TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS UNTUK FUNGSI BERNILAI REAL DENGAN SATU VARIABEL DAN BEBERAPA VARIABEL REAL

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

INDAH PUJIASTUTI

NIM : 93 1414 029
NIRM : 930052010501120027

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1998

SKRIPSI

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS
UNTUK FUNGSI BERNILAI REAL
DENGAN SATU VARIABEL DAN BEBERAPA VARIABEL REAL

oleh :

INDAH PUJIASTUTI

NIM : 93 1414 029

NIRM : 930052010501120027

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

tanggal 24-12-1998

SKRIPSI

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS UNTUK FUNGSI BERNILAI REAL DENGAN SATU VARIABEL DAN BEBERAPA VARIABEL REAL

Yang dipersiapkan dan disusun oleh:

INDAH PUJIASTUTI

NIM : 93 1414 029

NIRM : 930052010501120027

Telah dipertahankan didepan panitia penguji

pada tanggal 3 Desember 1998

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. F. Kartika Budi, M. Pd	....
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Prof. Drs. R. Soemantri	....
Anggota	: Drs. St. Susento, M.Sc.	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M. Sc	....

Yogyakarta, Desember 1998

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

Dr. Paul Suparno, S.J., MST

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Progam Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis telah mendapatkan bantuan serta dorongan dari berbagai pihak baik moril maupun materiil. Untuk itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri selaku dosen pembimbing yang telah memberikan petunjuk dan saran-saran selama proses penyusunan skripsi ini sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan.
2. Bapak dan Ibu dosen JPMIPA USD atas segala bimbingannya selama penulis menempuh perkuliahan di JPMIPA USD.
3. Pihak staf perpustakaan USD yang telah membantu dalam proses peminjaman buku-buku penunjang.
4. Teman-teman yang telah memberikan dorongan dan bantuan selama proses pembuatan skripsi ini.
5. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu atas bantuannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini banyak sekali terdapat kekurangan-kekurangan, oleh karena itu diharapkan segala bentuk kritik yang bersifat membangun demi sempurnanya skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga tulisan ini berguna bagi siapa saja.

Yogyakarta, Desember 1998

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Teorema Pendekatan Weierstrass mengatakan bahwa untuk setiap fungsi real $f(x)$ yang didefinisikan dan kontinu pada selang tertutup dan terbatas [a,b] dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dalam x. Teorema ini dibuktikan dengan tiga cara, yaitu : dengan suku banyak Bernstein, dengan fungsi konvolusi, dan dengan operator linear.

Kemudian Teorema Pendekatan Weierstrass ini diperluas daerah definisinya, dari selang tertutup dan terbatas [a,b] menjadi himpunan kompak $K \subset \mathbf{R}$. Pembuktian teorema ini menggunakan perluasan kontinu suatu fungsi.

Selanjutnya dibahas tentang perumuman Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi real dari beberapa variabel real. Pembuktian teorema ini menggunakan teorema yang mengatakan bahwa jika diberikan fungsi bernilai real f yang kontinu pada $E \subset \mathbf{R}^k$ dan jika diberikan dua titik berlainan $\mathbf{q}$ dan $\mathbf{r}$ di dalam E, maka terdapat suku banyak $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sedemikian sehingga $P(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})$ dan $P(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$. Selain itu juga digunakan akibat dari Teorema Pendekatan Weierstrass, yaitu bahwa terdapat barisan suku banyak dalam x $< P_n(x) >$ yang konvergen seragam ke $|x|$ pada [-a,a] dengan $P_n(0) = 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Teorema ini sangat penting dalam perumuman Teorema Pendekatan Weierstrass.

ABSTRACT

The Weierstrass Approximation Theorem says that for any continous real function defined on a closed and bounded interval [a,b] can be uniformly approximated by a sequence of polynomials in x. This theorem will be proved by three ways, i.e : by Bernstein polynomials, convolution functions, and linear operators.

The domain [a,b] in the Weierstrass Approximation Theorem will be extended to a more general set of **R**, what we call a compact set. For this purpose we will use a concept of continous extention of a function.

Next, we will to discuss the generalization of Weierstrass Approximation Theorem for function of several real variables. To prove this theorem, we introduce a theorem which says, that if f a continous real function defined on a set $E \subset \mathbf{R}^k$ and $\mathbf{q}$ and $\mathbf{r}$ are distinct points of E, then there exists a polynomial $P(x_1, x_2, ..., x_k)$ in the real variable $x_1, x_2, ..., x_k$ such that $P(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})$ and $P(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$. The corollary of Weierstrass Approximation Theorem, that there exist a sequence of polynomials in x, $< P_n(x) >$, which converges uniformly to $|x|$ in $[-a,a]$ with $P_n(0) = 0$ for any $n \in N$, will play an important role for this generalization.

BAB I

PENDAHULUAN

Suatu fungsi yang kontinu dan terdiferensial kontinu pada daerah definisinya dapat didekati dengan deret Maclaurin. Hal ini tidak berlaku untuk fungsi yang tidak terdiferensial kontinu pada daerah definisinya. Disini akan dibahas mengenai Teorema Pendekatan Weierstrass yakni pendekatan suatu fungsi kontinu oleh suku banyak. Dalam teorema ini tidak dibedakan antara fungsi yang terdiferensial kontinu dan yang tidak terdiferensial kontinu.

Dalam karya tulis ini, pembahasan Teorema Pendekatan Weierstrass dibatasi untuk fungsi bernilai real baik dari satu variabel maupun dari beberapa variabel real.

Sebelum sampai ke pembahasan, terlebih dahulu diberikan konsep-konsep yang akan mendukung pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass yang dibicarakan sebagai teori pendukung dalam bab II.

Dalam bab II akan dibahas mengenai kitar, titik limit, titik interior, himpunan terbuka, himpunan tertutup, penampat suatu himpunan dan himpunan kompak dalam R. Pada himpunan kompak akan ditunjukkan juga pengertian-pengertian yang ekuivalen dengannya. Selain ini juga dibahas tentang sifat-sifat fungsi kontinu, perluasan fungsi kontinu dan kekonvegenan seragam suatu barisan fungsi.

Uraian dalam teori pendukung tidak akan dibahas secara rinci. Disini hanya akan dibahas tentang konsep-konsep yang benar-benar mendukung pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass.

Dalam bab III akan dibuktikan Teorema Pendekatan Weierstrass pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbf{R}$ dan pada himpunan kompak $K \subset \mathbf{R}$. Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi bernilai real pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbf{R}$ akan dibuktikan dengan tiga cara, yaitu dengan :

1. suku banyak Bernstein
2. fungsi konvolusi
3. operator linear.

Sebelum pembuktian dengan operator linear dibahas dahulu sedikit tentang operator linear. Pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi bernilai real pada himpunan kompak K dalam **R** menggunakan perluasan fungsi kontinu.

Pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi real dengan beberapa variabel real pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$ dibahas dalam bab IV. Sebelum pembuktian, akan dibahas tentang Ruang Euclides $\mathbf{R}^k$ **berdimensi-k.** Dalam ruang Euclides $\mathbf{R}^k$ ini akan dibahas mengenai definisi ruang Euclides $\mathbf{R}^k$, topologi dasar pada $\mathbf{R}^k$, himpunan kompak di dalam $\mathbf{R}^k$, fungsi-fungsi real pada $\mathbf{R}^k$ dan barisan fungsi real pada $\mathbf{R}^k$. Pembahasan ini pada dasarnya tidak jauh berbeda dengan teori pendukung pada bab II.

Pada bab V yaitu penutup akan diberikan sedikit ikhtisar tentang hal-hal yang telah dibahas dalam karya tulis ini.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Sebelum kita melangkah ke pembahasan masalah, terlebih dahulu akan kita bahas beberapa teori yang akan mendukung pembahasan masalah. Teori-teori ini akan kita gunakan sebagai landasan dalam pembahasan masalah dalam bab III. Teori-teori tersebut antara lain tentang topologi dasar pada R, himpunan kompak dalam R, fungsi kontinu, barisan dan deret fungsi.

2.1. Topologi Dasar pada R

Definisi 2.1.1

Diberikan titik $p \in \mathbf{R}$ dan $r > 0$. Kitar (*neighborhood*) titik p dengan radius r yang diberi notasi $N(p,r)$ adalah himpunan titik-titik $x \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $|x - p| < r$. Jadi $N(p,r) = \{ x \in \mathbf{R} : |x - p| < r \}$.

Definisi 2.1.2

Diberikan himpunan $E \subset \mathbf{R}$. Titik $p \in \mathbf{R}$ dinamakan titik limit himpunan E, jika setiap kitar titik p memuat titik $q \in E$ dan $q \neq p$.

$(p = \text{titik limit } E) \Leftrightarrow (\forall r > 0)\ (\exists q \in E)\ (0 < |q - p| < r)$.

Definisi 2.1.3

Titik p dinamakan titik interior himpunan E jika terdapat $r > 0$ sehingga $N(p,r) \subset E$.

Definisi 2.1.4

Titik p dinamakan titik terasing himpunan E, jika $p \in E$ dan p bukan titik limit E.

Teorema 2.1.1

Titik p adalah titik limit himpunan E jika dan hanya jika untuk setiap $r > 0$ kitar $N(p,r)$ memuat tak hingga banyak anggota E.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui p titik limit himpunan E. Diandaikan terdapat suatu $r > 0$ sehingga $N(p,r)$ hanya memuat berhingga banyak anggota E. Dimisalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemen-elemen dari E di dalam $N(p,r)$ dan yang tidak sama dengan p. Diambil $h = \min \{|x_j - p|, 1 \le j \le n\}$. Maka $N(p,h) \cap E$ kosong atau $\{p\}$ (jika $p \in E$), sehingga p tidak mungkin menjadi titik limit E. Terdapat kontradiksi.

($\Leftarrow$) Diketahui untuk setiap $r > 0$ kitar $N(p,r)$ memuat tak hingga banyak anggota E. Jelas bahwa p titik limit E, karena untuk setiap $r > 0$ diatas pasti terdapat $q \in E$ dan $q \neq p$ sehingga $0 < |q - p| < r$. ■

Akibat :

Jika E mempunyai titik limit maka E tak hingga.

Jika E himpunan berhingga maka E tidak memiliki titik limit.

Definisi 2.1.5

Himpunan G dikatakan terbuka dalam R jika semua anggotanya adalah titik interior G.

(G terbuka) $\Leftrightarrow$ ($x \in G \Rightarrow$ ($\exists\ r>0$ dan $N(x,r) \subset G$)).

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Sebelum kita melangkah ke pembahasan masalah, terlebih dahulu akan kita bahas beberapa teori yang akan mendukung pembahasan masalah. Teori-teori ini akan kita gunakan sebagai landasan dalam pembahasan masalah dalam bab III. Teori-teori tersebut antara lain tentang topologi dasar pada **R**, himpunan kompak dalam **R**, fungsi kontinu, barisan dan deret fungsi.

2.1. Topologi Dasar pada R

Definisi 2.1.1

Diberikan titik $p \in \mathbf{R}$ dan $r > 0$. Kitar (*neighborhood*) titik p dengan radius r yang diberi notasi N(p,r) adalah himpunan titik-titik $x \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $|x - p| < r$. Jadi $N(p,r) = \{ x \in \mathbf{R} : |x - p| < r\}$.

Definisi 2.1.2

Diberikan himpunan $E \subset \mathbf{R}$. Titik $p \in \mathbf{R}$ dinamakan titik limit himpunan E, jika setiap kitar titik p memuat titik $q \in E$ dan $q \neq p$.

(p = titik limit E) $\Leftrightarrow$ $(\forall r>0)\ (\exists q \in E)\ (0 < |q - p| < r)$.

Definisi 2.1.3

Titik p dinamakan titik interior himpunan E jika terdapat $r > 0$ sehingga $N(p,r) \subset E$.

Definisi 2.1.6

Himpunan F dikatakan tertutup dalam **R**, jika semua titik limitnya anggota F.

(F tertutup) $\Leftrightarrow$ (p titik limit F $\Rightarrow$ $p \in F$).

Teorema 2.1.2

Setiap kitar suatu titik adalah himpunan terbuka.

Bukti:

Ditinjau N(p,r) untuk sembarang r > 0 yang ditentukan dan titik $x \in N(p,r)$. Karena $|x - p| < r$, maka $h = r - |x - p| > 0$. Akan ditunjukkan bahwa $N(x,h) \subset N(p,r)$. Jika $t \in N(x,h)$, maka $|t - x| < h$. Jadi $|t - p| \leq |t - x| + |x - p| < h + |x - p| = r$. Jadi jika $t \in N(x,h)$ maka $|t - p| < r$ atau $t \in N(p,r)$. Jadi $N(x,h) \subset N(p,r)$. Didapatkan untuk setiap $x \in N(p,r)$ terdapat $h > 0$ sehingga $N(x,h) \subset N(p,r)$. Jadi N(p,r) terbuka. ∎

Terorema 2.1.3

Himpunan $E \subset$ **R** adalah terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup. Jadi E tertutup jika dan hanya jika E^c terbuka

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui E terbuka. Diandaikan p titik limit E^c. Maka untuk setiap kitar dari p memuat titik $q \in E^c$ dan $q \neq p$. Sehingga setiap kitar dari p bukan subhimpunan dari E. Jadi p bukan titik interior dari E. Karena E himpunan terbuka, maka $p \notin E$. Jadi $p \in E^c$. Terbukti E^c tertutup.

($\Leftarrow$) Diketahui E^c tertutup. Diandaikan $p \in E$. Jadi $p \notin E^c$. Karena E^c tertutup, maka p bukan titik limit E^c. Maka terdapat $r > 0$ sehingga untuk semua x dengan $|x - p| < r$ berlaku $x \notin E^c$ atau $x \in E$. Jadi $N(p,r) \subset E$. Jadi E terbuka.

■

Teorema 2.1.4

a. Gabungan berhingga atau takhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam **R** adalah terbuka..

b. Irisan berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam **R** adalah terbuka.

Bukti :

a. Diberikan A sembarang himpunan (berhingga atau tak hingga) dan keluarga himpunan $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Akan dibuktikan $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ terbuka. Diandaikan $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ maka terdapat $\alpha_0 \in A$ sehingga $x \in G_{\alpha_0}$. Karena G_{α_0} terbuka, maka x titik interior G_{α_0}. Sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian hingga $N(x,r) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jadi $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ terbuka.

b. Diberikan A himpunan terbuka berhingga dan keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$. Dibuktikan $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ terbuka. Andaikan $x \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$, maka $x \in G_\alpha$, untuk $\forall \alpha \in A$. Karena G_α terbuka, maka terdapat $r_\alpha > 0$ sehingga $N(x,r_\alpha) \subset G_\alpha$. Jika diambil $r = \min\{r_\alpha, \alpha \in A\}$ maka $r > 0$ dan $N(x,r) \subset G_\alpha$

untuk semua $\alpha \in A$. Jadi $N(x,r) \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ dan x titik interior $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$. Terbukti

$\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ terbuka. ■

Teorema 2.1.5

A. Irisan berhingga atau tak berhingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam **R** adalah tertutup.

B. Gabungan berhingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam **R** adalah tertutup.

Bukti :

Menurut hukum De Morgan, untuk sembarang himpunan indeks A berlaku $\left(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} (F_\alpha)^c$ dan $\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} (F_\alpha)^c$. Jika F_α tertutup dalam **R** untuk $\forall \alpha \in A$ maka menurut teorema 2.1.4 himpunan $(F_\alpha)^c$ terbuka dalam **R**. Menurut hukum De Morgan dan teorema 2.1.4 diperoleh :

$$\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha = \left[\bigcap_{\alpha \in A} (F_\alpha)^c\right]^c \text{ tertutup dan } \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \left[\bigcup_{\alpha \in A} (F_\alpha)^c\right]^c \text{ tertutup.} \quad ■$$

Teorema 2.1.6

Jika G himpunan terbuka dalam **R**, maka G merupakan gabungan dari selang-selang terbuka yang saling asing dalam keluarga selang-selang terbuka.

Bukti :

Untuk setiap $x \in G$ dikawankan dengan $I_x \subset G$. Dimisalkan I_x gabungan dari selang-selang terbuka $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ dengan $\alpha \in A$, sedemikian hingga $x \in I_\alpha$ dan $I_\alpha \subset G$. Jadi I_x adalah gabungan semua selang terbuka yang memuat x dan termuat dalam G. Akan dibuktikan bahwa I_x suatu selang terbuka.

Dimisalkan $a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ dan $b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in A\}$. Jika $\eta \leq a$ atau $\eta \geq b$ maka $\eta \notin (a_\alpha, b_\alpha)$ untuk $\forall \alpha \in A$. Jadi $\eta \notin I_x$. Jika $a < \eta < b$ maka ada tiga kemungkinan, yakni $a < \eta < x$, $\eta = x$, $x < \eta < b$. Dalam keadaan pertama, karena $a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ terdapat $\alpha \in A$ sehingga $a \leq a_\alpha < \eta < x < b_\alpha$. Jelas $\eta \in (a_\alpha, b_\alpha)$ sehingga $\eta \in I_x$. Dengan cara yang serupa, mengingat $b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in A\}$, dapat ditunjukkan bahwa $\eta \in I_x$ jika $x < \eta < b$. Jelas bahwa $\eta \in I_x$ jika $\eta = x$. Jadi telah dibuktikan bahwa $\eta \in I_x$ jika dan hanya jika $a < \eta < b$. Terbukti $I_x = (a,b)$ suatu selang terbuka.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $x \in G$ dan $y \in G$ maka $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \varnothing$. Diandaikan $I_x \cap I_y \neq \varnothing$, maka ada $\zeta \in I_x \cap I_y$. Karena $I_x \cup I_y$ selang terbuka yang memuat x dan termuat didalam G, maka $I_x \cup I_y \subset I_x$ gabungan semua selang terbuka yang memuat x dan termuat dalam G, ini berakibat bahwa $I_x \cup I_y = I_x$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $I_x \cup I_y = I_y$. Jadi jika $I_x \cap I_y \neq \varnothing$, maka $I_x = I_y$. Dengan demikian $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \varnothing$. Sampai disini telah ditunjukkan bahwa $G = \bigcup_{x \in G} I_x$, yakni gabungan dari selang-selang terbuka yang saling asing.

Untuk setiap I_x dikawankan dengan tepat satu bilangan rasional $r_x \in I_x$. Karena dengan pengawanan secara ini selang-selang terbuka yang saling asing berkawankan dengan bilangan rasional yang berlainan, maka terdapat korespondensi satu-satu antara $\{I_x\}$ dengan $\{r_x\}$. Dengan demikian kelurga $\{I_x\}$ ekuivalen dengan suatu subhimpunan dari himpunan semua bilangan rasional, maka keluarga $\{I_x\}$ dalam gabungan diatas berhingga atau terbilang. ■

Teorema 2.1.7

Himpunan F adalah tertutup dalam R jika dan hanya jika setiap barisan konvergen $< x_n >$ dengan $x_n \in F$ untuk semua $n \in N$ limitnya di dalam F.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diberikan himpunan tertutup F dan $< x_n >$ barisan konvergen dengan $x_n \in F$ untuk semua $n \in N$. Diandaikan $x_n \to x$, akan dibuktikan $x \in F$. Diambil $\varepsilon > 0$ sembarang. Karena $x_n \to x$, maka terdapat $N \in N$ sehingga untuk semua $n \in N$ dengan $n \geq N$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Jika jangkauan $\{ x_n : n \in N\}$ berhingga, maka $x_n = x$ untuk tak hingga banyak indeks n, jadi $x \in F$. Jika jangkauan $\{ x_n : n \in N\}$ takhingga, maka $\{x_n : n \geq N\}$ himpunan takhingga dan subhimpunan dari kitar $N(x,\varepsilon)$. Jadi setiap kitar dari x memuat tak hingga banyak suku barisan. Karena $x_n \in F$ untuk $\forall n \in N$, maka menurut teorema 2.1.1. x adalah titik limit F. Jadi $x \in F$ sebab diketahui F tertutup.

($\Leftarrow$) Diandaikan p suatu titik limit F. Menurut teorema 2.1.1 setiap kitar dari p memuat takhingga banyak titik anggota F. Jadi untuk setiap $n \in N$ dapat dipilih suatu titik namakan x_n , dengan $x_n \in F$ dan $0 < |x_n - p| < 1/n$ ($x_n \neq p$ dan $x_n \in N(p,1/n)$). Terbentuklah barisan $< x_n >$ dengan $x_n \in F$ untuk $\forall n \in N$. Dibuktikan $< x_n >$ konvergen ke p. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in N$ sehingga $1/n < \varepsilon$. Jadi untuk $\forall n \in N$ berlaku $|x_n - p| < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$, sehingga $x_n \to p$. Karena setiap barisan didalam F yang konvergen diketahui bahwa limitnya di dalam F, jadi $p \in F$. Jadi jika p titik limit F maka $p \in F$. Sehingga F tertutup. ■

Definisi 2.1.7

Himpunan semua titik limit dari himpunan E biasanya diberi notasi E'. Himpunan $\bar{E} = E \cup E'$ dinamakan pemampat(*closure*) dari himpunan E.

2.2. Himpunan Kompak dalam R

Definisi 2.2.1

Suatu Keluarga $\mathcal{G}$ dari himpunan-himpunan terbuka dinamakan selimut terbuka untuk E, jika $E \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$.

Jika $\mathcal{H}$ selimut terbuka untuk E dan $\mathcal{H}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$ yang juga selimut terbuka untuk E, maka $\mathcal{H}$ dinamakan subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$.

Definisi 2.2.2

Himpunan $K \subset \mathbf{R}$ dikatakan kompak jika setiap selimut terbuka untuk K mempunyai subselimut berhingga.

Contoh 2.2.1

Jika H himpunan berhingga dalam $\mathbf{R}$ maka H kompak.

Bukti :

Misalkan $H = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ dan $\mathcal{G} = \{ G_\alpha : \alpha \in A \}$ sembarang selimut terbuka untuk H. Karena $H \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, maka untuk setiap j ($1 \le j \le n$) terdapat $\alpha \in A$ sehingga $x_j \in G_\alpha$. Untuk setiap j kita ambil satu α namakan α_j sehingga $x_j \in G_{\alpha_j}$. Maka $\{ G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n} \}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$ dan $H \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$. Terbukti H kompak.

Contoh 2.2.2

Buktikan bahwa : (a). $E = \{ 0, 1, 1/2, .1/3, \ldots \}$ adalah kompak

(b). $F = \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ tidak kompak

Bukti :

(a). Diandaikan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ sembarang selimut terbuka untuk E. Titik 0 adalah satu-satunya titik limit E. Karena $0 \in E$ maka terdapat $G_{\alpha_0} \in \mathcal{G}$ dan $0 \in G_{\alpha_0}$. Dapat dicari $0 < r < 1$ sehingga $(-r,r) \subset G_{\alpha_0}$, sebab 0 titik interior G_{α_0}. Terdapat $m \in \mathbf{N}$ sehingga $1/(m+1) < r < 1/m$. Jadi titik-titik anggota E kecuali mungkin hanya 1, 1/2, ..., 1/m adalah anggota G_{α_0}. Untuk setiap n dengan $1 < n < m$ diambil satu himpunan $G_{\alpha_n} \in \mathcal{G}$ sehingga $1/n \in G_{\alpha_n}$. Maka $\{ G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_n} \}$ subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$ dan terbukti E kompak.

(b). Akan dibuat selimut terbuka $\mathcal{G}$ dari F yang tidak memuat subselimut berhingga. Kita usahakan setiap himpunan dalam $\mathcal{G}$ hanya memuat tepat satu elemen dari F. Selang terbuka (1/2,2) hanya memuat satu titik dari E, yakni 1. Selanjutnya untuk semua n dengan $n \geq 2$, dibuat selang terbuka (1/(n+1), 1/(n-1)) yang memuat tepat satu titik 1/n dari F. Dengan demikian keluarga $\mathcal{G} = \{ G_n : n \in N \}$ dengan $G_1 = (1/2, 2)$ dan $G_n = (1/(n+1), 1/(n-1))$ untuk $n \geq 2$ adalah selimut terbuka untuk F. Dari konstruksi di atas tampak bahwa jika satu himpunan G_m misalnya, dihapuskan dari $\mathcal{G}$, maka $\bigcup_{n \neq m} G_n$ tidak memuat F lagi. Jelas $\mathcal{G}$ selimut terbuka tetapi tidak mempunyai subselimut berhingga dari F.

Teorema 2.2.1

Jika K suatu subhimpunan kompak dalam R, maka K tertutup dan terbatas.

Bukti :

Untuk setiap $x \in K$ dibuat kitar $N(x,1) = (x-1, x+1)$. Maka keluarga $G = \{ N(x,1) : x \in K \}$ adalah selimut terbuka dari K. Karena K kompak maka terdapat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didalam K sehingga $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N(x_j, 1)$. Jika $a = \min \{ x_j :$

$1 \leq j \leq n$ } dan b = maks { x_j : $1 \leq j \leq n$ } maka K subhimpunan dari selang [a-1 , b+1]. Jadi K terbatas.

Akan dibuktikan K tertutup dengan membuktikan K^c terbuka. Diandaikan $p \in K^c$, jadi $p \notin K$. Untuk setiap $n \in N$ himpunan $G_n = \{ x : |x-p| > 1/n \}$ adalah komplemen dari selang tertutup [p-1/n,p+1/n]. Jadi G_n terbuka. Karena $R - \{p\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ dan $p \notin K$, maka $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Karena K kompak, maka terdapat $G_1, G_2, \ldots, G_r$ sehingga $K \subset \bigcup_{n=1}^{r} G_n = G_r$. Jadi [p-1/r,p+1/r] = $(G_r)^c$ dan karena $K \subset G_r$, maka $N(p,1/r) \cap K = \varnothing$, sehingga $N(p,1/r) \subset K^c$. Jadi p titik interior K^c. Jadi K^c terbuka dan K tertutup. ■

Definisi 2.2.3

Subhimpunan E dari **R** dikatakan mempunyai sifat Heine-Borel jika setiap selimut terbuka himpunan E mempunyai subselimut berhingga.

Definisi 2.2.4

Subhimpunan E dari **R** dikatakan mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass jika setiap subhimpunan tak hingga dari E mempunyai titik limit didalam E.

Teorema 2.2.2

Subhimpunan E dari **R** mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass jika dan hanya jika E tertutup dan terbatas

Bukti :

($\Rightarrow$) Bukti dengan kontradiksi.

Andaikan E tidak tertutup, maka terdapat p titik limit E dan $p \notin E$. Dapat dibuat barisan titik-titik berlainan x_n dengan $x_n \in E$ dan $< |x_n - p| < 1/n$ untuk $\forall n \in N$. Jadi E memuat subhimpunan tak hingga tanpa titik limit di dalam E. Terjadi kontradiksi, karena diketahui bahwa E mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Jadi E tertutup.

Andaikan E tak terbatas, kita dapat membuat subhimpunan tak hingga dari E yang tidak memuat titik limit. Diandaikan E tak terbatas ke atas. Dipilih $x_1 \in E$. Selanjutnya dipilih $x_2 \in E$ dan $x_2 - x_1 > 1$. Setelah dipilih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di dalam E dengan $x_{k+1} - x_k > 1$ untuk $k = 1,2,\ldots,(n-1)$ kemudian dipilih $x_{n+1} \in E$ dan $x_{n+1} - x_1 > 1$. Hal ini mungkin dikerjakan karena E tak terbatas ke atas. Terjadilah himpunan tak hingga $\{ x_n : n \in N \}$ tanpa titik limit di dalam E. Terjadilah kontradiksi. Jadi E terbatas.

($\Leftarrow$) Jika E berhingga, maka implikasi " Jika A subset takhingga dari E maka A mempunyai titik limit di dalam E", pasti benar. Jadi E mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

Jika E tak hingga dan andaikan E tidak mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Maka terdapat himpunan tak hingga $A \subset E$ dan A tidak mempunyai titik limit didalam E. Karena E terbatas maka $E \subset I_0 = [-a,a]$ untuk suatu bilangan real a. Karena $I_0 \supset A$ dan A tak hingga, maka paling sedikit satu dari selang tertutup $[-a,0]$ dan $[0,a]$ memuat takhingga banyak anggota A, misal $I_1 = [0,a]$. Demikian juga paling sedikit satu dari selang $[0,a/2]$ dan $[a/2,a]$ memuat tak hingga banyak titik dari A, misal selang $I_2 = [0,a/2]$. Salah satu dari $[0,a/4]$

dan $[a/4, a/2]$ memuat tak hingga banyak titik dari A, kita namakan I_3. Demikian seterusnya terjadilah barisan selang tertutup $< I_n >$ dengan sifat untuk $\forall n \in N$ berlaku :

(i). I_n memuat takhingga banyak anggota A.

(ii). $I_n \supset I_{n+1}$

(iii). Panjang I_n $|I_n| = a/_{2^{n-1}}$.

Menurut teorema, terdapat titik p sehingga $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{p\}$, sebab $\lim |I_n| = 0$.

Untuk $\varepsilon > 0$ sembarang, maka terdapat m sehingga $a/_{2^{m-1}} < \varepsilon/2$. Titik $p \in I_m$ dan $|I_m| < \varepsilon/2$. Jadi jika $x \in I_m$ maka $|p - x| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Dengan demikian $I_m \subset N(p,\varepsilon)$ dan $N(p,\varepsilon)$ memuat tak hingga banyak anggota A. Jadi p titik limit A. Karena $A \subset E$ maka p titik limit E. Karena E tertutup maka $p \in E$. Terdapat suatu kontradiksi , karena diandaikan A tidak mempunyai titik limit di dalam E. Jadi E harus mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. ■

Teorema 2.2.3

Himpunan $K \subset R$ mempunyai sifat Heine-Borel jika dan hanya jika K mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui K mempunyai sifat Heine-Borel. Jadi K kompak. Menurut teorema 2.2.1 K tertutup dan terbatas. Menurut teorema 2.2.2 K mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

($\Leftarrow$) Diketahui K mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, jadi K tetutup dan terbatas.

Diandaikan K tidak mempunyai sifat Heine-Borel. Jadi terdapat selimut terbuka $\mathcal{G}$ yang tidak mempunyai subselimut berhingga. Terdapat selang tertutup $I_0 = [-a,a]$ sehingga $K \subset [-a,a]$ karena K terbatas. Maka paling sedikit satu dari selang tertutup $[-a,0]$ dan $[0,a]$ irisannya dengan K tidak termuat dalam gabungan dari sejumlah berhingga himpunan-himpunan anggota $\mathcal{G}$. Selang yang mempunyai sifat ini, misalnya $I_1 = [0,a]$. Jadi $I_1 \cap K$ tidak termuat di dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan tersebut. Demikian juga paling sedikit satu diantara $[0,a/2]$ dan $[a/2,a]$, irisannya dengan K tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga anggota dari $\mathcal{G}$. Selang ini misalnya $I_2 = [a/2,a]$, sehingga $I_2 \cap K$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan anggota $\mathcal{G}$. Demikian seterusnya sehingga kita dapat membentuk barisan selang tertutup $< I_n >$ sedemikian sehingga untuk $\forall n \in N$ berlaku :

(i) $I_n \cap K$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan anggota G.

(ii) $I_n \supset I_{n+1}$

(iii) Panjang I_n, $|I_n| = a/_{2^{n-1}}$

Dengan demikian $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{p\}$ dan p titik limit dari K. Karena K tertutup maka $p \in K$. Jadi haruslah ada suatu himpunan terbuka $G \in \mathcal{G}$ dan $p \in G$.

Karena G terbuka maka terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset G$. Dapat dicari m sehingga $|I_m| < \varepsilon/2$. Karena $p \in I_m$, maka $I_m \subset (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset G$. Terdapat kontradiksi, karena menurut (i) $I_m \cap K$ tidak termuat dalam sejumlah berhingga gabungan himpunan-himpunan anggota $\mathcal{G}$. Jadi K mempunyai sifat Heine-Borel. ■

Dari definisi-definisi dan teorema-teorema diatas, kita mempunyai pernyataan-pernyataan yang ekuivalen untuk himpunan kompak.

Teorema 2.2.4

Untuk $K \subset \mathbb{R}$, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

(i). K adalah kompak

(ii). K mempunyai sifat Heine-Borel

(iii). K tertutup dan terbatas

(iv). K mempunyai sifat Bolzano-weierstrass

(v). Setiap barisan bilangan di dalam K memuat subbarisan yang konvergen ke suatu titik di dalam K.

Bukti :

Ekuivalensi dari (i), (ii), (iii), (iv) dapat dilihat dari definisi dan teorema di atas. Kita tinggal membuktikan (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (v).

Diberikan barisan bilangan $< x_n >$ dengan $x_n \in K$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$.

Jika jangkauan $\{ x_n : n \in N\}$ berhingga, misalkan $\{ a_1, a_2, \ldots , a_N\}$ maka paling sedikit terdapat satu indeks p dengan $1 \le p \le N$ dan $x_n = a_p$ untuk tak berhingga banyak indeks n. Kita bentuk subbarisan dengan $x_{n_k} = a_p$ untuk $\forall k \in N$. Jadi $< x_{n_k} >$ konvergen ke $a_p \in K$.

Jika jangkauan $A = \{x_n : n \in N \}$ tak hingga, maka A memiliki titik limit $p \in K$, sebab K mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Kita bentuk subbarisan $<x_{n_k}>$ dari $< x_n >$ yang konvergen ke p sebagai berikut. Ditentukan $x_{n_1} = x_1$. Kemudian x_{n_2} dipilih suatu x_n dengan $n_2 > n_1$ dan $|x_{n_2} - p| < 1/2$. Setelah dipilih $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ maka $x_{n_{k+1}}$ dipilih sehingga $n_{k+1} > n_k$ dan $| x_{n_{k+1}} - p| < 1/(k+1)$. Jelas bahwa $<x_{n_k}>$ konvergen ke $p \in K$.

(v) $\Rightarrow$ (iii)

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Diandaikan K tidak tertutup. Maka terdapat p titik limit K dan $p \notin K$. Dibuat barisan elemen berlainan $< x_n >$ di dalam K sehingga $0 < | x_n - p | < 1/n$ untuk $\forall n \in N$. Hal ini mungkin karena setiap kitar p memuat tak hingga titik anggota K. Karena $x_n \to p$ maka semua subbarisan dari $< x_n >$ juga konvergn ke p. Karena $p \notin K$, maka $< x_n >$ barisan di dalam K tetapi tidak mempunyai subbarisan yang konvergen ke suatu titik di dalam K, sehingga terdapat kontradiksi. Jadi K harus tertutup.

Diandaikan K tidak terbatas. Karena K tidak terbatas maka dapat dibuat barisan $< x_n >$ yang monoton dengan $|x_n - x_{n-1}| > 1$ untuk $\forall n \in \mathbf{N}$. Barisan ini pasti tidak memuat subbarisan yang konvergen. Terdapat kontradiksi. Jadi K harus terbatas. ■

2.3. Fungsi Kontinu

Definisi 2.3.1

Diberikan fungsi $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$ dan $c \in E$. Dikatakan bahwa f kontinu di c, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, dapat dicari $\delta > 0$, sehingga untuk $\forall x \in E$ dan $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$,

Atau

Diberikan fungsi $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$ dan $c \in E$. Dikatakan bahwa f kontinu di c, jika diberikan kitar $N(f(c),\varepsilon)$ dari $f(c)$ terdapat kitar $N(c,\delta)$ dari c, sehingga untuk $\forall x \in N(c,\delta)$ maka $f(x) \in N(f(c),\varepsilon)$.

Definisi 2.3.2

Fungsi f seperti yang didefinisikan pada definisi 2.3.1 dikatakan kontinu pada E jika f kontinu di setiap titik anggota E.

Teorema 2.3.1 (Definisi Global)

Diberikan $f : E \to \mathbf{R}$ dengan $E \subset \mathbf{R}$. Fungsi f kontinu pada E jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka $G \subset \mathbf{R}$ terdapat himpunan terbuka H dalam $\mathbf{R}$ dan $H \cap E = f^{-1}(G)$.

Definisi 2.3.3

Diberikan fungsi $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$ dan $c \in E$. Fungsi f dikatakan diskontinu di c jika f tidak kontinu di c.

Teorema 2.3.2

Jika f fungsi kontinu dari K ke dalam **R**, dan K subhimpunan kompak dalam **R**, maka $f(K)$ kompak dalam **R**.

Bukti :

Kita harus membuktikan bahwa jika $\{ G_\alpha : \alpha \in A\}$ suatu selimut terbuka dari $f(K)$, maka $\{G_\alpha\}$ memuat subselimut berhingga. Diandaikan $\{ G_\alpha : \alpha \in A\}$ sembarang selimut terbuka untuk $f(K)$. Karena f kontinu pada K dan G_α terbuka dalam **R**, maka menurut definisi Global terdapat himpunan terbuka $H_\alpha \subset \mathbf{R}$ sehingga $[H_\alpha \cap K] = f^{-1}(G_\alpha)$. Karena $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ maka $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha)$ sehingga $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha$. Jadi $\{ H_\alpha : \alpha \in A\}$ suatu selimut terbuka dari K. Disini diketahui bahwa K kompak, maka terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dalam A sehingga $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i}$. Karena f didefinisikan pada K maka

$$f(K) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left[H_{\alpha_i} \cap K\right]\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i},$$

sebab untuk $G \subset \mathbf{R}$ (kodomain f) berlaku $f(f^{-1}(G)) \subset G$. Telah dibuktikan bahwa sembarang selimut terbuka $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ untuk $f(K)$ ternyata memuat subselimut berhingga. Jadi $f(K)$ kompak. ∎

Definisi 2.3.4

Fungsi $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $E \subset \mathbf{R}$ dikatakan terbatas pada E, jika terdapat $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk $\forall x \in E$.

Definisi 2.3.5

Diberikan himpunan $E \subset \mathbf{R}$ dan fungsi $f : E \rightarrow \mathbf{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada himpunan E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y di dalam E dengan $|x - y| < \delta$ maka $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Jika ditulis dengan lambang, fungsi f kontinu seragam pada himpunan E jika $(\forall \varepsilon>0)\ (\exists \delta>0)\ [(\forall x,y \in E)\ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$.

Teorema 2.3.3

Diberikan subhimpunan kompak $K \subset \mathbf{R}$ dan $f : K \rightarrow \mathbf{R}$. Jika f kontinu pada K maka f kontinu seragam pada K.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Karena f kontinu pada K, maka untuk setiap $c \in K$ terdapat $\delta_c > 0$, yakni δ untuk c, sehingga untuk $t \in [K \cap H_c]$ dan $H_c = N(c,\delta_c)$ kitar dari c beradius δ_c , berlaku $|f(t) - f(c)| < \varepsilon/2$. Untuk setiap $c \in K$ dibentuk kitar $G_c = N(c,\delta_c/2)$, jadi keluarga $\{G_c : c \in K\}$ adalah selimut terbuka untuk K. Karena K kompak, maka terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_n$ di dalam K sehingga $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{c_i}$. Karena $G_c \subset N(c,\delta_c)$ maka untuk $t \in K \cap G_c$ berlaku

$|f(t) - f(c)| < \varepsilon/2$. Diambil $\delta = \min\{ \delta_{c_1}/2, \delta_{c_2}/2, \ldots, \delta_{c_n}/2 \}$. Jadi $\delta > 0$ karena masing-masing $\delta_{c_i} > 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Untuk sembarang x dan y di dalam K dengan $|x - y| < \delta$ akan dibuktikan bahwa $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Karena $x \in K$, maka terdapat c_k ($1 \le k \le n$) sehingga $x \in G_{c_k}$. Jadi $|x - c_k| < \delta_{c_k}/2$. Karena $\delta \le \delta_{c_k}/2$ maka $|y - c_k| \le |y - x| + |x - c_k| < \delta + \delta_{c_k}/2 \le \delta_{c_k}$. Jadi $y \in N(c_k, \delta_{c_k})$ dan $x \in N(c_k, \delta_{c_k})$ sebab $G_{c_k} \subset N(c_k, \delta_{c_k})$. Karena x dan y di dalam $K \cap N(c_k, \delta_{c_k})$, maka berlaku $|f(x) - f(c_k)| < \varepsilon/2$ dan $|f(y) - f(c_k)| < \varepsilon/2$.

Dengan demikian $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(c_k)| + |f(c_k) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$. Jadi f kontinu seragam pada K. ∎

Teorema 2.3.4

Jika diberikan himpunan tertutup $E \subset \mathbf{R}$ dan fungsi f kontinu pada E, maka terdapat fungsi g yang kontinu pada $\mathbf{R}$ sehingga $g(x) = f(x)$, untuk $\forall x \in E$. Fungsi g ini dinamakan perluasan kontinu dari f.

Bukti :

Diketahui bahwa $E \subset \mathbf{R}$ himpunan tertutup. Maka menurut teorema 2.1.3 E^c terbuka dalam $\mathbf{R}$. Menurut teorema 2.1.6, E^c merupakan gabungan berhingga atau terbilang dari selang-selang terbuka yang saling asing. Sehingga

$E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ dengan $(a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \varnothing$ untuk $i \neq j$ dan $a_n, b_n \in E$ untuk

$\forall n \in \mathbf{N}$. Jika $a_n \in \mathbf{R}$ dan $b_n \in \mathbf{R}$ untuk $\forall n \in \mathbf{N}$ dibentuk fungsi $g(x) = f(x)$ untuk

$x \in E$ dan $g(x) = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n)$ untuk $x \in (a_n, b_n)$ dan untuk

$\forall n \in \mathbf{N}$. Jika terdapat $p \in \mathbf{N}$ dan $q \in \mathbf{N}$ sehingga $a_p = -\infty$ dan $b_p \in \mathbf{R}$ dan

$a_q \in \mathbf{R}$, $b_q = \infty$ didefinisikan $g(x) = f(x)$ untuk $x \in E$, $g(x) =$

$\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n)$ untuk $x \in (a_n, b_n)$ dengan $n \neq p$ dan $n \neq q$, dan

$g(x) = f(b_p)$ untuk $x \in (-\infty, b_p)$, $g(x) = f(a_q)$ untuk $x \in (a_q, \infty)$. ∎

2.4. Barisan Fungsi

Definisi 2.4.1

Diberikan himpunan $E \subset \mathbf{R}$ dan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n : E \to \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Barisan $\langle f_n \rangle$ dikatakan konvergen titik demi titik pada E jika untuk setiap titik $x \in E$ barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen.

Jika ditulis dengan lambang, barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik pada E jika dan hanya jika

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})[(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon].$$

Bilangan N ini tergantung pada ε dan x. Karena untuk x dan y yang berbeda di dalam E bilangan N untuk x belum tentu berlaku untuk y. Akan tetapi mungkin juga terjadi bahwa untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, dapat dicari suatu bilangan N yang memenuhi kondisi diatas untuk $\forall x \in E$.

Hal ini akan membawa kita pada konsep kekonvergenan seragam.

Definisi 2.4.2

Diberikan $E \subset \mathbf{R}$ dan barisan fungsi $< f_n >$ dengan $f_n : E \to \mathbf{R}$ untuk $n \in \mathbf{N}$. Barisan $< f_n >$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi f pada E, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga untuk semua $n \in \mathbf{N}$ dengan $n \geq N$ dan untuk semua $x \in E$ maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kedua definisi diatas biasa dinotasikan sebagai:

$f_n \to f$ pada E , dimaksudkan f_n konvergen titik demi titik pada E

dan

$f_n \to f$ seragam pada E, dimaksudkan f_n konvergen seragam ke f pada E.

Barisan fungsi yang konvergen seragam pada suatu himpunan pasti konvergen titik demi titik pada himpunan itu. Tetapi sebaliknya tidak benar .

Barisan yang konvergen tetapi tidak konvergen seragam dikatakan barisan konvergen yang tidak seragam .

Definisi 2.4.3

Deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi jumlah f pada E, jika barisan fungsi $< S_n >$ dengan $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ konvergen seragam ke f pada E.

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergen seragam ke $f(x)$ pada E, sering ditulis

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ seragam pada E.}$$

Teorema 2.4.1

Barisan fungsi real $< f_n >$ yang didefinisikan pada $E \subset \mathbf{R}$, konvergen seragam pada E, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in \mathbf{N}$, sehingga untuk semua $n \geq N$ dan semua $m \geq N$ dan semua $x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diandaikan $f_n \to f$ seragam pada E dan $\varepsilon > 0$ sembarang maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga untuk $\forall n \in \mathbf{N}$ dan $\forall\ x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Jadi jika $n \geq N$ dan $m \geq N$, untuk semua $x \in E$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| - |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Diberikan $x \in E$ dan $\varepsilon > 0$ sembarang. Maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga untuk $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$. Menurut barisan Cauchy barisan bilangan $< f_n(x) >$ konvergen ke limit $f(x)$. Jika diambil n tetap dan $n \geq N$ sedangkan $m \to \infty$ maka ketaksamaan tersebut akan menghasilkan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$ untuk $\forall\, x \in E$. Jadi $f_n \to f$ seragam pada E. ∎

Teorema 2.4.2

Diberikan barisan $< f_n >$ yang konvergen ke f pada E dan untuk setiap $N \in \mathbf{N}$ didefinisikan $M_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\}$. Maka $f_n \to f$ seragam pada E jika dan hanya jika $M_n \to 0$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Jika $f_n \to f$ seragam pada E, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N sehingga untuk semua $n \geq N$ dan $\forall x \in E$ belaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Jadi untuk semua $n \geq N$ berlaku $M_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\} < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Yang berarti $M_n \to 0$.

($\Leftarrow$) Jika $M_n \to 0$, untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga untuk $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N$ dan $\forall x \in E$ berlaku $M_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\} < \varepsilon$. Sehingga $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N$ dan $\forall x \in E$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Jadi $f_n \to f$ seragam pada E. ∎

Teorema 2.4.3

Diberikan barisan fungsi $< f_n >$ yang didefinisikan pada E, dan terdapat suatu barisan bilangan $< M_n >$ sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk $x \in E$ dan $n \in \mathbb{N}$. Jika deret bilangan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen maka deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam pada E.

Bukti:

Dimisalkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ dan $T_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$ dan diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen. Jadi $< T_n >$ barisan Cauchy. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $\forall m,n \geq N$ berlaku $|T_n - T_m| < \varepsilon$. Jadi, untuk $\forall m,n \geq N$ dengan $m \geq n$ dan $\forall x \in E$ berlaku

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |f_{n+1} + \ldots + f_m(x)|$$

$$\leq |f_{n+1}| + \ldots + |f_m(x)| \leq M_{n+1} + \ldots + M_m$$

$$= T_m - T_n = |T_n - T_m| < \varepsilon.$$

Menurut teorema 2.4.1, maka barisan fungsi $< S_n >$ konvergen seragam pada E, dan menurut definisi 2.4.3, deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam pada E. ∎

Teorema 2.4.4

Diketahui $f_n \to f$ seragam pada E dan p titik limit E.

Jika $\lim\limits_{x \to p} f_n(x) = A_n$ untuk $n \in \mathbf{N}$, maka barisan bilangan $< A_n >$ konvergen dan $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$. Jadi $\lim\limits_{x \to p} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to p} f_n(x)$.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $< f_n >$ konvergen seragam pada E, maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga untuk $\forall m,n \geq N$ dan $\forall x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$.

Jika dalam ketaksamaan ini diambil $x \to p$ maka diperoleh $|A_n - A_m| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Jadi, untuk $\forall m,n \geq N$ berlaku $|A_n - A_m| \leq \varepsilon$. Menurut teorema 2.4.1. barisan $< A_n >$ konvergen, dan dimisalkan $A_n \to A$.

Kita harus membuktikan bahwa $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$. Jadi untuk $\varepsilon > 0$ diatas harus dicari $\delta > 0$ sehingga untuk $x \in E$ dan $0 < |x - p| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Kita lakukan perhitungan sebagai berikut:

$$|f(x) - A| = [f(x) - f_N(x)] + [f_N(x) - A_N] + [A_N - A]$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - A_N| + |A_N - A|$$

Karena untuk $x \in E$ berlaku $f_n(x) \to f(x)$, maka terdapat N_1 sehingga untuk

$\forall n \geq N_1$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Karena $A_n \to A$ maka terdapat N_2 sehingga untuk $\forall n \geq N_2$ berlaku $|A_n - A| < \varepsilon/3$. Jadi untuk $N = $ maks $\{N_1, N_2\}$ maka berlaku $|A_N - A| < \varepsilon/3$ dan $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ untuk $\forall\ x \in E$. Karena $\lim\limits_{x \to p} f_N(x) = A_N$ maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $\forall x \in E$ dan $0 < |x-p| < \delta$ berlaku $|f_N(x) - A_N| < \varepsilon/3$. Dengan demikian untuk $\forall x \in E$ dan $0 < |x-p| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$.

Jadi $\lim\limits_{x \to p} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to p} f(x) = A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to p} f_n(x)$.

Dengan kata lain, urutan pengambilan limit untuk $x \to p$ dan $n \to \infty$ dapat dipertukarkan. ■

Teorema 2.4.5

Jika $< f_n >$ barisan fungsi yang kontinu pada E, dan $f_n \to f$ seragam pada E, maka f kontinu pada E.

Bukti:

Jika $q \in E$ dan q bukan titik limit, maka setiap fungsi yang didefinisikan pada E pasti kontinu di q. Jadi f kontinu di q. Sekarang dibuktikan untuk $p \in E$ dan p titik limit E. Jika semua fungsi f_n dalam teorema 2.4.4 adalah kontinu pada E, dan $p \in E$ titik limit, maka

$$\lim_{x \to p} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to p} f_n(x)$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(p) = f(p).$$

Jadi terbukti bahwa f kontinu pada E. ∎

Teorema 2.4.6

Diberikan barisan fungsi $< f_n >$ yang didefinisikan dan terintegral pada selang [a, b]. Jika $f_n \to f$ seragam pada [a, b], maka f terintegral pada [a, b] dan $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$. Jadi $\int_a^b [\lim f_n] = \lim \int_a^b f_n$,sehingga operasi pengambilan limit dan pengintegralan dapat dipertukarkan.

Bukti:

Dibentuk barisan $< \varepsilon_n >$ dengan $\varepsilon_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$. Karena $f_n \to f$ seragam pada [a, b] , maka menurut teorema 2.4.2 $\varepsilon_n \to 0$. Untuk $\forall n \in N$ berlaku $f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$ $(a \leq x \leq b)$, sehingga berlaku hubungan antara integral bawah dan integral atas

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n)dx = \underline{\int_a^b}(f_n - \varepsilon_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b}(f_n + \varepsilon_n) = \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)dx \;......(1)$$

Dari ketaksamaan (1) diperoleh:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 2\varepsilon_n(b-a) \ldots\ldots(2).$$

Karena hubungan (2) berlaku untuk setiap $n \in N$ dan $\varepsilon_n \to 0$, sehingga integral atas dan integral bawah untuk f menjadi sama, dan terbukti bahwa $f \in R$ [a, b]. Mengingat $f \in R$ [a, b] maka dari (1) diperoleh

$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \varepsilon_n (b-a)$ sehingga terbukti bahwa $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b [\lim f_n]$ ∎

BAB III

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS

3.1. Teorema Pendekatan Weierstrass pada Selang Tertutup [a,b].

Teorema Pendekatan Weierstrass mengatakan bahwa untuk setiap fungsi bernilai real $f(x)$ yang didefinisikan dan kontinu pada selang tertutup dan terbatas [a,b] dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dalam x. Teorema ini dapat dinyatakan dalam dua bentuk.

Teorema 3.1.1

Jika f fungsi kontinu dan didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas [a,b], maka terdapat $< P_n >$ suatu barisan suku banyak dalam x sedemikian sehingga $P_n \rightarrow f$ seragam pada [a,b].

Teorema 3.1.2

Jika f fungsi kontinu dan didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas [a,b], maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat suku banyak P dalam x sedemikian sehingga $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$, untuk setiap $x \in [a,b]$.

Kedua teorema tersebut ekuivalen. Bukti bahwa keduanya ekuivalen disajikan berikut :

Teorema 3.1.1 $\Rightarrow$ Teorema 3.1.2

Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $P_n \to f$ seragam pada $[a,b]$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $| P_N(x) - f(x) | < \varepsilon$ untuk semua $x \in [a,b]$. Jadi terdapat suku banyak $P(x) = P_N(x)$ sedemikian sehingga $| P(x) - f(x) | < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$. ■

Teorema 3.1.2 $\Rightarrow$ Teorema 3.1.1

Diketahui untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat suku banyak P sedemikian sehingga $| P(x) - f(x) | < \varepsilon$, untuk semua $x \in [a,b]$. Diambil $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Maka terdapat suku banyak dalam x, namakan P_n, sehingga $| P_n(x) - f(x) | < 1/n$. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $1/N < \varepsilon$. Sehingga $(\forall x \in [a,b]) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; (n \geq N \Rightarrow | P_n(x) - f(x) | < 1/n < 1/N < \varepsilon)$. Jadi terdapat barisan suku banyak dalam x $< P_n >$ sehingga $P_n \to f$ seragam pada $[a,b]$. ■

Karena kedua teorema tersebut ekuivalen maka untuk membuktikan teorema Pendekatan Weiertrass cukup dibuktikan salah satu dari teorema di atas.

Dalam pembahasan ini, Teorema Pendekatan Weierstrass akan dibuktikan dengan tiga cara; yaitu : dengan mengunakan suku banyak Bernstein, dengan fungsi konvolusi, dan dengan operator linear. Sebelum sampai ke pembuktian kita lihat kenyataan berikut :

Fungsi kontinu $f(x)$ yang didefinisikan pada $[a,b]$ dapat ditransformasikan menjadi fungsi kontinu $g(t) = f((b-a)t + a)$, $(0 \le t \le 1)$. Dari fungsi ini dibentuk fungsi h dengan

$$h(x) = g(x) - [\,g(1) - g(0)\,]x - g(0) \qquad (0 \le x \le 1).$$

$h(x)$ kontinu pada $[0,1]$ dan $h(0) = h(1) = 0$. Jadi jika $h(x)$ dengan $h(0) = h(1) = 0$ dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dalam x pada $[a,b]$, maka demikian juga $g(x)$. Sehingga untuk membuktikan Teorema Pendekatan Weierstrass cukup dibuktikan untuk fungsi f yang kontinu pada $[0,1]$ dengan $f(0) = f(1) = 0$.

3.1.1. Bukti dengan Suku Banyak Bernstein

Rumus Binomium Newton untuk $n \in \mathbf{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^k b^{n-k}$$

Untuk $0 \le x \le 1$ dan $0 \le 1 - x \le 1$ maka

$$[x + (1-x)]^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k (1-x)^{n-k} \text{.....................}(1)$$

(1) diturunkan ke x didapat :

$$0=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)[kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^{k}(1-x)^{n-k-1}]$$

$$0=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)(1-x)^{n-k-1}[kx^{k-1}(1-x)-(n-k)x^{k}]$$

$$0=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)(1-x)^{n-k-1}x^{k-1}[k-kx-nx+kx]$$

$$0=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k-nx]$$

kedua ruas dikalikan dengan x(1-x) diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(2) diturunkan terhadap x didapat

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)[-nx^{k}(1-x)^{n-k}+\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^{k}(1-x)^{n-k-1}\right)(k-nx)]=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)[-nx^{k}(1-x)^{n-k}+\left(k(k-nx)x^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)(k-nx)x^{k}(1-x)^{n-k-1}\right)]=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\left[-nx^{k}(1-x)^{n-k}+x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\left(k(k-nx)(1-x)-(n-k)(k-nx)x\right)\right]=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\left[-nx^{k}(1-x)^{n-k}+x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)(k-kx-nx+kx)\right]=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\left[-nx^{k}(1-x)^{n-k}+x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^{2}\right]=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dengan menggunakan (1) dan (3) diperoleh

$$-n\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\left[x^{k}(1-x)^{n-k}\right] + \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^{2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^{2} = n$$

Kedua ruas dikalikan x(1-x) diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx)^{2} = nx(1-x)$$

Kemudian dibagi dengan n^2 didapat

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k}(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{2} = \frac{x(1-x)}{n} \quad \text{..............................} \quad (4)$$

Untuk fungsi f kontinu pada $[0,1]$ dan $f(0) = f(1) = 0$, untuk setiap $n \in N$ didefinisikan suku banyak Bernstein B_n yang terkait dengan f,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Akan ditunjukkan $B_n(x) \to f$ seragam pada $[0,1]$.

Dengan menggandakan $f(x)$ pada (1) diperoleh

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k}(1-x)^{n-k} f(x)$$

Sehingga

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

Perhatikan ketaksamaan (5) untuk x tertentu tetapi sembarang dalam [0,1]. Karena f kontinu seragam pada [0,1], maka ($\forall\varepsilon>0$) ($\exists\delta>0$) sehingga untuk nilai k ($0 \le k \le n$) ($|x - k/n| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$). Dari (5) diandaikan S adalah jumlah yang meliputi nilai k dengan $|x - k/n| < \delta$ dan T untuk jummlah yang tersisa. Jadi $|f(x) - B_n(x)| \le S + T$ dengan $S < \varepsilon/2$. Kita dapat membuat $T < \varepsilon/2$ apabila n dipilih cukup besar dan tidak tergantung pada pengambilan $x \in [0,1]$. Karena f terbatas pada [0,1], maka terdapat $K > 0$ sehingga $|f(x)| \le K$ untuk semua $x \in [0,1]$. Dengan demikian $T \le 2K\sum C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}$

dengan $R = \sum C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}$ dan penjumlahan diambil meliputi nilai k dimana $|x - k/n| \ge \delta$. Akan ditunjukkan jika n diambil cukup besar nilai $R< \varepsilon/(4K)$. Mengingat (4) maka

$$\delta^2 R \le \sum C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 < \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k(1-x)^{n-k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}$$

$\forall x \in [0,1]$.

Karena untuk $x \in [0,1]$ nilai maksimum $x(1-x)$ adalah 1/4 maka $R < 1/(4n\delta^2)$. Karena $\delta > 0$ tertentu untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, maka dapat dipilih n cukup besar sehingga $R < \varepsilon/(4K)$.

$T \le 2K \sum C(n,k)x^k(1-x)^{n-k} \le 2KR < 2K(\varepsilon/4K) = \varepsilon/2$

$|f(x) - B_n(x)| \le S + T < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan dapat dicari suatu suku banyak dalam x yaitu $B_n(x)$ dengan n cukup besar sehingga $|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$. Terbuktilah teorema 3.1.2. ■

Contoh 3.1.1

Tentukan tiga fungsi pertama barisan suku banyak Bernstein yang terkait pada fungsi $f(x) = \sin(\pi x)$ untuk $0 \le x \le 1$.

Penyelesaian :

Fungsi f kontinu pada [0,1] dan $f(0) = f(1) = 0$. Jadi f dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak $< B_n >$ dengan

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k(1-x)^{n-k} \sin\left(\pi k/n\right)$$

sehingga

$B_1(x) = 0$

$B_2(x) = 0 + 2x(1-x) + 0 = 2x - 2x^2$

$B_3(x) = 0 + 3x(1-x)^2 \sqrt{3}/2 + 3x^2(1-x)\sqrt{3}/2 = 3/2\sqrt{3}(x - x^2)$

$$B_4(x) = 2\sqrt{2}x + 6\left(1-\sqrt{2}\right)x^2 + \left(8\sqrt{2}-6\right)x^3 + \left(6-4\sqrt{2}\right)x$$

3.1.2. Bukti dengan Fungsi Konvolusi

Fungsi f yang kontinu dan didefinisikan pada [0,1] dengan $f(0) = f(1) = 0$ diperluas hingga terdefinisikan dan kontinu di seluruh **R** dengan $f(x) = 0$ untuk $x \in \mathbf{R} - [0,1]$.

Dibentuk suku banyak $Q_n(x)$ untuk $x \in \mathbf{R}$ dan $n \in \mathbf{N}$ dengan

$$Q_n(x) = C_n\,(1 - x^2)^n \qquad \text{......................................} \qquad (1)$$

C_n dipilih sedemikian sehingga

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1 \qquad \text{...............................} \qquad (2)$$

Kita selidiki besarnya C_n.

Ketaksamaan Bernouli mengatakan bahwa untuk $n \in \mathbf{N}$ dan $t \geq -1$ berlaku

$$(1 + t)^n \geq 1 + nt$$

Jadi untuk $0 \leq y \leq 1$ berlaku $(1 - y)^n \geq 1 - ny$ untuk $n \in \mathbf{N}$.

Jadi $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}\left(1-x^2\right)^n dx$

$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} \left(1 - nx^2\right)dx = 2\left[x - \frac{nx^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{n}} = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mengingat (2), maka

$$1 = \int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = C_n\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)^n dx > C_n/\sqrt{n}$$

Jadi C_n suatu bilangan positip dan $C_n < \sqrt{n}$ .... (3)

Sehingga untuk setiap $\delta > 0$ berlaku

$$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n \qquad (\delta \leq |x| < 1) \quad \text{........} \quad (4)$$

Karena barisan bilangan $\left\langle \sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n \right\rangle$ konvergen ke 0 maka barisan $< Q_n(x) >$ konvergen seragam ke 0 pada $\{ x : \delta \leq |x| \leq 1 \} = [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$. Dibentuk barisan suku banyak $< P_n(x) >$ yang didefinisikan untuk $0 \leq x \leq 1$,

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)Q_n(t)dt .$$

Fungsi P_n dinamakan konvolusi dari f dan Q_n. Akan ditunjukkan bahwa $P_n(x)$ suatu suku banyak dalam x. Dengan mengganti variabel t dengan y dan $y = x + t$,

maka $P_n(x) = \int_{-1+x}^{1+x} f(y)Q_n(y - x)dy$.

Karena $f(y) = 0$ untuk y di luar $[0,1]$, maka

$$P_n(x) = \int_0^1 f(y)Q_n(y-x)dy = C_n \int_0^1 \left[1-(y-x)^2\right]^n f(y)dy,$$

yang menunjukkan bahwa $P_n(x)$ suku banyak dalam x. Sekarang akan ditunjukkan $P_n \to f$ seragam pada $[0,1]$. Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu pada **R**, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y dalam **R** dengan $|x - y| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Dimisalkan $M = \sup |f(x)|$. Mengingat (2) dan (4) dan $Q_n(x) \geq 0$, maka untuk $0 \leq x \leq 1$:

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt \right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(t)|Q_n(t)dt = \left[\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1}\right] |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt$$

$$\leq 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \left(\varepsilon/2\right)\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt$$

$$\leq 4M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt + \left(\varepsilon/2\right)\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt$$

$$\leq 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \int_{\delta}^{1} dt + \varepsilon/2 \leq 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n + \varepsilon/2$$

Karena $0 \leq 1 - \delta^2 \leq 1$, maka untuk $n \to \infty$, $4M\left(1-\delta^2\right)^n\sqrt{n} \to 0$. Sehingga dapat dipilih n cukup besar sehingga $4M\left(1-\delta^2\right)^n\sqrt{n} < \varepsilon/2$. Jadi untuk sembarang

$\varepsilon > 0$ yang diberikan dapat dicari n cukup besar sehingga untuk semua $x \in [0,1]$ terdapat suku banyak dalam x, $P_n(x)$, sehingga berlaku $| P_n(x) - f(x) | < \varepsilon$. ∎

Contoh 3.1.2.1

Jika f fungsi kontinu pada $[0,1]$ dan jika $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0, (n = 0,1,2,\cdots)$, maka buktikan bahwa $f(x) = 0$ pada $[0,1]$.

Bukti :

Dari hipotesis, maka untuk sembarang suku banyak P(x) berlaku $\int_0^1 P(x)f(x)dx = 0$. Menurut teorema, terdapat suku banyak $< P_n >$ dan $P_n \to f$ pada $[0,1]$. Jadi $P_n f \to f^2$ seragam pada $[0,1]$, sehingga $\int_0^1 f^2 = \lim \int_0^1 P_n f = 0$. Karena f kontinu, maka $f^2 \geq 0$ dan kontinu. Karena $\int_0^1 f^2 = 0$, maka $\int_0^1 f^2(x) = \int_0^1 f^2 = 0$.

Bahwa $f(x) = 0$ untuk $0 \leq x \leq 1$ akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Diandaikan terdapat $x_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(x_0) \neq 0$. Jadi $f^2 > 0$. Karena f^2 kontinu pada $[0,1]$, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $f^2(x) > 0$ untuk $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0,1] = E$. Jadi $\int_E f^2(x)dx > 0$. Karena

$E \subset [0,1]$ maka $\int_E f^2(x)dx \leq \int_0^1 f^2(x)dx = 0$. Terjadi kontradiksi, karena diketahui bahwa $\int_E f^2(x)dx > 0$. Jadi haruslah $f(x) = 0$ untuk $0 \leq x \leq 1$.

3.1.3. Bukti dengan Operator Linear

Sebelum membuktikan teorema akan dibahas terlebih dahulu beberapateori yang akan mendukung pembuktiannya.

Definisi 3.1.3.1

Ruang linear L adalah suatu grup abelian adatif dengan sifat untuk sembarang skalar α dan $x \in L$ dapat didefinisikan operasi skalar yang menghasilkan $\alpha x \in L$. Untuk $x \in L$ dan $y \in L$, α,β suatu skalar dan satu merupakan satuan skalar, maka dipenuhi :

(1). $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

(2). $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

(3). $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(4). $1 . x = x$

Skalar yang dimaksud dalam definisi di atas dapat berupa bilangan real atau bilangan komplek. Dalam bahasan selanjutnya, pembahasan dikhususkan pada ruang linear dengan skalar bilangan real yang dinamakan ruang linear real.

Contoh 3.1.3.1

C[a,b] yaitu himpunan semua fungsi real kontinu yang didefinisikan pada selang [a,b] adalah suatu ruang linear. Untuk $f, g \in C[a,b]$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in [a,b]$ didefinisikan :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Definisi 3.1.3.2

Jika L suatu ruang linear, norma pada L adalah suatu fungsi real $\|.\| : L \to \mathbf{R}$ yang didefinisikan pada L sedemikian sehingga untuk $x,y \in L$ dan untuk skalar α berlaku :

(1). $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(3). $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Akibat langsung dari definisi norma adalah :

$$- \|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \| x - y\|$$

Definisi 3.1.3.3

Ruang linear yang dilengkapi dengan norma disebut ruang linear bernorma.

Contoh 3.1.3.2

Didefinisikan $\|f\| = \sup \{ |f(x)|, x \in [a,b] \}$ suatu norma pada C[a,b].

Buktikan bahwa C[a,b] adalah ruang linear bernorma dengan norma tersebut.

Bukti :

(1). $\|f\| = \sup \{ |f(x)|, x \in [a,b] \} \geq 0$

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup \{ |f(x)|, x \in [a,b] \} = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

(2). $\|f + g\| = \sup \{ |f(x) + g(x)|, x \in [a,b] \}$

$\leq \sup \{ |f(x)| + |g(x)|, x \in [a,b] \}$

$\leq \sup \{ |f(x)|, x \in [a,b] \} + \sup \{ |g(x)|, x \in [a,b] \} = \|f\| + \|g\|$.

(3). $\|\alpha f\| = \sup \{ |\alpha f(x)|, x \in [a,b] \}$

$= \sup \{ |\alpha|\, |f(x)|, x \in [a,b] \}$

$= |\alpha| \sup \{ |f(x)|, x \in [a,b] \}$

$= |\alpha|\, \|f\|$

Jadi $\|f\|$ merupakan norma pada C[a,b].

Definisi 3.1.3.4

Diberikan dua ruang linear L dan L' dengan skalar yang sama. Pemetaan $T : L \to L'$ disebut transformasi linear jika $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

Jika T dan U transformasi linear dari L ke L', maka mereka dapat dijumlahkan dan dapat dikalikan dengan suatu skalar yang didefinisikan sebagai :

(i). $(T + U)(x) = T(x) + U(x)$

(ii). $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$.

Transformasi nol dan negatif dari transformasi T didefinisikan sebagai $0(x) = 0$ dan $(-T)(x) = -T(x)$.

Teorema 3.1.3.1

Diberikan dua ruang linear L dan L' dengan skalar sama R. Maka himpunan semua transformasi linear dari L ke L' adalah suatu ruang linear dengan operasi linear yang didefinisikan pada (i) dan (ii).

Definisi 3.1.3.5

Diberikan ruang linear bernorma L dengan skalar R dan $< x_n >$ dengan $x_n \in L$ untuk semua $n \in N$, barisan titik di dalam L. Barisan $< x_n >$ dikatakan konvergen ke x jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in N$ sedemikian sehingga untuk semua $n \in N$ berlaku $n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Teorema 3.1.3.2

Diberikan L dan L' dua ruang linear bernorma dan T suatu transformasi dari L ke L', maka T kontinu bila dan hanya bila $x_n \to x \Rightarrow T(x_n) \to T(x)$.

Menurut Simon dalam bukunya " *Introduction to Topology And Modern Analysis*" berlaku teorema berikut.

Teorema 3.1.3.3

Jika L dan L' dua ruang linear dan T suatu transformasi linear dari L ke L'. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

(1). T kontinu

(2). T kontinu di titik asal, yaitu bahwa $x_n \to 0 \Rightarrow T(x_n) \to 0$

(3). Terdapat bilangan real $K \geq 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq K \|x\|$ untuk $\forall x \in L$

(4). Jika $S = \{ x : \|x\| \leq 1 \}$ bola satuan tertutup dalam L, maka bayangannya T(S) terbatas dalam L'.

Jika transformasi linear T memenuhi sifat (3), maka K disebut batas untuk T dan dikatakan T transformasi linear terbatas. Sehingga T terbatas bila dan hanya bila T kontinu.

Definisi 3.1.3.6

Jika T transformasi linear dari ruang linear L ke L', maka norma T didefinisikan sebagai :

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$$

atau

$$\|T\| = \inf \{ K : K \geq 0 \text{ dan } \|T(x)\| \leq K\|x\| , \forall x \in L \}.$$

Teorema 3.1.3.4

Jika L dan L' ruang linear bernorma, maka B(L,L') yaitu himpunan semua transformasi linear dari L ke L' adalah ruang linear bernorma dengan operasi linear didefinisikan pada (i) dan (ii) dan norma didefinisikan pada definisi 3.1.3.6.

Bukti :

Dari teorema 3.1.3.1 telah dibuktikan bahwa B(L,L') suatu ruang linear. Dibuktikan bahwa $\|T\|$ pada definisi 3.1.3.6 merupakan norma pada B(L,L').

(1). Jelas $\|T\| \geq 0$ dan $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

(2). $\|\chi T\| = \sup \{ \|\chi T(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |\chi| \, \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$

$= |\chi| \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = |\chi| \, \|T\|.$

(3). $\|T_1 + T_2\| = \sup \{ \|(T_1 + T_2)(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$

$= \sup \{ \|T_1(x) + T_2(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$

$\leq \sup \{ \|T_1(x)\| : \|x\| \leq 1 \} + \sup \{ \|T_2(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$

$= \|T_1\| + \|T_2\|$

Jadi B(L,L') suatu ruang linear bernorma. ■

Definisi 3.1.3.7

Diberikan ruang linear bernorma L. Transformasi linear kontinu dari L ke L disebut operator pada L.

Ruang linear bernorma dari semua operator pada L dinyatakan dengan B(L).

Definisi 3.1.3.8

Jika T suatu operator pada ruang linear L dan $a,b \in \mathbf{R}$, dan untuk $\forall x,y \in L$ berlaku $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$, maka T dikatakan suatu operator linear.

Definisi 3.1.3.9

Diberikan T suatu operator pada L, f dan g fungsi real yang didefinisikan pada L. Operator T dikatakan monoton bila $f > g \Rightarrow Tf > Tg$. Dalam hal ini $f > g$ berarti bahwa $f(x) > g(x)$, untuk semua $x \in L$.

Sekarang sampailah kita pada pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass dengan menggunakan teorema operator linear.

Teorema 3.1.3.5

Untuk suatu barisan operator linear monoton L_n pada $C[a,b]$, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

(i). $L_n f \to f$ seragam untuk semua $f \in C[a,b]$

(ii). $L_n f \to f$ untuk tiga fungsi $f(x) = 1, x, x^2$

(iii). $L_n 1 \to 1$ dan $(L_n \phi_t)(t) \to 0$ seragam dimana $\phi_t(x) = (t - x)^2$.

Bukti :

a/. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Dari (i) untuk setiap $f \in C[a,b]$, $L_n f \to f$. Karena fungsi $f = 1, x, x^2$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada $[a,b]$, maka untuk fungsi-fungsi ini $L_n f \to f$.

b/. (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Dari (ii) untuk $f(x) = 1$, maka $L_n f \to f$ seragam. Jadi $L_n 1 \to 1$. Sekarang dibuktikan $(L_n \phi_t)(t) \to 0$ dimana $\phi_t(x) = (t - x)^2$. Didefinisikan $f_i(x) = x^i$.

Karena $\phi_t(x) = t^2 - 2tx + x^2$, kita mempunyai $\phi_t = t^2 f_0 - 2t f_1 + f_2$ dan $L_n\phi_t = t^2 L_n f_0 - 2t L_n f_1 + L_n f_2$, sebab L_n operator linear. Sehingga

$$\begin{aligned}(L_n\phi_t)(t) &= t^2 L_n f_0(t) - 2t L_n f_1(t) + L_n f_2(t)\\ &= t^2[(L_n f_0)(t) - 1] - 2t[(L_n f_1)(t) - t] + [(L_n f_2)(t) - t^2]\\ &\leq t^2 \,\| L_n f_0 - f_0 \| + | 2t | \,\| L_n f_1 - f_1 \| + \| L_n f_2 - f_2 \|\end{aligned}$$

Karena t^2 dan $| 2t |$ terbatas pada [a,b], maka $(L_n\phi_t(t)) \to 0$ seragam.

c/. (iii) $\Rightarrow$ (i)

Ambil $f \in C[a,b]$. Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$. Dipilih $\delta > 0$ sehingga $| x - y | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon$. Hal ini mungkin karena f kontinu. Diambil $\alpha = 2\|f\|\delta^{-2}$ dan titik tertentu t tetapi sembarang dalam [a,b]. Jika $| t - x | < \delta$, maka $| f(t) - f(x) | < \varepsilon$, dimana untuk $| t - x | \geq \delta$ berlaku $| f(t) - f(x) | \leq 2\|f\| \leq 2\|f\| \dfrac{(t - x)^2}{\delta^2} = \alpha\, \phi_t(x)$. Maka untuk semua x, pertidaksamaan berikut dipenuhi :

$$-\varepsilon - \alpha\phi_t(x) \leq f(t) - f(x) \leq \varepsilon + \alpha\phi_t(x)$$

Ambil $f_0(x) = 1$, maka $-\varepsilon f_0 - \alpha\phi_t \leq f(t) f_0 - f \leq \varepsilon f_0 + \alpha\phi_t$

Dengan sifat linearitas dan monotonitas L_n diperoleh

$$-\varepsilon(L_n f_0)(t) - \alpha(L_n\phi_t)(t) \leq f(t)\,(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t) \leq \varepsilon(L_n f_0)(t) + \alpha(L_n\phi_t)(t).$$

Jadi, $| f(t)\,(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t) | \leq \varepsilon\|L_n f_0\| + \alpha(L_n\phi_t)(t)$.

$$\begin{aligned}|f(t) - (L_n f)(t)| &\leq |f(t) - f(t)(L_n f_0)(t)| + |f(t)(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t)|\\ &\leq |f(t)|\,|1 - (L_n f_0)(t)| + \varepsilon\|L_n f_0\| + \alpha(L_n\phi_t)(t)\\ &\leq \|f\|\,\|f_0 - L_n f_0\| + \varepsilon(1 + \|f_0 - L_n f_0\|) + \alpha(L_n\phi_t)(t).\end{aligned}$$

Karena $L_n f_0 \to f_0$ dan $(L_n\phi_t)(t) \to 0$,maka untuk n cukup besar dapat dipilih N sedemkian sehingga jika $n \geq N$ berlaku $(\|f\| + \varepsilon)\ \|f_0 - L_n f_0\| < \varepsilon$ dan $\alpha(L_n\phi_t)(t) < \varepsilon$. Jadi untuk n cukup besar terdapat N , untuk semua $n \geq N$ berlaku $|f(t) - (L_n f)(t)| < 3\varepsilon$. Jadi $L_n f \to f$ seragam pada C[a,b]. ■

Sekarang akan dibuktikan Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi f yang kontinu pada [0,1] dengan $f(0) = f(1) = 0$.

Bukti :

Dibentuk barisan suku banyak Bernstein $(B_n f)$ dengan rumus

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k)\, x^k (1-x)^{n-k}$$

B_n dipandang sebagai suatu operator. Akan ditunjukkan bahwa B_n suatu operator linear monoton. Untuk setiap $a,b \in \mathbf{R}$ dan sembarang x anggota domain fungsi f dan g,

$$(B_n(af + bg))(x) = \sum_{k=0}^{n} (af + bg)C(n,k)\left(\tfrac{n}{k}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right)\right] C(n,k)\, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k)\, x^k (1-x)^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k)\, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= a(B_n f)(x) + b(B_n g)(x).$$

Jadi B_n operator linear.

Untuk semabarang x anggota domain fungsi f dan g, jika $f > g$, maka berarti bahwa $f(x) > g(x)$.

$$B_n f = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n g = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$$

Karena $f > g$, maka $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$ $> \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$, sehingga jika diketahui $f > g$ maka $B_n f > B_n g$.

Jadi B_n operator linear monoton. Menurut teorema 3.1.3.2 $B_n f$ konvergen seragam ke f untuk semua f anggota C[0,1] bila dan hanya bila $B_n f$ konvergen seragam ke f untuk tiga fungsi $f = 1$, x, x^2. Sehingga kita tinggal membuktikan $B_n f$ konvergen seragam ke f untuk tiga fungsi $f = 1$, x, x^2.

Untuk $f(x) = 1$

$$B_n f = B_n 1 = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

Untuk $f(x) = x$

$$(B_n f)(x) = B_n x = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) C(n,k) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!(k-1)!} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C(n-1, k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} C(n-1, k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k) x^{k} (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x\,[\,x + (1-x)\,]^{n-1} = x$$

Jadi $(B_n f)(x) = x$.

Untuk $f(x) = x^2$

$$(B_n f)(x) = B_n x^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 C(n,k) x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C(n-1, k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n-1} C(n-1, k-1) x^{k} (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} C(n-1, k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x$$

Untuk n besar maka $B_n x^2 \to x^2$.

Terbukti bahwa $B_n f \to f$ seragam untuk semua fungsi $f \in C[0,1]$. Jadi jika f fungsi real kontinu yang didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas $[a,b]$ maka terdapat barisan suku banyak $< B_n f >$ sedemikian sehingga $B_n f \to f$ seragam pada $[a,b]$. Teorema 3.1.1 terbukti. ∎

3.2. Teorema Pendekatan Weierstrass pada Himpunan Kompak $K \subset \mathbf{R}$

Bunyi teorema ini sama dengan Teorema Pendekatan Weierstrass pada sub bab 3.1. Perbedaannya, jika pada sub bab 3.1 fungsi f kontinu dan didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas $[a,b]$, maka pada sub bab ini fungsi f kontinu dan didefinisikan pada himpunan kompak $K \subset \mathbf{R}$. Dalam hal ini kita langsung akan melihat bukti teorema tersebut..

Bukti :

Diketahui K himpunan kompak dalam **R**. Jadi K tertutup dan terbatas. Dengan demikian terdapat $a,b \in \mathbf{R}$ sehingga $a = \inf K$ dan $b = \sup K$. Karena K kompak, maka $a,b \in K$. Jadi terdapat selang tertutup dan terbatas $[a,b]$ sedemikian hingga $K \subset [a,b]$ dengan $a \in K$ dan $b \in K$. Menurut teorema 2.1.6 himpunan $K^c \cap [a,b]$ merupakan gabungan berhingga atau terbilang dari selang-selang terbuka yang saling asing. Menurut teorema 2.3.4 fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi g

yang kontinu pada $[a,b]$ dan $g(x) = f(x)$ untuk $x \in K$. Menurut Teorema Pendekatan Weierstrass g dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dalam x, sehingga berakibat f dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak ini. ■

Teorema A

Untuk $a > 0$, terdapat suatu barisan suku banyak $< P_n(x) >$ yang konvergen seragam ke fungsi $f(x) = | x |$ pada selang kompak $[-a,a]$ dan $P_n(0) = 0$ untuk semua $n \in N$. Dengan kata lain, terdapat suatu suku banyak dalam x tanpa suku konstan yang konvergen seragam ke $| x |$ pada $[-a,a]$.

Bukti :

Karena $f(x) = | x |$ kontinu pada $[-a,a]$ maka terdapat barisan suku banyak dengan koefisien real $< g_n(x) >$ dalam x sedemikian sehingga $g_n(x) \to | x |$ seragam pada $[-a,a]$. Kita bentuk barisan suku banyak $< P_n >$ dengan $P_n(x) = g_n(x) - g_n(0)$ untuk $n \in N$ dan $x \in [-a,a]$. Tampak bahwa $P_n(x)$ suku banyak dalam x dan $P_n(0) = g_n(0) - g_n(0) = 0$. Karena $g_n(0) \to | 0 | = 0$, maka jelas bahwa $P_n(x)$ konvergen seragam ke fungsi $f(x) = | x |$ pada $[-a,a]$. ■

Teorema ini akan berguna dalam pembuktian perumuman Teorema Pendekatan Weierstrass.

Contoh :

Diberikan fungsi bernilai real f yang didefinisikan dan kontinu pada K dan K himpunan kompak di dalam **R**. Buktikan bahwa untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbf{R}$ sehingga berlaku $\left|\sum_{i=1}^{N} c_i\left(f(x)\right)^i - |f(x)|\right| < \varepsilon$ untuk $\forall x \in K$.

Bukti :

Misalkan $a = \sup\ \{|f(x)| : x \in K\}$. Jadi $-a < f(x) < a$, $\forall x \in K$. Menurut teorema A terdapat suku banyak $\sum_{i=1}^{N} c_i y^i$ sedemikian sehingga $\left|\sum_{i=1}^{N} c_i y^i - |y|\right| < \varepsilon$, $y \in [-a,a]$.

Karena $-a < f(x) < a$, maka $\left|\sum_{i=1}^{N} c_i\left(f(x)\right)^i - |f(x)|\right| < \varepsilon$.

BAB IV

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS UNTUK FUNGSI REAL DENGAN BEBERAPA VARIABEL REAL

Dalam bab III telah dibahas mengenai teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi bernilai real pada selang tertutup [a,b] dan pada himpunan kompak K dalam R. Sekarang teorema tersebut akan kita perluas untuk fungsi real kontinu dengan beberapa variabel real yang didefinisikan pada himpunan E di dalam ruang Euclides R^k **berdimensi-k**.

Sebelum sampai ke Teorema Pendekatan Weierstrass, terlebih dahulu akan dibahas tentang konsep-konsep dalam ruang Euclides R^k.

4.1. Ruang Euclides R^k.

Definisi 4.1.1

Untuk bilangan bulat positip k, R^k dimaksudkan sebagai himpunan semua kelompok k buah bilangan real terurut. Suatu elemen dalam R^k berbentuk $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ dengan x_i bilangan real untuk i = 1, 2, ..., k dan dinamakan titik atau vektor.

Didalam R^k didefinisikan operasi-operasi berikut :

(1). Operasi penjumlahan

Untuk $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ didalam R^k, didefinisikan $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in R^k$ dengan $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$.

(2). Operasi perkalian skalar

Untuk $c \in R$ dan $x \in R^k$ didefinisikan $cx \in R^k$ dengan $cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_k)$.

(3). Hasil kali skalar

Untuk sembarang **x** dan **y** di dalam R^k didefinisikan hasil kali skalar **x.y** yaitu bilangan real $\mathbf{x}.\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$

Definisi 4.1.2

Norma suatu vektor $\mathbf{x} \in R^k$ adalah bilangan real non negatif.

$$\|\mathbf{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right]^{1/2}$$

Sifat-sifat norma suatu vektor disajikan dalam teorema-teorema berikut :

Teorema 1

Jika **x** dan **y** di dalam R^k dan $a \in R$, maka :

(i). $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

(ii). $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

(iii). $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$

(iv). $|\mathbf{x}.\mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$

Teorema 2

Jika **x**,**y** dan **z** di dalam R^k, maka :

(i). $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

(ii). $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$

Sebelum membuktikan teorema-teorema tersebut, kita lihat terlebih dahulu ketaksamaan Cauchy berikut.

Teorema 3

Untuk $a_i \in \mathbf{R}$ dan $b_i \in \mathbf{R}$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$ maka berlaku $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$. Jika semua b_i tidak nol, maka ketaksamaan menjadi kesamaan jika dan hanya jika jika terdapat suatu $\chi \in \mathbf{R}$ sehingga $a_i = \chi b_i$ untuk semua $i = 1,2,\ldots, n$.

Bukti :

Kita nyatakan $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ dan $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Jika $A = 0$ dan $B = 0$ maka semua $a_i = 0$ atau semua $b_i = 0$ dan kedua ruas ketaksamaan Cauchy menjadi nol. Jika $B \neq 0$ (jadi $B > 0$) dibentuk fungsi kuadrat dalam x

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (b_i x - a_i) = Bx^2 - 2Cx + A$$

Untuk semua $x \in \mathbf{R}$ nilai $f(x) \geq 0$ sebab $(b_i x - a_i)^2 \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbf{R}$. Karena $B > 0$ dan $f(x) \geq 0$ maka deskriminan fungsi kuadrat harus tidak positp. Jadi $D = C^2 - AB < 0$ dan terbuktilah ketaksamaan Cauchy. Jika $C^2 - AB = 0$, yakni ketaksamaan menjadi kesamaan, maka persamaan $Bx^2 - 2Cx + A = 0$ mempunyai dua akar real yang sama $x_1 = x_2 = \chi$. Diperoleh $f(\chi) = B\chi^2 - 2C\chi + A = \sum (b_i x - a_i)^2 = 0$. Jadi $a_i = \chi b_i$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,n$ jika $a_i = \chi b_i$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,n$. Jadi

$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(b_i x - a_i)^2 = \sum b_i(x - \lambda)^2 = B(x - \lambda)^2$, maka persamaan kuadrat $Bx^2 - 2Cx + A = B(x - \chi)^2 = 0$ mempunyai dua akar real yang sama. Sehingga haruslah $C^2 - AB = 0$. Jadi ketaksamaan Cauchy menjadi suatu kesamaan. ■

Sekarang akan dibuktikan teorema 1 dan 2.

Bukti teorema 1.

(i). Menurut definisi 4.1.2 norma $x \in \mathbf{R}^k$ merupakan bilangan real non negatip.

Jadi $\|x\| \geq 0$.

$$\|-x\| = \left(\sum_{i=1}^{k}(-x_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{1/2} = \|x\|$$

(ii). $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$, untuk semua $i = 1,2, \ldots, k$

(iii). $\|ax\| = \left(\sum_{i=1}^{k}(ax_i)^2\right)^{1/2} = \left(a^2\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{1/2} = (a^2)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{1/2} = |a|\|x\|$

(iv). Dengan menggunakan teorema 3 diperoleh

$$\|x \cdot y\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k}x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\right)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$$

Jadi $|x.y| \leq \|x\|\,\|y\|$. ■

Bukti teorema 2

Bukti dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy.

(i). $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i^2$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2$$

Jadi $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

(ii). $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + (\mathbf{z}-\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$. ∎

Himpunan $\mathbf{R}^k$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar merupakan suatu ruang vektor. Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali skalar dan norma ini dinamakan Ruang Euclides berdimensi-k.

Seperti yang telah kita ketahui bahwa di dalam $\mathbf{R}$ jarak antara dua titik x dan y dinyatakan dengan $|x - y|$. Jarak ini mempunyai tiga sifat utama, yaitu :

Untuk setiap x,y dan z di dalam $\mathbf{R}$ dipenuhi :

(i). $|x - y| \geq 0$

(ii). $|x - y| = |y - x|$

(iii). $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Sekarang akan didefinisikan jarak antara dua titik $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam $\mathbf{R}^k$ sebagai berikut.

Definisi 4.1.3

Diberikan titik $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam $\mathbf{R}^k$. Jarak dari titik $\mathbf{x}$ ke titik $\mathbf{y}$ didefinisikan sebagai

$$\|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Mudah dibuktikan bahwa jarak yang didefinisikan ini memenuhi ketiga sifat utama jarak di atas.

Definisi 4.1.4

Suatu himpunan $E = \{ \mathbf{x} \in R^k : a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$ dengan a_i dan b_i bilangan real tertentu dan x_i koordinat ke-i dari **x**, dinamakan suatu kotak-k.

4.2. Topologi Dasar pada R^k

Definisi 4.2.1

Kitar suatu titik **p** dengan radius $r > 0$ adalah himpunan titik-titik **x** yang jaraknya dari **p** kurang dari r, dan diberi notasi N(p,r). Jadi $N(p,r) = \{\mathbf{x} \in R^k : \|p - \mathbf{x}\| < r \}$.

Definisi 4.2.2

Titik **p** dinamakan titik limit himpunan $E \subset R^k$ jika setiap kitar titik **p** memuat $q \in E$ dan $q \neq p$. Jadi (**p** titik limit E) $\Leftrightarrow [(\forall r>0)\ (\exists q \in E)\ (q \in N(p,r) \wedge q \neq p)]$.

Definisi 4.2.3

Himpunan G dikatakan terbuka dalam R^k, jika untuk setiap titik **t** $\in G$ terdapat $r > 0$ sehingga $N(t,r) \subset G$.

Definisi 4.2.4

Himpunan F dikatakan tertutup dalam R^k, jika F memuat semua titik limitnya.

Teorema 4.2.1

Setiap kitar suatu titik adalah himpunan terbuka.

Teorema 4.2.2

Himpunan $E \subset \mathbf{R}^k$ terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup, dengan E^c komplemen dari E.

Teorema 4.2.3

(a). Jika $\{ G_\alpha : G_\alpha$ terbuka $\alpha \in A\}$ dengan himpunan indeks A berhingga atau tak hingga, adalah keluarga himpunan terbuka dalam $\mathbf{R}^k$, maka $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ terbuka.

(b). Jika $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ keluarga berhingga dari himpunan terbuka dalam $\mathbf{R}^k$, maka $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ terbuka.

Teorema 4.2.4

(a). Jika $\{F_\alpha : F_\alpha$ tertutup ; $\alpha \in A\}$ dengan himpunan indeks A berhingga atau tak hingga adalah himpunan tertutup dalam $\mathbf{R}^k$, maka $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ tertutup

(b). Jika $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ keluarga berhingga himpunan tertutup dalam $\mathbf{R}^k$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ tertutup.

Bukti teorema-teorema tersebut pada dasarnya tidak berbeda dengan pembuktian teorema-teorema sejenis pada **R**, sehingga kita tidak perlu membuktikannyan lagi.

4.3. Himpunan Kompak dalam R^k.

Definisi 4.3.1

Keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha : G_\alpha \text{ terbuka } \alpha \in A\}$ dinamakan selimut terbuka untuk himpunan $E \subset \mathbf{R}^k$ jika $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jika $\mathcal{H}$ selimut terbuka dan $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ juga selimut terbuka untuk E, maka $\mathcal{H}$ dinamakan subselimut dari $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{H}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$,maka $\mathcal{H}$ dinamakan subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$.

Definisi 4.3.2

Himpunan K suatu subhimpunan dari $\mathbf{R}^k$ dikatakan kompak, jika setiap selimut terbuka untuk K memuat subselimut berhingga.

Teorema 4.3.1

Jika $< E_n >$ barisan kotak-k dalam ruang Euclides $\mathbf{R}^k$ dan $E_n \supset E_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ tidak kosong.

Bukti :

$E_n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k : a_{n_i} \le x_i \le b_{n_i}, i = 1,2,\cdots,k\}$. $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k$ dengan $z_i = \sup\{a_{n_i} : n \in \mathbf{N}\}$. Jelas bahwa $a_{n_i} \le b_{n_i}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{z} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Karena $E_n \supset E_{n+1}$ maka untuk semua i = 1, 2, ... berlaku

$a_{1_i} \le a_{2_i} \le \cdots \le a_{n_i} \le a_{(n+1)_i} \le \cdots$ dan $b_{1_i} \ge b_{2_i} \ge \cdots \ge b_{n_i} \ge b_{(n+1)_i} \ge \cdots$

Untuk semua $p \in \mathbf{N}$ dan $q \in \mathbf{N}$ berlaku $a_{p_i} \le a_{(p+q)_i} \le b_{(p+q)_i} \le b_{q_i}$. Jadi untuk semua $n \in \mathbf{N}$ dan sembarang q berlaku $a_{n_i} \le b_{q_i}$ sehingga semua b_{q_i} merupakan batas atas dari himpunan $\{a_{n_i} : n \in \mathrm{N}\}$. Maka terdapat $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k$ sehingga $z_i = \sup\{a_{n_i} : n \in \mathrm{N}\}$ dan $z_i \le b_{q_i}$. Jadi untuk semua n berlaku $a_{n_i} \le z_i \le b_{n_i}$ untuk i = 1,2,..., k. Jadi $\mathbf{z} \in E_n$ untuk semua n. Sehingga terbukti bahwa terdapat $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k$ dan $\mathbf{z} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Jadi $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ tidak kosong. ∎

Teorema 4.3.2

Untuk setiap $k \in$ N, kotak-k kompak dalam $\mathbf{R}^k$.

Bukti :

Seperti dalam **R**, himpunan K kompak bila dan hanya bila mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Jadi untuk membuktikan teorema 4.3.2 cukup dibuktikan bahwa sembarang kotak-k mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Diberikan $E = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k : a_i \le x_i \le b_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\}$ sembarang kotak-k dan A sembarang subhimpunan tak hingga dari E. Akan dibuktikan bahwa A mempunyai titik limit di dalam E. Dimisalkan $h = \left[\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)^2\right]^{1/2}$, maka untuk **x** dan **y** di dalam E berlaku $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le h$. Diambil titik $c_i = 1/2(a_i + b_i)$, maka selang tertutup $[a_i,c_i]$ dan $[c_i,b_i]$ (i = 1, 2, .. , k) menentukan 2^k kotak-k kita sebut saja F_n dengan $\bigcup_{n=1}^{2^k} F_n = E$. Paling sedikit satu dari kotak F_n ini, sebut saja E_1 memuat tak hingga titik-titik anggota A. Selanjutnya dikerjakan pembagian semacam ini pada kotak E_1, dan kita kerjakan terus menerus proses ini. Akan kita peroleh barisan kotak-k $< E_n >$ dengan sifat :

(a). $E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$

(b). E_n memuat tak hingga titik-titik anggota A

(c). Jika $\mathbf{x} \in E_n$ dan $\mathbf{y} \in E_n$ maka $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le 2^{-n}h$.

Menurut teorema 4.3.1 terdapat titik $\mathbf{z} \in R^k$ sehingga $\mathbf{z} \in E_n$ untuk setiap $n \in N$. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat suatu $n \in N$ sehingga $2^{-n}h < \varepsilon$. Karena $\mathbf{z} \in E_n$, maka jika $\mathbf{x} \in E_n$ berlaku $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \le 2^{-n}h < \varepsilon$. Jadi $E_n \subset N(\mathbf{z},\varepsilon)$, sehingga $N(\mathbf{z},\varepsilon)$ memuat tak hingga titik anggota A. Karena $\mathbf{z} \in E$ dan untuk sembarang $\varepsilon > 0$ ada tak hingga titik anggota A di dalam $N(\mathbf{z},\varepsilon)$, maka $\mathbf{z}$ suatu titik limit dari A. Jadi E mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, sehingga E kompak. ∎

Teorema 4.3.3

Dalam R^k himpunan K adalah kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas.

Bukti :

($\Rightarrow$) Dimisalkan K subhimpunan kompak dalam R^k. Untuk setiap $\mathbf{t} \in K$ di buat kitar yang berpusat di $\mathbf{t}$ dengan radius 1 yakni $N(\mathbf{t},1) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k : \|\mathbf{t} - \mathbf{x}\| < 1\}$. Jelas bahwa keluarga $\{N(\mathbf{t},1) : \mathbf{t} \in K\}$ adalah selimut terbuka untuk K. Karena diketahui K kompak, maka terdapat $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ didalam K sehingga $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N(\mathbf{t}_j, 1)$. Diambil bilangan $A > 0$ sehingga $A = \text{maks} \{ \|\mathbf{t}_i - \mathbf{t}\| : i = 1, 2, \ldots, k\}$ untuk sembarang titik $\mathbf{x} \in K$, maka terdapat k dengan $1 \leq k \leq n$ sehingga $\mathbf{x} \in N(\mathbf{t}_k, 1)$. Dengan demikian diperoleh

$$\|\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_k\| + \|\mathbf{t}_k - \mathbf{x}\| < A + 1 = M.$$

Jadi, terdapat $\mathbf{t}_i \in \mathbf{R}^k$ dan $M > 0$ sehingga untuk sembarang $\mathbf{x} \in K$ berlaku $\|\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}\| < M$. Jadi K terbatas. Sekarang akan dibuktikan K tertutup dengan menunjukkan bahwa K^c terbuka. Diandaikan $p \in K$. Jadi untuk setiap $x \in K$, $\|x - p\| > 0$. Untuk $x \in K$ dibentuk kitar $N(x, r_x)$ dengan $2r_x < \|x - p\|$. Keluarga kitar $\{N(\mathbf{x}, r_x) : \mathbf{x} \in K\}$ adalah selimut terbuka untuk K. Karena K kompak, maka terdapat $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in K$ sehingga $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} N(x_i, r_{x_i})$. Bilangan $r = \min\{ r_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, m\}$ adalah positip dan diperhatikan kitar $N(p,r)$. Karena untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ berlaku $r \leq r_{x_i}$ dan $2r_{x_i} < \|x_i - p\|$, maka $N(p,r) \cap N(x_i, r_{x_i}) = \Phi$ untuk semua i. Jadi $N(p,r) \cap K = \Phi$ atau $N(p,r) \subset K^c$. Jadi K^c terbuka sehingga K tertutup.

($\Leftarrow$). Diketahui K tertutup dan terbatas. Karena K terbatas dalam $\mathbf{R}^k$, maka terdapat E suatu kotak sehingga $K \subset E$. Karena K subhimpunan tertutup dari himpunan kompak E, maka K kompak. ■

4.4. Fungsi dari $E \subset R^k$ ke dalam R

Definisi 4.4.1

Diberikan fungsi $f : E \to R$ dengan $E \subset R^k$.

Untuk titik $\mathbf{p} \in R^k$ dan $\mathbf{p}$ titik limit E, sedang $L \in R$ dikatakan bahwa L limit fungsi f untuk $\mathbf{x}$ mendekati $\mathbf{p}$ dan ditulis $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$,

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk semua $\mathbf{x} \in E$ dan $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ berlaku $|L - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Definisi 4.4.2

Diberikan fungsi $f : E \to R$, $E \subset R^k$ dan $\mathbf{p} \in E$.

Fungsi f dikatakan kontinu di $\mathbf{p}$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $\mathbf{x} \in E$ dan $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ maka $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < \varepsilon$.

Jika $\mathbf{p}$ titik terasing himpunan E, maka f pasti kontinu di $\mathbf{p}$. Jika $\mathbf{p}$ titik limit sekaligus anggota E, maka

$$f \text{ kontinu di } \mathbf{p} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}).$$

Teorema 4.4.1

Diberikan fungsi $f : E \to R$, $E \subset R^k$. Fungsi f kontinu pada E bila dan hanya bila untuk setiap himpunan terbuka $G \subset R$ terdapat himpunan terbuka $H \subset R^k$

sedemikian hingga $H \cap E = f^{-1}(G)$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui f kontinu pada E dan G suatu himpunan terbuka dari **R**. Diandaikan $\mathbf{p} \in f^{-1}(G)$, maka $f(\mathbf{p}) \in G$. Karena G terbuka, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga kitar $N(f(\mathbf{p}),\varepsilon) \subset G$. Karena f kontinu di $\mathbf{p}$, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $\mathbf{x} \in E \cap N(\mathbf{p},\delta)$ berlaku $f(\mathbf{x}) \in N(f(\mathbf{p}),\varepsilon) \subset G$. Jadi $[E \cap N(\mathbf{p},\delta)] \subset f^{-1}(G)$. Jadi untuk semua $\mathbf{p} \in f^{-1}(G)$ terdapat kitar $N(\mathbf{p},\delta)$ sehingga $[E \cap N(\mathbf{p},\delta)] \subset f^{-1}(G)$. Jika $H = \bigcup_{\mathbf{p} \in f^{-1}(G)} N(\mathbf{p},\delta)$, maka H terbuka. Diperoleh $\bigcup_{\mathbf{p} \in f^{-1}(G)} [E \cap N(\mathbf{p},\delta)] = (E \cap H) \subset f^{-1}(G)$.

Karena untuk setiap $\mathbf{p} \in f^{-1}(G)$, $\mathbf{p} \in E$ dan $\mathbf{p} \in N(\mathbf{p},\delta)$, maka $f^{-1}(G) \subset [E \cap N(\mathbf{p},\delta)]$. Jadi $f^{-1}(G) = [E \cap N(\mathbf{p},\delta)]$.

($\Leftarrow$) Diketahui untuk sembarang himpunan terbuka $G \subset \mathbf{R}$, terdapat himpunan terbuka $H \subset \mathbf{R}^k$ sehingga $E \cap H = f^{-1}(G)$.

Diberikan sembarang $\mathbf{p} \in E$ dan $\varepsilon > 0$. Maka $G = (f(\mathbf{p}),\varepsilon)$ adalah suatu himpunan terbuka dalam **R**. Jadi terdapat H suatu himpunan terbuka dalam $\mathbf{R}^k$ sehingga $E \cap H = f^{-1}(G)$. Karena $\mathbf{p} \in f^{-1}(G)$ maka $\mathbf{p} \in H$, dan karena H terbuka maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $N(\mathbf{p},\delta) \subset H$. Jadi $[E \cap N(\mathbf{p},\delta)] \subset f^{-1}(G)$. Jadi untuk setiap $\mathbf{x} \in E$ dan $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ maka $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < \varepsilon$. Jadi f kontinu di $\mathbf{p}$. Karena $\mathbf{p}$ sembarang di dalam E, maka f kontinu pada E. ∎

Teorema 4.4.2

Jika f dan g fungsi kontinu bernilai real yang didefinisikan pada $\mathbf{R}^k$, maka $f+g$, $f-g$, fg kontinu pada $\mathbf{R}^k$. Fungsi f/g kontinu pada $\mathbf{R}^k$ asal $g(\mathbf{x}) \neq 0$ untuk $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$.

Teorema 4.4.3

Jika fungsi f kontinu pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$ ke dalam $\mathbf{R}$, maka $f(E)$ kompak dalam $\mathbf{R}$.

Bukti :

Diandaikan $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ sembarang selimut terbuka untuk $f(E)$ dalam $\mathbf{R}$. Karena f kontinu, maka menurut teorema 4.4.1 terdapat himpunan terbuka $H_\alpha \subset \mathbf{R}^k$ sehingga $H_\alpha \cap E = f^{-1}(G_\alpha)$. Karena $f(E) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, maka $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha)$ sehingga $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha$. Jadi $\{H_\alpha\}$ selimut terbuka untuk E. Karena E kompak, maka terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dalam A sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i}$. Karena f didefinisikan pada E, maka

$$f(E) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left[H_{\alpha_i} \cap E\right]\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

sebab untuk $G \subset \mathbf{R}$ berlaku $f(f^{-1}(G)) \subset G$. Jadi $f(E)$ kompak. ■

Definisi 4.4.3

Fungsi f dari himpunan $E \subset \mathbf{R}^k$ ke dalam $\mathbf{R}$ dikatakan terbatas, jika terdapat $M > 0$ sehingga $|f(\mathbf{x})| \leq M$ untuk semua $\mathbf{x} \in E$.

Teorema 4.4.4

Jika f fungsi real kontinu pada $\mathbf{R}^k$, dan

$$M = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k\}, \quad m = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k\}$$

maka terdapat $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{R}^k$ sehingga $f(\mathbf{p}) = M$ dan $f(\mathbf{q}) = m$. Jadi f mencapai nilai maksimum di $\mathbf{p}$ dan nilai minimum di $\mathbf{q}$.

Definisi 4.4.4

Diberikan fungsi $f : E \to \mathbf{R}$ dengan $E \subset \mathbf{R}^k$. Dikatakan bahwa f kontinu seragam pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ dengan $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ untuk semua $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam E.

Teorema 4.4.5

Jika f suatu fungsi kontinu pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$ ke dalam $\mathbf{R}$, maka f kontinu seragam pada E.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Karena f kontinu pada E, maka pada setiap titik $\mathbf{p} \in E$, dapat dikawankan dengan suatu bilangan positip δ_p sehingga untuk

$$\forall \mathbf{x} \in E, \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| < \delta_p \Rightarrow |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/2. \qquad (*).$$

Dimisalkan $N(\mathbf{p},\delta_p/2) = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta_p/2\}$. Karena $\mathbf{p} \in N(\mathbf{p},\delta_p/2)$ maka

$\{N(\mathbf{p},\delta_p/2) : \mathbf{p}\in E\}$ adalah selimut terbuka untuk E. Karena E kompak, maka terdapat titik $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ dalam E sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} N\left(\mathbf{p}_i, \delta_{\mathbf{p}_i}/2\right)$.

Kita ambil $\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \cdots, \delta_{p_n}\right\}$, maka $\delta > 0$. Dimisalkan **x** dan **y** sembarang titik di dalam E dengan $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Karena $\mathbf{x} \in E$, maka terdapat k dengan $1 \le k \le n$ sehingga $\mathbf{x} \in N(\mathbf{p}_k, \delta_{p_k}/2)$. Jadi $\|\mathbf{p}_k - \mathbf{x}\| < \delta_{p_k}/2 < \delta_{p_k}$. Karena $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta < \delta_{p_k}/2$ maka

$$\|\mathbf{p}_k - \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{p}_k - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta_{p_k}/2 + \delta_{p_k}/2 = \delta_{p_k}.$$

Karena $\|\mathbf{p}_k - \mathbf{x}\| < \delta_{p_k}$ dan $\|\mathbf{p}_k - \mathbf{y}\| < \delta_{p_k}$, maka mengingat (*) diperoleh :

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \le |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}_k)| + |f(\mathbf{p}_k) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa f kontinu seragam pada E. ■

4.5 Barisan Fungsi dalam R^k

Definisi 4.5.1

Barisan titik $< \mathbf{x}_n >$ dalam R^k dikatakan konvergen, jika terdapat suatu titik $\mathbf{x} \in R^k$ yang memenuhi sifat, untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N\in \mathbb{N}$, sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \ge N$ berlaku $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.

Titik **x** dinamakan limit barisan $< \mathbf{x}_n >$ untuk $n \to \infty$ dan $< \mathbf{x}_n >$ dikatakan konvergen ke **x**.

Notasi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atau $\lim x_n = x$ atau $x_n \to x$ menunjukkan bahwa barisan $< x_n >$ konvergen ke x.

Definisi 4.5.2

Suatu barisan fungsi $< f_n >$ yang didefinisikan pada E dalam $\mathbf{R}^k$ dikatakan konvergen titik demi titik pada E jika barisan bilangan $< f_n(\mathbf{x}) >$ konvergen untuk setiap $\mathbf{x} \in E$.

Jika $< f_n >$ konvergen titik demi titik pada E, maka barisan itu menentukan suatu fungsi f yang dinamakan fungsi limit barisan itu, sehingga $f_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$, untuk $\forall \mathbf{x} \in E$.

Definisi 4.5.3

Diberikan barisan fungsi real $< f_n >$ pada $E \subset \mathbf{R}^k$.

Barisan ini dikatakan konvergen seragam ke fungsi f pada E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$ dan semua $\mathbf{x} \in E$ berlaku $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Teorema 4.5.1

Jika $< f_n >$ barisan fungsi real yang kontinu pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$, dan $f_n \to f$ seragam pada E, maka f kontinu pada E.

Bukti :

Diketahui bahwa $f_n \to f$ seragam pada E dan diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga $|f_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/3$ untuk $\forall \mathbf{x} \in E$. Karena f_n

kontinu untuk semua $n \in N$, maka untuk N di atas dan sembarang $p \in E$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\| p - x \| < \delta$ berlaku $| f_N(p) - f_N(x) | < \varepsilon/3$ untuk semua $x \in E$. Sehingga

$$|f(p) - f(x)| \leq |f(p) - f_N(p)| + |f_N(p) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Jadi untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan dan **p** sembarang di dalam E, maka terdapat $\delta > 0$ dan $\| p - x \| < \delta$ berlaku $| f(p) - f(x) | < \varepsilon$ untuk semua $x \in E$. Jadi f kontinu pada E. ■

Akibat : Jika f fungsi limit seragam barisan suku banyak, maka f kontinu pada E.

Teorema 4.5.2

Diberikan fungsi $f : E \to R$ dengan $E \subset R^k$ dan titik **q** dan **r** dalam E dengan $q \neq r$. Maka terdapat suku banyak $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sehingga

$$P(q) = f(q) \qquad \text{dan} \qquad P(r) = f(r)$$

Bukti :

Diketahui bahwa **q** dan **r** di dalam E dan $q \neq r$, maka terdapat i dengan $1 \leq i \leq k$ sehingga $q_i \neq r_i$. Dibentuk $P(x) = ax_i + b$. Jadi terdapat P(x) suatu suku banyak dalam koordinat ke-i dari x dengan

$$a = \frac{\begin{vmatrix} f(\mathbf{q}) & 1 \\ f(\mathbf{r}) & 1 \end{vmatrix}}{q_i - r_i} \qquad \text{dan} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} f(\mathbf{q}) & r_i \\ f(\mathbf{r}) & q_i \end{vmatrix}}{q_i - r_i}.$$

Mudah dibuktikan bahwa $P(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})$ dan $P(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$. ■

Jika f fungsi real dari $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, maka f fungsi real dari $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Sebaliknya, jika f fungsi dari $x_1, x_2, \ldots, x_k$ maka f fungsi dari $\mathbf{x}$. Jadi, jika P suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ maka P suatu fungsi dari $\mathbf{x}$.

Teorema 4.5.4

Jika $\mathscr{B}$ himpunan semua fungsi limit seragam barisan suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$, maka :

(1). $f \in \mathscr{B} \Rightarrow |f| \in \mathscr{B}$

(2). $f \in \mathscr{B}$ dan $g \in \mathscr{B} \Rightarrow$ maks $\{f, g\} \in \mathscr{B}$ dan min $\{f, g\} \in \mathscr{B}$

(3). $f_i \in \mathscr{B}$, $i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow$ maks $\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathscr{B}$ dan min $\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathscr{B}$.

Bukti :

(1). Andaikan $a = \text{maks}\{\,|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in E\}$, maka $-a \le f(\mathbf{x}) \le a$, $\mathbf{x} \in E$. Maka menurut teorema A, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat suku banyak tanpa suku konstan $P(y) = c_1 y + c_2 y^2 + \ldots + c_N y^N$ sehingga $|P(y) - |y|\,| < \varepsilon/2$, $-a \le y \le a$. Jika y diganti dengan $f(\mathbf{x})$ diperoleh

$|P(f(\mathbf{x})) - |f(\mathbf{x})|\,| < \varepsilon/2$, $\mathbf{x} \in E$ dan $P(f(\mathbf{x})) = c_1 f(\mathbf{x}) + c_2 f^2(\mathbf{x}) + \ldots + c_N f^N(\mathbf{x})$.

Karena $f(\mathbf{x})$ fungsi limit seragam barisan suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$, maka demikian juga $c_i f^i(\mathbf{x})$, untuk $1 \le i \le N$. Jadi untuk $\varepsilon > 0$ di atas, terdapat suku banyak $P_i(x)$ dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sehingga

$|P_i(x) - c_i f^i(x)| < \varepsilon/2N$ untuk $i = 1,2,\ldots, N$.

$$\left|\, |f(\mathbf{x})| - \sum_{i=1}^{N} P_i(\mathbf{x}) \,\right| \le \left| |f(\mathbf{x})| - P(f(\mathbf{x})) \right| + \left| P(f(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{N} P_i(\mathbf{x}) \right|$$

$$\le \left| |f(\mathbf{x})| - P(f(\mathbf{x})) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} c_i f^i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N} P_i(\mathbf{x}) \right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Jadi $|f| \in \mathcal{B}$.

(2). Fungsi h = maks $\{f,g\}$ dan k = min $\{f,g\}$.

$h = 1/2\,(f + g) + 1/2|f - g|$ dan $k = 1/2(f + g) - 1/2|f - g|$.

Menurut (1) $h \in \mathcal{B}$ dan $k \in \mathcal{B}$.

(3). Diketahui $f_i \in \mathcal{B}$ dengan $i = 1,2,\ldots, n$.

Akibat dari (2), maka

maks $\{f_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \in \mathcal{B}$ dan min $\{f_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \in \mathcal{B}$. ∎

Sekarang sampailah kita pada pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass yang diperumum untuk fungsi real dengan beberapa variabel real.

4.6. Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi beberapa variabel

Teorema

Jika f fungsi kontinu bernilai real dengan beberapa variabel real yang didefinisikan pada himpunan kompak $E \subset \mathbf{R}^k$, maka terdapat barisan suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sehingga konvergen seragam ke f.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa jika f fungsi kontinu bernilai real pada $E \subset \mathbf{R}^k$ dan jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, maka terdapat $P(x)$ suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sehingga $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$, untuk semua $x \in E$.

Pembuktian dilakukan dengan dua langkah.

Langkah I.

Diberikan f kontinu, titik $\mathbf{x} \in E$ dan $\varepsilon > 0$ sembarang.

Akan dibuktikan terdapat fungsi g sehingga

$g_x(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ dan $g_x(\mathbf{t}) > f(\mathbf{t}) - \varepsilon$ untuk $\mathbf{t} \in E$.

Menurut teorema 4.5.2 untuk setiap titik $\mathbf{y} \in E$ dengan mengambil $\mathbf{q} = \mathbf{x}$ dan $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ terdapat suku banyak $h_y(\mathbf{x})$ dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sehingga $h_y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ dan $h_y(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$.

Menurut bukti teorema 4.5.2 $h_y(\mathbf{x}) = ax_i + b$ dengan a dan b konstanta real dan x_i suatu koordinat ke-i dari $\mathbf{x}$, sehingga h_y kontinu. Barisan fungsi $< {}_nh_y >$ dengan ${}_nh_y(\mathbf{x}) = h_y(\mathbf{x})$ untuk $\forall n \in N$ adalah konvergen seragam ke $h_y(\mathbf{x})$ sendiri.

Menurut teorema 4.4.2 $h_y - f$ kontinu dan $h_y(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}) = 0$, sehingga terdapat kitar $V_y = \{\, \mathbf{t} \in E : \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\| < \delta_y \}$ dari titik $\mathbf{y}$ sehingga $h_y(\mathbf{t}) > f(\mathbf{t}) - \varepsilon$ untuk

$t \in V_y$.

Untuk setiap $y \in E$ dibentuk fungsi h_y semacam ini. Jadi $\{V_y : y \in E\}$ selimut terbuka untuk E. Karena E kompak, maka terdapat $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dalam E sehingga $E = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_k}$

Menurut teorema 4.5.3

$$g_x = \text{maks } \{h_{y_1}, h_{y_2}, \cdots, h_{y_k}\}$$

suatu fungsi limit konvergen seragam barisan suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$

Karena untuk semua y E $h_y(x) = f(x)$ maka nilai $g_x(x) = f(x)$. Untuk sembarang $t \in E$, terdapat p dengan $1 \le p \le k$ sehingga $t \in V_{y_p}$.

Jadi $g_x(t) = \text{maks } \{h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \cdots, h_{y_k}(t)\} \ge h_{y_p}(t) > f(t) - \varepsilon$, sebab $t \in V_{y_p}$. Jadi terdapat fungsi g_x sehingga $g_x(x) = f(x)$ dan $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$, $t \in E$.

Langkah II :

Kita tinjau semua fungsi g_x untuk setiap $x \in E$ yang dibentuk dalam langkah I. Karena $g_x - f$ kontinu dan bernilai nol di x, maka terdapat kitar $W_x = \{ t \in E : \|t - x\| < \delta_x\}$ dari x sehingga $g_x(t) < f(t) + \varepsilon$ untuk $t \in W_x$. Karena himpunan E kompak dan $\{W_x : t \in E\}$ selimut terbuka untuk E, maka terdapat subselimut berhingga sehingga

$$E = W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \cdots \cup W_{x_k}$$

Dibentuk P = min $\{g_{x_1}, g_{x_2}, \cdots, g_{x_k}\}$. Karena $h_y(\mathbf{x})$ suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ maka gx juga suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$, sehingga P juga suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Untuk sembarang $t \in E$, terdapat r dengan $1 \leq r \leq n$ dan $t \in W_{x_r}$. Jadi $P(t) = \min\{g_{x_1}(t), g_{x_2}(t), \cdots, g_{x_k}(t)\} \leq g_{x_r}(t) < f(t) + \varepsilon$ sebab $t \in W_{x_r}$. Akan tetapi menurut langkah I nilai $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ untuk $t \in E$. Sehingga $P(t) = \min\{g_{x_i}(t): 1 \leq i \leq k\} > f(t) - \varepsilon$. Jadi $|P(t) - f(t)| < \varepsilon$ untuk $t \in E$.

Jadi untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat suatu suku banyak dalam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sedemikian hingga $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in E$. ∎

BAB V

PENUTUP

Karya tulis tentang Teorema Pendekatan Weierstrass ini diakhiri dengan ikhtisar tentang hal-hal yang telah dibahas di dalamnya, yaitu :

1. Topik-topik pendukung untuk membuktikan Teorema Pendekatan Weierstrass yang terdiri atas : topologi dasar pada $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^k$, fungsi kontinu, barisan fungsi dan kekonvergenan seragam, serta operator linear.
2. Konsep yang berhubungan langsung dalam pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass antara lain: kekonvergenan seragam, perluasan fungsi kontinu, operator linear, dan himpunan kompak.
3. Pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi bernilai real pada selang tertutup dan terbatas dikerjakan dengan tiga cara, yaitu dengan :

   a. suku banyak Bernstein

   b. fungsi konvolusi

   c. operator linear.
4. Pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass untuk fungsi kontinu f pada himpunan kompak $K \subset \mathbb{R}$ dikerjakan dengan memperluas definisi fungsi f pada $[a,b] \supset K$.
5. Teorema Pendekatan Weierstrass dapat diperluas untuk fungsi bernilai real dengan beberapa variabel real pada himpunan kompak $K \subset \mathbb{R}^k$. Pembuktiannya menggunakan teorema A, teorema 4.5.2 dan teorema 4.5.3.

DAFTAR PUSTAKA

Cheney, E. W. 1966. *Introduction to Approximation theory*, McGraw-Hill.

Rudin, W. 1976 *Principles of Mathematical Analysis*, Edisi ke-3, McGraw-Hill.

Simmons, G. F. 1963. *Introduction To topology And Modern Analysis*, McGraw-Hill.

Soemantri, R. Prof. Drs. 1997. Analisis Real II. Kumpulan modul-modul.