\ -2e^{2t} & -3e^{2t} & (4t+1)e^{2t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.2.11) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, 0, -2)^T e^{2t} + c_2(0, 1, -3)^T e^{2t} + c_3[t, -2t, (4t + 1)]^T e^{2t},$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\phi_1(t) = (1, 0, -2)^T e^{2t}, \phi_2(t) = (0, 1, -3)^T e^{2t}, \phi_3(t) = [t, -2t, (4t + 1)]^T e^{2t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.2.11) pada interval $-\infty < t < +\infty$. □

3.3 Metode Koefisien TakTentu dan Variasi Parameter

Metode-metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian khusus dari sistem n persamaan diferensial linear takhomogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam notasi matriks adalah metode koefisien taktentu dan variasi parameter.

3.3.1 Metode Koefisien TakTentu

Sistem n persamaan diferensial linear takhomogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam notasi matriks

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \tag{3.3.1}$$

dimana **A** merupakan suatu matriks bujur sangkar konstan real berordo n dan komponen-komponen dari fungsi vektor **F**(t) merupakan fungsi eksponensial, polinomial, fungsi sinusoida ataupun berupa penjumlahan fungsi-fungsi vektor semacam itu.

Gagasan pokok dari metode ini adalah mengmisalkan fungsi vektor $\phi_p(t)$ sebagai pernyataan yang serupa dengan fungsi vektor **F**(t) yang mengandung koefisien yang takdiketahui yang harus kita tentukan melalui substitusi $\phi_p(t)$ ke dalam sistem linear takhomogen tersebut.

$\mathbf{F}(t)$	$\phi_p(t)$
$\mathbf{F}(t) = \mathbf{b}_0 t + \mathbf{b}_1 t^2 + \ldots + \mathbf{b}_m t^m$	$T^s(\mathbf{B}_0 t + \mathbf{B}_1 t^2 + \ldots + \mathbf{B}_m t^m)$
$\mathbf{a} \cos kt + \mathbf{b} \sin kt$	$T^s(\mathbf{A} \cos kt + \mathbf{B} \sin kt)$
$e^{rt}(\mathbf{a} \cos kt + \mathbf{b} \sin kt)$	$T^s(\mathbf{A} \cos kt + \mathbf{B} \sin kt)e^{rt}$
$\mathbf{F}(t)e^{rt}$	$T^s(\mathbf{B}_0 t + \mathbf{B}_1 t^2 + \ldots + \mathbf{B}_m t^m)e^{rt}$
$\mathbf{F}(t)(\mathbf{a} \cos kt + \mathbf{b} \sin kt)$	$T^s[(\mathbf{A}_0 t + \mathbf{A}_1 t^2 + \ldots + \mathbf{A}_m t^m)\cos kt + (\mathbf{B}_0 t + \mathbf{B}_1 t^2 + \ldots + \mathbf{B}_m t^m)\sin kt]$

Tabel 1.1

Aturan-aturan metode koefisien taktentu.

a. Aturan dasar.

Jika $\mathbf{F}(t)$ dalam sistem linear takhomogen (3.3.1) merupakan salah satu fungsi vektor yang terdapat pada kolom pertama dari tabel 1.1 di atas ini, maka pilihlah $\phi_p(t)$ yang bersesuaian dari kolom kedua dan tentukan koefisien taktentunya dengan cara substitusi $\phi_p(t)$ dan derivatifnya ke dalam sistem linear takhomogen (3.3.1).

b. Aturan modifikasi.

Jika salah satu bentuk dari $\mathbf{F}(t)$ adalah suatu penyelesaian terhadap sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian, maka kalikan $\phi_p(t)$ yang dipilih dengan t atau mungkin dengan suatu pangkat dari t yang lebih tinggi.

c. Aturan penjumlahan.

Jika salah satu bentuk dari **F**(t) adalah suatu penjumlahan fungsi-fungsi vektor yang berasal dari beberapa baris dalam kolom pertama pada tabel 1.1, maka pilihlah $\phi_p(t)$ yang berupa penjumlahan fungsi-fungsi vektor dari baris yang bersesuaian dalam kolom kedua.

Contoh 3.3.1 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (-8t, 2t+3)^T \qquad (3.3.2)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Menurut contoh 3.2.1, penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.3.2) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}.$$

Karena tidak ada penduplikatan antara suku $\phi_c(t)$ dan suku takhomogen dalam (3.3.2), kita misalkan penyelesaian percobaan berbentuk

$$\phi_p(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b} = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)^T, \qquad (3.3.3)$$

dimana **a** dan **b** merupakan vektor-vektor yang harus ditentukan. Substitusi persamaan (3.3.3) ke dalam sistem linear takhomogen (3.3.2), kita dapat

$$(a_1, a_2)^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)^T + (-8t, 2t + 3)^T$$

$$= [(4a_1 + 2a_2 - 8)t + 4b_1 + 2b_2, (3a_1 - a_2 + 2)t + 3b_1 - b_2 + 3]^T.$$

Ketika kita mempersamakan koefisien-koefisien t dan suku-suku konstan (dalam kedua komponen x_1 dan x_2), kita dapat sistem empat persamaan aljabar linear simultan

$$4a_1 + 2a_2 = 8,\ 3a_1 - a_2 = -2,$$

$$4b_1 + 2b_2 = a_1 \text{ dan } 3a_1 - b_2 = a_2 - 3, \qquad (3.3.4)$$

Kita menyelesaikan dua persamaan pertama dalam (3.3.4) untuk $a_1 = {}^2/5$ dan $a_2 = {}^{16}/5$ dan menyelesaikan dua persamaan terakhir untuk $b_1 = {}^2/25$ dan $b_2 = {}^1/25$. Jadi, penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.2) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_p(t) = ({}^2/5t + {}^2/25, {}^{16}/5t + {}^1/25)^T$$

dan penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.3.2) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t} + ({}^2/5t + {}^2/25, {}^{16}/5t + {}^1/25)^T,$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 3.3.2 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (0, e^{-2t})^T \qquad (3.3.5)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Menurut contoh 3.2.1, penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.3.2) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}. \qquad (3.3.6)$$

Karena penduplikatan suku e^{-2t} dalam sistem linear takhomogen di atas dan dalam fungsi komplementer (3.3.6) didapatkan lebih dahulu, kita misalkan penyelesaian percobaan berbentuk

$$\phi_p(t) = \mathbf{a}te^{-2t} + \mathbf{b}e^{-2t} = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)^T e^{-2t} \qquad (3.3.7)$$

(lebih baik daripada $\mathbf{a}te^{-2t}$ sendiri), dimana **a** dan **b** merupakan vektor-vektor yang harus ditentukan. Maka

$$\phi'_p(t) = (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})e^{-2t} - 2\mathbf{a}te^{-2t}. \qquad (3.3.8)$$

Substitusi (3.3.7) dan (3.3.8) ke dalam sistem linear takhomogen (3.3.5), diikuti dengan penghapusan seluruh e^{-2t} menghasilkan

$$(a_1 - 2b_1 - 2a_1t,\ a_2 - 2b_2 - 2a_2t)^T$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)^T + (0, 1)^T$$

$$= [(4a_1 + 2a_2)t + 4b_1 + 2b_2, (3a_1 - a_2)t + 3b_1 - b_2 + 1]^T$$

Kita mempersamakan koefisien-koefisien t dan suku-suku konstan dan diperoleh sistem empat persamaan aljabar linear simultan

$$6a_1 + 2a_2 = 0,\ 3a_1 - a_2 = 0,$$

$$6b_1 + 2b_2 = a_1 \text{ dan } 3b_1 + b_2 = a_2 - 1. \qquad (3.3.9)$$

Dua persamaan pertama dalam (3.3.9) mengimplikasikan bahwa $a_2 = -3a_1$. Supaya dua persamaan terakhir konsisten, kita dapat

$$a_1 = 2(a_2 - 1) = 2(-3a_1 - 1) = -6a_2 - 2.$$

Kesimpulannya adalah $a_1 = -{}^2/7$, sehingga $a_2 = {}^6/7$. Setiap dua persamaan terakhir dalam (3.3.9) sekarang mereduksi menjadi $6b_1 + 2b_2 = -{}^2/7$, sehingga $b_2 = -3b_1 - {}^1/7$. Jadi, penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.5) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_p(t) = (-{}^2/7, {}^6/7)^T te^{-2t} + b_1(1, -3)^T e^{-2t} + (0, -{}^1/7)^T e^{-2t}.$$

Suku tengah pada ruas kanan merupakan suatu penyelesaian dari sistem linear homogen (3.3.5) yang bersesuaian dan dapat terserap ke dalam fungsi komplementer (3.3.6). Jadi, penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.3.5) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t} + (-{}^2/7, {}^6/7)^T te^{-2t} + (0, -{}^1/7)^T e^{-2t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 3.3.3 :

Cari penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (2e^{-t}, 3t)^T \qquad (3.3.10)$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Menurut contoh 3.1.3, penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.3.10) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -1)^T e^{-3t} + c_2(1, 1)^T e^{-t}.$$

Misalkan suatu penyelesaian percobaan berbentuk

$$\phi_p(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \qquad (3.3.11)$$

dimana **a**, **b**, **c** dan **d** merupakan vektor-vektor yang harus ditentukan. Perhatikan bahwa $\alpha_2 = -1$ merupakan suatu nilai eigen dari matriks koefisien **A** dan kita harus melibatkan kedua $\mathbf{a}te^{-t}$ dan $\mathbf{b}e^{-t}$ dalam penyelesaian yang diandaikan. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.11) ke dalam sistem linear takhomogen (3.3.10) dan menghapus suku-suku, kita dapat persamaan-persamaan aljabar berikut untuk **a**, **b**, **c** dan **d**.

$$\mathbf{Aa} = -\mathbf{a},\ \mathbf{Ab} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - (2, 0)^T,$$

$$\mathbf{Ac} = -(0, 3)^T \text{ dan } \mathbf{Ad} = \mathbf{c}. \tag{3.3.12}$$

Dari persamaan (3.3.12) pertama kita lihat bahwa **a** merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -1$. Jadi, $\mathbf{a} = (1, 1)^T$. Maka dari persamaan (3.3.12) kedua kita dapat $\mathbf{b} = k(1, 1)^T - (0, 1)^T$ untuk suatu konstanta k. Pilihan sederhana adalah $k = ½$ sehingga $\mathbf{b} = (½, -½)^T$. Maka persamaan-persamaan (3.3.12) ketiga dan keempat menghasilkan $\mathbf{c} = (1, 2)^T$ dan $\mathbf{d} = (-^4/3, -^5/3)^T$. Akhirnya, dari persamaan (3.3.11), kita dapat penyelesaian khusus

$$\phi_p(t) = (1, 1)^T te^{-t} + ½(1, -1)^T e^{-t} + (1, 2)^T t - {}^1/3(4, 5)^T.$$

dan penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.3.10) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = c_1(1, -1)^T e^{-3t} + c_2(1, 1)^T e^{-t}$$
$$+ (1, 1)^T te^{-t} + ½(1, -1)^T e^{-t} + (1, 2)^T t - {}^1/3(4, 5)^T,$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang. □

3.3.2 Metode Variasi Parameter

Sistem n persamaan diferensial linear takhomogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam notasi matriks

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}(t), \tag{3.3.1}$$

dimana **A** merupakan suatu matriks bujur sangkar konstan real berordo n dan **F**(t) merupakan suatu fungsi bernilai vektor kolom tetapi tidak perlu konstan berordo n x 1. Kita akan memperoleh penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$ dengan menggunakan metode variasi parameter sebagai berikut. Kita mengetahui bahwa fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t), \tag{3.3.13}$$

dimana $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, merupakan penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$. Fungsi komplementer atau penyelesaian komplementer (3.3.13) dapat ditulis dalam bentuk

$$\phi_c(t) = \Phi(t)\mathbf{c},$$

dimana $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$ dan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ merupakan suatu vektor konstan sebarang. Metode variasi parameter terdiri atas penggantian vektor konstan "parameter" **c** oleh fungsi vektor yang takdiketahui $\mathbf{u}(t)$ yang harus ditentukan sehingga fungsi vektor yang dihasilkan adalah

$$\phi_p(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t) \tag{3.3.14}$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$. Dengan mendiferensiasikan (3.3.14), kita dapat

$$\phi'_p(t) = \Phi'(t)\mathbf{u}(t) + \Phi(t)\mathbf{u}'(t) \tag{3.3.15}$$

dan dengan mensubstitusikan (3.3.14) dan (3.3.15) ke dalam sistem linear takhomogen (3.3.1), kita dapat

$$\Phi'(t)\mathbf{u}(t) + \Phi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{3.3.16}$$

Karena $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$, maka

$$\Phi'(t) = \mathbf{A}\Phi(t).$$

Jadi,

$$\Phi'(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{u}(t)$$

dan persamaan (3.3.16) mereduksi menjadi

$$\Phi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{F}(t). \tag{3.3.17}$$

Karena $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$, maka

$$|\Phi(t)| \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$ dan $\Phi^{-1}(t)$ ada dan tunggal pada interval $a \le t \le b$. Jadi, persamaan (3.3.17) menjadi

$$\mathbf{u}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t), \tag{3.3.18}$$

untuk semua titik titik t dalam interval $a \le t \le b$. Dengan mengintegralkan fungsi vektor (3.3.18), kita dapat

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds, \tag{3.3.19}$$

dimana t dan t_0 merupakan titik-titik dalam interval $a \leq t \leq b$. Jadi, dengan mensubstitusikan fungsi vektor (3.3.19) ke dalam fungsi vektor (3.3.14) menghasilkan fungsi vektor

$$\phi_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds \tag{3.3.20}$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \leq t \leq b$. Teorema tentang rumus variasi parameter untuk sistem linear takhomogen (3.3.1) berikut membuktikan bahwa setiap fungsi vektor yang berbentuk (3.3.20) merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Teorema 3.3.1 :

Andaikan bahwa $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \leq t \leq b$, maka fungsi vektor

$$\phi_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\, ds, \tag{3.3.20}$$

dimana t dan t_0 merupakan titik-titik dalam interval $a \leq t \leq b$, merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \leq t \leq b$.

Bukti :

Dengan mendiferensiasikan fungsi vektor (3.3.20), kita dapat

$$\phi'_p(t) = \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$$

$$= \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds + \mathbf{F}(t).$$

Karena $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$, maka

$$\Phi(t) = \mathbf{A}\Phi(t).$$

Jadi,

$$\phi'_p(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\,ds + \mathbf{F}(t). \tag{3.3.21}$$

Juga dari fungsi vektor (3.3.20), kita dapat

$$\mathbf{A}\phi_p(t) + \mathbf{F}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds + \mathbf{F}(t). \tag{3.3.22}$$

Dengan membandingkan persamaan-persamaan (3.3.21) dan (3.3.22), kita lihat bahwa fungsi vektor $\phi_p(t)$ yang didefinisikan oleh (3.3.20) sedemikian hingga

$$\phi'_p(t) = \mathbf{A}\phi_p(t) + \mathbf{F}(t).$$

Jadi terbukti bahwa setiap fungsi vektor $\phi_p(t)$ yang didefinisikan oleh (3.3.20) merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$. □

Suatu penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds, \tag{3.3.23}$$

dimana $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ merupakan suatu vektor konstan sebarang; suku pertama pada ruas kanan persamaan (3.3.23), yaitu $\Phi(t)\mathbf{c}$ merupakan penyelesaian umum dari sistem homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$ dan suku kedua atau suku integral pada ruas kanan persamaan (3.3.23) merupakan penyelesaian khusus dari sistem takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$.

Teorema 3.3.2 :

Jika $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$, maka masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear takhomogen (3.3.1) dan syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0,$$

dimana t_0 merupakan suatu titik dalam interval $a \le t \le b$ dan $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n})^T$ merupakan suatu vektor konstan dari bilangan-bilangan real $\phi_{01}, \phi_{02}, \ldots, \phi_{0n}$; mempunyai penyelesaian tunggal

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds, \tag{3.3.24}$$

untuk semua titik t dalam interval $a \le t \le b$.

Bukti :

Menurut teorema 3.3.2, suatu penyelesaian sebarang dapat diekspresikan dalam bentuk

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) + \phi_p(t), \tag{3.3.25}$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan konstanta-konstanta sebarang, $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$, fungsi vektor $\phi_p(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \le t \le b$. Menurut teorema 2.2.8, kombinasi linear

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t)$$

dalam persamaan (3.3.24) dapat ditulis sebagai

$$\Phi(t)\mathbf{c},$$

dimana $\Phi(t)$ merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.1) yang bersesuaian pada interval $a \le t \le b$. Juga menurut teorema 3.3.1, fungsi vektor

$$\phi_p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \leq t \leq b$. Jadi, suatu penyelesaian yang diberikan oleh (3.3.25) berbentuk

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds. \tag{3.3.26}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan syarat awal

$$\phi(t_0) = \phi_0,$$

maka fungsi vektor (3.3.26) menjadi

$$\phi(t_0) = \Phi(t)\mathbf{c} + \mathbf{0}$$

(karena integral dari t_0 ke t sama dengan nol) dan dari sini penerapan syarat awal menghasilkan

$$\phi_0 = \Phi(t)\mathbf{c}.$$

Karena matriks fundamental $\Phi(t)$ taksingular, maka

$$|\Phi(t)| \neq 0$$

dan $\Phi^{-1}(t)$ ada dan tunggal, kita dapat

$$\Phi^{-1}(t_0)\phi_0 = \Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{I}\mathbf{c} = \mathbf{c}.$$

Jadi, dengan mensubstitusikan nilai **c** ini kembali ke dalam fungsi vektor (3.3.26), kita dapat penyelesaian tunggal dari sistem linear takhomogen (3.3.1) pada interval $a \leq t \leq b$ yang berbentuk

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)ds.$$

Bukti selesai. □

Contoh 3.3.6 :

Cari penyelesaian dari masalah nilai awal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (-15, -4)^T te^{-2t}, \qquad (3.3.27)$$

$\phi(0) = (1, -1)^T$

pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Penyelesaian :

Menurut contoh 3.2.1, penyelesaian umum dari sistem linear homogen (3.3.27) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = c_1(1, -3)^T e^{-2t} + c_2(2, 1)^T e^{5t}, \qquad (3.3.28)$$

dimana $\{\phi_1(t) = (1, -3)^T e^{-2t}, \phi_2(t) = (2, 1)^T e^{5t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (3.3.27) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$. Fungsi komplementer atau penyelesaian komplementer (3.3.28) dapat ditulis dalam bentuk

$$\phi_c(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \mathbf{c},$$

dimana

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

merupakan suatu matriks fundamental dari sistem linear homogen (3.3.27) yang bersesuaian pada interval $-\infty < t < +\infty$. Determinan dari $\Phi(t)$ adalah

$$|\Phi(t)| = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, sehingga invers dari $\Phi(t)$ adalah

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{7} e^{-3t} \begin{pmatrix} e^{5t} & -2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Rumus variasi parameter menghasilkan

$$\phi_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)\, \mathbf{F}(s)ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{7} e^{-3s} \begin{pmatrix} e^{5s} & -2e^{5s} \\ 3e^{-2s} & e^{-2s} \end{pmatrix} (15se^{-2s}, 4se^{-2s})^T\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{7} e^{-3s}(-7se^{3s}, -49se^{-4s})^T \, ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \int_0^t (-s, -7se^{-7s})^T \, ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \left[(-\tfrac{1}{2}s^2, se^{-7s} + \tfrac{1}{7}e^{-7s})^T\right]_{s=0}^{s=t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} (-\tfrac{1}{2}t^2, te^{-7t} + \tfrac{1}{7}e^{-7t} - \tfrac{1}{7})^T$$

$$= \tfrac{1}{14}e^{-2t}(4 + 28t - 7t^2, 2 + 14t + 21t^2)^T - \tfrac{1}{7}e^{5t}(2, 1)^T$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen (3.3.27) pada interval $-\infty < t < +\infty$. Penyelesaian dari masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear homogen (3.3.27) yang bersesuaian dan syarat awal

$$\phi(0) = (1, -1)^T$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi_c(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi_0$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} (1, -1)^T$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} (3, 2)^T$$

$$= {}^1/7(3e^{-2t} + 4e^{5t}, -9e^{-2t} + 2e^{5t})^T.$$

Suatu penyelesaian dari masalah nilai awal yang terdiri atas sistem linear takhomogen (3.3.27) dan syarat awal

$$\phi(0) = (1, -1)^T$$

pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\phi(t) = {}^1/7(2, 1)^T e^{5t} + {}^1/14(10 + 28t - 7t^2, -16 + 14t + 21t^2)^T e^{-2t}. \qquad \square$$

BAB IV

PENERAPAN

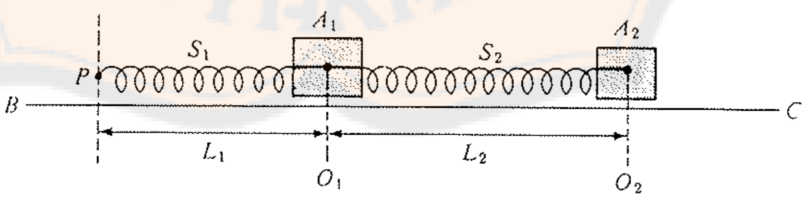
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DALAM BIDANG FISIKA

Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan mempunyai beberapa penerapan dalam bidang fisika. Misalnya mekanika, rangkaian listrik dan campuran.

4.1 Mekanika

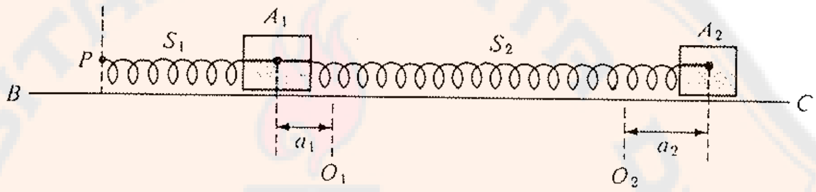
Contoh 4.1 :

Pada bidang horisontal BC yang licin, obyek A_1 oleh pegas tanpa massa S_1 yang panjang normalnya L_1 dihubungkan dengan titik tetap P dan obyek A_2 oleh pegas tanpa massa S_2 yang panjang normalnya L_2 dihubungkan dengan obyek A_1, sehingga titik tetap P dan pusat-pusat gravitasi kedua obyek A_1 dan A_2 semuanya terletak dalam garis lurus (lihat gambar 4.1.1).



gambar 4.1.1

Kemudian obyek A_1 dipindahkan dengan jarak a_1 ke kanan atau ke kiri dari posisi keseimbangannya O_1, obyek A_2 dipindahkan dengan jarak a_2 ke kanan atau ke kiri dari posisi keseimbangannya O_2 dan kedua obyek A_1 dan A_2 dilepaskan pada waktu t sama dengan nol (lihat gambar 4.1.2). Bagaimana posisi kedua obyek A_1 dan A_2 pada waktu t lebih besar dari nol?



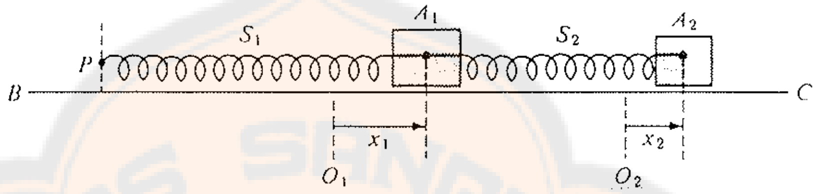
gambar 4.1.2

Penyelesaian :

Langkah pertama. Menyusun model matematis.

Pertama, asumsikan bahwa gaya-gaya geseran pada bidang horisontal BC yang licin diabaikan dan tidak ada gaya-gaya luar yang bekerja pada sistem. Selanjutnya, misalkan obyek A_1 mempunyai massa m_1, obyek A_2 mempunyai massa m_2, pegas S_1 mempunyai konstanta pegas k_1 dan pegas S_2 mempunyai konstanta pegas k_2.

Perhatikan y_1 menyatakan pemindahan obyek A_1 dari posisi keseimbangannya O_1 pada waktu t lebih besar dari atau sama dengan nol. Asumsikan bahwa y_1 positif apabila obyek A_1 ke kanan O_1. Dengan cara yang sama, perhatikan y_2 menyatakan pemindahan obyek A_2 dari posisi keseimbangannya O_2 pada waktu t lebih besar dari atau sama dengan nol. Asumsikan bahwa y_2 positif apabila obyek A_2 ke kanan O_2 (lihat gambar 4.1.3).



gambar 4.1.3

Pandang gaya-gaya yang bekerja pada obyek A_1 pada waktu t lebih besar dari nol. Ada dua gaya, yaitu F_1 dan F_2, dimana F_1 diusahakan oleh pegas S_1 dan F_2 diusahakan oleh pegas S_2. Menurut hukum Hooke, magnitudo F_1 adalah $k_1|y_1|$. Karena gaya ini diusahakan arah ke kiri apabila obyek A_1 ke kanan O_1 dan arah ke kanan apabila obyek A_1 ke kiri O_1, kita dapat

$$F_1 = -k_1 y_1.$$

Menurut hukum Hooke, magnitudo F_2 adalah $k_2 s$, dimana s adalah pemanjangan pegas S_2 pada waktu t. Karena $s = |y_2 - y_1|$, kita dapat magnitudo F_2 adalah $k_2|y_2 - y_1|$. Selanjutnya, karena gaya ini diusahakan arah ke kiri apabila $y_2 - y_1 < 0$ dan arah ke kanan apabila $y_2 - y_1 > 0$, kita dapat

$$F_2 = k_2(y_2 - y_1).$$

Menurut hukum Newton kedua, kita dapat persamaan

$$m_1y''_1 = -k_1y_1 + k_2(y_2 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1y''_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = 0. \qquad (4.1.1a)$$

Pandang gaya-gaya yang bekerja pada obyek A_2 pada waktu t lebih besar dari nol. Ada satu gaya, yaitu F_3, dimana F_3 diusahakan oleh pegas S_2. Menurut hukum Hooke, magnitudo F_3 adalah $k_2s = k_2|y_2 - y_1|$. Karena gaya ini diusahakan arah ke kiri apabila $y_2 - y_1 > 0$ dan arah ke kanan apabila $y_2 - y_1 < 0$, kita dapat

$$F_3 = k_2(y_2 - y_1).$$

Menurut hukum Newton kedua, kita dapat persamaan

$$m_2y''_2 = -k_2(y_2 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m_2y''_2 - k_2y_1 + k_2y_1 = 0. \qquad (4.1.1b)$$

Dengan demikian dalam menyusun model matematis untuk masalah di atas terdiri dari sistem

$$m_1y''_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = 0,$$

$$m_2y''_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = 0, \qquad (4.1.2)$$

adalah sistem dua persamaan diferensial linear homogen orde kedua simultan dengan koefisien konstan dan syarat-syarat awal

$$y_1(0) = a_1,\ y'_1(0) = 0,\ y_2(0) = a_2,\ y'_2(0) = 0. \qquad (4.1.3)$$

Langkah kedua. Menyelesaikan masalah nilai awal.

Jika obyek A_1 dan A_2 berturut-turut mempunyai massa satuan $m_1 = 1$ dan $m_2 = 1$, pegas S_1 dan S_2 berturut-turut mempunyai konstanta pegas $k_1 = 3$ dan $k_2 = 2$ dan jarak $a_1 = -1$ dan $a_2 = 2$. Maka sistem (4.1.2) menjadi

$$y''_1 + 5y_1 - 2y_2 = 0, \tag{4.1.4a}$$

$$y''_2 - 2y_1 + 2y_2 = 0, \tag{4.1.4b}$$

dan syarat-syarat awal (4.1.3) menjadi

$$y_1(0) = -1,\ y'_1(0) = 0,\ y_2(0) = 2,\ y'_2(0) = 0. \tag{4.1.5}$$

Dari persamaan (4.1.4a), kita dapat

$$y_2 = -\tfrac{1}{2}y''_1 + \tfrac{5}{2}y_1. \tag{4.1.6}$$

Kita mendiferensiasikan (4.1.4a) dua kali. Di dalam persamaan yang dihasilkan kita substitusikan y''_2 seperti yang diberikan oleh (4.1.4b) dan y_2 seperti yang diberikan oleh (4.1.6). Ini menghasilkan

$$y^{(iv)}_1 = -5y''_1 + 2y''_2 = -5y''_1 + 2(2y_1 - 2y_2)$$

$$= -5y''_1 + 4y_1 - 4(\tfrac{1}{2}y''_1 + \tfrac{5}{2}y_1).$$

Dengan mengurutkan suku-sukunya, kita dapat persamaan

$$y^{(iv)}_1 + 7y''_1 + 6y_1 = 0 \tag{4.1.7}$$

adalah persamaan diferensial linear orde keempat dengan koefisien konstan.

Persamaan karakteristik dari persamaan (4.1.7) adalah $\alpha^{iv} + 7\alpha^2 + 6\alpha = 0$ yang ekuivalen dengan $(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 6) = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = i$, α_2

$= -i$, $\alpha_3 = \sqrt{6}i$ atau $\alpha_1 = -\sqrt{6}i$. Jadi, persamaan karakteristik dari persamaan (4.1.7) mempunyai dua pasang akar sekawan kompleks, yaitu $i, -i, \sqrt{6}i$ dan $-\sqrt{6}i$.

Penyelesaian umum dari persamaan (4.1.7) adalah

$$y_1 = a_{11} \sin t + a_{12} \cos t + a_{21} \sin \sqrt{6}t + a_{22} \cos \sqrt{6}t. \qquad (4.1.8a)$$

Dengan mendiferensiasi dua kali, kita dapat

$$y''_1 = -a_{11} \sin t - a_{12} \cos t - 6a_{21} \sin \sqrt{6}t - 6a_{22} \cos \sqrt{6}t.$$

Dengan menggunakan hasil ini dan (4.1.8a), dari (4.1.6) kita dapat

$$y_2 = 2a_{11} \sin t + 2a_{12} \cos t - \tfrac{1}{2}a_{21} \sin \sqrt{6}t - \tfrac{1}{2}a_{22} \cos \sqrt{6}t. \qquad (4.1.8b)$$

Dari persamaan (4.1.8a), (4.1.8b) dan syarat-syarat awal

$$y_1(0) = a_{12} + a_{22} = -1,\ y_2(0) = 2a_{12} - \tfrac{1}{2}a_{22} = 2,$$

maka

$$a_{12} = {}^3/5 \text{ dan } a_{22} = -{}^8/5$$

dan

$$y'_1(0) = a_{11} + a_{21}\sqrt{6} = 0,\ y'_2(0) = 2a_{11} - \tfrac{1}{2}a_{21}\sqrt{6} = 0,$$

maka

$$a_{11} = 0 \text{ dan } a_{21} = 0.$$

Dengan demikian penyelesaian dari masalah nilai awal adalah

$$y_1 = {}^3/5 \cos t - {}^8/5 \cos \sqrt{6}t,$$

$$y_2 = {}^6/5 \cos t + {}^4/5 \cos \sqrt{6}t. \qquad \square$$

4.2 Rangkaian Listrik

Rangkaian listrik sederhana yang terdiri atas sumber tenaga elektromotif, resistor, induktor dan kapasitor. Permasalahan elektronika sederhana yang dapat dijelaskan pada rangkaian listrik di atas adalah sumber tenaga elektromotif menghasilkan aliran arus dalam rangkaian tertutup dan arus ini menghasilkan perbedaan tegangan melalui resistor, induktor dan kapasitor. Tiga hukum fisika yang berkaitan dengan perbedaan tegangan tersebut adalah

1. Perbedaan tegangan melalui resistor diberikan dengan rumus

$$E_R = Ri, \tag{4.1.1}$$

dimana R adalah suatu konstanta perbandingan yang disebut resistansi dan i adalah arus.

2. Perbedaan tegangan melalui induktor diberikan dengan rumus

$$E_L = Li', \tag{4.1.2}$$

dimana L adalah suatu konstanta perbandingan yang disebut induktansi dan i adalah arus.

3. Perbedaan tegangan melalui kapasitor diberikan dengan rumus

$$E_C = C^{-1}q, \tag{4.1.3}$$

dimana C adalah suatu konstanta perbandingan yang disebut kapasitansi dan q adalah muatan pada kapasitor. Karena $i(t) = q'$, maka

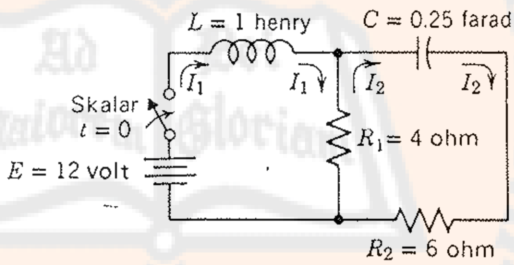
$$E_C = C^{-1}\int_{t_0}^{t} i(t)\, dt.$$

Selain ketiga hukum fisika di atas, berlaku hukum tegangan Kirchhoff yang berbunyi

"Jumlah aljabar dari semua perbedaan tegangan yang mengelilingi rangkaian tertutup adalah nol atau tegangan pada rangkaian tertutup sama dengan jumlah perbedaan tegangan yang tersisa dalam rangkaian tersebut."

Contoh 4.2 :

Gambar 4.2 mengilustrasikan rangkaian listrik. Susunlah model matematis dan selesaikan dengan mencari arus $I_1(t)$ dan $I_2(t)$ dan menganggap bahwa semua muatan dan arus sama dengan nol bila saklar ditutup pada waktu t sama dengan nol.



gambar 4.2

Penyelesaian :

Langkah pertama. Menyusun model matematis.

Model matematis rangkaian ini di dapat dari hukum tegangan Kirchhoff.

Lup sebelah kiri menghasilkan

$$LI'_1 + R_1(I_1 - I_2) = E(t)$$

$$\Leftrightarrow I'_1 + 4(I_1 - I_2) = 12,$$

dimana I_1 adalah arus di lup sebelah kiri, I_2 adalah arus di lup sebelah kanan dan $R_1(I_1 - I_2)$ adalah penurunan tegangan yang melalui resistor, karena I_1 dan I_2 mengalir melalui resistor dalam arah yang berlawanan. Dengan cara yang sama, lup sebelah kanan menghasilkan

$$R_2I_2 + R_1(I_2 - I_1) + C^{-1}\int_{t_0}^{t} I_2(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow 6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int_{t_0}^{t} I_2(t)dt = 0.$$

Dengan menuliskan kembali persamaan pertama dan mendiferensiasikan persamaan kedua, kita lihat bahwa arus I_1 dan I_2 di dalam rangkaian listrik tersebut ditentukan oleh sistem

$$I'_1 + 4(I_1 - I_2) = 12, \qquad (4.2.1a)$$

$$-4I'_1 + 10I'_2 + 4I_2 = 0. \qquad (4.2.1b)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.2.1a), kita nyatakan I_2 dan derivatifnya dalam bentuk I_1 dan derivatifnya. Hasilnya, kita substitusikan ke dalam persamaan (4.2.1b), yang kemudian hanya terdiri dari I_1 dan derivatifnya. Kita selesaikan persamaan ini. Akhirnya, kita kembali ke persamaan (4.2.1a) dan menggunakannya untuk menyatakan I_2 dalam bentuk penyelesaian yang baru diperoleh tersebut. Rinciannya adalah sebagai berikut.

Dari (4.2.1a), kita peroleh

$$I_2 = \tfrac{1}{4}I'_1 + I_1 - 3. \tag{4.2.2}$$

Dengan diferensiasi

$$I'_2 = \tfrac{1}{4}I''_1 + I'_1$$

Dengan mensubstitusi hasil ini dan (4.2.2) ke dalam (4.2.1b), kita peroleh

$$-4I'_1 + 10(\tfrac{1}{4}I''_1 + I'_1) + 4(\tfrac{1}{4}I'_1 + I_1 - 3) = 0.$$

Penyederhanaan menghasilkan persamaan

$$I''_1 + {}^{14}/_5 I'_1 + {}^{8}/_5 I_1 = {}^{24}/_5 \tag{4.2.3}$$

adalah persamaan diferensial linear orde kedua simultan dengan koefisien konstan. Dengan mensubstitusikan $x_1 = I_1$ dan $x_2 = x'_1 = I'_1$ ke dalam persamaan (4.2.3), diperoleh sistem

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -{}^{8}/_5 x_1 - {}^{14}/_5 x_2 + {}^{24}/_5, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

adalah sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Langkah kedua. Menyelesaikan masalah nilai awal.

Sistem (4.2.4) dalam notasi matriks, yaitu

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -{}^{8}/_5 & -{}^{14}/_5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (0, {}^{24}/_5)^T. \tag{4.2.5}$$

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -{}^{8}/_{5} & -{}^{14}/_{5} \end{pmatrix}. \tag{4.2.6}$$

Maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ -{}^{8}/_{5} & -{}^{14}/_{5} - \alpha \end{vmatrix} = 5\alpha^2 + 14\alpha + 8.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $5\alpha^2 + 14\alpha + 8 = 0$ yang ekuivalen dengan $(5\alpha + 4)(\alpha + 2) = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = -2$ atau $\alpha_2 = -{}^{4}/_{5}$. Jadi, **A** mempunyai dua nilai eigen yang real dan berbeda, yaitu -2 dan $-{}^{4}/_{5}$.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -{}^{8}/_{5} & -{}^{4}/_{5} \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (0, 0)^T$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$2v_1 + v_2 = 0.$

Jika dipilih $v_1 = p$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$ adalah $\mathbf{v}_1 = (p, -2p)^T$, dimana p merupakan suatu konstanta real sebarang dan $p \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = p(1, -2)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -2)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -2)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -2$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -^4/_5$, maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} ^4/_5 & 1 \\ -^8/_5 & -2 \end{pmatrix}(v_1, v_2)^T = (0, 0)^T$$

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -8 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan persamaan aljabar linear

$$4v_1 + 5v_2 = 0.$$

Jika dipilih $v_1 = p$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -^4/_5$ adalah $\mathbf{v}_2 = (p, -^4/_5 p)^T$, dimana p merupakan suatu konstanta real sebarang dan $p \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = p(1, -^4/_5)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, -^4/_5)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, -^4/_5)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -^4/_5$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (4.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{I}_1(t) = (1, -2)^T e^{-2t} \text{ dan } \mathbf{I}_2(t) = (1, -^4/_5)^T e^{-0,8t}.$$

Jika Wronskian

$$W(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-0,8t} \\ -2e^{-2t} & -^4/_5 e^{-0,8t} \end{vmatrix} = -^{14}/_5 e^{-2,8t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (4.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\mathbf{I}_c(t) = c_1(1, -2)^T e^{-2t} + c_2(1, -{}^4/_5)^T e^{-0,8t},$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\mathbf{I}_1(t) = (1, -2)^T e^{-2t}, \mathbf{I}_2(t) = (1, -{}^4/_5)^T e^{-0,8t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (4.2.6) pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Kita misalkan penyelesaian percobaan berbentuk

$$\mathbf{I}_p(t) = at + b = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)^T. \qquad (4.2.7)$$

Substitusi persamaan (4.2.7) ke dalam sistem linear (4.2.5), kita peroleh

$$(a_1, a_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -{}^8/_5 & -{}^{14}/_5 \end{pmatrix} (a_1t + b_1, a_2t + b_2)^T + (0, {}^{24}/_5)^T.$$

Ketika kita mempersamakan koefisien-koefisien t dan suku-suku konstan (dalam kedua komponen x_1 dan x_2), kita peroleh sistem empat persamaan aljabar linear simultan

$$5a_2 = 0, -8a_1 - 14a_2 = 0,$$

$$5b_2 = a_1, -8b_1 - 14b_2 = a_2 - 24, \qquad (4.2.8)$$

Kita selesaikan dua persamaan pertama dalam (4.2.8) untuk $a_2 = 0$ dan $a_1 = 0$ dan selesaikan dua persamaan terakhir untuk $b_2 = 0$ dan $b_1 = 3$. Jadi, penyelesaian khusus dari sistem linear (4.2.5) adalah

$$\mathbf{I}_p(t) = (3, 0)^T$$

dan penyelesaian umum dari sistem linear (4.2.5) adalah

$$\mathbf{I}(t) = c_1(1, -2)^T e^{-2t} + c_2(1, -{}^4/_5)^T e^{-0,8t} + (3, 0)^T, \qquad (4.2.9)$$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang.

Dengan mensubstitusikan syarat-syarat awal

$\mathbf{I}_1(0) = 0$ dan $\mathbf{I}_2(0) = 0$

atau dalam notasi matriks

$$\mathbf{I}(0) = (0, 0)^T \qquad (4.2.10)$$

ke dalam fungsi vektor (4.2.9), diperoleh

$$\mathbf{I}(0) = c_1(1, -2)^T e^{-2.0} + c_2(1, -{}^4/_5)^T e^{-0,8.0} + (3, 0)^T$$
$$= c_1(1, -2)^T + c_2(1, -{}^4/_5)^T + (3, 0)^T = (0, 0)^T$$

atau

$$c_1 + c_2 = -3, -2c_1 - {}^4/_5 c_2 = 0.$$

Dengan menyelesaikan sistem dua persamaan aljabar linear simultan ini, diperoleh

$$c_1 = 2 \text{ dan } c_2 = -5.$$

Karenanya penyelesaian dari masalah fisis kita adalah

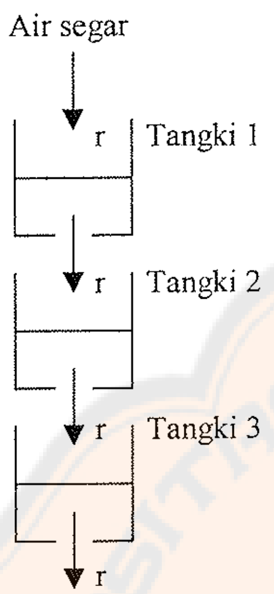
$$\mathbf{I}(t) = 2(1, -2)^T e^{-2t} - 5(1, -{}^4/_5)^T e^{-0,8t} + (3, 0)^T$$

atau dalam notasi skalar

$$\mathbf{I}_1 = 2e^{-2t} - 5e^{-0,8t} + 3, \mathbf{I}_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0,8t}.$$

Kita lihat bahwa $\mathbf{I}_1$ mendekati nilai 3 ampere, sedangkan $\mathbf{I}_2$ mendekati 0 bila $t \to \infty$. □

4.3 Campuran



Gambar 4.3.1

Contoh 4.3.1 :

Gambar 4.3.1 mengilustrasikan sistem "terbuka" yang terdiri dari tiga tangki air laut. Jika $V_1 = 20$ gal, $V_2 = 40$ gal, $V_3 = 50$ gal, $r = 10$ gal/min dan jumlah awal garam (dalam pounds) dalam tiga tangki air laut adalah

$$x_1(0) = 15 \text{ dan } x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

maka susunlah model matematis dan selesaikan dengan mencari jumlah garam dalam setiap tangki air laut pada waktu t lebih besar dari atau sama dengan nol!

Penyelesaian :

Langkah pertama. Menyusun model matematis.

Sistem "terbuka" terdiri dari tiga tangki air laut dengan volume berturut-turut V_1, V_2 dan V_3 galon air laut. Air segar mengalir ke dalam tangki 1, campuran air segar dan air laut mengalir dari tangki 1 ke dalam tangki 2, dari tangki 2 ke dalam tangki 3 dan ke luar tangki 3. Misalkan $x_i(t)$ menyatakan jumlah garam (dalam pounds) dalam tangki i pada waktu t, dimana i = 1, 2, 3. Jika setiap kecepatan aliran adalah r galon per menit, maka penghitungan sederhana konsentrasi garam, menghasilkan sistem

$$x'_1 = -k_1 x_1,$$

$$x'_1 = k_1 x_1 - k_2 x_2,$$

$$x'_1 = k_2 x_2 - k_3 x_3, \tag{4.3.1}$$

dimana

$$k_i = r/V_i; \tag{4.3.2}$$

i = 1, 2, 3; adalah sistem tiga persamaan diferensial linear homogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Langkah kedua. Menyelesaikan masalah nilai awal.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai numeris yang diberikan dalam (4.3.1) dan (4.3.2), kita peroleh masalah nilai awal

$$\mathbf{x}'_1(t) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \tag{4.3.3}$$

$$\mathbf{x}(0) = (15, 0, 0)^T.$$

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,2 \end{pmatrix},$$

maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -0,5 - \alpha & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,25 - \alpha & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,2 - \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-0,5 - \alpha)(-0,25 - \alpha)(-0,2 - \alpha).$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $(-0,5 - \alpha)(-0,25 - \alpha)(-0,2 - \alpha) = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = -0,5$; $\alpha_2 = -0,25$ atau $\alpha_3 = -0,2$. Jadi, **A** mempunyai tiga nilai eigen yang real dan berbeda, yaitu -0,5; -0,25 dan -0,2.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -0,5$; maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Dua baris terakhir berturut-turut dibagi oleh 0,25 dan 0,05 yang menghasilkan sistem dua persamaan aljabar linear simultan

$2v_1 + v_2 = 0,\ 5v_2 + 6v_3 = 0.$

Jika dipilih $v_3 = 5m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -0{,}5$ adalah $\mathbf{v}_1 = (3m, -6m, 5m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = m(3, -6, 5)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(3, -6, 5)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(3, -6, 5)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = -0{,}5$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0{,}25$; maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}05 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Dua baris pertama mengimplikasikan $v_1 = 0$ dan baris ketiga dibagi dengan 0,05 yang menghasilkan persamaan aljabar linear

$5v_2 + v_3 = 0.$

Jika dipilih $v_2 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0{,}25$ adalah $\mathbf{v}_2 = (0, m, -5m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = m(0, 1, -5)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(0, 1, -5)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(0, 1, -5)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0{,}25$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

3. Misalkan $\mathbf{v}_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_3 = -0{,}2$; maka $\mathbf{v}_3$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Baris pertama dan ketiga berturut-turut mengimplikasikan $v_1 = 0$ dan $v_2 = 0$, sedangkan kolom ketiga semuanya nol meninggalkan v_3 sebarang (tetapi tidak sama dengan nol). Jika dipilih $v_3 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_3 = -0{,}2$ adalah $\mathbf{v}_3 = (0, 0, m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_3$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_3 = m(0, 0, 1)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(0, 0, 1)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(0, 0, 1)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_3 = -0{,}2$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (4.3.3) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi-fungsi vektor

$\mathbf{x}_1(t) = (3, -6, 5)^T e^{-0,5t}$, $\mathbf{x}_2(t) = (0, 1, -5)^T e^{-0,25t}$ dan $\mathbf{x}_3(t) = (0, 0, 1)^T e^{-0,2t}$.

Jika Wronskian

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)(t) = \begin{vmatrix} 3e^{-0,5t} & 0 & 0 \\ -6e^{-0,5t} & e^{-0,25t} & -5e^{-0,25t} \\ 5e^{-0,5t} & 0 & e^{-0,2t} \end{vmatrix} = 3e^{-0,05t} \neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (4.3.3) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\mathbf{x}(t) = c_1(3, -6, 5)^T e^{-0,5t} + c_2(0, 1, -5)^T e^{-0,25t} + c_3(0, 0, 1)^T e^{-0,2t},$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\mathbf{x}_1(t) = (3, -6, 5)^T e^{-0,5t}, \mathbf{x}_2(t) = (0, 1, -5)^T e^{-0,25t}, \mathbf{x}_3(t) = (0, 0, 1)^T e^{-0,2t}\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (4.3.3) pada interval $-\infty < t < +\infty$. Atau dalam notasi skalar, yaitu

$$x_1(t) = 3c_1e^{-0,5t},$$

$$x_2(t) = -6c_1e^{-0,5t} + c_2e^{-0,25t},$$

$$x_3(t) = 5c_1e^{-0,5t} - 5c_2e^{-0,25t} + c_3e^{-0,2t}. \qquad (4.3.5)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan syarat-syarat awal

$$x_1(0) = 15 \text{ dan } x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

ke dalam fungsi-fungsi (4.3.5), diperoleh

$3c_1 = 15$, $-6c_1 + c_2 = 0$ dan $5c_1 - 5c_2 + c_3 = 0$,

Dengan menyelesaikan sistem tiga persamaan aljabar linear simultan ini, diperoleh

$c_1 = 5$, $c_2 = 30$ dan $c_3 = 125$.

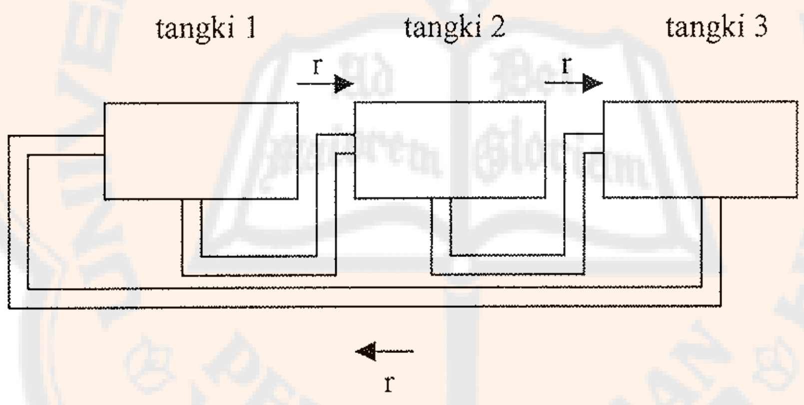
Akhirnya, jumlah garam dalam tiga tangki air laut pada waktu t adalah

$x_1(t) = 15e^{-0,5t}$,

$x_2(t) = -30e^{-0,5t} + 30e^{-0,25t}$,

$x_3(t) = 25e^{-0,5t} - 150e^{-0,25t} + 125e^{-0,2t}$. □

Contoh 4.3.2 :



Gambar 4.3.2

Gambar 4.3.2 mengilustrasikan sistem "tertutup". Jika $V_1 = 50$ gal, $V_2 = 25$ gal, $V_3 = 50$ gal dan $r = 10$ gal/min, maka susunlah model matematis dan selesaikan dengan mencari jumlah garam dalam setiap tangki pada waktu t.

Penyelesaian :

Langkah pertama. Menyusun model matematis.

Sistem "tertutup" terdiri dari tiga tangki air laut dengan volume berturut-turut V_1, V_2 dan V_3 galon air laut. Campuran air laut mengalir dari tangki 3 ke dalam tangki 1, dari tangki 1 ke dalam tangki 2 dan dari tangki 2 ke dalam tangki 3. Perhatikan $x_i(t)$ menyatakan jumlah garam (dalam pounds) dalam tangki i pada waktu t, dimana i = 1, 2, 3. Jika setiap kecepatan aliran adalah r galon per menit, maka suatu penghitungan sederhana konsentrasi garam, menghasilkan sistem

$$x'_1 = -k_1x_1 + k_3x_3,$$

$$x'_2 = k_1x_1 - k_2x_2,$$

$$x'_3 = k_2x_2 - k_3x_3, \qquad (4.3.6)$$

dimana

$$k_i = r/V_i; \qquad (4.3.7)$$

i = 1, 2, 3; adalah sistem tiga persamaan diferensial linear homogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Langkah kedua. Menyelesaikan sistem tiga persamaan diferensial linear homogen orde pertama simultan dengan koefisien konstan.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai numeris yang diberikan dalam (4.3.6) dan (4.3.7), kita peroleh sistem

$$\mathbf{x}'_1(t) = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{4.3.8}$$

Jika matriks koefisien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Maka

$$|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -0{,}2 - \alpha & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 - \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^3 - 0{,}8\alpha^2 - 0{,}2\alpha.$$

Persamaan karakteristik dari **A** adalah $-\alpha^3 - 0{,}8\alpha^2 - 0{,}2\alpha = 0$ yang ekuivalen dengan $-\alpha[(\alpha + 0{,}4)^2 + (0{,}2)^2] = 0$, sehingga diperoleh $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -0{,}4 + (0{,}2)i$ atau $\alpha_3 = -0{,}4 - (0{,}2)i$. Jadi, **A** mempunyai satu nilai eigen yang real, yaitu 0 dan sepasang nilai eigen sekawan kompleks, yaitu $-0{,}4 + (0{,}2)i$ dan $-0{,}4 - (0{,}2)i$.

1. Misalkan $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 0$, maka $\mathbf{v}_1$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Ketiga baris dibagi dengan 0,2 menghasilkan

$-v_1 + v_3 = 0$, $v_1 - 2v_2 = 0$ dan $2v_2 - v_3 = 0$.

Dengan menyelesaikan sistem tiga persamaan aljabar linear simultan ini, diperoleh $v_1 = 2v_2$ dan $v_3 = 2v_2$. Jika dipilih $v_2 = m$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_0 = 0$ adalah $\mathbf{v}_1 = (2m, m, 2m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_1$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 = m(2, 1, 2)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(2, 1, 2)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(2, 1, 2)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_1 = 0$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian dari sistem linear homogen (4.3.8) yang bernilai real pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor $\mathbf{x}_1(t) = (2, 1, 2)^T$.

2. Misalkan $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3)^T$ merupakan suatu vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0{,}4 - (0{,}2)i$; maka $\mathbf{v}_2$ merupakan suatu penyelesaian yang taktrivial dari sistem $(\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 0,2+0,2i & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2i & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,2+0,2i \end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3)^T = (0, 0, 0)^T.$$

Ketiga baris dibagi dengan 0,2 menghasilkan

$$(1+i)v_1 + v_3 = 0,\ v_1 + iv_2 = 0 \text{ dan } 2v_2 + (1+i)v_3 = 0.$$

Dengan menyelesaikan sistem tiga persamaan aljabar linear simultan ini, diperoleh $v_1 = -iv_2$ dan $v_3 = (-1 - i)v_1$. Jika dipilih $v_2 = im$, maka vektor eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0,4 - (0,2)i$ adalah $\mathbf{v}_2 = (m, im, (-1 - i)m)^T$, dimana m merupakan suatu konstanta real sebarang dan $m \neq 0$. Vektor $\mathbf{v}_2$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{v}_2 = m(1, i, -1 - i)^T$. Karena himpunan sebuah vektor taknol adalah bebas linear, maka himpunan $\{(1, i, -1 - i)^T\}$ bebas linear, sehingga himpunan $\{(1, i, -1 - i)^T\}$ merupakan basis untuk ruang eigen dari **A** yang bersesuaian dengan nilai eigen $\alpha_2 = -0,4 - (0,2)i$. Jadi, dimensi ruang eigen ini adalah 1.

Dengan demikian penyelesaian dari sistem linear homogen (4.3.8) yang bernilai kompleks pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= (1, i, -1 - i)^T e^{-(0,4 - 0,2i)t} \\ &= (1, i, -1 - i)^T e^{-0,4t}(\cos 0,2t - i \sin 0,2t) \\ &= (\cos 0,2t - i \sin 0,2t;\ \sin 0,2t + i \cos 0,2t; \\ &\quad -\cos 0,2t - \sin 0,2t - i \cos 0,2t + i \sin 0,2t)^T e^{-0,4t}. \end{aligned}$$

Bagian real dan imajiner dari fungsi vektor $\mathbf{x}_2(t)$ adalah fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-0,4t}\,[\cos 0,2t;\ \sin 0,2t;\ -\cos 0,2t - \sin 0,2t]^T,$$

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{-0,4t}\,[-\sin 0,2t;\ \cos 0,2t;\ -\cos 0,2t + \sin 0,2t]^T$$

merupakan penyelesaian-penyelesaian dari sistem linear homogen (4.3.8) yang bernilai real pada interval $-\infty < t < +\infty$.

Jika Wronskian

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3e^{-0,5t} & \cos 0,2te^{-0,4t} & -\sin 0,2te^{-0,4t} \\ -6e^{-0,5t} & \sin 0,2te^{-0,4t} & \cos 0,2te^{-0,4t} \\ 5e^{-0,5t} & (-\cos 0,2t - \sin 0,2t)e^{-0,4t} & (-\cos 0,2t + \sin 0,2t)e^{-0,4t} \end{vmatrix}$$

$$\neq 0,$$

untuk semua titik t dalam interval $-\infty < t < +\infty$, maka penyelesaian umum dari sistem linear homogen (4.3.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$ adalah fungsi vektor

$$\mathbf{x}(t) = c_1(2, 1, 2)^T + c_2e^{-0,4t}[\cos 0,2t;\ \sin 0,2t;\ -\cos 0,2t - \sin 0,2t]^T +$$
$$c_3e^{-0,4t}[-\sin 0,2t;\ \cos 0,2t;\ -\cos 0,2t + \sin 0,2t]^T,$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 merupakan konstanta-konstanta sebarang dan $\{\mathbf{x}_1(t) = (3, -6, 5)^Te^{-0,5t},\ \mathbf{x}_2(t) = e^{-0,4t}[\cos 0,2t;\ \sin 0,2t;\ -\cos 0,2t - \sin 0,2t]^T,\ \mathbf{x}_3(t) = e^{-0,4t}[-\sin 0,2t;\ \cos 0,2t;\ -\cos 0,2t + \sin 0,2t]^T\}$ merupakan suatu himpunan penyelesaian-penyelesaian fundamental dari sistem linear homogen (4.3.8) pada interval $-\infty < t < +\infty$. Atau dalam notasi skalar, yaitu

$$x_1(t) = 2c_1 + e^{-0,4t}(c_2 \cos 0,2t - c_3 \sin 0,2t),$$

$$x_2(t) = c_1 + e^{-0,4t}(c_2 \sin 0,2t + c_3 \cos 0,2t),$$

$$x_3(t) = 2c_1 + e^{-0,4t}[(-c_2 - c_3) \cos 0,2t + (-c_2 + c_3) \sin 0,2t]$$

yang memberikan sejumlah garam dalam tiga tangki pada waktu t. □

BAB V

PENUTUP

Berdasarkan hal-hal yang telah diuraikan dalam bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

a. Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan yang mempunyai bentuk

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + F_1(t),$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + F_2(t),$$

$$\vdots$$

$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + F_n(t)$$

dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi. Meskipun metode ini diuraikan untuk menyelesaikan sistem dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan, tetapi juga dapat digeneralisasikan untuk menyelesaikan sistem lebih dari dua persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan. Akan tetapi metode ini kurang praktis dan terlampau sulit untuk menyelesaikan sistem tiga atau lebih persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan;

b. Sistem linear di atas dapat ditulis dalam notasi matriks $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$. Sistem linear disebut homogen, jika $\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{0}$ dan takhomogen, jika $\mathbf{F}(t) \neq \mathbf{0}$. Metode nilai eigen dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linear homogen. Ada tiga langkah dalam metode ini, pertama, menentukan persamaan karakteristik $|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}| = 0$; kedua, mendapatkan akar-akar persamaan karakteristik atau nilai-nilai eigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; dan ketiga, menggunakan setiap nilai eigen α untuk menyelesaikan sistem persamaan aljabar linear homogen $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ untuk mendapatkan vektor-vektor eigen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$;

c. Penyelesaian umum dari sistem linear takhomogen mempunyai bentuk $\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t)$, dimana $\phi_c(t)$ merupakan penyelesaian umum dari sistem linear homogen yang bersesuaian dan $\phi_p(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen. Metode koefisien taktentu dan variasi parameter dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian khusus dari sistem linear takhomogen.

d. Sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan mempunyai beberapa penerapan dalam bidang fisika, misalnya mekanika, rangkaian listrik dan campuran.

Selain hal-hal di atas, berikut ini adalah saran-saran untuk pengembangan lebih lanjut :

a. Metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan;

b. Penerapan sistem n persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan dalam bidang yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P. and R. C. Gupta, 1991, *Essentials of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill Book Company, Singapura.

Anton, H., 1987, *Elementary Linear Algebra*, diterjemahkan oleh : P. Silaban, Edisi ke-5, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Boyce, W. E. and R. C. Diprima, 1986, *Elementary Differential Equations*, 4th Ed., John Wiley and Sons Inc., New York.

Buddhi, W. S., 1995, *Aljabar Linear*, Penerbit P.T. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Burghes, D. N. and M. S. Borrie, 1981, *Modelling with Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York.

Cheng, D. K., 1984, *Analysis of Linear Systems*, diterjemahkan oleh : R. S. DH. Gulo, Penerbit Aksara Persada Press, Jakarta.

Davis, P. W., 1992, *Differential Equations for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice Hall International Inc., London.

Edward C. H. and D. E. Penney, 1985, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, Prentice Hall International Inc., London.

Finizio, N. and G. Ladas, 1982, *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*, diterjemahkan oleh : W. Santoso, Edisi ke-2, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Gabel, R. A. and R. A. Roberts, 1987, *Signals and Systems*, diterjemahkan oleh : H. J. Wospakrik, Edisi ke-3, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Hayt Jr, W. H. and J. E. Kemmerly, 1996, *Engineering Circuits Analysis*, diterjemahkan oleh : P. Silaban, Edisi ke-4, jilid 1, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Hollands, R., 1999, *A Dictionary of Mathematics*, diterjemahkan oleh : N. Hutauruk, Edisi ke-6, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Jones, C. and P. Clamp, 1999, *Collins Gem Mathematics Basic Facts*, diterjemahkan oleh : D. R. Manik, Edisi ke-2, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Kerami, D. dan E. Iswati, 1993, *Glosarium Matematika*, Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.

Kreyszig, E., 1988, *Advanced Engineering Mathematics*, diterjemahkan oleh : B. Sumantri, Edisi ke-6, jilid 2, Penerbit P.T. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Kreyszig, E., 1988. *Advanced Engineering Mathematics*, diterjemahkan oleh : E, Hutahaean, S.M. Nababan, I. N. Susila dan W. Santosa, edisi ke-6, jilid 1, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Leon, S. J., 1995, *Linear Algebra with Applications*, 4th ed., Prentice Hall International Inc., London.

Miller, R. K., 1991, *Introduction to Differential Equations*, Prentice Hall Englewood Clliffs, New Jersey.

Purcell, E.J. and D. Varberg, 1987, *Calculus with Analytic Geometry*, diterjemahkan oleh : I. N. Susila, B. Kartasasmita, Rawuh, Edisi ke-5, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Rabenstein, A. L., 1992, *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*, 4th, Harcourt Brace Jovanovich Inc., New York.

Rice, B. J. and J. D. Strange, 1986, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Brooke/Cole Publising Co., Monterey, California.

Ross, S. L., 1980, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., John Wiley and Sons Inc., New York.

Ross, S. L., 1984, *Differential Equations*, 3rd ed., John Wiley and Sons Inc., New York.

Suryadi, D. dan S. H. Machmudi, 1985, *Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linear*, Edisi ke-3, Penerbit Ghalia Indonesia, Jakarta Timur.

Valenza, R. J., 1993, *Linear Algebra: An Introduction to Abstract Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

Wardiman, 1981, *Persamaan Diferensial Teori dan Contoh Penyelesaian Soal*, Citra Offset Purwanggan 70, Yogyakarta.

Wilardjo, L., 1997, *Kamus Istilah Fisika*, Penerbit P.T. Gramedia Widiasarana Indonesia, Jakarta.