BARISAN GRUP

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Disusun Oleh :

LIE NJUK DJIN
NIM : 931414028
NIRM : 930052010501120032

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1999

SKRIPSI

BARISAN GRUP

Oleh

LIE NJUK DJIN

NIM : 931414028

NIRM : 930052010501120032

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Dr. F.Susilo,S.J.

Tanggal 1 Juni 1999

SKRIPSI

BARISAN GRUP

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

LIE NJUK DJIN

NIM : 931414028

NIRM : 930052010501120032

Telah dipertahankan didepan Panitia Penguji
pada tanggal 18 Mei 1999
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

PANITIA PENGUJI

Nama lengkap	Tanda tangan
Dr. Frans Susilo, S.J	....
Prof. Dra. Moeharti Hw.,M.A	....
Dra. Maria Agustiani, M.Si	....

Yogyakarta, ... 1999
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP

Dr. Paul Suparno, S.J., MST

Kupersembahkan Untuk:
Bapa di Sorga
Mama dan Papa
Kakak-kakak ku
Adiku

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan kasihNya sehingga skripsi yang berjudul Barisan Grup ini dapat penulis selesaikan.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam , Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Frans Susilo,S.J. selaku Pembimbing yang dengan teliti membimbing dan memberikan masukan yang berharga.
2. Drs. Susento,M.Si. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma yang memberikan dorongan dan semangat dalam penyusunan skripsi ini.
3. Dr. St. Suwarsono selaku dosen wali yang telah memberikan banyak saran dan bimbingan selama studi.
4. Bapak dan ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
5. Dan semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam proses pembuatan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Kami menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam skripsi ini. Karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Harapan kami semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

DAFTAR ISI

Halaman

ABSTRAK

Barisan subnormal dari suatu grup G adalah barisan berhingga subgrup-subgrup dari G, yaitu H_0, H_1, H_2, ..., H_n sedemikian hingga $H_i < H_{i+1}$ dan H_i adalah subgrup normal dari H_{i+1}, dengan $H_0 = \{e\}$ dan $H_n = G$. Barisan normal dari suatu grup G adalah barisan berhingga subgrup-subgrup normal dari G, yaitu H_0, H_1, H_2, ..., H_n sedemikian hingga $H_i < H_{i+1}$, $H_0 = \{e\}$ dan $H_n = G$.

Barisan subnormal (normal) $\{K_j\}$ merupakan penghalusan dari barisan subnormal (normal) $\{H_i\}$ dalam grup G jika $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$. Dua barisan subnormal (normal) $\{H_i\}$ dan $\{K_j\}$ dari grup G yang sama dikatakan isomorfik jika keluarga grup-grup faktor $\{H_{i+1}/H_i\}$ dan $\{K_{j+1}/K_j\}$ berkorespondensi satu-satu dan grup faktor yang berkoresponden adalah isomorfik.

Suatu grup dengan elemen identitas e dikatakan sederhana jika grup tersebut tidak mempunyai subgrup normal sejati selain $\{e\}$. Suatu barisan subnormal $\{H_i\}$ dari grup G disebut barisan komposisi jika semua grup faktor H_{i+1}/H_i adalah sederhana. Suatu barisan normal $\{H_i\}$ dari grup G disebut barisan utama jika semua grup faktor H_{i+1}/H_i adalah sederhana.

Suatu subgrup normal M dari grup G dikatakan maksimal jika $M \neq G$ dan tidak ada subgrup normal sejati N dari G yang memuat M sebagai himpunan bagian sejatinya.

Suatu subgrup normal M dari grup G adalah maksimal bila dan hanya bila G/M sederhana, dan dua barisan subnormal (normal) dari suatu grup G

mempunyai penghalusan yang isomorfik. Jadi setiap dua barisan komposisi (utama) dari suatu grup G adalah isomorfik.

Himpunan $Z(G) = \{a \in G / ax = xa, \forall x \in G\}$, yang disebut pusat dari suatu grup G, merupakan subgrup normal dari G. Karena Z(G) adalah subgrup normal dari G, maka dapat dibentuk grup faktor G/Z(G). Jika diberikan homomorfisma kanonik $\phi : G \to G / Z(G)$, maka $\phi^{-1}(Z(G/Z(G))) = Z_1(G)$ adalah subgrup normal dari G, sehingga kita dapat membentuk grup faktor $G/Z_1(G)$. Selanjutnya kita dapat menentukan pusat dari $G/Z_1(G)$ dan mengambil ϕ_1^{-1} dari pusat tersebut untuk memperoleh $Z_2(G)$, dan seterusnya. Akibatnya kita dapat membentuk barisan $\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$ yang disebut barisan pusat yang naik dari grup G.

ABSTRACT

A subnormal series of a group G is a finite sequence H_0, H_1, H_2, ..., H_n of subgroups of G such that $H_i < H_{i+1}$ and H_i is a normal subgroup of H_{i+1} with $H_0 = \{e\}$ and $H_n = G$. A normal series of G is a finite sequence H_0, H_1, H_2, ..., H_n of normal subgroups of G such that $H_i < H_{i+1}$, $H_0 = \{e\}$ and $H_n = G$.

A subnormal (normal) series $\{K_j\}$ is a refinement of a subnormal (normal) series $\{H_i\}$ of a group G if $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$. Two subnormal (normal) series $\{H_i\}$ and $\{K_j\}$ of the same group G are isomorphic if there is a correspondence between the collections of factor groups $\{H_{i+1}/H_i\}$ and $\{K_{j+1}/K_j\}$ such that corresponding factor groups are isomorphic.

A group with identity element e is simple if the group has no proper normal subgroups except $\{e\}$. A subnormal series $\{H_i\}$ of a group G is a composition series if all the factor groups $\{H_{i+1}/H_i\}$ are simple. A normal series $\{H_i\}$ of a group G is a principal series if all the factor groups $\{H_{i+1}/H_i\}$ are simple.

A normal subgroup M of a group G is maximal if $M \neq G$ and there is no proper normal subgroup N of G properly containing M.

A normal subgroup M of a group G is maximal if and only if G/M is simple, and two subnormal (normal) series of a group G have isomorphic refinements. Hence every two composition (principal) series of a group G are isomorphic.

The set $Z(G) = \{a \in G / ax = xa, \forall x \in G\}$, which is called center of a group G, is a normal subgroup of G. Since Z(G) is a normal subgroup of G, then we can form the factor group G / Z(G). If $\phi : G \to G / Z(G)$ is the canonical homomorphism, then $\phi^{-1}(Z(G/Z(G))) = Z_1(G)$ is a normal subgroup of G. So we can form factor group $G/Z_1(G)$. Then we can find the center of $G/Z_1(G)$ and take ϕ_1^{-1} of the center to get $Z_2(G)$, and so on. Consequently, we can form a series $\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$ which is called the ascending central series of the group G.

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Di dalam kalkulus kita mengenal teori barisan dengan segala sifatnya. Teori barisan dalam kalkulus sudah diperkenalkan sejak Sekolah Menengah Umum hingga tingkat perguruan tinggi, sehingga teori barisan ini bukanlah teori yang asing lagi bagi mahasiswa jurusan pendidikan matematika khususnya. Mahasiswa perlu mengembangkan pengetahuannya mengenai barisan dalam lingkup yang berbeda. Ternyata teori barisan juga dapat dipelajari dalam teori grup. Barisan dalam teori grup ini dikenal sebagai Barisan Grup.

Himpunan G dengan suatu operasi biner yang terdefinisi padanya dan memiliki elemen identitas, memenuhi sifat asosiatif dan setiap anggotanya memiliki invers dalam G membentuk suatu grup. Himpunan bagian dari suatu grup G yang membentuk grup dengan operasi biner yang sama dengan operasi pada G disebut subgrup dari grup G. Subgrup-subgrup dan subgrup-subgrup normal dari suatu grup dapat membangun suatu barisan dengan memenuhi beberapa persyaratan. Kita dapat mempelajari sifat-sifat yang dimiliki oleh barisan tersebut.

Barisan berhingga subgrup-subgrup dari G yaitu H_0, H_1, H_2, ...,H_n sedemikian hingga H_i adalah subgrup normal sejati dari H_{i+1} dengan $H_0=\{e\}$ dan $H_n = G$ adalah barisan subnormal dari suatu grup G. Sedangkan barisan berhingga subgrup-subgrup normal dari G, yaitu H_0, H_1, H_2, ...,H_n sedemikian hingga H_i adalah subgrup normal sejati dari H_{i+1} dengan $H_0=\{e\}$ dan $H_n = G$ merupakan barisan normal dari grup G.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan barisan subnormal dan barisan normal dari suatu grup G ?
2. Sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh barisan subnormal dan barisan normal dari suatu grup G ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian barisan dari suatu grup G dan mengetahui sifat-sifat yang berlaku dalam barisan grup.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari mempelajari barisan grup adalah mengenal lebih jauh hubungan antar subgrup-subgrup dari grup G maupun subgrup-subgreup normal dari grup G.

E. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka sehingga dalam penulisan ini belum ditemukan hal-hal yang baru.

BAB II
LANDASAN TEORI

A. Operasi Biner

Sebelum memasuki definisi operasi biner, penulis ingin mengajak pembaca mengamati komunitas hewan di kebun binatang. Di sana hewan-hewan dikelompokkan menurut speciesnya. Harimau akan dikumpulkan dalam satu tempat, demikian juga dengan gajah dan species lainnya. Jika kita amati, seekor harimau jantan yang dikawinkan dengan seekor harimau betina akan menghasilkan seekor anak harimau. Demikian juga dengan sepasang gajah yang dikawinkan akan menghasilkan seekor anak gajah. Begitu juga dengan species yang lainnya.

Operasi biner yang akan dibicarakan di sini mempunyai karakter yang mirip dengan kasus di atas. Secara umum operasi biner didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Operasi biner # pada himpunan S adalah suatu aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut (a,b) dengan suatu elemen yang tunggal c, di mana a,b dan c adalah anggota dari S, dan ditulis a # b = c.

Jadi jika kita mengambil dua elemen sebarang dalam himpunan S dan pada kedua elemen itu dikenakan operasi biner #, maka akan dihasilkan suatu elemen dalam S. Sifat ini disebut sifat "tertutup" dari suatu operasi. Perhatikan juga bahwa elemen dari hasil operasi tersebut adalah tunggal.

Dalam kasus di atas, operasi biner # ini adalah "dikawinkan". S adalah himpunan harimau, a dan b adalah harimau jantan atau betina, a dan b mempunyai jenis kelamin yang berbeda, dan c adalah anak harimau. Ketiga-tiganya ada dalam satu species.

Namun demikian, kasus di atas bukanlah contoh yang baik untuk melukiskan operasi biner. Menurut definisi, a dan b adalah sebarang elemen dalam S. Sedangkan dalam kasus di atas, a dan b di sini adalah anggota-anggota dalam S yang sudah tertentu, yaitu harimau yang berjenis kelamin jantan atau betina, dan keduanya berbeda kelamin, jadi sudah bukan elemen yang sebarang lagi. Kelemahan yang lainnya adalah anak harimau maupun anak gajah dari hasil perkawinan tersebut bisa lebih dari satu, jadi tidak tunggal.

Contoh 2.1 Operasi + (penjumlahan biasa) pada himpunan bilangan real merupakan operasi biner.

Contoh 2.2 Operasi • (perkalian biasa) pada himpunan bilangan bulat merupakan operasi biner.

Contoh 2.3 Operasi penjumlahan pada himpunan matriks bukan merupakan operasi biner karena jika diambil matriks $A = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = [46]$, A + B tidak ada karena tidak didefinisikan.

Contoh 2.4 Diketahui $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. Operasi penjumlahan biasa (+) pada $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ bukan merupakan operasi biner karena 2 dan -2 adalah anggota-anggota $\mathbf{R}^*$ dan $2 + (-2) = 0$ tidak ada dalam $\mathbf{R}^*$.

Untuk pembicaraan selanjutnya kita tidak hanya membahas operasi + atau • saja. Kita juga akan menggunakan beberapa operasi biner lain yang akan didefinisikan secara khusus.

Contoh 2.5 Didefinisikan operasi biner # pada himpunan bilangan bulat positif, yaitu a # b = a jika a $\leq$ b, atau a # b = b jka b $\leq$ a. Jadi 3 # 5 = 3, 7 # 4 = 4, dan seterusnya.

Contoh 2.6 Didefinisikan operasi biner #' pada himpunan bilangan bulat positif, yaitu a #' b = a . Jadi 9 #' 6 = 9 , 13 #' 25 = 13 , dan seterusnya.

Operasi biner # dan #' seperti didefinisikan pada contoh 2.5 dan 2.6 merupakan dua operasi yang sering kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya untuk operasi biner #. Jika kita membeli pasta gigi di supermarket dan ada dua merk pasta gigi berbeda dengan kualitas yang sama, tetapi harga pasta gigi yang satu lebih murah dari pasta gigi yang lain, maka tentu saja kita akan memilih pasta gigi yang lebih murah. Amati juga contoh berikut untuk operasi biner #' . Jika disediakan sepasang kaos kaki dengan sepasang sepatu, maka kita akan memakai kaos kaki terlebih dulu kemudian sepatu.

Selanjutnya penulis akan mendefinisikan operasi yang bersifat komutatif dan asosiatif.

Definisi 2.2 Operasi biner # pada himpunan S dikatakan bersifat <u>komutatif</u> jika a # b = b # a , untuk setiap a dan b di dalam S.

Contoh 2.7 Operasi penjumlahan pada himpunan matriks berordo 2 x 2 bersifat komutatif.

Contoh 2.8 Operasi biner #' seperti pada contoh 2.6 tidak bersifat komutatif karena 7 #' 5 = 7 dan 5 #' 7 = 5. Jadi 7 #' 5 $\neq$ 5 #' 7.

Definisi 2.3 Operasi biner # pada himpunan S dikatakan bersifat asosiatif jika a # (b # c) = (a # b) # c , untuk setiap a,b dan c dalam S.

Contoh 2.9 Perhatikan tabel 2.1 yang mendefinisikan operasi biner # pada S = { a,b,c }. Dengan aturan sebagai berikut :

(elemen ke i dari atas di sebelah kiri) # (elemen ke j dari kiri di atas) = elemen yang terletak pada baris ke i dan kolom ke j .

Jadi a # b = c dan b # a = a, dan seterusnya. a # (b # c) = a # b = c dan (a # b) # c = c # c = a.

Tampak bahwa a # (b # c) $\neq$ (a # b) # c. Jadi operasi biner # yang didefinisikan di dalam tabel 2.1 tidak bersifat asosiatif.

Tabel 2.1

#	a	b	c
a	b	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

Contoh 2.10 Operasi penjumlahan pada himpunan bilangan bulat bersifat asosiatif.

B. Grup

Perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 2.11 Lihat kembali contoh 2.9 di atas. Untuk S = { a,b,c } dan operasi # seperti yang didefinisikan pada tabel 2.1. Amati bahwa a # x = a tidak mempunyai penyelesaian untuk x.

Contoh 2.12 Diberikan persamaan linear sebagai berikut : 7 + x = 4, dengan semesta pembicaraan himpunan semua bilangan real. Tentukan penyelesaiannya.

Solusi :	$7 + x = 4$	diberikan
	$-7 + (7 + x) = -7 + 4$	tambahkan kedua ruas dengan -7
	$(-7 + 7) + x = -7 + 4$	sifat asosiatif
	$0 \quad + x = -7 + 4$	sifat dari 0
	$x = -7 + 4$	sifat dari 0
	$x = -3$	

Jika nilai -3 dimasukkan dalam persamaan 7 + x = 4, maka diperoleh :
ruas kiri = 7 + x = 7 + (-3) = 4 = ruas kanan. Jadi -3 adalah penyelesaian dari persamaan 7 + x = 4.

Contoh 2.13 Diberikan persamaan 3x = 5 dengan semesta pembicaraan himpunan semua bilangan real. Tentukan penyelesaiannya.

Solusi :	$3x = 5$	diberikan
	$1/3 \,.\, (3x) = 1/3 \,.\, 5$	kalikan kedua ruas dengan 1/3
	$(1/3 \,.\, 3)\, x = 1/3 \,.\, 5$	sifat asosiatif
	$1 \,.\, x = 1/3 \,.\, 5$	
	$x = 1/3 \,.\, 5$	sifat dari 1
	$x = 5/3$	

Jika nilai 5/3 dimasukkan dalam persamaan 3x =5, maka diperoleh :

ruas kiri = 3x = 3 . 5/3 = 5 = ruas kanan. Jadi 5/3 adalah penyelesaian dari persamaan 3x=5.

Pada contoh 2.12 dan 2.13, semesta pembicaraan kita adalah himpunan bilangan real, di mana 0 dan 1 adalah anggota-anggota dari himpunan bilangan real. Demikian juga dengan -7 dan 1/3 yang juga merupakan anggota-anggota dari himpunan bilangan real. Karena 0, 1, -7, dan 1/3 ada dalam himpunan bilangan real, maka penyelesaian dari persamaan-persamaan itu dapat dicari.

Pada himpunan bilangan real dengan operasi penjumlahan biasa, bilangan nol mempunyai sifat 0 + x = x + 0 = x. Himpunan bilangan real dengan operasi perkalian biasa mempunyai sifat 1 . x = x. 1 = x.

Secara umum, jika diberikan suatu semesta pembicaraan S dengan operasi biner # dan persamaan a # x = b, maka dibutuhkan pengerjaan aljabar untuk menyelesaikannya. Kunci utama untuk melakukan pengerjaan aljabar itu adalah adanya elemen e dalam S yang memenuhi sifat e # x = x # e = x, untuk setiap x dalam S. Selanjutnya untuk setiap a dalam S kita memerlukan adanya elemen a^{-1} dalam S yang memenuhi sifat a^{-1} # a = a # a^{-1} = e. Juga dibutuhkan sifat asosiatif yang berlaku dalam S. Langkah terakhir adalah menghitung untuk menemukan penyelesaian akhir.

Pembicaraan di atas mengawali perkenalan kita pada karakter-karakter yang dimiliki oleh suatu grup.

Definisi 2.4 Suatu <u>grup</u> (G,#) adalah suatu himpunan G dengan operasi biner # pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

(1) Operasi biner # bersifat asosiatif

(2) Ada elemen e dalam G sedemikian hingga e # x = x # e = x, untuk setiap x dalam G

(3) Untuk setiap a dalam G, ada elemen a^{-1} dalam G yang memenuhi $a^{-1} \# a = a \# a^{-1} = e$.

Elemen e pada aksioma kedua di atas disebut elemen identitas terhadap operasi # pada G. Elemen a^{-1} pada aksioma di atas disebut invers dari a terhadap operasi # pada G.

Pada beberapa buku aljabar, definisi suatu grup memenuhi empat aksioma, yaitu ketiga aksioma di atas ditambah satu aksioma lagi, yaitu operasi # bersifat tertutup. Sebenarnya aksioma tambahan ini berlebihan karena sifat ketertutupan itu sudah termasuk dalam definisi operasi biner #. Oleh sebab itu penulis tidak menambahkan aksioma keempat ini dalam definisi suatu grup.

mod n

Contoh 2.14 Jika diketahui **Z** adalah himpunan semua bilangan bulat, maka (**Z**,+) adalah suatu grup, sebab :

1) Operasi + merupakan operasi biner pada **Z** karena bersifat tertutup. Sifat asosiatif juga dipenuhi oleh operasi ini.
2) Ada elemen identitas 0 dalam **Z** yang memenuhi $0 + x = x + 0 = x$, untuk setiap x dalam **Z**.
3) Untuk setiap x dalam **Z** pasti terdapat invers -x dalam **Z** sedemikian hingga $x + (-x) = 0$.

Contoh 2.15 ({0} , +) juga merupakan grup, karena :

1) Jelas bahwa operasi + merupakan operasi biner pada {0}.
2) $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$, jadi sifat asosiatif dipenuhi dalam {0}.
3) 0 merupakan elemen identitasnya, karena $0 + 0 = 0 + 0 = 0$
4) invers dari 0 adalah 0

Contoh 2.16 Jika S adalah himpunan bilangan bulat non-negatif, maka (S,+) bukanlah suatu grup karena 5 anggota S tidak mempunyai invers di dalam S. Invers dari 5 di sini adalah $-5 \notin S$.

Teorema berikut ini akan memperkenalkan hukum kanselasi. Dalam Aritmetika, jika diberikan 3a = 3b, maka dengan mengalikan kedua ruas dengan 1/3 akan diperoleh a = b, di mana 1/3 adalah invers dari 3 terhadap perkalian bilangan real. Teorema berikut akan membuktikan bahwa hukum kanselasi itu juga berlaku untuk sebarang grup.

Teorema 2.1 Jika G adalah grup dengan operasi biner #, maka hukum kanselasi kiri dan hukum kanselasi kanan dipenuhi dalam grup G, yaitu jika a # b = a # c maka b = c, dan jika b # a = c # a maka b = c, untuk setiap a,b,c dalam G.

Bukti :

Misalkan a # b = a # c. Menurut definisi 2.4(3) ada $a^{-1} \in G$ dan

a^{-1} # (a # b) = a^{-1} # (a # c).

Dalam grup (G,#) berlaku hukum asosiatif, sehingga (a^{-1} # a) # b = (a^{-1} # a)# c.

Oleh definisi a^{-1} dalam definisi 2.4(3) , a^{-1} # a = e, maka e # b = e # c.

Oleh definisi e dalam definisi 2.4(2), diperoleh b = c.

Jadi jika a # b = a # c, maka b = c .... (1)

Misalkan b # a = c # a. Menurut definisi 2.4(3) ada $a^{-1} \in G$ dan

(b # a) # a^{-1} = (c # a) # a^{-1}.

Dalam grup (G,#) berlaku hukum asosiatif, sehingga b # (a # a^{-1})=c # (a # a^{-1}).

Oleh definisi a^{-1} dalam definisi 2.4(3), a # a^{-1} = e , maka b # e = c # e.

Oleh definisi e dalam definisi 2.4(2) , diperoleh b = c.

Jadi jika b # a = c # a, maka b = c .... (2)

Dari (1) dan (2), terbuktilah teorema di atas. □

Teorema selanjutnya menunjukkan bahwa persamaan linear dalam suatu grup mempunyai penyelesaian yang tunggal.

Teorema 2.2 Jika G adalah suatu grup dengan operasi biner # dan jika a dan b adalah sebarang elemen dalam G, maka persamaan linear a # x= b dan y # a = b mempunyai penyelesaian yang tunggal dalam G.

Bukti :

Pertama akan ditunjukkan bahwa paling sedikit ada satu penyelesaian, yaitu $x = a^{-1} \# b$ yang memenuhi persamaan linear a # x = b. Perhatikan bahwa

$a \# x = a \# (a^{-1} \# b) = (a \# a^{-1}) \# b = e \# b = b$.

Jadi $a^{-1} \# b$ adalah penyelesaian dari a # x = b.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa penyelesaian itu tunggal.

Misalkan penyelesaiannya tidak tunggal, jadi ada x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan linear a # x = b, dengan $x_1 \neq x_2$.

Maka $a \# x_1 = b$ dan $a \# x_2 = b$. Berarti $a \# x_1 = a \# x_2$. Menurut teorema 2.1, diperoleh $x_1 = x_2$. Kontradiksi.

Jadi terbukti bahwa penyelesaian persamaan a # x = b tunggal.

Dengan cara yang sama, $b \# a^{-1}$ adalah penyelesaian tunggal dari y # a = b. □

Definisi 2.5 Suatu grup (G,#) dikatakan <u>abelian</u> jika operasi biner # pada G bersifat komutatif, yaitu a # b = b # a, untuk setiap a dan b dalam G.

Contoh 2.17 Himpunan M2($\mathbb{R}$) yang terdiri dari matriks berordo 2x2 dengan elemen-elemen bilangan real terhadap operasi penjumlahan matriks membentuk grup abelian.

Teorema 2.3 Misalkan G dengan operasi biner # adalah suatu grup.

(a) Elemen identitas dari G adalah tunggal, yaitu jika e dan f adalah elemen-elemen identitas dalam G, maka e = f.

(b) Setiap elemen dalam grup mempunyai invers yang tunggal, yaitu jika x dan y keduanya adalah invers dari a dalam G, maka x = y.

Bukti :

(a) Misalkan e dan f adalah elemen-elemen identitas dalam G, maka :

$e \# a = a \# e = a$ dan $f \# a = a \# f = a$, untuk setiap a dalam G.

Karena $e \# a = a$, untuk setiap a dalam G, maka

$e \# f = f$, karena f dalam G ....(1)

Karena $a \# f = a$, untuk setiap a dalam G, maka

$e \# f = e$, karena e dalam G ....(2)

Jadi $e \# f = f$ dan $e \# f = e$, sehingga $e = f$.

(b) Misalkan x dan y adalah invers-invers dari a dalam G, maka :

$a \# x = x \# a = e$ dan $a \# y = y \# a = e$, di mana e adalah elemen identitas dalam G.

Maka
$$\begin{aligned} x &= x \# e \\ &= x \# (a \# y) \\ &= (x \# a) \# y \\ &= e \# y = y. \end{aligned}$$
Jadi x = y. □

Teorema 2.4 Diketahui (G,#) adalah grup. Jika a dan b dalam G, maka $(a \# b)^{-1} = b^{-1} \# a^{-1}$.

Bukti :

$(a \# b) \# (b^{-1} \# a^{-1}) = a \# [b \# (b^{-1} \# a^{-1})] = a \# [(b \# b^{-1}) \# a^{-1}] = a \# [e \# a^{-1}]$

$= \; a \# a^{-1} = e.$

Jadi $(a \# b) \# (b^{-1} \# a^{-1}) = e$ .... (1)

$(b^{-1} \# a^{-1}) \# (a \# b) = b^{-1} \# [a^{-1} \# (a \# b)] = b^{-1} \# [(a^{-1} \# a) \# b] = b^{-1} \# [e \# b]$

$= b^{-1} \# b = e.$

Jadi $(b^{-1} \# a^{-1}) \# (a \# b) = e$ .... (2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $(b^{-1} \# a^{-1})$ adalah invers dari $(a \# b)$. Karena invers dari setiap elemen dalam grup adalah tunggal, maka $(a \# b)^{-1} = b^{-1} \# a^{-1}$. □

Definisi 2.6 Himpunan berhingga adalah suatu himpunan yang merupakan himpunan kosong atau himpunan yang berkorespondensi satu-satu dengan himpunan { 1,2,3, ...,k }, di mana k adalah suatu bilangan asli.

Sejauh ini kita baru membicarakan grup tak berhingga, yaitu grup (G,#) dengan himpunan tak berhingga G. Grup berhingga adalah grup (G,#) dengan himpunan G yang berhingga.

Contoh 2.18 G = { e } dengan operasi # yang didefinisikan oleh $e \# e = e$ membentuk suatu grup. Ini adalah grup berhingga karena himpunan G adalah himpunan berhingga.

Contoh 2.19 G = { e, a, b } dengan operasi # yang didefinisikan seperti dalam tabel 2.2 membentuk grup berhingga.

Tabel 2.2

#	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Setiap grup haruslah mempunyai paling sedikit satu elemen, yaitu elemen identitas e. Suatu grup yang hanya mempunyai satu elemen disebut trivial. Suatu grup trivial ditulis dengan bentuk ({ e }, #), dengan e adalah elemen identitas grup tersebut.

C. Subgrup

Seringkali dijumpai bahwa subset dari suatu grup, juga membentuk grup terhadap operasi yang sama, misalnya ($\mathbb{R}$,+) dalam ($\mathbb{C}$,+), dengan $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks.

Definisi 2.7 Jika (G,#) adalah grup, H himpunan bagian dari G, dan (H,#) membentuk grup, maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G.

Contoh 2.20 Karena ($\mathbb{R}$,+) grup, $\mathbb{Z}$ subset $\mathbb{R}$ dan ($\mathbb{Z}$,+) grup, maka ($\mathbb{Z}$,+) subgrup dari ($\mathbb{R}$,+).

Setiap grup G adalah subgrup dari dirinya sendiri.

Lemma 2.1 Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner #, dan H subgrup dari G.

(a) Jika f adalah elemen identitas dari H dan e adalah elemen identitas dari G, maka f = e.

(b) Jika a $\in$ H, maka invers dari a di H sama dengan invers dari a di G.

Bukti :

(a) Karena f elemen identitas dari H, maka f # f = f. Sehingga jika f^{-1} adalah invers dari f dalam G, maka

$$\begin{aligned} f^{-1} \# (f \# f) &= f^{-1} \# f \\ (f^{-1} \# f) \# f &= e \\ e \# f &= e \\ f &= e \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa f = e.

(b) Misalkan a^{-1} adalah invers dari a di G dan c adalah invers dari a di H. Maka a # c = c # a = f. Dengan Lemma 2.1(a), a # c = c # a = e. Berarti c juga merupakan invers dari a di G. Menurut teorema 2.3(b), c = a^{-1}. $\square$

Teorema 2.5 Misalkan H subset yang tidak kosong dari G, dan (G,#) grup. Maka H subgrup dari G bila dan hanya bila

(a) H tertutup terhadap operasi biner # pada G.

(b) Untuk setiap a dalam H, a^{-1} ada dalam H.

Bukti :

($\Rightarrow$) H subgrup dari G, maka H membentuk grup dengan operasi biner # pada G.

Berarti menurut definisi 2.4 dan lemma 2.1, kondisi (a) dan (b) dipenuhi.

($\Leftarrow$) Diketahui kondisi (a) dan (b) dipenuhi. Maka

[1] Operasi biner # tertutup pada H.

[2] H subset G dan (G,#) grup. Berarti sifat asosiatif juga berlaku

untuk elemen - elemen dalam H.

[3] Setiap $a \in H$ mempunyai $a^{-1} \in H$, dan $a \# a^{-1} = a^{-1} \# a = e$.

Karena operasi biner # tertutup pada H, maka $e \in H$. Jadi H dengan operasi biner # mempunyai elemen identitas $e \in H$.

[4] Setiap elemen a di H pasti mempunyai invers a^{-1} di H.

Maka (H,#) merupakan grup.

Jadi H adalah subgrup dari G. $\square$

Dalam membuktikan sifat-sifat/teorema-teorema untuk grup (G,#) secara umum disepakati bahwa operasi di dalam grup tersebut dipandang seolah-olah sebagai perkalian. Sehingga notasi "a # b" disederhanakan menjadi "ab". Invers dari a ditulis a^{-1}, dan elemen identitas ditulis dengan huruf e. Hal ini dilakukan karena alasan keseragaman dan penyederhanaan notasi. Tetapi bila ada keterangan khusus tentang operasinya, maka notasi tadi diganti atau disesuaikan dengan operasinya. Misalnya untuk operasi penjumlahan a # b ditulis a + b, a^{-1} diganti dengan -a, dan e diganti dengan 0.

Definisi 2.8 Jika G adalah grup dan $a \in G$, maka

(a) $a^0 = e$

(b) $a^{n+1} = a^n a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(c) $a^{-n} = (a^{-1})^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Teorema 2.6 Jika G adalah grup dan $a \in G$, maka untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$ berlaku $a^n a^{-1} = a^{n-1}$.

Bukti :

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk n = 0.

$a^n a^{-1} = a^0 a^{-1} = ea^{-1}$ definisi 2.8 (a)

$= a^{-1}$ definisi 2.4

$= a^{0-1}$

$= a^{n-1}$

Jadi pernyataan benar untuk n = 0.

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk n = 1, 2, 3, ...

Andaikan pernyataan benar untuk n = k, maka $a^n a^{-1} = a^k a^{-1} = a^{k-1}$. Sehingga untuk n = k + 1, $a^n a^{-1} = a^{k+1} a^{-1}$

$= (a^k a)a^{-1}$ definisi 2.8 (b)

$= a^k (aa^{-1})$ asosiatif

$= a^k e$ definisi 2.4

$= a^k (a^{-1} a)$ definisi 2.4

$= (a^k a^{-1})a$ asosiatif

$= a^{k-1} a$ pengandaian

$= a^{(k-1)+1}$ definisi 2.8 (b)

$= a^{k+(-1+1)}$ asosiatif

$= a^{k+(1-1)}$ komutatif

$= a^{(k+1)-1}$ asosiatif

$= a^{n-1}$

Jadi pernyataan benar untuk n = k + 1.

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk n = -1, -2, -3, ...

Jika n adalah suatu bilangan bulat negatif, maka ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian hingga n = -p. Sehingga $a^n a^{-1} = a^{-p} a^{-1}$

$= (a^{-1})^p (a^{-1})$ definisi 2.8 (c)

$= (a^{-1})^{p+1}$ definisi 2.8 (b)

$= a^{-(p+1)}$ definisi 2.8 (c)

$= a^{-p-1}$ distributif

$= a^{n-1}$

Jadi pernyataan benar untuk n = -1, -2, -3, ... $\square$

Teorema 2.7 Jika G adalah grup dan $a \in G$, maka untuk setiap $m,n \in \mathbf{Z}$ berlaku

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti :

Teorema ini akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

(a) Ambil sebarang $m \in \mathbf{Z}$

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk n = 0.

$a^m a^0 = a^m e$ definisi 2.8 (a)

$= a^m$ definisi 2.4

$= a^{m+0}$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk n = 0.

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk n = 1, 2, 3, ...

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk n = k. Akan dibuktikan pernyataan tersebut juga benar untuk n = k + 1. Karena pernyataan tersebut benar untuk n = k, maka $a^m a^k = a^{m+k}$, sehingga

$a^m a^{k+1} = a^m (a^k a)$ definisi 2.8(b)

$= (a^m a^k)a$ asosiatif

$= a^{m+k} a$ pengandaian

$= a^{(m+k)+1}$ definisi 2.8(b)

$= a^{m+(k+1)}$ asosiatif

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$.

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n = -1, -2, -3, \ldots\ldots\ldots$.

Jika n adalah suatu bilangan bulat negatif, maka ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian hingga $n = -p$. Andaikan pernyataan benar untuk $p = k$. Akan dibuktikan pernyataan tersebut juga benar untuk $p = k + 1$. Karena pernyataan tersebut benar untuk $p = k$, maka $a^m a^{-p} = a^m a^{-k} = a^{m-k}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
a^m a^{-(k+1)} &= a^m (a^{-1})^{k+1} && \text{definisi 2.8 (c)}\\
&= a^m ((a^{-1})^k (a^{-1})) && \text{definisi 2.8 (b)}\\
&= a^m (a^{-k} a^{-1}) && \text{definisi 2.8 (c)}\\
&= (a^m a^{-k}) a^{-1} && \text{asosiatif}\\
&= a^{m-k} a^{-1} && \text{pengandaian}\\
&= a^{(m-k)-1} && \text{teorema 2.6}\\
&= a^{m+(-k-1)} && \text{asosiatif}\\
&= a^{m-(k+1)} && \text{distributif}
\end{aligned}
$$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $p = k + 1$.

(b) Ambil sembarang $m \in \mathbf{Z}$.

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n = 0$.

$(a^m)^0 = e = a^0 = a^{m \cdot 0}$. Jadi pernyataan benar untuk $n = 0$.

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$.

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$. Akan dibuktikan pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$. Karena pernyataan benar untuk $n = k$, maka $(a^m)^k = a^{mk}$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
(a^m)^{k+1} &= (a^m)^k (a^m) && \text{definisi 2.8(b)}\\
&= a^{mk} a^m && \text{pengandaian}\\
&= a^{mk+m} && \text{teorema 2.7(a)}\\
&= a^{m(k+1)}
\end{aligned}
$$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk n = k+1.

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk n = -1, -2, -3, ...

Untuk n suatu bilangan bulat negatif, ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian hingga n = -p. Menurut teorema 2.7 (a), $a^m a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = e$ dan $a^{-m}a^m = a^{-m+m} = a^0 = e$, maka $(a^m)^{-1} = a^{-m}$. Sehingga

$$\begin{aligned}(a^m)^n = (a^m)^{-p} &= ((a^m)^{-1})^p && \text{definisi 2.8 (c)}\\ &= (a^{-m})^p\\ &= a^{(-m)p} && \text{pernyataan benar untuk } p = 1, 2, 3, \ldots\ldots\\ &= a^{m(-p)}\\ &= a^{mn}\end{aligned}$$

Jadi pernyataan benar untuk n = -1, -2, -3, ...□

Definisi 2.9

(a) Orde suatu grup.

Banyaknya elemen di dalam suatu grup berhingga G disebut <u>orde dari grup G</u> dan ditulis $|G|$.

(b) Orde suatu elemen grup.

Jika a adalah suatu elemen dari suatu grup, maka bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$ disebut <u>orde dari a</u> dan ditulis $\theta(a)$. Bila tidak ada bilangan n semacam itu, maka dikatakan bahwa a mempunyai <u>orde tak berhingga</u>.

Teorema 2.8 Bila G grup dan a dalam G, maka $\langle a \rangle = \{ a^n \ / \ n \in \mathbf{Z} \}$ adalah subgrup dari G.

Bukti :

Kita akan menggunakan teorema 2.5 untuk membuktikan teorema ini.

[1] Elemen identitas e dari G ada dalam $< a >$ karena $a^0 = e$. Jadi $<a>$ tidak kosong.

[2] Ambil sebarang a^r dan a^s dalam $< a >$, dengan r dan s dalam **Z**. Maka menurut teorema 2.6, $a^r \; a^s = a^{r+s}$, yang merupakan anggota $< a >$ karena $r + s \in \mathbf{Z}$.

Jadi $< a >$ tertutup terhadap operasi biner dalam G.

[3] Ambil sebarang $a^r \in < a >$, maka a^{-r} ada dalam $< a >$ dan $a^r \; a^{-r} = a^0 = e$.

Dari [1], [2], dan [3], terbukti bahwa $< a >$ adalah subgrup dari G. □

Definisi 2.10 Subgrup $< a >$ dalam teorema 2.7 di atas disebut <u>subgrup siklik</u> dari G yang dibangun oleh a.

Definisi 2.11 Suatu elemen a dari suatu grup G dikatakan <u>membangun G</u> (atau merupakan <u>generator</u> untuk G) jika $< a > = G$. Suatu grup G disebut <u>siklik</u> jika ada elemen a dalam G yang membangun G.

Contoh 2.21 Diberikan V = {e,a,b,c} dengan operasi biner # yang didefinisikan pada tabel 2.3.

Tabel 2.3

#	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(V,#) grup. Jika $V_1 = \{e,a\}$, maka V_1 adalah subgrup siklik dari V yang dibangun oleh a, yaitu $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a \# a = e$, $a^3 = a^2 \# a = e \# a = a$, dan seterusnya. Jadi $V_1 = \langle a \rangle$. Sedangkan V bukan grup siklik karena

$\langle e \rangle = \{e\}$, $\langle a \rangle = \{e,a\}$, $\langle b \rangle = \{e,b\}$, $\langle c \rangle = \{e,c\}$.

Jadi tidak ada $x \in V$ sedemikian hingga $\langle x \rangle = V$.

D. Grup Permutasi

Grup permutasi sangat erat kaitannya dengan fungsi atau pemetaan.

Definisi 2.12 Fungsi atau pemetaan f dari himpunan A ke dalam himpunan B adalah aturan yang memasangkan setiap elemen a dari A dengan tepat satu elemen b dari B. Kita katakan f memetakan a ke b, dan f memetakan A ke dalam B.

Jika fungsi f memetakan a ke b, maka ditulis f(a) = b, dan b disebut bayangan dari a oleh pemetaan f. Sedangkan jika f memetakan A ke dalam B, maka ditulis $f : A \rightarrow B$, dan himpunan A disebut domain dari f, himpunan B disebut kodomain dari f, sedangkan himpunan $f(A) = \{ f(a) / a \in A \}$ disebut range dari f.

Definisi 2.13 Suatu fungsi dari himpunan A ke dalam himpunan B disebut fungsi satu-satu (atau fungsi injektif) jika setiap elemen dalam range dari f merupakan bayangan dari tepat satu elemen di A, dan disebut fungsi onto (atau fungsi surjektif) jika setiap elemen dalam B merupakan bayangan dari suatu elemen di A.

Jadi untuk memperlihatkan bahwa f adalah fungsi satu-satu, kita harus menunjukkan: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, untuk setiap a_1, a_2 dalam A. Untuk memperlihatkan bahwa f adalah fungsi onto, kita harus menunjukkan : $(\forall b \in B)$ $(\exists a \in A)\ f(a) = b$.

Definisi 2.14 Fungsi satu-satu dan onto disebut sebagai fungsi bijektif.

Definisi 2.15 Diberikan himpunan S yang tidak kosong. Permutasi pada S adalah fungsi bijektif dari S ke S.

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan g dari B ke dalam C di mana B adalah kodomain dari f. Kita ilustrasikan fungsi-fungsi ini di bawah:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Misalkan $a \in A$, maka bayangannya yaitu f(a) berada dalam B dimana B adalah domain dari g. Oleh sebab itu, kita dapat memperoleh bayangan dari f(a) di bawah fungsi g, yaitu g(f(a)). Jadi kita mempunyai aturan yang menetapkan tiap-tiap elemen $a \in A$ dengan suatu elemen yang terangkai dengannya, yaitu $g(f(a)) \in C$. Dengan kata lain, kita mempunyai suatu fungsi dari A ke dalam C. Fungsi baru ini disebut fungsi komposisi dari f dan g yang dinyatakan oleh $(g \circ f)$. Secara singkat, jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$, maka kita definisikan suatu fungsi $(g \circ f): A \to C$ dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Contoh 2.22 Diberikan A = { 1,2,3,4,5 } dan fungsi f : $A \to A$ yang didefinisikan sebagai berikut; f (1) = 4, f (2) = 2, f (3) = 5, f (4) = 3, dan f (5) =1. Untuk mempermudah penulisan, fungsi f dapat dinyatakan dengan

$f = \begin{pmatrix} 12345 \\ 42531 \end{pmatrix}$. Jelas bahwa fungsi f ini adalah fungsi yang bijektif. Diberikan

juga fungsi g : $A \to A$ yang didefinisikan sebagai berikut g(1) = 3, g(2) = 5, g(3) = 4,

g(4) = 2, dan g(5) =1. Fungsi g yang bijektif ini dapat dinyatakan dengan

$g = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35421 \end{pmatrix}$, maka $f \circ g = \begin{pmatrix} 12345 \\ 42531 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12345 \\ 35421 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 51324 \end{pmatrix}$.

Tampak bahwa f o g juga menghasilkan suatu fungsi yang bijektif. Jadi f, g dan f o g merupakan permutasi-permutasi pada A.

Teorema 2.9 Komposisi dua fungsi yang bijektif menghasilkan fungsi yang bijektif.

Bukti :

Misalkan dua fungsi yang bijektif itu adalah $f : B \to C$ dan $g : A \to B$. Akan ditunjukkan bahwa $f \circ g : A \to C$ adalah fungsi yang injektif dan surjektif.

(i) Ambil sembarang x_1 dan x_2 dalam domain g sedemikian sehingga $(f \circ g)(x_1) = (fog)(x_2)$. Akan ditunjukkan bahwa $x_1 = x_2$.

Jika $(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$, maka $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Karena f adalah fungsi yang bijektif, maka $g(x_1) = g(x_2)$. Karena g adalah fungsi yang bijektif, maka $x_1 = x_2$.

Jadi $(\forall x_1, x_2 \in A)((fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Jadi $fog : A \to C$ adalah fungsi injektif.

(ii). Ambil sembarang $z \in C$. Akan ditunjukkan bahwa ada $x \in A$ sedemikian hingga $(fog)(x) = z$. Karena $z \in C$ dan f adalah fungsi bijektif, maka pasti ada $y \in B$ sedemikian hingga $f(y) = z$. Diketahui g adalah fungsi bijektif, maka pasti ada $x \in A$ sedemikian hingga $g(x) = y$.

Jadi $(\forall z \in C)(\exists x \in A)((fog)(x) = f(g(x)) = f(y) = z)$.

Jadi $fog : A \to C$ adalah fungsi surjektif.

Jadi, karena $fog : A \to C$ adalah fungsi injektif dan surjektif, maka menurut definisi 2.14, $fog : A \to C$ adalah fungsi bijektif. □

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, dan $b \in B$. Maka invers dari b dinyatakan oleh $f^{-1}(b)$ yang terdiri dari elemen-elemen A yang dipetakan pada b, yaitu elemen-elemen dalam A yang memiliki b sebagai bayangannya. Jadi, jika $f : A \to B$, maka $f^{-1}(b) = \{x \in A \,/\, f(x) = b\}$. Perhatikan bahwa $f^{-1}(b)$ merupakan subset dari A. Kita membaca f^{-1} sebagai "f invers".

Sekarang kita perluas definisi invers dari fungsi. Misalkan $f : A \to B$ dan $D \subseteq B$. Maka invers dari D dibawah fungsi f yang dinyatakan oleh $f^{-1}(D)$, terdiri dari elemen-elemen dalam A yang dipetakan pada beberapa elemen dalam D. Jadi $f^{-1}(D) = \{x \in A \,/\, f(x) \in D\}$. Invers dari suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi.

Teorema 2.10 Jika $f : A \to B$ adalah fungsi yang bijektif, maka invers dari fungsi f pasti merupakan suatu fungsi.

Bukti :

Jika $f : A \to B$ adalah fungsi bijektif, maka setiap $b \in B$ akan berpasangan dengan sebuah elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke A, yaitu $f^{-1} : B \to A$. □

Teorema 2.11 Misalkan A himpunan tak kosong dan S(A) adalah himpunan semua permutasi pada A . Maka S(A) dengan operasi komposisi fungsi membentuk suatu grup.

Bukti :

[1] Himpunan S(A) terdiri dari semua fungsi bijektif dari A ke A. Maka menurut teorema 2.8, operasi komposisi ini bersifat tertutup dalam S(A).

[2] Ambil sembarang f, g ,h dalam S(A). Perhatikan bahwa f,g dan h adalah fungsi-fungsi bijektif dari A ke A. Maka : $[(f \circ g) \circ h](a) = [f \circ g](h(a))$

$$= f(g(h(a)))$$

$$= f((g \circ h)(a))$$

$$= [f \circ (g \circ h)](a),$$

untuk setiap f, g dan h dalam S(A) dan setiap $a \in A$.

Jadi operasi komposisi bersifat asosiatif.

[3] Ada elemen identitas, yaitu permutasi $r : A \to A$, di mana $r(a) = a$, untuk setiap a dalam A. Ambil sembarang f dalam S(A), maka $(r \circ f)(a) = r(f(a)) = f(a)$ dan $(f \circ r)(a) = f(r(a)) = f(a)$.

Jadi ada elemen identitas $r \in S(A)$ yang memenuhi $(r \circ f)(a) = (f \circ r)(a) = f(a)$ untuk tiap $a \in A$.

[4] Menurut teorema 2.9, setiap f dalam S(A) mempunyai invers $f^{-1} : A \to A$ karena f adalah fungsi bijektif dan $f^{-1} \in S(A)$. Misalkan $f(a) = a'$, maka $f^{-1}(a') = a$. Sehingga $r(a') = a' = f(a) = f(f^{-1}(a')) = (f \circ f^{-1})(a')$ dan $r(a) = a = f^{-1}(a') = f^{-1}(f(a')) = (f^{-1} \circ f)(a)$. Maka $f \circ f^{-1} = r$ dan $f^{-1} \circ f = r$. Jadi $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = r$.

Jadi (S(A), o) dalah grup. □

Definisi 2.16 Diberikan himpunan A yang tidak kosong. Grup permutasi dari A adalah grup yang elemen - elemennya berupa permutasi pada A dengan operasi komposisi.

Definisi 2.17 Misalkan A adalah himpunan berhingga { 1,2,3, ..., n }. Grup yang terdiri dari semua permutasi pada A disebut grup simetrik dan ditulis S_n.

Jadi grup permutasi pada A tidak harus memuat semua permutasi pada A. Grup simetrik dengan sendirinya merupakan grup permutasi.

Contoh 2.23 Diberikan A = { 1,2,3 }, maka

$$S_3 = \left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}\right\} = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$$

S_3 adalah himpunan semua permutasi pada A. Hasil operasi komposisi pada S_3 tampak pada tabel 2.4. Operasi komposisi di sini bersifat tertutup, dan x_1 merupakan elemen identitas. Setiap elemen mempunyai invers dalam S_3, yaitu $x_1^{-1} = x_1$, $x_2^{-1} = x_2$, $x_3^{-1} = x_5$, $x_4^{-1} = x_4$, $x_5^{-1} = x_3$, $x_6^{-1} = x_6$. Dapat diperiksa bahwa sifat asosiatif dipenuhi di sini.

Sedangkan $P = \left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}\right\} = \{ x_1, x_3, x_5 \}$ adalah grup permutasi dari A dan dapat diperiksa dalam tabel 2.5.

Tabel 2.4

o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_1	x_4	x_3	x_6	x_5
x_3	x_3	x_6	x_5	x_2	x_1	x_4
x_4	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_4	x_1	x_6	x_3	x_2
x_6	x_6	x_3	x_2	x_5	x_4	x_1

Tabel 2.5

o	x_1	x_3	x_5
x_1	x_1	x_3	x_5
x_3	x_3	x_5	x_1
x_5	x_5	x_1	x_3

BAB III
HOMOMORFISMA DAN GRUP FAKTOR

Dalam Bab II kita telah mengenal apa itu grup, subgrup dan beberapa sifat sederhana yang dimiliki oleh grup. Dalam bab III ini kita akan membahas tentang relasi antar grup. Untuk itu kita akan berkenalan dengan homomorfisma, isomorfisma, kernel, koset, subgrup normal, dan grup faktor. Bab III ini akan diawali dengan homomorfisma.

A. Homomorfisma

Definisi 3.1 Diberikan grup $(G,*)$ dan $(H,\#)$. Pemetaan $\phi : G \to H$ disebut homomorfisma jika $\phi(a * b) = \phi(a) \# \phi(b)$, $\forall a,b \in G$.

Pemetaan ϕ yang merupakan homomorfisma itu dikatakan mengawetkan operasi. Untuk sebarang dua grup G dan H paling sedikit terdapat satu homomorfisma $\phi : G \to H$ yang dinamakan homomorfisma trivial dan didefinisikan oleh $\phi(g) = e$, untuk setiap $g \in G$, di mana e adalah elemen identitas dari grup H.

Contoh 3.1 Diberikan $\mathbf{Z}$ = himpunan semua bilangan bulat, $2\mathbf{Z} = \{ 2x \mid x \in \mathbf{Z} \}$ dan $\mu : \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$ dengan $\mu(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. Apakah μ suatu homomorfisma ?

Penyelesaian :

(i) Ambil sebarang m dan n dalam **Z**, sedemikian hingga m = n, maka 2m = 2n. Sehingga μ(m) = μ(n). Jadi $\mu : \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$ dengan definisi di atas merupakan suatu pemetaan.

(ii) Ambil sebarang a dan b di **Z**, maka

$$\begin{aligned}\mu(a+b) &= 2(a+b)\\ &= 2a + 2b\\ &= \mu(a) + \mu(b)\end{aligned}$$

Jadi $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$, $\forall$ a,b $\in$ **Z**.

Jadi μ merupakan suatu homomorfisma.

***Definisi** 3.2* Misalkan $\phi : X \to Y$, $A \subseteq X$, dan $B \subseteq Y$. Bayangan $\phi(A)$ dari A dalam X oleh ϕ adalah $\{ \phi(a) / a \in A \}$. Bayangan invers $\phi^{-1}(B)$ dari B dalam Y adalah $\{x \in X / \phi(x) \in B\}$.

***Teorema** 3.1* Diketahui $\phi : G \to G'$ suatu homomorfisma.

a. Jika e adalah elemen identitas dalam G, maka $\phi(e)$ adalah elemen identitas dalam G'
b. Jika $a \in G$, maka $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
c. Jika H adalah subgrup dari G, maka $\phi(H)$ adalah subgrup dari G'
d. Jika K' adalah subgrup dari G', maka $\phi^{-1}(K')$ adalah subgrup dari G.

Bukti :

Misalkan (G,$*$) dan (G',#) adalah grup dengan elemen identitas berturut-turut e dan e', dan $\phi : G \to G'$ homomorfisma.

(a) Karena e elemen identitas dalam G, maka $e * e = e$, dan karena ϕ homomorfisma, maka $\phi(e) \# \phi(e) = \phi(e * e) = \phi(e) = \phi(e) \# e'$. Sehingga $\phi(e) \# \phi(e) = \phi(e) \# e'$. Menurut teorema 2.1, $\phi(e) = e'$.

Jadi $\phi(e)$ adalah elemen identitas dalam G'.

(b) Misalkan $a \in G$, maka $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Sehingga $\phi(a * a^{-1}) = \phi(a^{-1} * a) = \phi(e)$. Karena ϕ homomorfisma, maka $\phi(a) \# \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}) \# \phi(a) = \phi(e)$, di mana $\phi(e)$ adalah elemen identitas dalam G' menurut pernyataan (a).

Jadi menurut definisi 2.4 , $\phi(a^{-1})$ adalah invers dari $\phi(a)$. Karena invers dari tiap elemen adalah tunggal, maka $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$.

(c) Karena H subgrup dari G , maka $H \subseteq G$ dan (H, $*$) grup. Akan ditunjukkan (ϕ(H),#) adalah subgrup dari (G',#).

Menurut definisi 3.2, $\phi(H) = \{ \phi(h) / h \in H \}$.

i. Ambil sebarang $\phi(a)$ dan $\phi(b)$ di $\phi(H)$, dengan a, $b \in H$. Maka $\phi(a) \# \phi(b) = \phi(a * b)$, karena ϕ adalah homomorfisma. Karena a dan b ada dalam subgrup H, maka $a * b$ juga ada dalam H. Sehingga $\phi(a*b) \in \phi(H)$. Jadi $\phi(H)$ tertutup terhadap operasi #.

ii. Ambil sebarang $\phi(h) \in \phi(H)$ dengan $h \in H$, maka $\phi(h)^{-1} = \phi(h^{-1}) \in \phi(H)$ karena $h^{-1} \in H$.

Jadi menurut teorema 2.5, (ϕ(H), #) adalah subgrup dari (G',#).

d. Karena K' subgrup dari G', maka $K' \subseteq G'$ dan (K',#) grup. Menurut definisi 3.2, $\phi^{-1}(K') = \{ x \in G / \phi(x) \in K' \}$. Akan ditunjukkan $\phi^{-1}(K')$ adalah subgrup dari G.

i. Ambil sebarang $a,b \in \phi^{-1}(K')$ maka $a,b \in G$ dan $\phi(a), \phi(b) \in K'$. Sehingga $a * b \in G$ dan $\phi(a* b) = \phi(a) \# \phi(b) \in K'$, karena K' subgrup dari G'. Jadi $a * b \in \phi^{-1}(K')$.

Jadi operasi $*$ bersifat tertutup dalam $\phi^{-1}(K')$.

ii. Ambil sebarang $a \in \phi^{-1}(K')$, maka $\phi(a) \in K'$ dan $\phi(a)^{-1} \in K'$, karena K' adalah subgrup dari G'. Karena $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$, maka $\phi(a^{-1}) \in K'$ dan $a^{-1} \in \phi^{-1}(K')$.

Jadi $(\forall a \in \phi^{-1}(K'))\ a^{-1} \in \phi^{-1}(K')$.

Jadi menurut teorema 2.5, $\phi^{-1}(K')$ adalah subgrup dari G. □

Jadi menurut teorema 3.1 di atas, jika diberikan suatu homomorfisma $\phi : G \to G'$, dan e' adalah elemen identitas dalam G', maka $\phi^{-1}(\{e'\})$ adalah subgrup dari G yang terdiri dari semua elemen G yang dipetakan ke e' oleh ϕ.

Definisi 3.3 Jika $\phi : G \to G'$ homomorfisma, dan e' adalah elemen identitas dalam G'maka <u>kernel</u> dari ϕ, ditulis dengan lambang ker (ϕ), di definisikan sebagai <u>ker (ϕ)</u> $= \{ a \in G / \phi(a) = e' \}$.

Dari definisi 3.3 ini ada yang menarik dari kernel ϕ, yaitu bahwa karena $\{e'\}$ adalah subgrup dari G', maka menurut teorema 3.1.(d), $\phi^{-1}(\{e'\}) =$ $\{a \in G / \phi(a) = e'\} = \ker(\phi)$ adalah subgrup dari G.

Untuk sementara kita tinggalkan pembicaraan mengenai kernel dan sekarang kita akan beralih pada koset. Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subgrup dari G. Jika $x \in G$, maka kita definisikan $xH = \{ xh / h \in H \}$ dan $Hx = \{ hx / h \in H \}$. Perhatikan bahwa xh adalah hasil operasi dari x dan h, demikian juga dengan hx.

Definisi 3.4 Jika H adalah subgrup dari grup G dan $x \in G$, maka xH disebut koset kiri dari H dalam G, dan Hx disebut koset kanan dari H dalam G.

Jika operasi pada grup tersebut adalah +, maka penulisan xH disesuaikan menjadi $x + H$, dan Hx menjadi $H + x$. Jadi $x + H = \{ x + h \mid h \in H \}$ dan $H + x = \{ h + x \mid h \in H \}$.

Contoh 3.2 Diberikan $G = S_3 = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} \right\}$$

yang merupakan grup simetri pada $A = \{1,2,3\}$.

Dan $H = \{ x_1, x_4 \} = \left\{ \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \right\}$

Dapat diperiksa bahwa H adalah subgrup dari G. Koset-koset kanan dari H dalam G adalah :

$Hx_1 = \{ x_1 \circ x_1, x_4 \circ x_1 \} = \{ x_1, x_4 \}$, o adalah operasi komposi pada G.

$Hx_2 = \{ x_1 \circ x_2, x_4 \circ x_2 \} = \{ x_2, x_6 \}$

$Hx_3 = \{ x_1 \circ x_3, x_4 \circ x_3 \} = \{ x_3, x_5 \}$

$Hx_4 = \{ x_1 \circ x_4, x_4 \circ x_4 \} = \{ x_4, x_1 \}$

$Hx_5 = \{ x_1 \circ x_5, x_4 \circ x_5 \} = \{ x_5, x_3 \}$

$Hx_6 = \{ x_1 \circ x_6, x_4 \circ x_6 \} = \{ x_6, x_2 \}$

Koset-koset kiri dari H dalam G adalah :

$x_1H = \{ x_1 \circ x_1, x_1 \circ x_4 \} = \{ x_1, x_4 \}$

$x_2H = \{ x_2 \circ x_1, x_2 \circ x_4 \} = \{ x_2, x_5 \}$

$x_3 H = \{x_3 \circ x_1, x_3 \circ x_4\} = \{x_3, x_6\}$

$x_4 H = \{x_4 \circ x_1, x_4 \circ x_4\} = \{x_4, x_1\}$

$x_5 H = \{x_5 \circ x_1, x_5 \circ x_4\} = \{x_5, x_2\}$

$x_6 H = \{x_6 \circ x_1, x_6 \circ x_4\} = \{x_6, x_3\}$.

Teorema 3.2 Misalkan $\phi : G \to G'$ suatu homomorfisma grup dan $H = \ker(\phi)$. Jika $a \in G$, maka himpunan $K = \{x \in G / \phi(x) = \phi(a)\}$ adalah koset kiri aH dari H, dan aH = Ha.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa K = aH.

Ambil sebarang $x \in K$, maka $x \in G$ dan $\phi(x) = \phi(a)$.

$\Rightarrow \phi(a)^{-1} \# \phi(x) = e'$ — e' elemen identitas G'

$\Rightarrow \phi(a^{-1}) \# \phi(x) = e'$ — teorema 3.1

$\Rightarrow \phi(a^{-1}x) = e'$ — ϕ homomorfisma ; definisi 3.1

$\Rightarrow a^{-1}x \in H$ — $H = \ker(\phi)$; definisi 3.3

$\Rightarrow$ ada $h \in H$ sedemikian hingga $h = a^{-1}x$

$\Rightarrow x = ah \in aH$

$\Rightarrow x \in aH$

Jadi $K \subseteq aH$ .... (i)

Sekarang ambil sebarang $y \in aH$, berarti ada $h \in H$ sedemikian hingga $y = ah$. Jelas bahwa y juga ada dalam G, karena $H \subseteq G$ dan $a, h \in G$ sehingga $y = ah \in G$.

Maka $\phi(y) = \phi(ah)$

$\phi(y) = \phi(a) \# \phi(h)$ — ϕ homomorfisma

$\phi(y) = \phi(a) \# e'$ — $h \in H = \ker(\phi)$

$\phi(y) = \phi(a)$ definisi 2.4

Jadi $y \in G$ dan memenuhi $\phi(y) = \phi(a)$. Jadi $y \in K$.

Jadi $aH \subseteq K$... (ii)

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $K = a H$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $K = Ha$.

Ambil sebarang $x \in K$, maka $x \in G$ dan $\phi(x) = \phi(a)$.

$\Rightarrow \phi(x) \# \phi(a)^{-1} = e'$ e' elemen identitas G'

$\Rightarrow \phi(x) \# \phi(a^{-1}) = e'$ teorema 3.1

$\Rightarrow \phi(xa^{-1}) = e'$ ϕ homomorfisma

$\Rightarrow xa^{-1} \in H$ $H = \ker(\phi)$

$\Rightarrow$ Ada $h \in H$ sedemikian hingga $h = xa^{-1}$

$\Rightarrow x = ha \in Ha$

$\Rightarrow x \in Ha$

Jadi $K \subseteq Ha$ .... (iii)

Ambil sebarang $y \in Ha$. Maka ada $h \in H$ sedemikian hingga $y = ha$. Jelas bahwa y juga ada dalam G karena $H \subseteq G$ dan $h, a \in G$ sehingga $y = ha \in G$.

Maka $\phi(y) = \phi(ha)$

$\phi(y) = \phi(h) \# \phi(a)$ ϕ homomorfisma

$\phi(y) = e' \# \phi(a)$ $h \in H = \ker(\phi)$

$\phi(y) = \phi(a)$ definisi 2.4

Jadi $y \in G$ dan memenuhi $\phi(y) = \phi(a)$. Jadi $y \in K$.

Jadi $Ha \subseteq K$ .... (iv)

Jadi dari (iii) Dan (iv) , $K = Ha$.

Karena $K = aH$ dan $K = Ha$, maka $aH = Ha$.

Lengkaplah bukti dari teorema di atas. □

Teorema 3.3 Homomorfisma grup $\phi: G \to G'$ adalah fungsi satu-satu bila dan hanya bila ker $(\phi) = \{e\}$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diketahui $\phi: G \to G'$ homomorfisma satu-satu. Dibuktikan ker$(\phi) = \{e\}$.

Ambil sebarang $x \in$ ker (ϕ), maka $\phi(x) = e'$. Padahal menurut teorema 3.1, $\phi(e) = e'$. Sehingga $\phi(x) = \phi(e)$. Karena $\phi: G \to G'$ fungsi satu-satu, maka $x = e$. Jadi ker $(\phi) = \{e\}$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui ker $(\phi) = \{e\}$. Dibuktikan $\phi: G \to G'$ fungsi satu-satu.

Ambil dua elemen x dan y dalam G sedemikian hingga $\phi(x) = \phi(y)$.

Maka $\phi(x) \# \phi(y)^{-1} = \phi(y) \# \phi(y)^{-1} = e'$.

Jadi $\phi(x) \# \phi(y^{-1}) = \phi(xy^{-1}) = e'$. Berarti $xy^{-1} \in$ ker (ϕ).

Padahal ker $(\phi) = \{e\}$, maka $xy^{-1} = e$.

Akibatnya, $x = ey = y$.

Jadi $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x = y$, untuk sebarang x dan y dalam G.

Jadi $\phi: G \to G'$ adalah fungsi satu-satu.

Terbuktilah teorema 3.3. ☐

Definisi 3.5 Subgrup H disebut <u>subgrup normal</u> dari grup G jika koset kiri dan koset kanannya sama, yaitu gH = Hg, untuk setiap g dalam G.

Dari definisi 3.5, jelas bahwa setiap subgrup dari grup abelian adalah subgrup normal.

Teorema 3.4 Diketahui grup G dan N subgrup dari G.

$(\forall g \in G)(\forall n \in N)\, gng^{-1} \in N \Leftrightarrow (\forall g \in G)\, gN = Ng.$

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $(\forall g \in G)(\forall n \in N) gng^{-1} \in N$. Akan ditunjukkan $(\forall g \in G)\, gN = Ng$. Ambil sebarang $g \in G$. Selanjutnya ambil sebarang $x \in gN$. Maka ada $n_1 \in N$ sedemikian hingga $x = gn_1$. Akibatnya $xg^{-1} = gn_1g^{-1} \in N$. Karena $xg^{-1} \in N$, maka $(xg^{-1})g = x(g^{-1}g) = xe = x \in Ng$.

Jadi $gN \subseteq Ng$ ....(1)

Ambil sebarang $y \in Ng$. Maka ada $n_2 \in N$ sedemikian hingga $y = n_2 g$. Akibatnya $g^{-1}y = g^{-1}(n_2 g) \in N$. Sehingga $g(g^{-1}y) \in gN$. Jadi $y \in gN$.

Jadi $Ng \subseteq gN$...(2)

Karena $gN \subseteq Ng$ dan $Ng \subseteq gN$, maka $gN = Ng$

($\Leftarrow$) Diketahui $(\forall g \in G)\, gN = Ng$. Akan ditunjukkan $(\forall g \in G)(\forall n \in N)$ $gng^{-1} \in N$.

Ambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $n \in N$. Maka $gn \in gN$. Karena $gN = Ng$, maka $gn \in Ng$. Berarti ada suatu $n_1 \in N$ sedemikian hingga $gn = n_1 g$. Akibatnya $gng^{-1} = (n_1 g)g^{-1}$

$= n_1(gg^{-1})$ sifat asosiatif dalam grup

$= n_1\ e$ e elemen identitas dalam G

$= n_1 \in N$

Jadi $gng^{-1} \in N$.

Lengkaplah bukti teorema ini. ◻

Teorema 3.5 Jika $\phi: G \to G'$ adalah homomorfisma grup dengan kernel H, maka kernel H adalah subgrup normal dari grup G.

Bukti:

Jika e' adalah elemen identitas dari G', maka {e'} adalah subgrup dari G'. Menurut teorema 3.1 (d), $\phi^{-1}(\{e'\}) = \{a \in G \,/\, \phi(a) = e'\}$ = kernel H adalah subgrup dari G. Sekarang akan ditunjukkan bahwa kernel H adalah subgrup normal dari grup G.

Ambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $h \in$ kernel H, maka

$\phi(ghg^{-1})$	$= \phi(g)\,\phi(h)\,\phi(g^{-1})$	ϕ homomorfisma
	$= (\phi(g)\, e')\, \phi(g^{-1})$	$h \in$ kernel H
	$= \phi(g)\,\phi(g^{-1})$	definisi 2.4
	$= \phi(g)\,\phi(g)^{-1}$	teorema 3.1
	$= e'$	definisi 2.4

Karena $g \in G$, $h \in G$ dan G grup, maka $ghg^{-1} \in G$. Jadi $ghg^{-1} \in$ kernel H. Jadi menurut teorema 3.4, kernel H adalah subgrup normal dari grup G. □

Teorema 3.6 Diberikan homomorfisma grup $\phi : G \to G'$. Jika N adalah subgrup normal dari G, maka $\phi(N)$ adalah subgrup normal dari G'. Jika N' adalah subgrup normal dari G', maka $\phi^{-1}(N')$ adalah subgrup normal dari G.

Bukti :

(i) Diketahui N adalah subgrup normal dari G. Akan diperlihatkan bahwa $\phi(N)$ adalah subgrup normal dari G'.

Karena N adalah subgrup normal dari G, maka menurut teorema 3.4 berlaku $gng^{-1} \in N$ untuk setiap $g \in G$ dan setiap $n \in N$. Sehingga

$$\phi(gng^{-1}) = \phi(gn)\,\phi(g^{-1})$$

$$= \phi(g)\phi(n)\phi(g)^{-1} \qquad \text{teorema 3.1}$$

$$\in \phi(N)$$

Jadi menurut teorema 3.4, $\phi(g)\phi(N) = \phi(N)\,\phi(g)$, $\forall\, \phi(g) \in G'$.

Jadi menurut definisi 3.5, ϕ(N) adalah subgrup normal dari G'.

(ii) Diketahui N' adalah subgrup normal dari G'. Akan ditunjukkan bahwa ϕ^{-1}(N') adalah subgrup normal dari G.

Berdasarkan definisi tentang invers dari suatu fungsi, maka $\phi^{-1}(N') = \{x \in G \mid \phi(x) \in N'\}$. Ambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $x \in \phi^{-1}(N')$. Maka $x \in G$ dan $\phi(x) \in N'$. Akan diperlihatkan bahwa $gxg^{-1} \in \phi^{-1}(N')$. Karena g, x, dan $g^{-1} \in$ grup G, maka $gxg^{-1} \in G$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \phi(gxg^{-1}) &= \phi(gx)\,\phi(g^{-1}) && \phi \text{ homomorfisma} \\ &= \phi(g)\,\phi(x)\phi(g^{-1}) && \phi \text{ homomorfisma} \\ &= \phi(g)\,\phi(x)\,\phi(g)^{-1} && \text{teorema 3.1} \end{aligned}$$

Karena $\phi(g), \phi(g)^{-1} \in G'$ dan $\phi(x) \in N'$, dan N' adalah subgrup normal dari G', maka $\phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\,\phi(x)\,\phi(g)^{-1} \in N'$. Karena $gxg^{-1} \in G$ dan $\phi(gxg^{-1}) \in N'$, maka $gxg^{-1} \in \phi^{-1}(N)$.

Jadi menurut teorema 3.4, $(\forall g \in G)\ g\phi^{-1}(N') = \phi^{-1}(N')\,g$.

Jadi menurut definisi 3.5, ϕ^{-1}(N') adalah subgrup normal dari G. ◻

B. Isomorfisma

Suatu homomorfisma $\phi : G \rightarrow G'$ mempunyai beberapa kejadian khusus. Salah satu kejadian khusus dari homomorfisma yang akan kita bicarakan di sini adalah isomorfisma. Kita akan mengawali perkenalan kita pada isomorfisma dengan definisi berikut ini.

Definisi 3.6 Homomorfisma $\phi : G \to G'$ yang bijektif disebut <u>isomorfisma</u>. Grup G dikatakan <u>isomorfik</u> dengan grup G' (ditulis " $G \cong G'$ ") bila terdapat suatu isomorfisma $\phi : G \to G'$.

Untuk menunjukkan bahwa grup G isomorfik dengan grup G', kita perlu menempuh empat langkah berikut :

Langkah 1 : definisikan suatu fungsi ϕ dari G ke G'.

Langkah 2 : tunjukkan bahwa ϕ fungsi injektif.

Langkah 3 : tunjukkan bahwa ϕ fungsi surjektif.

Langkah 4 : tunjukkan bahwa $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, $\forall\, x,y \in G$.

Contoh 3.3 Diketahui $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real, $\mathbf{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real positif, dan $\bullet$ adalah operasi perkalian pada himpunan bilangan real. Perlihatkan bahwa grup $(\mathbf{R}, +)$ isomorfik dengan grup $(\mathbf{R}^+, \bullet)$.

Langkah 1 : Didefinisikan fungsi $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ dengan aturan $\phi(x) = e^x$

Langkah 2 : Jika $\phi(x) = \phi(y)$, maka $e^x = e^y$, sehingga $x = y$. Jadi ϕ adalah fungsi injektif.

Langkah 3 : Jika $r \in \mathbf{R}^+$ maka $\phi(\ln r) = e^{\ln r} = r$, di mana $\ln r \in \mathbf{R}$. Jadi ada $\ln r \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $\phi(\ln r) = r$.

Jadi ϕ fungsi surjektif.

Langkah 4 : Untuk $x,y \in \mathbf{R}$ berlaku $\phi(x + y) = e^{x+y} = e^x \bullet e^y = \phi(x) \bullet \phi(y)$.

Dari langkah pertama sampai pada langkah keempat, terbukti bahwa $(\mathbf{R},+)$ isomorfik dengan $(\mathbf{R}^+, \bullet)$ karena ada isomorfisma

$\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$.

Kita mempunyai empat langkah di atas untuk memperlihatkan bahwa dua grup itu isomorfik. Sekarang bagaimana kita dapat memperlihatkan bahwa dua grup itu tidak isomorfik ? Pada umumnya, memperlihatkan dua grup yang isomorfik itu jauh lebih mudah dibandingkan dengan memperlihatkan dua grup yang tidak isomorfik.

Untuk memperlihatkan bahwa dua grup tidak isomorfik, kita harus kembali pada definisi 3.6. Grup G dikatakan tidak isomorfik dengan grup G' jika dan hanya jika tidak ada isomorfisma dari G ke G'. Atau dengan kata lain, grup G tidak isomorfik dengan grup G' jika dan hanya jika tidak ada fungsi bijektif ϕ dari G ke G' dengan sifat $\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y)$.

Secara umum, tentu saja tidak praktis untuk mencoba setiap fungsi bijektif yang mungkin untuk menemukan apakah fungsi-fungsi tersebut memenuhi sifat di atas. Kecuali untuk kasus di mana tidak ada fungsi bijektif dari G ke G', misalnya G dan G' adalah himpunan-himpunan berhingga dengan banyaknya anggota yang berbeda.

Contoh 3.4 Diketahui $\mathbf{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. $(\mathbf{Z},+)$ dan $(\mathbf{R},+)$ adalah grup. Grup $(\mathbf{Z},+)$ tidak isomorfik dengan grup $(\mathbf{R},+)$ karena tidak ada fungsi bijektif dari $\mathbf{Z}$ ke $\mathbf{R}$.

Untuk kejadian di mana ada fungsi bijektif dari G ke G', kita akan memperlihatkan grup G tidak isomorfik dengan grup G' dengan menunjukkan bahwa grup yang satu memiliki sifat struktural yang tidak dimiliki oleh grup yang lain. Sifat struktural di sini adalah sifat yang menyangkut operasi, dan yang diawetkan oleh homomorfisma. Berikut ini adalah contoh-contoh dari sifat struktural dan sifat nonstuktural.

Contoh-contoh sifat struktural :

1. Grup G adalah siklik.
2. Grup G adalah abelian.
3. Persamaan $x^2 = a$ mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap elemen a dalam grup G.

Contoh-contoh sifat nonstruktural :

1. Grup G memuat elemen 5.
2. Semua elemen dari grup G berupa bilangan.
3. Operasi dalam grup G disebut komposisi.

Contoh 3.5 Kita tidak dapat menyimpulkan bahwa grup $(\mathbf{Z},+)$ dan $(3\mathbf{Z},+)$ tidak isomorfik karena $17 \in \mathbf{Z}$ dan $17 \notin 3\mathbf{Z}$, sebab ini bukan sifat struktural. Kenyataannya $(\mathbf{Z},+)$ isomorfik dengan $(3\mathbf{Z},+)$, sebab ada fungsi bijektif $\phi : G \rightarrow G'$ dengan $\phi(n) = 3n$, untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$ yang mengawetkan operasi.

Contoh 3.6 Kita tidak dapat menyimpulkan bahwa $(\mathbf{Z},+)$ dan $(\mathbf{Q},+)$ tidak isomorfik karena $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$ dan $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$. Tetapi kita dapat menyimpulkan bahwa kedua grup tersebut tidak isomorfik karena **Z** siklik dan **Q** tidak.

C. Grup Faktor

Definisi 3.7 Diketahui G grup dan N subgrup normal dari G. Himpunan semua koset dari N dalam G dinyatakan dengan lambang G/N. Jadi $G/N = \{ gN \mid g \in G \}$, dan dibaca G modulo N.

Perlu diingat bahwa untuk subgrup normal, koset kiri sama dengan koset kanan. Itu berarti elemen-elemen dari G/N dapat ditulis dalam bentuk koset kiri saja atau koset kanan saja. Dalam hal ini penulis menggunakan koset kiri untuk keseragaman.

Definisi 3.8 Bila P adalah keluarga himpunan-himpunan bagian yang tidak kosong dari himpunan S, maka P dikatakan membentuk partisi untuk himpunan S bila

1. S adalah gabungan dari semua himpunan dalam P
2. Jika A dan B adalah anggota P dan $A \neq B$, maka $A \cap B = \varnothing$.

Teorema 3.7 Jika G adalah grup dan N adalah subgrup normal dari G, maka G/N membentuk partisi untuk G.

Bukti :

(i). Akan ditunjukkan bahwa $\cup xN = G$.

Ambil sebarang $t \in \cup xN$, berarti ada paling sedikit satu xN yang memuat t. Maka dapat ditulis $t = xh$, untuk suatu $h \in N$. Karena $N \subseteq G$, $x,h \in G$ dan G adalah grup, maka $t = xh \in G$. Jadi jika $t \in \cup xN$, maka $t \in G$.

Jadi $\cup xN \subseteq G$................1)

Ambil sebarang elemen $y \in G$. Karena N subgrup G, maka elemen identitas dari G, yaitu e berada di N. Sehingga $y = ye \in yN$. Padahal $yN \subseteq \cup xN$. Jadi $y \in \cup xN$.

Jadi jika $y \in G$, maka $y \in \cup xN$.

Jadi $G \subseteq \cup xN$................2)

Karena $\cup xN \subseteq G$ dan $G \subseteq \cup xN$, maka $\cup xN = G$.

(ii). Akan ditunjukkan untuk xN dan yN anggota G/N, jika $xN \neq yN$ maka $xN \cap yN = \varnothing$.

Pernyataan ini ekuivalen dengan : untuk xN dan yN anggota G/N, jika $xN \cap yN \neq \emptyset$, maka xN = yN.

Jika $xN \cap yN \neq \emptyset$, maka paling sedikit ada satu elemen dalam $xN \cap yN$.

Misalkan $t \in xN \cap yN$, maka $t \in xN$ dan $t \in yN$. Berarti $t = xh_1$ dan $t = yh_2$, untuk suatu $h_1, h_2 \in N$. Maka ada $h_1, h_2 \in N$ sedemikian hingga $xh_1 = yh_2$.

Dengan demikian $xh_1h_1^{-1} = yh_2h_1^{-1}$, atau $x = yh_2h_1^{-1}$. Sehingga setiap elemen xh dari xN dapat dinyatakan dalam bentuk $yh_2h_1^{-1}h$. Karena $h_2h_1^{-1}h \in N$, maka $xh = yh_2h_1^{-1}h \in yN$.

Jadi $xN \subseteq yN$......................1)

Dengan cara yang sama, karena ada $h_1, h_2 \in N$ sedemikian hingga $xh_1 = yh_2$. Maka $y = xh_1h_2^{-1}$. Sehingga setiap elemen yh dari yN dapat dinyatakan dalam bentuk $xh_1h_2^{-1}h$. Karena $h_1h_2^{-1}h \in N$, maka $yh = xh_1h_2^{-1}h \in xN$.

Jadi $yN \subseteq xN$......................2)

Karena $xN \subseteq yN$ dan $yN \subseteq xN$, maka xN = yN.

Dari (i) dan (ii), disimpulkan bahwa G/N membentuk partisi untuk G. □

Ada satu teorema menarik yang mengungkapkan bahwa G/N dapat membentuk grup dengan suatu operasi yang akan didefinisikan dibawah ini.

Teorema 3.8 Diketahui N adalah subgrup normal dari G. Maka G/N membentuk grup dengan operasi yang didefinisikan sebagai berikut : (aN)(bN) = (ab)N, $\forall$ (aN),(bN) $\in$ G/N.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa G/N membentuk grup dengan operasi seperti yang didefinisikan di atas, kita kembali menggunakan definisi 2.4. Sebelum membuktikan berlakunya ketiga aksioma grup, kita harus memastikan bahwa operasi seperti yang didefinisikan di atas merupakan operasi biner, artinya operasi tersebut bersifat tertutup dan terdefinisi dengan baik dalam G/N.

(i) Misalkan $a_1N = a_2N$ dan $b_1N = b_2N$. Akan ditunjukkan $(a_1N)(b_1N)= (a_2N)(b_2N)$, atau $(a_1b_1)N = (a_2\ b_2)N$.

Karena $a_1N = a_2N$, maka $a_1e = a_2n_1$, untuk suatu $n_1 \in N$.

Karena $b_1N = b_2N$, maka $b_1e = b_2n_2$, untuk suatu $n_2 \in N$.

Sehingga $a_1 = a_2n_1$ dan $b_1 = b_2n_2$. Akibatnya $a_1b_1 = a_2n_1b_2n_2$.

Karena N subgrup normal dari grup G, maka $b_2^{-1}n_1b_2 \in N$. Jadi ada suatu $n_3 \in N$ sedemikian hingga $n_3 = b_2^{-1}n_1b_2$. Maka $b_2n_3 = n_1b_2$. Sehingga $a_1b_1 = a_2\ b_2\ n_3n_2$. Ambil sebarang $a_1b_1n \in (a_1b_1)N$, maka $a_1b_1n = a_2\ b_2\ n_3n_2n = a_2b_2n_4$, untuk suatu $n_4 = n_3n_2n \in N$.

Jadi $(a_1\ b_1)N \subseteq (a_2b_2)N$ ....1)

Karena $a_2N = a_1N$ dan $b_2N = b_1N$, maka $a_2 = a_1n_1$ dan $b_2 = b_1n_2$, untuk suatu $n_1, n_2 \in N$. Sehingga $a_2b_2 = a_1\ n_1b_1n_2$.

Karena N subgrup normal dari grup G, maka $b_1^{-1}n_1b_1 \in N$. Jadi ada suatu $n_3 \in N$ sedemikian hingga $n_3 = b_1^{-1}n_1b_1$. Sehingga $b_1n_3 = n_1b_1$. Akibatnya $a_2b_2 = a_1b_1n_3n_2$. Ambil sebarang $a_2b_2n \in (a_2b_2)N$, maka $a_2b_2n = a_1b_1n_3n_2n = a_1b_1n_4$, untuk suatu $n_4 = n_3n_2n \in N$. Jadi $a_2b_2n \in (a_1b_1)N$.

Jadi $(a_2b_2)N \subseteq (a_1b_1)N$ ....2)

Karena $(a_1b_1)N \subseteq (a_2b_2)N$ dan $(a_2b_2)N \subseteq (a_1b_1)N$, maka $(a_1b_1)N = (a_2b_2)N$. Jadi $(a_1N)(b_1N) = (a_2N)(b_2N)$. Jadi operasi tersebut terdefinisi dengan baik.

(ii) Ambil sebarang X dan Y dalam G/N. Maka ada suatu a,b $\in$ G sedemikian hingga aN = X dan bN = Y. Sehingga XY = (aN)(bN) = (ab)N. Karena a dan b ada dalam grup G, maka pasti ada c $\in$ G sedemikian hingga ab = c $\in$ G. Sehingga (ab)N = cN. Jadi (ab)N $\in$ G/N.

Jadi operasi seperti yang didefinisikan di atas tertutup pada G/N.

(iii) Ambil sebarang aN, bN dan cN dalam G/N, maka :

$[(aN)(bN)](cN) = [(ab)N](cN) = [(ab)c]N = [a(bc)]N = (aN)[(bc)N] = (aN)[(bN)(cN)]$.

Jadi sifat asosiatif berlaku dalam G/N.

(iv) Perhatikan bahwa (aN)(eN) = (ae)N = aN, dan (eN)(aN) = (ea)N = aN, dengan e adalah elemen identitas dalam G dan a $\in$ G.

Jadi eN adalah elemen identitas dalam G/N.

(v) Ambil sebarang aN $\in$ G/N, maka $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN$ dan $(a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN$.

Jadi $a^{-1}N$ adalah invers dari aN.

Jadi dari (i), (ii), (iii), (iv) dan (v), terbukti G/N membentuk grup dengan operasi seperti didefinisikan di atas. $\square$

Definisi 3.9 Grup yang dibentuk oleh G/N dengan operasi seperti didefinisikan dalam teorema 3.8 diatas disebut grup faktor.

Teorema 3.9 Misalkan N adalah subgrup normal dari G. Maka fungsi $\phi : G \rightarrow G/N$ dengan $\phi(x) = xN$ adalah homomorfisma, dan $\ker(\phi) = N$.

Bukti :

Misalkan $x,y \in G$, maka

$\phi(xy) = (xy)N$ definisi ϕ

$= (xN)(yN)$ definisi 3.9

$= \phi(x)\,\phi(y)$ definisi ϕ

Jadi ϕ adalah suatu homomorfisma.

Jika $xN = N$, maka $xN \subseteq N$. Karena $x = xe \in xN$, maka $x \in N$.

Jika $x \in N$, maka untuk sebarang $xh \in xN$, $xh \in N$ karena N adalah grup. Jadi $xN \subseteq N$.

Jika $x \in N$, maka $x = xe \in xN$. Jadi $N \subseteq xN$. Sehingga $xN = N$.

Jadi $xN = N$ jika dan hanya jika $x \in N$. Maka ker $(\phi) =$ $\{x \in G / \phi(x) = eN\} = \{x \in G / xN = N\} = \{x \in G / x \in N\} = N$. □

Homomorfisma ϕ dalam teorema di atas disebut disebut homomorfisma kanonik. Berikut ini akan disajikan teorema fundamental homomorfisma.

Teorema 3.10 Misalkan $\alpha : G \to G'$ adalah homomorfisma grup dengan kernel H. Maka fungsi $\beta : G/H \to \alpha(G)$ yang didefinisikan oleh $\beta(gH) = \alpha(g)$ merupakan suatu isomorfisma.

Jika $\phi : G \to G/H$ adalah homomorfisma kanonik, maka untuk setiap $g \in G$ berlaku $\alpha(g) = \beta(\phi(g))$.

Bukti :

Pertama kita akan memeriksa apakah β terdefinisi dengan baik. Jika $a_1H = a_2H$, maka ada suatu $h \in H$ sedemikian hingga $a_1h = a_2$. Maka $\alpha(a_1h) = \alpha(a_2)$, karena α pemetaan. Padahal $\alpha(a_1h) = \alpha(a_1)\alpha(h)$ α homomorfisma

$= \alpha(a_1)\ e \qquad h \in H$

$= \alpha(a_1)$

Jadi $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$. Sehingga $\beta(a_1H) = \beta(a_2H)$.

Jadi $\beta : G/H \to \alpha(G)$ terdefinisi dengan baik.

Perhatikan bahwa

$\beta((aH)(bH)) = \beta((ab)H)$ menurut definisi operasi pada G/H

$= \alpha(ab)$ definisi β

$= \alpha(a)\ \alpha(b)$ α homomorfisma

$= \beta(aH)\ \beta(bH)$ definisi β

Jadi β adalah suatu homomorfisma.

Jika $\beta(aH) = \beta(bH)$ maka $\alpha(a) = \alpha(b)$. Karena α homomorfisma, $H = \ker(\alpha)$, dan $a,b \in G$, maka menurut teorema 3.2, aH dan bH adalah koset yang sama dalam G/H.

Jadi $\forall (aH, bH \in G/H)\ \beta(aH) = \beta(bH) \Rightarrow aH = bH$.

Jadi β adalah fungsi injektif .

Ambil sebarang $y \in \alpha(G)$. Maka $y = \alpha(x)$, untuk suatu $x \in G$, dan $\beta(xH) = \alpha(x) = y$. Jadi ada $xH \in G/H$ sedemikian hingga $\beta(xH) = y$.

Jadi β adalah fungsi surjektif.

Jadi $\beta : G/H \to \alpha(G)$ adalah suatu isomorfisma.

Sekarang dibuktikan pernyataan yang kedua.

Ambil sebarang $g \in G$, maka $\phi(g) = gH$. Akibatnya $\beta(\phi(g)) = \beta(gH) = \alpha(g)$.

Jadi untuk setiap $g \in G$ berlaku $\alpha(g) = \beta(\phi(g))$. $\square$

Definisi 3.10 Jika H dan N adalah subgrup dari grup G, maka :

(a) $HN = \{ hn / h \in H, n \in N \}$

(b) H v N adalah irisan dari semua semua subgrup dari G yang memuat HN.

Jadi H v N adalah subgrup terkecil dari G yang memuat HN dan juga merupakan subgrup terkecil dari G yang memuat H dan N.

Teorema 3.11 Jika N adalah subgrup normal dari G, dan H adalah sembarang subgrup dari G, maka H v N = HN = NH. Jika H adalah subgrup normal dari G, maka HN adalah subgrup normal dari G.

Bukti :

(i) N subgrup normal dari G, maka untuk setiap $g \in G$ berlaku gN= Ng.

Ambil sebarang $x \in NH$. Maka ada $n_1 \in N$ dan $h_1 \in H$ sedemikian hingga $x = n_1 h_1$. N subgrup normal dari G, maka $h_1 N = Nh_1$. Sehingga ada $n_2 \in N$ sedemikian hingga $n_1 h_1 = h_1 n_2 \in HN$. Jadi NH $\subseteq$ HN.

Ambil sebarang $y \in HN$. Maka ada $h \in H$ dan $n \in N$ sedemikian hingga y = hn. Karena N subgrup normal dari G, maka hN = Nh. Sehingga ada $n_1 \in N$ sedemikian hingga $hn = n_1 h \in NH$. Jadi HN $\subseteq$ NH.

Karena NH $\subseteq$ HN dan HN $\subseteq$ NH, maka NH = HN.

(ii) Akan ditunjukkan HN subgrup dari G.

a. Misalkan $h_1, h_2 \in H$ dan $n_1, n_2 \in N$. Karena N adalah subgrup normal dari G, maka $n_1 h_2 = h_2 n_3$, untuk suatu $n_3 \in N$. Sehingga :

$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1 (n_1 h_2) n_2$ sifat asosiatif dalam grup

$= h_1 (h_2 n_3) n_2$ $n_1 h_2 = h_2 n_3$

$= (h_1 h_2)(n_3 n_2)$ sifat asosiatif dalam grup

$= h_3 n_4$ $h_3 \in H, n_4 \in N$

$\in HN$

Jadi HN tertutup terhadap operasi dalam G.

b. Untuk $h \in H$ dan $n \in N$ berlaku :

$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1}$ teorema 2.4

$= h^{-1}n_1$ $n_1 \in N$, N subgrup normal dari G

$\in HN$

Jadi $(hn)^{-1} \in HN$.

Jadi menurut teorema 2.5, HN subgrup dari G.

Padahal menurut definisi 3.10, H v N adalah subgrup terkecil yang memuat HN. Jadi HN = H v N.

Karena HN = NH dan HN = H v N, maka H v N = HN = NH.

(iii) Andaikan H adalah subgrup normal dari G dan $h \in H$, $n \in N$, $g \in G$, maka

$g(hn)g^{-1} = g(hen)g^{-1}$ e elemen identitas HN dan G

$= gh(g^{-1}g)ng^{-1}$ definisi 2.4

$= (ghg^{-1})(gng^{-1})$ sifat asosiatif grup

$\in HN$

Jadi menurut teorema 3.4 dan definisi 3.5, HN adalah subgrup normal dari G. □

Teorema 3.12 Jika H adalah subgrup dari G dan N adalah subgrup normal dari G, maka $H \cap N$ adalah subgrup normal dari H.

Bukti :

Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $H \cap N$ adalah subgrup dari H.

(i) Ambil sebarang $x,y \in H \cap N$. Maka $x,y \in H$ dan $x,y \in N$. Sehingga $xy \in H$ dan $xy \in N$. Akibatnya $xy \in H \cap N$.

Jadi $(\forall x,y \in H \cap N)\ xy \in H \cap N$.

Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam $H \cap N$.

(ii) Ambil sebarang $x \in H \cap N$. Maka $x \in H$ dan $x \in N$. Sehingga $x^{-1} \in H$ dan $x^{-1} \in N$. Akibatnya $x^{-1} \in H \cap N$.

Jadi $(\forall x \in H \cap N)(\exists x^{-1} \in H \cap N)\ xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Jadi $H \cap N$ adalah subgrup dari H.

Ambil sebarang $h \in H$ dan sembarang $x \in H \cap N = K$. Maka $h \in G$, $x \in H$ dan $x \in N$. Jadi $hxh^{-1} \in H$. Karena N subgrup normal dari G, maka $hxh^{-1} \in N$. Akibatnya $hxh^{-1} \in H \cap N$. Jadi menurut teorema 3.4 dan definisi 3.5, $H \cap N$ adalah subgrup normal dari H. $\square$

Teorema 3.13 Jika H adalah subgrup dari G dan N adalah subgrup normal dari G, maka $(HN)/N \cong H/(H \cap N)$.

Bukti :

Kita akan menggunakan teorema 3.10 untuk membuktikan $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

(i) Karena H subgrup dari G dan N subgrup normal dari G, maka menurut teorema 3.12, $H \cap N$ adalah subgrup normal dari H.

Jadi $H/(H \cap N)$ adalah grup faktor.

(ii) Telah ditunjukkan dalam teorema 3.11 bahwa HN adalah subgrup dari G.

(iii) Didefinisikan fungsi $\alpha : HN \to H/(H \cap N)$ di mana $\alpha(hn) = h(H \cap N)$, $\forall hn \in HN$. Akan ditunjukkan bahwa α adalah homomorfisma surjektif.

(a) Misalkan $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$ dan $h_1 n_1 = h_2 n_2$. Maka :

$(h_1 n_1)n_1^{-1} = (h_2 n_2)n_1^{-1}$	
$h_1(n_1 n_1^{-1}) = h_2 n_2 n_1^{-1}$	sifat asosiatif dalam grup
$h_1 e = h_2 n_2 n_1^{-1}$	definisi 2.4
$h_1 = h_2 n_2 n_1^{-1}$	definisi 2.4

Akibatnya :

$h_2^{-1}h_1 = h_2^{-1}(h_2 n_2 n_1^{-1})$

$= (h_2^{-1}h_2)(n_2 n_1^{-1})$ sifat asosiatif dalam grup

$= e(n_2 n_1^{-1})$ definisi 2.4

$= n_2 n_1^{-1}$ definisi 2.4

$\in N$

Jadi $h_2^{-1}h_1 \in H$ dan $h_2^{-1}h_1 \in N$, sehingga $h_2^{-1}h_1 \in H \cap N$.

Maka :

$h_1(H \cap N) = (eh_1)(H \cap N)$ definisi 2.4

$= ([h_2 h_2^{-1}]h_1)(H \cap N)$ definisi 2.4

$= (h_2 [h_2^{-1}h_1])(H \cap N)$ sifat asosiatif dalam grup

$= h_2(H \cap N).(h_2^{-1}h_1)(H \cap N)$ operasi pada grup faktor $H/(H \cap N)$

$= h_2 (H \cap N).(H \cap N)$ $h_2^{-1}h_1 \in H \cap N$

$= h_2 (H \cap N)$

Karena $h_1(H \cap N) = h_2(H \cap N)$, maka $\alpha(h_1 n_1) = \alpha(h_2 n_2)$.

Jadi $\forall (h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN)\ h_1 n_1 = h_2 n_2 \Rightarrow \alpha(h_1 n_1) = \alpha(h_2 n_2)$.

Jadi α terdefinisi dengan baik.

(b) Misalkan $n_1, n_2 \in N$ dan $h_1, h_2 \in H$. Karena N subgrup normal dari G dan $H \subseteq G$, maka menurut definisi 3.5 kita dapat menulis $n_1 h_2 = h_2 n_3$, untuk suatu $n_3 \in N$. Sehingga :

$\alpha((h_1 n_1)(h_2 n_2)) = \alpha(h_1(n_1 h_2)n_2)$ sifat asosiatif dalam grup

$= \alpha(h_1(h_2 n_3)n_2)$ $n_1 h_2 = h_2 n_3$

$= \alpha((h_1 h_2)(n_3 n_2))$ sifat asosiatif dalam grup

$= h_1 h_2 (H \cap N)$ definisi α

$= h_1(H \cap N)\, h_2(H \cap N)$ operasi pada grup faktor $H/(H \cap N)$

$= \alpha(h_1 n_1)\, \alpha(h_2 n_2)$ definisi α

Jadi α merupakan suatu homomorfisma.

(c) Karena $\alpha(he) = h(H \cap N), \forall h \in H$, maka α merupakan fungsi yang surjektif. Jadi α adalah homomorfisma yang surjektif.

(iv). Kernel dari α adalah semua $hn \in HN$ sedemikian hingga $\alpha(hn) = H \cap N$, yaitu $\alpha(hn) = h(H \cap N) = (H \cap N)$. Berarti $h \in H \cap N$, sehingga $hn \in (H \cap N)N$. Padahal $(H \cap N)N = N$. Jadi kernel $(\alpha) = N$.

(v). Karena α adalah homomorfisma surjektif, maka $\alpha(HN) = H/(H \cap N)$.

Jadi $\alpha : HN \to H/(H \cap N)$ adalah homomorfisma dengan kernel $(\alpha) = N$ dan $\alpha(HN) = H/(H \cap N)$.

Jadi menurut teorema 3.10, $HN/N \cong H/(H \cap N)$. ◻

Teorema 3.14 Jika H dan K adalah subgrup normal dari grup G, dan K adalah subgrup normal dari H, maka H/K adalah subgrup normal dari G/K.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa H/K adalah subgrup dari G/K.

(i) Karena $H \subseteq G$, maka jelas bahwa $H/K \subseteq G/K$.

(ii) Ambil sebarang $h_1K,\ h_2K \in H/K$, maka $(h_1K)(h_2K) = (h_1 h_2)K$. Karena $h_1, h_2 \in$ subgrup H, maka $h_1 h_2 \in H$. Jadi $(h_1 h_2)K \in H/K$.

Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam H/K.

(iii) Untuk setiap $hK \in H/K$ mempunyai invers $h^{-1}K \in H/K$ yang memenuhi $(hK)(h^{-1}K) = (hh^{-1})K = eK = (h^{-1}h)K = (h^{-1}K)(hK)$.

Jadi menurut teorema 2.5, H/K adalah subgrup dari G/K.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa H/K adalah subgrup normal dari G/K.

Ambil sebarang $gK \in G/K$ dan sebarang $hK \in H/K$, maka

$$(gK)(hK)(gK)^{-1} = (gh)K\,(g^{-1})K$$
$$= (ghg^{-1})K$$

Karena H subgrup normal G, maka $ghg^{-1} \in H$. Akibatnya $(ghg^{-1})K \in H/K$.

Jadi $(gK)(hK)(gK)^{-1} \in H/K$. Menurut teorema 3.4 dan definisi 3.5, H/K adalah subgrup normal dari G/K. □

Teorema 3.15 Misalkan H dan K adalah subgrup normal dari grup G. K adalah subgrup normal dari H. Maka $G/H \cong (G/K)/(H/K)$.

Bukti :

(i) Didefinisikan $\alpha : G \to (G/K)/(H/K)$, di mana $\alpha(a) = (aK)(H/K)$, untuk setiap $a \in G$.

Ambil sebarang g_1 dan g_2 dalam G sedemikian hingga $g_1 = g_2$. Maka $g_1K = g_2K$ Akibatnya $(g_1K)(H/K) = (g_2K)(H/K)$. Sehingga $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$. Jadi α terdefinisi dengan baik.

Untuk setiap $(aK)(H/K) \in (G/K)/(H/K)$ pasti ada $a \in G$ sedemikian hingga $\alpha(a) = (aK)(H/K)$. Jelas bahwa α adalah fungsi yang surjektif.

(ii) Untuk setiap $a,b \in G$ berlaku :

$\alpha(ab) = ((ab)K)(H/K)$	definisi α
$= ((aK)(bK))(H/K)$	operasi pada grup faktor G/K
$= [(aK)(H/K)]\,[(bK)(H/K)]$	operasi pada grup faktor (G/K)/(H/K)
$= \alpha(a)\,\alpha(b)$	definisi α

Jadi α merupakan suatu homomorfisma.

(iii) Kernel (α) terdiri dari semua $x \in G$ sedemikian hingga $\alpha(x) = (xK)(H/K) = H/K$. Ini berarti $xK \in H/K$. Akibatnya $x \in H$. Jadi kernel (α) = H.

(iv) Karena α adalah homomorfisma surjektif, maka $\alpha(G) = (G/K)/(H/K)$. Jadi menurut teorema 3.10, $G/H \cong (G/K)/(H/K)$. □

Teorema 3.16 Jika H dan K adalah subgrup dari G, dan H* adalah subgrup normal dari H , maka $H^* \cap K$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$.

Bukti :

(i) Karena $H^* \subseteq H$, maka $H^* \cap K \subseteq H \cap K$.

Karena menurut teorema 3.12, $H^* \cap K$ dan $H \cap K$ adalah subgrup dari grup G, maka jelas bahwa $H^* \cap K$ tertutup terhadap operasi biner dalam $H \cap K$.

(ii) Untuk setiap $x \in H^* \cap K$, maka $x \in H^*$ dan $x \in K$, sehingga $x^{-1} \in H^*$ dan $x^{-1} \in K$. Jadi $x^{-1} \in H^* \cap K$.

Jadi menurut teorema 2.5, $H^* \cap K$ adalah subgrup dari $H \cap K$.

Ambil sebarang $x \in H \cap K$ dan sebarang $h \in H^* \cap K$, maka $x \in H$, $x^{-1} \in H$, $h \in H^*$ dan $x \in K, x^{-1} \in K$, $h \in K$. Karena H* adalah subgrup normal dari H, maka menurut teorema 3.4, $xhx^{-1} \in H^*$ dan $xhx^{-1} \in K$. Jadi $xhx^{-1} \in H^* \cap K$. Menurut teorema 3.4, $H^* \cap K$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$. □

D. Grup Sederhana

Definisi 3.11 Suatu grup dengan elemen identitas e dikatakan sederhana jika grup tersebut tidak mempunyai subgrup normal sejati selain {e}.

Definisi 3.12 Suatu subgrup normal M dari grup G dikatakan maksimal jika M tidak sama dengan G dan tidak ada subgrup normal sejati N dari G yang memuat M sebagai himpunan bagian sejatinya.

Teorema 3.17 Subgrup normal M dari grup G adalah maksimal jika dan hanya jika G/M sederhana.

Bukti :

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika M adalah subgrup normal maksimal dari grup G, maka G/M sederhana.

Andaikan G/M tidak sederhana, maka G/M mempunyai subgrup normal sejati selain eM=M, yang adalah elemen identitas dalam G/M. Jika diberikan homomorfisma kanonik ϕ :G$\rightarrow$G/M, maka ϕ^{-1} dari subgrup normal sejati G/M memuat M sebagai normal sejati G. Padahal M adalah subgrup normal maksimal dari G. Terjadi kontradiksi.

Jadi G/M haruslah sederhana.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika G/M sederhana, maka subgrup normal M dari grup G adalah maksimal.

Andaikan subgrup normal M dari grup G tidak maksimal, maka ada subgrup normal sejati N dari grup G yang memuat M sebagai himpunan bagian sejatinya. Perhatikan homomorfisma kanonik ϕ :G$\rightarrow$G/M. Karena N adalah subgrup normal sejati dari G yang memuat M sebagai himpunan bagian sejatinya, dan N $\neq$ G, maka menurut teorema 3.6, ϕ(N) adalah subgrup normal sejati dari G/M dan ϕ(N) $\neq$ G/M.

Jadi G/M memuat ϕ(N) sebagai subgrup normal sejatinya. Padahal G/M adalah grup sederhana. Terjadi kontradiksi. Jadi subgrup normal M dari grup G haruslah maksimal. □

BAB IV
BARISAN GRUP

Dalam Bab III kita telah banyak membahas tentang subgrup normal. Sekarang kita akan mengupas lebih jauh hal-hal yang berkaitan dengan subgrup normal itu. Dalam Bab IV ini subgrup normal akan dihubungkan dengan barisan dari grup. Kita akan berkenalan dengan barisan subnormal dan barisan normal, teorema Jordan-Hölder, pusat, dan barisan pusat.

A. Barisan Subnormal dan Normal.

Dalam Bab II telah disinggung mengenai subgrup. Jika $H \subseteq G$, $(G,\#)$ grup dan $(H,\#)$ juga grup, maka H disebut subgrup dari G. Untuk mempermudah penulisan selanjutnya, diperkenalkan notasi khusus yang akan didefinisikan di bawah ini.

Definisi 4.1 Jika H adalah subgrup dari G, maka kita tulis " $H \leq G$ ", dan jika H adalah subgrup dari G dengan $H \neq G$, maka kita tulis " $H < G$ ".

Definisi 4.2

(a) Barisan subnormal dari suatu grup G adalah barisan berhingga subgrup-subgrup dari G, yaitu $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n$, sedemikian hingga $H_i < H_{i+1}$ dan H_i adalah subgrup normal dari H_{i+1}, dengan $H_0 = \{e\}$ dan $H_n = G$.

(b) <u>Barisan normal</u> dari G adalah barisan berhingga subgrup-subgrup normal dari G, yaitu $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n$, sedemikian hingga $H_i < H_{i+1}$, $H_0 = \{e\}$ dan $H_n = G$.

Dari definisi 4.2 dapat disimpulkan bahwa suatu barisan normal pasti merupakan barisan subnormal, tapi suatu barisan subnormal belum tentu merupakan barisan normal. Dalam Bab III telah disinggung bahwa semua subgrup dari grup abelian merupakan subgrup normal. Itu berarti bahwa dalam suatu grup abelian barisan subnormal adalah barisan normal.

Contoh 4.1 $\mathbf{Z} = \{ \ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots\}$

$4\mathbf{Z} = \{\ldots\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\ldots\}$

$8\mathbf{Z} = \{\ldots\ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots\ldots\}$

$9\mathbf{Z} = \{\ldots\ldots, -18, -9, 0, 9, 18, \ldots\ldots\}$

Maka

$\{0\} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ dan $\{0\} < 9\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ merupakan barisan-barisan normal dari $\mathbf{Z}$ terhadap operasi penjumlahan.

Contoh 4.2 Perhatikan gambar persegi di bawah ini

Gambar 4.1

Ada delapan cara yang berbeda untuk menempatkan persegi B ke dalam persegi A dengan titik sudut 1, 2, 3, 4, yaitu :

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix} \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1432 \end{pmatrix}$$

Di mana ρ_i adalah rotasi, μ_i adalah pencerminan terhadap garis tegak dan mendatar, dan σ_i adalah perncerminan terhadap garis diagonal. Jika D_4 = $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2\}$, maka (D_4 ,o) adalah grup. Hasil operasi dalam D_4 disajikan dalam tabel 4.1.

Tabel 4.1

o	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	σ_1	σ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	σ_2	σ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	σ_2	μ_2	σ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	σ_1	μ_1	σ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
σ_1	σ_1	μ_1	σ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
σ_2	σ_2	μ_2	σ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Barisan $\{\rho_0\} < \{\rho_0, \mu_1\} < \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} < D_4$ adalah barisan subnormal. Barisan ini bukan merupakan barisan normal karena $\{\rho_0, \mu_1\}$ bukan subgrup normal dalam D_4.

Definisi 4.3 Barisan subnormal (normal) $\{K_j\}$ merupakan penghalusan dari barisan subnormal (normal) $\{H_i\}$ dalam grup G jika $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$, yaitu jika setiap H_i adalah salah satu dari K_j.

Contoh 4.3 Barisan $\{0\} < 72\mathbf{Z} < 24\mathbf{Z} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ adalah penghalusan dari barisan $\{0\} < 72\mathbf{Z} < 8\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$.

Hal yang menarik dari grup G di sini adalah grup faktor H_{i+1} / H_i. Grup faktor H_{i+1} / H_i terdefinisi untuk barisan normal dan subnormal karena H_i adalah subgrup normal dari H_{i+1} dalam kedua barisan tersebut.

Definisi 4.4 Dua barisan subnormal (normal) $\{H_i\}$ dan $\{K_j\}$ dari grup G yang sama dikatakan isomorfik jika keluarga grup-grup faktor $\{H_{i+1}/H_i\}$ dan $\{K_{j+1}/K_j\}$ berkorespondensi satu-satu dan grup faktor yang berkoresponden adalah isomorfik.

Dua barisan subnormal (normal) yang isomorfik pasti mempunyai jumlah grup yang sama.

Contoh 4.4 Dua barisan dari $\mathbf{Z}_{15}$, yaitu $\{0\} < \langle 5\rangle < \mathbf{Z}_{15}$ dan $\{0\} < \langle 3\rangle < \mathbf{Z}_{15}$ adalah isomorfik, sebab $\mathbf{Z}_{15} / \langle 5\rangle$ dan $\langle 3\rangle / \{0\}$ masing-masing isomorfik dengan $\mathbf{Z}_5$, dan $\mathbf{Z}_{15} / \langle 3\rangle$ isomorfik dengan $\langle 5\rangle / \{0\}$ karena keduanya isomorfik dengan $\mathbf{Z}_3$.

B. Teorema Jordan - Hölder

Untuk membahas teorema Jordan-Hölder kita membutuhkan lemma Zassenhaus yang akan dibuktikan dalam teorema 4.1 di bawah ini.

Teorema 4.1 Misalkan H dan K adalah subgrup dari G, H* subgrup normal dari H dan K* subgrup normal dari K, maka :

(a) $H^*(H \cap K^*)$ adalah subgrup normal dari $H^*(H \cap K)$.

(b) $K^*(H^* \cap K)$ adalah subgrup normal dari $K^*(H \cap K)$.

(c) $H^*(H \cap K) / H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K) / (H^* \cap K)(H \cap K^*) \cong K^*(H \cap K) / K^*(H^* \cap K)$.

Bukti :

(a) Akan ditunjukkan $H^*(H \cap K^*)$ adalah subgrup normal dari $H^*(H \cap K)$. Karena K* adalah subgrup normal dari K dan H, K subgrup dari G, maka menurut teorema 3.16, $H \cap K^*$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$.

(i) Karena $H \cap K^* \subseteq H \cap K$, maka jelas bahwa $H^*(H \cap K^*) \subseteq H^*(H \cap K)$.

(ii) Ambil sebarang $h_1{}^* h_1$ dan $h_2{}^* h_2$ dalam $H^*(H \cap K^*)$, maka

$(h_1{}^* h_1)(h_2{}^* h_2) = h_1{}^*(h_1 h_2{}^*) h_2$ asosiatif

$= h_1{}^*(h_3{}^* h_1) h_2$ H* subgrup normal H, $h_2{}^* \in H^*$, $h_1 \in H$.

$= (h_1{}^* h_3{}^*)(h_1 h_2)$ asosiatif

$= h_4 * h_3$ $\quad h_4 * \in H^*,\ h_3 \in H \cap K^*$

$\in H^*(H \cap K^*)$

Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam $H^*(H \cap K^*)$.

(iii) Untuk setiap $h^*h \in H^*(H \cap K^*)$, $(h^*h)^{-1} = h^{-1}(h^*)^{-1}$ teorema 2.4

$= h_1 * h^{-1}$ $\quad h^{-1} \in H,\ h_1 * \in H^*$

$\in H^*(H \cap K^*)$

Jadi setiap $h^*h \in H^*(H \cap K^*)$ mempunyai invers $(h^*h)^{-1} \in H^*(H \cap K^*)$.

Jadi menurut teorema 2.5, $H^*(H \cap K^*)$ adalah subgrup dari $H^*(H \cap K)$.

(iv) Ambil sebarang $h^*h \in H^*(H \cap K)$ dan sebarang $h_1 * h_1 \in H^*(H \cap K^*)$.

$(h^*h)(h_1 * h_1)(h^*h)^{-1} = (h^*h)(h_1 * h_1)(h^{-1}h^{*-1})$ teorema 2.4

$= h^*(h h_1 *) h_1 (h^{-1} h^{*-1})$ asosiatif

$= h^*(h_2 * h) h_1 (h_3 * h^{-1})$ H* subgrup normal H

$= (h^* h_2 *) h (h_1 h_3 *) h^{-1}$ asosiatif

$= (h^* h_2 *) h (h_4 * h_1) h^{-1}$ H*subgrup normal H

$= (h^* h_2 *)(h h_4 *)(h_1 h^{-1})$ asosiatif

$= (h^* h_2 *)(h_5 * h)(h_1 h^{-1})$ H* subgrup normal H

$= (h^* h_2 * h_5 *)(h h_1 h^{-1})$ asosiatif

Karena $h,\ h^{-1} \in H \cap K$, $h_1 \in H \cap K^*$, dan $H \cap K^*$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$, maka menurut teorema 3.4, $h h_1 h^{-1} \in H \cap K^*$. Sehingga $(h^* h_2 * h_5 *)(h h_1 h^{-1}) \in H^*(H \cap K^*)$. Jadi $(h^*h)(h_1 * h_1)(h^*h)^{-1} \in H^*(H \cap K^*)$. Jadi menurut teorema 3.4, $H^*(H \cap K^*)$ adalah subgrup normal dari $H^*(H \cap K)$.

(b) Akan ditunjukkan $K^*(H^* \cap K)$ adalah subgrup normal dari $K^*(H \cap K)$.

Karena H* subgrup normal dari H, dan H, K subgrup dari G, maka menurut teorema 3.16, $H^* \cap K$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$.

(i) Karena $H^* \cap K \subseteq H \cap K$, maka jelas bahwa $K^*(H^* \cap K) \subseteq K^*(H \cap K)$.

(ii) Untuk setiap $k^*k \in K^*(H^* \cap K)$,

$$\begin{aligned}
(k^*k)^{-1} &= k^{-1}k^{*-1} && \text{teorema 2.4}\\
&= k_1{}^*k^{-1} && K^* \text{ subgrup normal } K\\
&\in K^*(H^* \cap K).
\end{aligned}$$

(iii) Ambil sebarang $k_1{}^*k_1$, $k_2{}^*k_2 \in K^*(H^* \cap K)$, maka:

$$\begin{aligned}
(k_1{}^*k_1)(k_2{}^*k_2) &= k_1{}^*(k_1\,k_2{}^*)k_2 && \text{asosiatif}\\
&= k_1{}^*(k_3{}^*k_1)k_2 && K^* \text{ subgrup normal } K,\ k_3{}^* \in K^*\\
&= (k_1{}^*k_3{}^*)(k_1\,k_2) && \text{asosiatif}\\
&\in K^*(H^* \cap K)
\end{aligned}$$

Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam $K^*(H^* \cap K)$.

(iv) Ambil sebarang $k^*k \in K^*(H \cap K)$ dan sebarang $k_1{}^*k_1 \in K^*(H^* \cap K)$.

$$\begin{aligned}
(k^*k)(k_1{}^*k_1)(k^*k)^{-1} &= (k^*k)(k_1{}^*k_1)(k^{-1}k^{*-1}) && \text{teorema 2.4}\\
&= k^*(k\,k_1{}^*)k_1\,(k^{-1}k^{*-1}) && \text{asosiatif}\\
&= k^*(k_2{}^*k)\,k_1\,(k_3{}^*k^{-1}) && K^* \text{ subgrup normal } K\\
&= (k^*k_2{}^*)k(k_1\,k_3{}^*)k^{-1} && \text{asosiatif}\\
&= (k^*\,k_2{}^*)k(k_4{}^*k_1)k^{-1} && K^* \text{ subgrup normal } K
\end{aligned}$$

$= (k^* k_2{}^*)(k k_4{}^*) k_1 k^{-1}$ asosiatif

$= (k^* k_2{}^*)(k_5{}^* k)\ k_1\ k^{-1}$ K* subgrup normal K

$= (k^* k_2{}^* k_5{}^*)(k k_1\ k^{-1})$ asosiatif

Karena $k,\ k^{-1} \in H \cap K,\ k_1 \in H^* \cap K$ dan $H^* \cap K$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$, maka $k k_1\ k^{-1} \in H^* \cap K$ menurut teorema 3.4. Sehingga $(k^* k_2{}^* k_5{}^*)(k k_1\ k^{-1}) \in K^*(H^* \cap K)$.

Jadi $(k^*k)\ (k_1{}^* k_1)(k^*k)^{-1} \in K^*(H^* \cap K)$.

Jadi menurut teorema 3.4, $K^*(H^* \cap K)$ adalah subgrup normal dari $K^*(H \cap K)$.

(c) Karena $H \cap K^*$ dan $H^* \cap K$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$, maka $L = (H \cap K^*)(H^* \cap K)$ adalah subgrup normal dari $H \cap K$. Didefiniskan $\alpha : H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$, di mana $(\forall h \in H^*)(\forall x \in H \cap K)\ \alpha(hx) = xL$. Akan ditunjukkan bahwa α merupakan suatu homomorfisma.

(i) Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H^*$ dan $x_1, x_2 \in H \cap K$ sedemikian hingga $h_1 x_1 = h_2 x_2$. Maka $(h_1 x_1) x_1{}^{-1} = (h_2 x_2) x_1{}^{-1}$. Sehingga

$h_1\ (x_1 x_1{}^{-1}) = h_2\ (x_2 x_1{}^{-1})$ asosiatif

$h_1\ e = h_2\ (x_2 x_1{}^{-1})$ definisi 2.4

$h_1 = h_2\ (x_2 x_1{}^{-1})$ definisi 2.4

$h_2{}^{-1} h_1 = h_2{}^{-1}\ (h_2\ (x_2 x_1{}^{-1}))$

$h_2{}^{-1} h_1 = (h_2{}^{-1} h_2)(x_2 x_1{}^{-1})$ asosiatif

$h_2{}^{-1} h_1 = e\,(x_2 x_1{}^{-1})$ definisi 2.4

$h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1}$ definisi 2.4

Akibatnya $h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L$. Jadi $x_1L = x_2L$, yaitu $\alpha(h_1x_1) = \alpha(h_2x_2)$. Jadi α terdefinisi dengan baik.

(ii) Karena H^* adalah subgrup normal dari H, maka ada $h_3 \in H^*$ sedemikian hingga $x_1h_2 = h_3x_1$. Maka

$$
\begin{aligned}
\alpha((h_1x_1)(h_2x_2)) &= \alpha(h_1(x_1h_2)x_2) && \text{asosiatif} \\
&= \alpha(h_1(h_3x_1)x_2) \\
&= \alpha((h_1h_3)(x_1x_2)) && \text{asosiatif} \\
&= (x_1x_2)L && \text{definisi } \alpha \\
&= (x_1L)(x_2L) && \text{operasi pada grup faktor } (H\cap K)/L \\
&= \alpha(h_1x_1)\,\alpha(h_2x_2) && \text{definisi } \alpha
\end{aligned}
$$

Jadi α merupakan suatu homomorfisma.

(iii) Jelas bahwa α adalah fungsi yang surjektif.

(iv) Jika $h \in H^*$ dan $x \in H \cap K$, maka $\alpha(hx) = xL = L$ bila dan hanya bila $x \in L$, bila dan hanya bila $hx \in H^*L = H^*(H^* \cap K)(H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*)$. Jadi $\ker(\alpha) = H^*(H \cap K^*)$.

(v) Pemetaan $\alpha : H^*(H \cap K) \rightarrow (H \cap K)/L$ adalah homomorfisma surjektif dengan $\ker(\alpha) = H^*(H \cap K^*)$. Jadi menurut teorema 3.10, $H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/L$.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K) \cong (H \cap K) / (H^* \cap K)(H \cap K^*)$, kita menggunakan cara yang serupa dengan yang di atas. Definisikan $\beta : K^*(H \cap K) \rightarrow (H \cap K)/L$, dengan $\beta(ky) = yL$, $\forall k \in K^*$, $\forall y \in H \cap K$ dan $L = (H \cap K^*)(H^* \cap K)$. Dapat diperiksa bahwa $\beta(K^*(H \cap K)) = (H \cap K)/L$, $\ker(\beta) = K^*(H^* \cap K)$ dan β adalah homomorfisma yang surjektif.

Jadi menurut teorema 3.10, $K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K) \cong (H\cap K)/L$.

Akibatnya $H^*(H\cap K)/H^*(H\cap K^*) \cong (H\cap K)/L \cong K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K)$. $\square$

Teorema berikut ini merupakan dasar dari teori barisan, dan disebut <u>teorema Schreier</u>.

Teorema 4.2 Dua barisan subnormal (normal) dari suatu grup G mempunyai penghalusan yang isomorfik.

Bukti :

Misalkan G grup dan

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \ldots\ldots < H_n = G \qquad (1)$$

$$\{e\} = K_0 < K_1 < K_2 < \ldots\ldots < K_m = G \qquad (2)$$

adalah dua barisan subnormal untuk G. Untuk i, di mana $0 \le i \le n\text{-}1$, bentuklah rangkaian grup berikut :

$$H_i = H_i\ (H_{i+1} \cap K_0) \le H_i\ (H_{i+1} \cap K_1) \le \ldots\ldots \le H_i\ (H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}.$$

Jika kita mengerjakannya untuk setiap i di mana $0 \le i \le n\text{-}1$ dan memisalkan $H_{i,j} = H_i\ (H_{i+1} \cap K_j)$, maka akan diperoleh rangkaian grup :

$$\begin{aligned}\{e\} = H_{0,0} \le H_{0,1} \le H_{0,2} \le \ldots\ldots &\le H_{0,m-1} \le H_{1,0}\\ &\le H_{1,1} \le H_{1,2} \le \ldots\ldots \le H_{1,m-1} \le H_{2,0}\\ &\le H_{2,1} \le H_{2,2} \le \ldots\ldots \le H_{2,m-1} \le H_{3,0}\\ &\le \ldots\ldots\ldots\\ &\le H_{n-1,1} \le H_{n-1,2} \le \ldots\ldots \le H_{n-1,m-1} \le H_{n-1,m}\\ &= G \qquad (3)\end{aligned}$$

Rangkaian (3) ini memuat nm+1 grup yang tidak harus berbeda, dan $H_{i,0} = H_i$ untuk setiap i. Menurut teorema 4.1, rangkaian (3) adalah suatu barisan subnormal, yaitu setiap grup adalah subgrup normal dari grup yang berikutnya. Rangkaian ini merupakan penghalusan dari barisan (1). Dengan cara yang simetrik kita misalkan

$K_{j,i} = K_j(K_{j+1} \cap H_i)$ untuk $0 \le j \le m-1$ dan $0 \le i \le n$, yang menghasilkan barisan subnormal :

$$\begin{aligned}\{e\} = K_{0,0} &\le K_{0,1} \le K_{0,2} \le \ldots\ldots. \le K_{0,n-1} \le K_{1,0} \\ &\le K_{1,1} \le K_{1,2} \le \ldots\ldots \le K_{1,n-1} \le K_{2,0} \\ &\le K_{2,1} \le K_{2,2} \le \ldots\ldots \le K_{2,n-1} \le K_{3,0} \\ &\le \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\le K_{m-1,1} \le K_{m-1,2} \le \ldots\ldots. \le K_{m-1,n-1} \le K_{m-1,n} \\ &= G \qquad (4)\end{aligned}$$

Rangkaian (4) ini memuat mn+1 grup yang tidak harus berbeda dan $K_{j,0} = K_j$ untuk setiap j. Rangkaian (4) ini adalah penghalusan dari barisan (2). Dengan teorema 4.1 diperoleh $H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1}) / H_i(H_{i+1} \cap K_j) \cong K_j$

$$(K_{j+1} \cap H_{i+1})/K_j(K_{j+1} \cap H_i) \text{ atau } H_{i,j+1}/H_{i,j} \cong K_{j,i+1}/K_{j,i} \qquad (5)$$

untuk $0 \le i \le n-1$ dan $0 \le j \le m-1$. Isomorfisma dari relasi (5) memberikan korespondensi satu-satu dari grup-grup faktor yang isomorfik antara barisan subnormal (3) dan (4). Untuk menunjukkan korespondensi ini, perhatikan bahwa $H_{i,0} = H_i$ dan $H_{i,m} = H_{i+1}$, dan $K_{j,0} = K_j$ dan $K_{j,n} = K_{j+1}$. Masing-masing rangkaian pada (3) dan (4) memuat suatu susunan empat persegi panjang dari mn tanda $\le$. Setiap $\le$ menghasilkan suatu grup faktor. Grup-grup faktor yang dihasilkan pada baris ke-r dalam rangkaian (3) berkorespondensi dengan grup-grup faktor yang dihasilkan pada kolom ke-r dalam rangkaian (4). Dengan menghapus grup-grup terulang dari rangkaian (3) dan (4) diperoleh barisan subnormal dari grup-grup yang berbeda, yang merupakan penghalusan yang isomorfik dari rangkaian (1) dan (2). Teorema terbukti untuk barisan subnormal.

Untuk barisan normal, di mana setiap H_i dan K_j merupakan subgrup normal dari G, semua grup $H_{i,j}$ dan $K_{j,i}$ yang dibentuk di atas juga merupakan subgrup normal dari G. Karena itu bukti yang sama juga dapat digunakan. □

Contoh 4.5 Kita akan mencari penghalusan yang isomorfik dari barisan $\{0\} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ dan $\{0\} < 9\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$. Perhatikan penghalusan $\{0\} < 72\mathbf{Z} < 8\mathbf{Z} < 4<\mathbf{Z}$ dari $\{0\} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$, dan penghalusan $\{0\} < 72\mathbf{Z} < 18\mathbf{Z} < 9\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ dari $\{0\} < 9\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$. Kedua penghalusan tersebut mempunyai empat grup faktor yang isomorfik dengan $\mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_9$ dan $72\mathbf{Z}$ atau $\mathbf{Z}$.

Definisi 4.5 Suatu barisan subnormal $\{H_i\}$ dari grup G disebut <u>barisan komposisi</u> jika semua grup faktor H_{i+1}/H_i adalah sederhana. Suatu barisan normal $\{H_i\}$ dari G disebut <u>barisan utama</u> jika semua grup faktor H_{i+1} / H_i adalah sederhana.

Perhatikan bahwa untuk grup abelian, konsep dari barisan komposisi dan barisan utama adalah sama. Karena setiap barisan normal juga merupakan barisan subnormal, maka setiap barisan utama juga merupakan barisan komposisi untuk sembarang grup, baik itu grup abelian maupun bukan.

Teorema 4.3 Setiap dua barisan komposisi (utama) dari suatu grup G adalah isomorfik.

Bukti :

Misalkan $\{H_i\}$ dan $\{K_j\}$ adalah dua barisan komposisi (utama) dari grup G. Menurut teorema 4.2, kedua barisan ini mempunyai penghalusan yang isomorfik. Karena semua grup faktor adalah sederhana, maka menurut teorema 3.17 kedua barisan tersebut tidak mempunyai penghalusan lagi. Jadi $\{H_i\}$ dan $\{K_j\}$ isomorfik . ◻

Teorema 4.3 dikenal sebagai teorema Jordan-Hölder.

Teorema 4.4 Jika G mempunyai barisan komposisi (utama), dan jika N adalah subgrup normal sejati dari G, maka ada barisan komposisi (utama) yang memuat N.

Bukti :

Barisan $\{e\} < N < G$ merupakan barisan yang sekaligus subnormal dan normal. Karena G mempunyai barisan komposisi $\{H_i\}$, maka menurut teorema 4.2 ada penghalusan dari $\{e\} < N < G$ yang isomorfik dengan penghalusan dari $\{H_i\}$. Tapi karena merupakan barisan komposisi, $\{H_i\}$ tidak mempunyai penghalusan lagi. Maka $\{e\} < N < G$ dapat dihaluskan menjadi suatu barisan subnormal yang semua grup faktornya sederhana, yaitu suatu barisan komposisi. Argumen yang sama dapat diterapkan untuk barisan utama $\{K_j\}$ dari G.

◻

Definisi 4.6 Suatu grup G dikatakan dapat dipecahkan jika grup G tersebut mempunyai barisan komposisi $\{H_i\}$ sedemikian hingga semua grup faktor H_{i+1} / H_i adalah abelian.

Dengan teorema Jordan-Hölder dapat kita lihat bahwa untuk suatu grup yang dapat dipecahkan, setiap barisan komposisi $\{H_i\}$ pasti mempunyai grup-grup faktor H_{i+1} / H_i yang abelian.

C. Pusat Dan Barisan Pusat

Dalam sub bab ini kita akan berkenalan dengan jenis lain dari suatu barisan dalam grup.

Definisi 4.7 Pusat dari suatu grup G adalah himpunan dari semua elemen $a \in G$ sedemikian hingga $ax = xa$, $\forall x \in G$.

Teorema 4.5 Pusat dari suatu grup merupakan subgrup normal dari grup tersebut.

Bukti :

Misalkan P adalah pusat dari grup G, maka $P = \{a \in G / ax = xa, \forall x \in G\}$. Akan ditunjukkan bahwa P adalah subgrup normal dari G. Pertama akan diperlihatkan bahwa P adalah subgrup dari G.

(i) Ambil sebarang $a,b \in P$, maka untuk setiap $x \in G$ berlaku $ax = xa$ dan $bx = xb$. Jelas bahwa $ab \in G$, karena G adalah grup.

Maka

$(ab)x$	$= a(bx)$	asosiatif
	$= a(xb)$	$b \in P$
	$= (ax)b$	sifat asosiatif dalam grup
	$= (xa)b$	$a \in P$
	$= x(ab)$	sifat asosiatif dalam grup

Jadi $(ab)x = x(ab)$, untuk setiap $x \in G$. Jadi $ab \in P$.

Jadi sifat tertutup dipenuhi oleh P.

(ii) Ambil sebarang $a \in P$, maka $a \in G$ dan $a^{-1} \in G$.

Perhatikan bahwa $ex = xe$ untuk setiap $x \in G$. Maka

$(aa^{-1})x = x(aa^{-1})$	definisi 2.4
$a(a^{-1}x) = (xa)a^{-1}$	sifat asosiatif dalam grup
$a(a^{-1}x) = (ax)a^{-1}$	$a \in P$
$a(a^{-1}x) = a(xa^{-1})$	sifat asosiatif dalam grup
$a^{-1}(a(a^{-1}x)) = a^{-1}(a(xa^{-1}))$	
$(a^{-1}a)(a^{-1}x) = (a^{-1}a)(xa^{-1})$	sifat asosiatif dalam grup
$e(a^{-1}x) = e(xa^{-1})$	definisi 2.4
$a^{-1}x = xa^{-1}$	definisi 2.4

Jadi $a^{-1}x = xa^{-1}, \forall x \in G$.

Jadi $a^{-1} \in P$.

Dari (i) dan (ii), menurut teorema 2.5, P adalah subgrup dari G.

(iv) Ambil sebarang $a \in P$ dan sebarang $x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $xax^{-1} \in P$.

Jelas bahwa $xax^{-1} \in G$, dan untuk setiap $y \in G$ berlaku :

$(xax^{-1})y = (xa)(x^{-1}y)$	sifat asosiatif dalam grup
$= (ax)(x^{-1}y)$	$a \in P$
$= a(xx^{-1})y$	sifat asosiatif dalam grup
$= aey$	definisi 2.4
$= ay$	definisi 2.4
$= ya$	$a \in P$
$= y(ae)$	definisi 2.4
$= y(a(xx^{-1}))$	definisi 2.4
$= y((ax)x^{-1})$	sifat asosiatif dalam grup

$= y((xa)x^{-1})$ $\qquad a \in P$

$= y\,(xax^{-1})$

Jadi $y(xax^{-1}) = (xax^{-1})y$, $\forall\, y \in G$. Jadi $xax^{-1} \in P$.

Jadi menurut teorema 3.4 dan definisi 3.5, P adalah subgrup normal dari G. □

Misalkan G adalah grup dan Z(G) adalah pusat dari G. Menurut teorema 4.5, Z(G) adalah subgrup normal dari grup G. Kita dapat membentuk grup faktor G/Z(G) dengan pusat Z(G/Z(G)), yang merupakan subgrup normal dari G/Z(G). Jika α : G $\to$ G/Z(G) adalah homomorfisma kanonik, maka menurut teorema 3.6, α^{-1} (Z(G/Z(G)) adalah subgrup normal Z_1 (G) dari G. Selanjutnya kita dapat membentuk grup faktor G/Z_1 (G) dan menentukan pusatnya, kemudian dengan mengambil α_1^{-1} dari pusat tersebut untuk memperoleh Z_2 (G), dan seterusnya. Barisan $\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots\ldots$ seperti yang dijelaskan di atas disebut barisan pusat yang naik dari grup G.

BAB V
KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

1. Suatu subgrup normal M dari grup G adalah maksimal jika dan hanya jika grup faktor G/M adalah grup sederhana.
2. Ada tiga macam barisan grup yang dibahas dalam tulisan ini, yaitu barisan subnormal, barisan normal dan barisan pusat yang naik dari suatu grup.
3. Dua barisan subnormal (normal) dari suatu grup mempunyai penghalusan yang isomorfik.
4. Setiap dua barisan komposisi (utama) dari suatu grup adalah isomorfik.

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh, John B. 1980. *A First Course in Abstract Algebra.* New York : Addison-Wesley Publishing Company.

Durbin, John R. 1985. *Modern Algebra.* New York : John Wiley & Sons, Inc.

Wahyudin, Drs. 1989. *Aljabar Modern.* Bandung :Tarsito.

Susila, I. Nyoman. 1992. *Matriks.* Jakarta : Erlangga.