GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Sr. Maria Louis Rukmi Nastiti, OSU

N I M : 931 414 035
NIRM : 933052010501120033

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1996

SKRIPSI

GRUP SIMETRI

Oleh :

Sr. Maria Louis Rukmi Nastiti, OSU
N I M : 931 414 035
NIRM : 933052010501120033

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, MA.

17 Februari 1996
Tanggal :

Pembimbing II

Dr. Frans Susilo, SJ.

17 Februari 1996
Tanggal :

SKRIPSI

GRUP SIMETRI

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Sr. Maria Louis Rukmi Nastiti, OSU

N I M : 931 414 035
NIRM : 933052010501120033

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal : 31 Januari 1996
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	: Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, MA.	....
Anggota	: Dr. Frans Susilo, SJ.	....

Yogyakarta, 17 Februari 1996
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP

Priyono Marwan

Dr. A. Priyono Marwan, SJ.

KATA PENGANTAR

"Aku akan berdoa dengan rohku,
aku akan berdoa juga dengan akal budiku;
aku akan menyanyi dan memuji dengan rohku,
aku akan menyanyi dan memuji juga dengan akal budiku."
(1Kor 14:15).

Setelah sekian lama bertekun dan berjerih payah akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan. Ibarat belajar memainkan suling dalam suatu orkestra, penyusunan skripsi ini penulis pandang sebagai permainan lagu pujian. Kemudian lagu pujian itu harus menjadi lagu pujian dalam kehidupan sehari-hari.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang turut membantu menyelesaikan skripsi ini, terlebih kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjoyo, MA, selaku dosen pembimbing I, yang telah mencurahkan segala perhatiannya, untuk membimbing dan memberikan ins-

pirasi serta ide-idenya yang cemerlang yang tak ternilai harganya.

2. Dr. Frans Susilo, SJ, selaku pembimbing ke II, yang telah membaca dan mengoreksi skripsi ini, juga atas segala dukungan dan perhatian serta ide-idenya.
3. Bapak Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sanata Dharma.
4. Sr. Jeanne Hartono, OSU, Sr. Jovita Partasoedarma, OSU dan Suster-suster seordo Santa Ursula atas doa, dukungan dan perhatian serta pengertiannya yang begitu besar.
5. Rekan-rekan Mahasiswa yang telah memberikan perhatian dan bantuannya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu dengan segala senang hati penulis menerima kritik dan saran dari para pembaca demi sempurnanya skripsi ini.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca terutama untuk menumbuhkan dan memperdalam rasa senang dan cinta pada Matematika.

Yogyakarta, Januari 1996

Penulis

Sebuah persembahan buat:

Suster-suster Ordo Santa Ursula

Sahabat dan teman-teman seperjalanan

DAFTAR ISI

Halaman

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Halaman

ABSTRAK

Dalam geometri, apabila dikatakan bahwa suatu bangun itu simetrik maka padanya dapat dikerjakan isometri tertentu yang disebut operasi simetri. Oleh operasi simetri suatu bangun ditransformasikan ke dirinya sendiri sedemikian, hingga bangun itu tidak berubah dan hanya terjadi permutasi dari elemen-elemennya. Grup simetri suatu bangun adalah himpunan semua operasi simetri bangun tersebut terhadap komposisi isometri.

Permutasi adalah pemetaan bijektif dari himpunan S ke S. Himpunan semua permutasi dari S membentuk suatu grup yang disebut grup simetrik M(S). Dua subgrup dari M(S) yang penting: Pertama, subgrup M_T dengan himpunan semua permutasi anggota M(S) yang membiarkan T, himpunan bagian dari S, invarian dan elemen demi elemen tetap demikian. Kedua, subgrup $M_{(T)}$ dengan himpunan semua permutasi yang mempermutasikan elemen T di antara mereka sendiri dan tidak mempermutasikan elemen-elemennya keluar T. Bila kita ambil sebarang himpunan bagian T dari V, yaitu himpunan semua titik pada suatu ruang berdimensi 2 (bidang) dan ruang berdimensi 3 (ruang) maka subgrup $M_{(T)}$ itu tidak lain adalah grup simetri dari T.

Ukuran simetri dari suatu bangun dapat dilihat dari ordo grup simetrinya. Grup simetri berhingga bangun-bangun dalam bidang adalah grup siklik C_n dan dihedral D_n, sedang dalam ruang, ditambah grup tetrahedral A_4 (grup alternating berordo 12), grup octahedral S_4 dan grup icosahedral A_5 berordo 60. Grup simetri tak berhingga dalam bidang dibagi menjadi 2 klas. Pertama : grup simetri dari bangun-bangun yang membiarkan satu garis lurus invarian. Ada 7 macam yang disebut "Frieze groups". Kedua : grup simetri dari bangun-bangun yang tidak membiarkan satu garis lurus invarian. Ada 17 macam yang disebut "Crystallography groups".

BAB I

PENDAHULUAN

Geometri adalah salah satu bagian Matematika, yang mempunyai banyak unsur keindahan. Geometri juga merupakan sumber bagi salah satu Struktur Aljabar yang mempunyai peranan dalam matematika yaitu Grup.

Elemen-elemen dari grup bisa berupa antara lain pemetaan. Pemetaan surjektif dan injektif adalah pemetaan-pemetaan yang mempunyai sifat khusus. Sedang pemetaan bijektif adalah pemetaan yang surjektif sekaligus injektif. Ada pemetaan bijektif dari suatu himpunan ke dirinya sendiri. Grup Simetrik M(S) yaitu grup semua pemetaan bijektif dari suatu himpunan S ke dirinya sendiri terhadap komposisi pemetaan, mempunyai sifat-sifat unik dan penting. Permutasi adalah pemetaan bijektif dari suatu himpunan juga ke dirinya sendiri. Grup S_n adalah grup yang anggotanya semua permutasi dari himpunan S, dengan S yang terdiri dari n bilangan bulat positif yang pertama. Dalam Geometri, transformasi juga dipandang sebagai pemetaan bijektif antara semua titik dalam bidang. Ada transformasi yang mengawetkan jarak antara titik-titiknya dalam bidang atau membiarkan suatu bangun invarian, disebut isometri, yaitu antara lain, rotasi, refleksi dan translasi.

Dalam Geometri setiap bangun dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan ruang berdimensi tiga (ruang), mempunyai sifat simetrik. Ukuran simetri dari berbagai-bagai bangun berbeda. Untuk menentukan ukuran simetri suatu bangun kita menentukan pengerjaan-pengerjaan transformasi pada bangun tersebut, yang tidak lain adalah isometri itu. Dalam tulisan ini, isometri yang dikerjakan untuk menentukan ukuran simetri suatu bangun itu disebut operasi simetri. Himpunan semua operasi simetri suatu bangun terhadap komposisi isometri adalah suatu grup, yang disebut Grup Simetri. Banyaknya anggota (ordo) grup simetri suatu bangun kita sebut ukuran simetri dari bangun tersebut. Andaikan T adalah nama bangun itu maka grup simetrinya dikatakan Grup simetri dari bangun T.

Elemen-elemen grup simetri dan komposisinya dapat dinyatakan dengan permutasi dan matriks.

Andaikan ditentukan T adalah suatu himpunan bagian dari S, dan α adalah sebarang permutasi dari S ke S. Dapat dibentuk himpunan dengan anggota semua permutasi yang membiarkan T invarian dan masing-masing elemen dari T tetap demikian. Himpunan ini terhadap komposisi juga merupakan grup simetri. Jika kita mengambil T sebarang himpunan bagian dari himpunan semua titik pada suatu ruang berdimensi 2 (bidang) dan ruang berdimensi 3, yang berwujud bangun nyata, maka grup simetrinya adalah grup simetri dari bangun T tersebut.

Elemen-elemen grup simetrik, yaitu permutasi dapat dinyatakan dengan sikel. Sikel-sikel mempunyai sifat-sifat yang penting. Sifat-sifat sikel ini akan kita gunakan untuk menentukan grup simetri suatu bangun.

Jika representasi dari suatu grup simetri adalah homomorphisma dari grup itu ke M(S) untuk beberapa himpunan S yang tidak kosong, maka elemen grup simetri itu dinyatakan dengan permutasi. Dipandang dari elemen-elemennya, grup simetri itu dikatakan grup beraksi pada S. Selanjutnya, kita perhatikan operasi simetri yang membiarkan $T \subset S$ tetap/invarian dan $x \in T$ tetap. Himpunan operasi-operasi yang membiarkan x tetap ini kita sebut Stabilisator x (disingkat stab x). Sedangkan orbit x adalah klas dalam S yang memuat x.

Aksi konjugasi grup G pada himpunan G sendiri, akan kita gunakan untuk menjelaskan pengelompokan operasi-operasi simetri pada suatu bangun.

Bangun-bangun yang akan kita tentukan grup simetrinya sebagai contoh ialah bangun-bangun yang sudah diberi nama khusus misalnya segitiga sama kaki, jajaran genjang, persegi (bujur sangkar), persegi panjang, segi-n beraturan, prisma beraturan, piramida beraturan, bidang banyak beraturan ("Platonic Solids") dan "Archimedian Solids". Sedangkan bangun-bangun seperti gambar-gambar pada Lampiran 1-7, yang mudah kita temukan, diambil sebagai contoh untuk mencari hubungan antara grup simetri suatu bangun dengan sifat keindahan bangun tersebut.

Tulisan ini akan diawali dengan membahas teorema-teorema yang mendasari pembahasan grup simetri, yaitu dalam bab II. Topik-topik yang akan kita bahas: pergandaan kartesius, relasi, pemetaan, komposisi pemetaan, invers pemetaan, operasi, partisi, grup, grup Simetrik M(S), subgrup dari grup M(S), representasi dari suatu grup, subgrup normal dan grup faktor, aksi grup pada suatu himpunan dan "direct product".

Selanjutnya akan dibahas definisi dan konsep-konsep penting tentang permutasi dan simetri dalam bab III. Kita akan membahas grup simetrik dari S, grup permutasi genap (grup "alternating") dan M(S) beraksi pada himpunan X. Kemudian kita membahas tentang grup transformasi kongruensi (isometri) dan operasi simetri pada suatu bangun.

Mengawali pembahasan tentang grup simetri dalam bab IV, akan dibahas satu contoh grup siklik. Kemudian macam-macam grup simetri, yaitu grup siklik C_n dan grup dihedral D_n. Selanjutnya dibahas struktur bangun-bangun geometri, yaitu "Platonic Solids" dan "Archimedian Solids" dan grup simetrinya. Grup simetri bangun-bangun itu dapat kita tentukan dengan memandang aksi elemen-elemennya pada himpunan X, dengan X dimaksudkan suatu himpunan titik-titik istimewa dari bangun itu. Pada bagian akhir bab IV dibahas tentang grup simetri tak berhingga yaitu grup simetri bangun-bangun jalur tak hingga yang dapat kita temukan pada hiasan dinding atau taplak meja dan bangun-bangun pada motif kain atau kain batik serta pada hiasan lantai/ dinding.

Dari uraian di atas maka masalah grup simetri dapat kita indikasikan dalam masalah-masalah sebagai berikut.

1. Apakah grup simetri itu dan bagaimana merepresentasikannya
2. Teorema-teorema mana dalam grup abstrak dapat kita gunakan untuk menentukan tipe-tipe simetri bangun-bangun dalam bidang maupun dalam ruang

3. Bagaimana mencari hubungan antara Matematika dan Seni.

Tujuan penulisan ini adalah membahas tentang grup simetri. Dengan mengenal seluk beluk grup simetri kita akan mengenal banyak grup dan akan memudahkan kita dalam menentukan grup simetri dari hiasan-hiasan dinding, motif kain dan kain batik, serta disain-disain lain yang mudah kita temukan di sekitar kita. Juga menentukan grup simetri dari bangun-bangun ruang berdimensi 3.

Manfaat penulisan/mempelajari grup simetri bagi calon guru ialah dapat meningkatkan kemampuannya dalam mengajarkan Matematika dan memotivasi siswa mempelajari struktur aljabar, terutama grup, dan transformasi Geometri. Selain itu, Kurikulum yang baik adalah yang ada kaitan materi dari yang rendah ke yang tinggi, kaitan mata pelajaran yang satu dengan yang lain dan adanya kejelasan tentang apa yang ingin dicapai. Studi tentang grup simetri ini mengkaitkan pelajaran geometri di sekolah Dasar dan Menengah dengan matematika di Perguruan Tinggi dan dapat mengkaitkan mata pelajaran yang satu dengan mata pelajaran yang lain. Maka tulisan ini dapat membantu menyusun kurikulum yang baik seperti yang dimaksudkan di atas. Tulisan ini juga dapat membantu memilah-milah sifat simetri suatu bangun.

Metode penulisan yang digunakan adalah Metode Studi Pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan. Buku-buku acuan yang digunakan seperti terdaftar dalam Daftar Pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Operasi pada suatu himpunan adalah konsep yang paling dasar dalam mempelajari Grup Simetri. Untuk membahas operasi perlu kita definisikan dulu pemetaan atau fungsi yang menjadi dasar pengertian operasi.

1. Pergandaan kartesius

Definisi 2.1

Jika S dan T adalah sebarang himpunan, maka *pergandaan kartesius himpunan* S dan T (ditulis: $S \times T$, dibaca "S kali T") adalah himpunan semua pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in S$ dan $y \in T$.

$S \times T = \{ (x,y) \mid x \in S \text{ dan } y \in T \}$

2. Relasi

Definisi 2.2

Yang dimaksud dengan *relasi* dari S ke T ialah himpunan bagian dari $S \times T$.

Notasi untuk relasi $\sim$ dari S ke T yaitu $\sim : S \longrightarrow T$.

Jadi, $\sim : S \longrightarrow T$ suatu relasi $\Leftrightarrow \sim \subseteq S \times T$.

Definisi 2.3

Suatu relasi $\sim$ pada suatu himpunan S suatu *relasi ekuivalensi* bila dan hanya bila

(1) untuk setiap $x \in S$ berlaku $(x,x) \in \sim$ (dinotasikan: $x \sim x$, disebut sifat refleksif)

dan (2) untuk setiap $(x,y) \in \sim$ berlaku bahwa $(y,x) \in \sim$ (dinotasikan: bila $x \sim y$ maka $y \sim x$, disebut sifat simetrik)

dan (3) untuk setiap $(x,y) \in \sim$ dan $(y,z) \in \sim$ berlaku juga $(x,z) \in \sim$ (dinotasikan: bila $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka $x \sim z$, disebut sifat transitif).

3. Pemetaan atau Fungsi

Definisi 2.4:

Himpunan bagian α dari $S \times T$ disebut *pemetaan* dari S ke T dengan notasi $\alpha : S \longrightarrow T$ bila dan hanya bila dipenuhi:

1. $(\forall x \in S)\ (\exists y \in T)\ (x,y) \in \alpha$,
2. $(x,y_1) \in \alpha$ dan $(x,y_2) \in \alpha \Rightarrow y_1 = y_2$.

Bila $(x,y) \in \alpha$, maka ditulis $\alpha(x) = y$.

Himpunan S disebut daerah asal (*domain*) dan himpunan T disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan T tidak selalu berlainan dari S. Sehingga ada pemetaan dari himpunan S ke himpunan S.

Dalam tulisan ini pemetaan ditulis dengan huruf Yunani. Elemen $\alpha(x)$ disebut bayangan dari x oleh pemetaan α. Notasi $x \xrightarrow{\alpha} y$ atau $x \longmapsto y$ secara simbolis menyatakan bahwa y adalah bayangan x oleh suatu pemetaan α.

Jika $\alpha : S \longrightarrow T$ dan A adalah suatu himpunan bagian dari S, maka $\alpha(A)$ menyatakan himpunan elemen-elemen dari T yang merupakan bayangan elemen-elemen A oleh pemetaan α. Secara simbolis ditulis $\alpha(A) = \{\alpha(x) \mid x \in A\}$

Himpunan $\alpha(A)$ itu disebut *bayangan* dari A oleh pemetaan α.

Definisi 2.4 dapat dinyatakan dengan simbolisme logika sebagai berikut

$\alpha : S \longrightarrow T \Leftrightarrow (\forall\ x \in S)(\exists\ y \in T)\ [\alpha(x) = y \wedge (\forall\ y_1, y_2 \in T)$
$(\alpha(x) = y_1 \wedge \alpha(x) = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2)]$.

Definisi 2.5

Suatu pemetaan α dari S ke T dikatakan *pemetaan surjektif* (pemetaan onto) bila dan hanya bila
$(\forall\ y \in T)(\exists\ x \in S)\ \alpha(x) = y$.

Definisi 2.6

Suatu pemetaan α dari S ke T dikatakan *pemetaan injektif* (pemetaan satu-satu) bila dan hanya bila
$(\forall\ x_1, x_2 \in S)\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Definisi 2.7

Pemetaan α dikatakan *pemetaan bijektif* bila dan hanya bila pemetaan α sekaligus surjektif dan injektif.

Definisi 2.8

Dua pemetaan α dan β dari S ke T dikatakan *sama* bila dan hanya bila untuk setiap $x \in S$ berlakulah $\alpha(x) = \beta(x)$.

Definisi 2.9

Pemetaan *identitas* adalah pemetaan bijektif dari S ke S yang membawa setiap $x \in S$ ke dirinya sendiri. Jadi ι adalah pemetaan identitas dari S ke S bila dan hanya bila

$\iota(x) = x$, untuk $\forall x \in S$.

Notasi pemetaan identitas pada himpunan S adalah ι_S dengan $\iota_S(x) = x$, untuk $\forall x \in S$.

Teorema 2.1

Ditentukan $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $A, B \subset S$ jika $A \subset B$ maka $\alpha(A) \subset \alpha(B)$.

Bukti:

Diambil b sebarang anggota $\alpha(A)$

$b \in \alpha(A)$, maka $(\exists\, a \in S)(a \in A$ dan $\alpha(a) = b)$

$A \subset B$ maka $(\exists\, a \in S)(a \in B$ dan $\alpha(a) = b)$

Jadi untuk setiap $b \in \alpha(A)$, maka $b \in \alpha(B)$,

sehingga $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ □

Teorema 2.2

Ditentukan $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $A, B \subset S$ maka

$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

Bukti:

$A \subset (A \cup B)$ maka $\alpha(A) \subset \alpha(A \cup B)$ begitu juga

$B \subset (A \cup B)$ maka $\alpha(B) \subset \alpha(A \cup B)$. Sehingga

$\alpha(A) \cup \alpha(B) \subset \alpha(A \cup B)$ ...... (1)

Misalkan $x \in \alpha(A \cup B)$. Maka ada $y \in (A \cup B)$ sedemikian hingga $\alpha(y) = x$. Karena $y \in (A \cup B)$ maka $y \in A$ atau $y \in B$. Sehingga $\alpha(y) \in \alpha(A)$ atau $\alpha(y) \in \alpha(B)$. Karena $\alpha(y) = x$ maka $x \in \alpha(A)$ atau $x \in \alpha(B)$. Yaitu $x \in \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Jadi $x \in \alpha(A \cup B) \Rightarrow x \in \alpha(A) \cup \alpha(B)$. Sehingga

$\alpha(A \cup B) \subset \alpha(A) \cup \alpha(B)$ (2)

Karena (1) dan (2) maka $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ □

Teorema 2.3

Ditentukan $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $A, B \subseteq S$ maka

$\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$

Bukti:

$(A \cap B) \subseteq A$ maka $\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha(A)$ begitu juga

$(A \cap B) \subseteq B$ maka $\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha(B)$. Sehingga

$\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$ □

4. Komposisi/pergandaan Pemetaan

Definisi 2.10

Andaikan $\alpha : S \longrightarrow T$, $\beta : T \longrightarrow U$. Selanjutnya untuk setiap $x \in S$ didefinisikan $\beta \circ \alpha : S \longrightarrow U$ dengan $\beta \circ \alpha(x) = \beta(\alpha(x))$.

Pengerjaan pemetaan α diikuti oleh β seperti di atas memenuhi syarat-syarat pemetaan dari $S \longrightarrow U$. Pemetaan tersebut adalah suatu pemetaan baru dan dinamakan *komposisi* atau *pergandaan* dari α dan β.

Urutan pengerjaan komposisi pemetaan ialah pemetaan kedua dikerjakan lebih dahulu baru kemudian yang pertama.

Syarat yang harus dipenuhi agar dua pemetaan itu dapat dikomposisikan ialah bahwa daerah hasil dari α harus termuat dalam domain dari β. Teorema berikut ini diperlukan untuk pembahasan berikutnya.

Teorema 2.4

Andaikan $\alpha : S \longrightarrow T$, $\beta : T \longrightarrow U$, dan $\gamma : U \longrightarrow V$. Maka berlakulah $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)$ kita harus memperlihatkan bahwa:

1. $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha$ dan $\gamma\circ(\beta\circ\alpha)$ mempunyai domain dan codomain yang sama
2. $(\forall\ x \in S)\ [(\gamma\circ\beta)\circ\alpha](x) = [\gamma\circ(\beta\circ\alpha)](x)$

1. Pemetaan $\gamma\circ\beta : T \longrightarrow V$ sehingga $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha : S \longrightarrow V$.

   Pemetaan $\beta\circ\alpha : S \longrightarrow U$ sehingga $\gamma\circ(\beta\circ\alpha) : S \longrightarrow V$.

   Jadi $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha$ dan $\gamma\circ(\beta\circ\alpha)$ mempunyai domain S dan codomain V yang sama.
2. Andaikan $x \in S$. Maka

   $\gamma(\beta(\alpha(x))) = \gamma(\beta(\alpha(x)))$

   $\gamma\circ\beta(\alpha(x)) = \gamma(\beta\circ\alpha(x))$ (definisi $\circ$)

   $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha(x) = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)(x)$ (definisi $\circ$)

   Jadi untuk setiap x berlaku $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha(x) = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)(x)$.

Kesimpulan $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)$.□

Teorema 2.5

Andaikan $\alpha : S \longrightarrow T$ maka berlakulah $\alpha\circ\iota_S = \alpha$ dan $\iota_T\circ\alpha = \alpha$

Bukti:

1. Pemetaan $\alpha\circ\iota_S : S \longrightarrow T$. Jadi $\alpha\circ\iota_S$ dan α mempunyai domain dan codomain yang sama.

   Andaikan $x \in S$. Maka $\alpha\circ\iota_S(x) = \alpha(\iota_S(x))$. Di lain pihak $\iota_S(x) = x$. Jadi $\alpha\circ\iota_S(x) = \alpha(x)$. Karena x adalah sebarang elemen di dalam S maka

   $(\forall\ x \in S)\ \alpha\circ\iota_S(x) = \alpha(x)$. Kesimpulan $\alpha\circ\iota_S = \alpha$.

2. Pemetaan $\iota_T \circ \alpha : S \longrightarrow T$. Jadi $\iota_T \circ \alpha$ dan α mempunyai domain dan codomain yang sama.

   Andaikan $x \in S$. Maka $\iota_T \circ \alpha(x) = \iota_T(\alpha(x))$

   $= \alpha(x)$ (definisi ι_T)

   Analog dengan bukti 1 kesimpulannya $\iota_T \circ \alpha = \alpha$.□

Untuk mengenali komposisi dari pemetaan yang merupakan pemetaan surjektif atau pemetaan injektif dipergunakan teorema-teorema berikut ini:

Teorema 2.6

Ditentukan $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$.

(a) Jika α dan β surjektif maka $\beta \circ \alpha$ surjektif

(b) Jika $\beta \circ \alpha$ surjektif maka β surjektif

(c) Jika α dan β injektif maka $\beta \circ \alpha$ injektif

(d) Jika $\beta \circ \alpha$ injektif maka α injektif.

Bukti:

(a) Diambil misalnya α dan β surjektif. Untuk membuktikan bahwa pergandaan $\beta \circ \alpha$ surjektif maka diambil z sebarang anggota U, maka kita harus dapat menunjukkan adanya elemen $x \in S$ sedemikian hingga $(\beta \circ \alpha)(x) = z$.

Misalkan $z \in U$. Karena β surjektif maka dapat ditunjuk $y \in T$ sedemikian hingga $\beta(y) = z$. Dan karena α juga surjektif, maka ada $x \in S$ sedemikian hingga $\alpha(x) = y$.

Maka $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(y) = z$.

Sehingga $\beta \circ \alpha$ surjektif.

(b) Apabila $\beta\circ\alpha$ surjektif dan $z \in U$.

Maka ada $x \in S$ sedemikian hingga $(\beta\circ\alpha)(x) = z$.

Tetapi $\beta(\alpha(x)) = z$ dengan $\alpha(x) \in T$.

Jadi β surjektif.

(c) Misalnya α dan β injektif. Untuk membuktikan bahwa pergandaan $\beta\circ\alpha$ adalah injektif maka kita harus memperlihatkan bahwa bila x_1, $x_2 \in S$ dan $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Misal $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$, maka $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ sebab β injektif. Tetapi jika $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ sebab α injektif. Jadi terbukti bahwa $\beta\circ\alpha$ adalah injektif.

(d) Misalkan $\beta\circ\alpha$ adalah injektif. Diambil $x_1, x_2 \in S$ sedemikian hingga $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Akan dibuktikan bahwa $x_1 = x_2$.

$$(\beta\circ\alpha)(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = (\beta\circ\alpha)(x_2).$$

Karena $\beta\circ\alpha$ injektif maka dari $(\beta\circ\alpha)(x_1)=(\beta\circ\alpha)(x_2)$ dapat diturunkan $x_1 = x_2$. Jadi α injektif. □

5. Invers pemetaan

Definisi 2.11

Suatu pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ adalah *invers kiri* dari α bila $\beta\circ\alpha = \iota_S$ dan *invers kanan* dari α bila $\alpha\circ\beta = \iota_T$.

Teorema 2.7

Misalkan $\alpha : S \longrightarrow T$. Pemetaan α mempunyai suatu invers kiri bila dan hanya bila α injektif.

Untuk membuktikan teorema 2.7 ini lebih dahulu kita buktikan lemma 2.7 berikut ini.

Lemma 2.7: Untuk sebarang himpunan S, $\iota_S : S \longrightarrow S$ injektif

Bukti:

Diambil $x \in S$ maka $\iota_S(x) = x$ (definisi ι_S).

Jadi $(\forall\ y_1, y_2 \in S)$ $y_1 \neq y_2$ maka $\iota_S(y_1) \neq \iota_S(y_2)$, atau $(\forall\ y_1, y_2 \in S)$ $\iota_S(y_1) = \iota_S(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ atau $\iota_S : S \longrightarrow S$ injektif.□

Bukti (teorema 2.7):

($\Rightarrow$) Andaikan α mempunyai suatu invers kiri maka harus dibuktikan bahwa α injektif.

Pemetaan α mempunyai suatu invers kiri berarti $(\exists\ \beta : T \longrightarrow S)$ $\beta \circ \alpha = \iota_S$. Karena ι_S injektif (lemma 2.7), maka $\beta \circ \alpha$ injektif. Menurut teorema 2.6 (d), maka α injektif.

($\Leftarrow$) Andaikan α adalah injektif kita harus membuktikan bahwa $(\exists\ \beta : T \longrightarrow S)$ $\beta \circ \alpha = \iota_S$.

Andaikan $y \in T$ maka ada 2 kemungkinan, yaitu $y \in \alpha(S)$ atau $y \notin \alpha(S)$.

1. Jika $y \in \alpha(S)$, maka $(\exists!\ x \in S)$ $\alpha(x) = y$ (definisi $\alpha(S)$ dan α injektif). Jadi ada pemetaan β, dengan $\beta(y) = x$.
2. Jika $y \notin \alpha(S)$, maka ada pemetaan β jika kita mengambil $x_0 \in S$ dan definisi pemetaan β adalah $\beta(y) = x_0$.

Pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ didefinisikan sebagai berikut.

(1). Diambil sebarang $x_0 \in S$

(2). Untuk setiap $y \in T$ yang dipilih, $\beta(y)$ didefinisikan dengan aturan

a. $y \in \alpha(S)$: $\beta(y)$ = elemen tunggal $x \in S$ sedemikian hingga $\alpha(x) = y$

b. $y \notin \alpha(S)$: $\beta(y) = x_0$

Sekarang kita perlihatkan bahwa $\beta\circ\alpha = \iota_S$, yaitu $(\forall\ x \in S)\ \beta\circ\alpha(x) = \iota_S(x)$.

Andaikan $x \in S$. Maka $\beta\circ\alpha(x) = \beta(\alpha(x))$. Oleh definisi di atas $\beta(\alpha(x)) = x$. Di lain pihak definisi dari ι_S adalah $\iota_S(x) = x$. Maka dari itu $\beta\circ\alpha(x) = \iota_S(x)$.

Jadi $\beta\circ\alpha = \iota_S$.□

Teorema 2.8

Misalkan $\alpha : S \longrightarrow T$. Pemetaan α mempunyai suatu invers kanan bila dan hanya bila α surjektif.

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan α mempunyai suatu invers kanan kita harus membuktikan bahwa α surjektif.

Pemetaan α mempunyai suatu invers kanan, berarti $(\exists\ \beta : T \longrightarrow S\ )\ \alpha\circ\beta = \iota_T$. Andaikan $y \in T$. Kita harus membuktikan bahwa $(\exists\ x \in S\ )\ \alpha(x) = y$.

Kita definisikan x adalah $\beta(y)$. Maka $\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\circ\beta(y) = \iota_T(y) = y$.

Jadi, $(\forall\ y \in T)\ (\exists\ x \in S)\ \alpha(x) = y$, atau α adalah surjektif.

($\Leftarrow$) Andaikan α adalah surjektif maka harus dibuktikan $(\exists\ \beta : T \longrightarrow S\ )\ \alpha\circ\beta = \iota_T$.

Andaikan α surjektif. Elemen $y \in T$. Karena α surjektif maka $(\forall\ z \in T)\ (\exists\ u \in S)\ z = \alpha(u)$.

Bila kita definisikan pemetaan β dengan aturan yang menggunakan pernyataan 'untuk semua' dan 'elemen $y \in T$' , maka kita mempunyai pernyataan $y = \alpha(u)$ untuk semua $u \in S$. Dengan aturan yang menggunakan pernyataan 'dapat ditunjuk', kita pilih $x \in S$ sedemikian, hingga $y = \alpha(x)$. Untuk setiap perubahan pemilihan $y \in T$, maka, kita definisikan bahwa $\beta(y)$ adalah elemen x yang diberikan di atas sedemikian hingga $y = \alpha(x)$.

Ditentukan $z \in T$. Maka $\alpha\circ\beta(z) = \alpha(\beta(z))$ (definisi $\circ$)

$= z$ (definisi β)

$= \iota_T(z)$ (definisi ι_T)

Kesimpulan: $\alpha\circ\beta = \iota_T$. □

Definisi 2.12

Misalkan $\alpha : S \longrightarrow T$. Suatu pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ disebut suatu *invers* dari α bila β merupakan invers kiri sekaligus invers kanan dari α, jadi $\beta\circ\alpha = \iota_S$ dan $\alpha\circ\beta = \iota_T$. Suatu pemetaan dikatakan *invertibel* bila ia mempunyai invers.

Teorema 2.9

Jika $\alpha : S \longrightarrow T$ invertibel maka inversnya adalah tunggal.

Bukti:

Kita andaikan bahwa inversnya tidak tunggal, misalnya β_1 dan β_2 invers dari α. Akan kita perlihatkan bahwa $\beta_1 = \beta_2$.

Komposisi $(\beta_1\circ\alpha)\circ\beta_2 = \beta_1\circ(\alpha\circ\beta_2)$ (teorema 2.4)

$(\iota_S)\circ\beta_2 = \beta_1\circ(\iota_T)$ (definisi invers)

$\beta_2 = \beta_1$ (teorema 2.5).□

Teorema 2.10

Suatu pemetaan invertibel $\Leftrightarrow$ bijektif

Bukti:

($\Rightarrow$) Misal $\alpha : S \longrightarrow T$ adalah invertibel dengan β sebagai pemetaan inversnya. Jadi $\beta\circ\alpha$ adalah pemetaan identitas, yang injektif. Sehingga α pasti injektif (Teorema 2.6 (d)). Di lain pihak $\alpha\circ\beta$ adalah pemetaan identitas dengan domain T, yang surjektif. Jadi α pasti surjektif (Teorema 2.6(b)). Jadi α bijektif.

($\Leftarrow$) Misalkan $\alpha : S \longrightarrow T$ adalah bijektif. Akan kita perlihatkan bahwa α invertibel yaitu bahwa ada inversnya. Andaikan $t \in T$. Karena α surjektif maka pasti ada paling sedikit satu elemen $s \in S$ sedemikian hingga $\alpha(s) = t$.Tetapi karena α juga injektif, maka elemen s itu pastilah tunggal; katakan $\beta(t) = s$. Itu berlaku untuk setiap elemen $t \in T$, dengan demikian kita dapatkan suatu pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$. Pemetaan β ini mempunyai sifat bahwa $\beta\circ\alpha = \iota_S$ dan $\alpha\circ\beta = \iota_T$, jadi β adalah suatu inversnya dari α. Jadi α invertibel.□

6. Operasi

Definisi 2.13:

Operasi biner $*$ pada S adalah pemetaan $* : S \times S \longrightarrow S$ dengan $S \times S = \{(x,y) | x \in S \text{ dan } y \in S\}$.

Definisi 2.13 mensyaratkan bahwa setiap operasi pada suatu himpunan harus tertutup, yaitu jika $a,b \in S$ maka bayangan dari pasangan terurut (a,b), yaitu $a * b$ yang disebut *hasil operasi* dari a dan b, ada di dalam S.

Definisi 2.14

Andaikan S suatu himpunan. Suatu operasi $* : S \times S \longrightarrow S$ dikatakan *"well defined"* (didefinisikan secara betul) bila dan hanya bila $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ maka $x_1 * y_1 = x_2 * y_2$ untuk setiap $x_1, y_1 \in S$.

7. Partisi

Definisi 2.15

Suatu keluarga himpunan $\{H_i\}_{i \in I}$ disebut *partisi* dari himpunan H bila dan hanya bila

a. $H_i \subset H$ untuk setiap $i \in I$,

b. $H_i \neq \emptyset$ untuk setiap $i \in I$,

c. $(\forall\, i,j \in I)\ i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$,

d. $\bigcup_{i \in I} H_i = H$.

Teorema 2.11

Suatu relasi ekuivalensi antara anggota-anggota suatu himpunan H, mengakibatkan adanya partisi di dalam H.

Bukti:

Andaikan ~ relasi ekuivalensi. Maka ~ mempunyai sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Andaikan $a \in H$. $H_a = \{ x \in H \mid x \sim a \}$.

$H_a \neq \emptyset$ sebab relasi ~ refleksif, sehingga $a \sim a$. Jadi H_a

sekurang-kurangnya mempunyai satu anggota. Dan dapat kita simpulkan bahwa setiap anggota dari H pasti berada dalam sekurang-kurangnya satu klas, yaitu klas yang memuat ia sendiri. Jadi $\bigcup_{i \in I} H_i = H$. ....(1)

Sekarang akan dibuktikan bahwa, apabila dua klas itu beririsan maka mereka berimpitan.

Andaikan $H_a \cap H_b = \{c\}$. Elemen $a \in H_a \Rightarrow a \sim a$.

Relasi $\sim$ simetris, karena $c \in H_a$ jadi $c \sim a$,

maka $a \sim c$ ....(2)

Elemen $c \in H_b$ maka $c \sim b$ ....(3)

Karena relasi $\sim$ transitif, maka dari (2) dan (3) dapat diturunkan $a \sim b$. Sehingga $a \in H_b$. Selanjutnya, untuk setiap $p \in H_a$ berlaku $p \sim a$, dan karena $a \sim b$ maka $p \sim b$. Jadi $p \in H_b$. Terbukti bahwa $H_a \subset H_b$ ....(4)

Untuk setiap $q \in H_b$ berlaku $q \sim b$. Karena relasi $\sim$ simetris maka $b \sim a$, dan dengan sifat transitif maka $q \sim a$. Jadi $q \in H_a$. Terbukti bahwa $H_b \subset H_a$ ....(5).

Dari (4) dan (5) maka $H_a = H_b$.

Jadi kalimat: Apabila dua klas itu beririsan maka mereka berimpitan, adalah benar. Kontraposisinya: Apabila dua klas itu tidak berimpitan maka mereka tidak beririsan (tidak berserikat satu elemenpun), jadi saling asing. □

Definisi 2.16

Setiap himpunan $H_a = \{ x \in H \mid x \sim a \}$ yang merupakan elemen dari partisi di dalam H yang diakibatkan oleh relasi ekuivalensi $\sim$ seperti diterangkan dalam teorema 2.11 disebut *klas ekuivalensi* (yang memuat a).

8. Grup

Definisi 2.17

Suatu himpunan G yang tidak kosong dengan suatu operasi * disebut suatu *grup* (dinotasikan dengan (G,*)) bila setiap aksioma di bawah ini dipenuhi:

1. Operasi * bersifat tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in G$ maka dapat ditemukan dengan tunggal satu elemen c dalam G sedemikian hingga $a * b = c$
2. Operasi * bersifat asosiatif, yaitu $(\forall\ a,b,c \in G\ )\ a*(b*c) = (a*b)*c$
3. Mempunyai elemen identitas, yaitu $(\exists\ e \in G)$ sedemikian hingga $(\forall\ a \in G\ )\ a*e = a = e*a$. Elemen e disebut elemen identitas.
4. Untuk setiap $a \in G$ ada $b \in G$ sedemikian hingga $a*b = e$ dan $b*a = e$. Elemen b itu dikatakan invers dari a, dan dinotasikan dengan a^{-1}.

Di dalam aksioma 2 dan 3 di atas dinyatakan bahwa elemen identitas kiri juga merupakan elemen identitas kanan dan adanya invers kiri untuk setiap elemen sekaligus merupakan invers kanan. Penjelasannya sebagai berikut.

1. Akan dibuktikan bahwa invers kiri juga merupakan invers kanan.

   Andaikan a^{-1} adalah invers kiri dari a. Maka

   $(a^{-1}*a) = e$

   $(a^{-1}*a)*a^{-1} = e*a^{-1} = a^{-1}$. Di lain pihak, karena berlaku sifat asosiatif maka $(a^{-1}*a)*a^{-1} = a^{-1}*(a*a^{-1})$.

Sehingga $a^{-1}*(a*a^{-1}) = a^{-1}$.

$(a^{-1})^{-1}*a^{-1}*(a*a^{-1}) = (a^{-1})^{-1}*a^{-1}$ (dikalikan invers dari a^{-1})

$e*(a*a^{-1}) = e$

$a*a^{-1} = e$.

Dengan demikian invers kiri menjadi invers kanan.

2. Akan dibuktikan bahwa elemen identitas kiri menjadi identitas kanan.

Hasilkali $a*e = a*(a^{-1}*a)$

$= (a*a^{-1})*a$ (sifat asosiatif)

$= e*a = a$.

Definisi 2.18

Grup $(G,*)$ dikatakan *komutatif* (disebut grup Abel) bila dan hanya bila $(\forall\, a,b \in G)\ a*b = b*a$.

Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa dalam grup $(G,*)$ ada tepat satu elemen identitas dan setiap elemen mempunyai invers yang tunggal.

Teorema 2.12.

Andaikan $(G,*)$ adalah grup. Maka

1. Elemen identitas dari $(G,*)$ adalah tunggal, artinya bila $e,f \in G$ sedemikian hingga $(\forall\, a \in G)\ e*a = a*e$ dan $f*a = a*f$ maka $e = f$.
2. Setiap elemen dalam $(G,*)$ mempunyai invers yang tunggal artinya bila $a,x,y \in G$, e adalah elemen identitas dari $(G,*)$, $a*x = x*a = e$ dan $a*y = y*a = e$ maka $x = y$.

Untuk selanjutnya elemen identitas dalam G dinyatakan dengan e dan invers dari a dengan a^{-1}. Bilamana suatu grup tidak mempunyai operasi yang spesifik maka akan digunakan notasi perkalian dan menghilangkan notasi "*" pada pengerjaan penggadaan. Jadi a*b akan ditulis sebagai ab, dan grup (G,*) dinyatakan dengan G.

Dapat dibuktikan sifat-sifat sederhana dari suatu grup.

Teorema 2.13

Andaikan G adalah grup. Elemen $a,b,c \in G$. Maka

a. Invers dari a^{-1} adalah a atau $(a^{-1})^{-1} = a$

b. Invers dari hasil operasi sama dengan hasil operasi masing-masing invers dengan urutan dibalik atau $(\forall\ a,b \in G\ )\ (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

c. Jika ab = ac atau ba = ca maka b = c, untuk $\forall\ a,b,c \in G$ (hukum kanselasi)

d. Untuk $\forall\ a,b \in G$, persamaan ax = b dan ya = b mempunyai penyelesaian tunggal dalam G, yaitu berturut-turut $x = a^{-1}b$ dan $y = ba^{-1}$.

Teorema 2.13b dapat diperluas untuk sebarang n elemen yaitu untuk setiap $a_1,a_2, \ldots,a_n \in G$ maka $(a_1a_2\ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1^{-1}$, dan dari teorema 2.13d jika a dan x adalah elemen dari grup berhingga, maka dalam tabel Cayley dari grup berhingga itu ax akan berada pada baris yang diberi label a. Jika b juga elemen dari grup itu, maka adanya penyelesaian tunggal dari persamaan ax = b, berarti bahwa b muncul tepat satu kali pada baris dengan label a. Jadi setiap elemen dari grup berhingga muncul tepat satu kali dalam setiap baris dari tabel Cayley dari grup berhingga tersebut. Demikian juga dengan persamaan $xa = b$, setiap elemen dari grup berhingga muncul tepat satu kali dalam setiap kolom dari tabel Cayley grup tersebut.

Definisi 2.19

Ordo suatu grup berhingga dengan notasi $|G|$ adalah banyaknya elemen dari G. Sebuah grup dikatakan *grup berhingga* bila ordonya berhingga, dan dikatakan *grup tak berhingga* bila ordonya tak berhingga.

Definisi 2.20

Ditentukan G adalah grup, $a \in G$ dan n bilangan bulat positif. Hasil ganda a a ... a dengan n faktor disajikan dengan a^n. Sedangkan a^{-n} dimaksudkan $a^{-1}\ a^{-1}\ \ldots\ a^{-1}$ dengan n faktor dan a^0 adalah elemen identitas e. Elemen a^n juga dikatakan perpangkatan bulat dari elemen-elemen G.

Selanjutnya dapat dibuktikan teorema berikut ini.

Teorema 2.14

Andaikan G adalah grup, $a,b \in G$, $m,n \in \mathbb{Z}$. Maka

a. $a^m a^n = a^{m+n}$

b. $(a^m)^n = a^{mn}$

c. Bila $ab = ba$ maka $(ab)^n = a^n b^n$

Definisi 2.21

Ordo elemen (periode) a dalam suatu grup G adalah bilangan bulat positif terkecil, r, sedemikian hingga $a^r = e$. Jika tidak ada bilangan semacam r itu, ordo elemen itu tak berhingga.

9. Grup Simetrik M(S)

Grup yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah grup yang anggota-anggotanya pemetaan bijektif dengan komposisi sebagai operasinya. Teorema berikut ini yang menjamin bahwa himpunan semua pemetaan bijektif dari S ke S terhadap komposisi adalah suatu grup.

Teorema 2.15

Andaikan S sebarang himpunan yang tidak kosong. M(S) adalah himpunan semua pemetaan bijektif dari S ke S. Jadi $M(S) = \{\chi : S \longrightarrow S \mid \chi \text{ pemetaan bijektif}\}$. Pada M(S) didefinisikan operasi komposisi pemetaan (dengan notasi "$\circ$") : dengan aturan jika α, β sebarang elemen dalam M(S), $(\alpha\circ\beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ untuk $\forall\ x \in S$. Maka M(S) adalah suatu grup terhadap operasi $\circ$.

Bukti:

1. Operasi $\circ$ adalah "well defined", sebab $\circ$ adalah suatu pemetaan dari $M(S) \times M(S) \longrightarrow M(S)$. Andaikan diambil sebarang $\alpha,\beta \in M(S)$, maka α dan β adalah pemetaan bijektif dari S ke S. Jadi $\alpha\circ\beta$ adalah pemetaan bijektif dari S ke S
2. Untuk $(\forall\ \alpha,\beta,\gamma \in M(S))$ $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma = \alpha\circ(\beta\circ\gamma)$ (teorema 2.4)

3. $M(S)$ mempunyai elemen identitas terhadap operasi $\circ$ tersebut, yaitu pemetaan $\iota: S \longrightarrow S$ dengan aturan $\iota(x) = x$ untuk setiap $x \in S$. Sebab untuk semua $\chi \in M(S)$ berlaku bahwa $(\iota\circ\chi)(x) = \iota(\chi(x)) = \chi(x)$ untuk semua $x \in S$ atau $\iota\circ\chi = \chi$; dan
   $(\chi\circ\iota)(x) = \chi(\iota(x)) = \chi(x)$ juga untuk semua $x \in S$, atau $\chi\circ\iota = \chi$.
4. Setiap pemetaan bijektif $\chi \in M(S)$ mempunyai invers yang juga berada dalam $M(S)$ yaitu pemetaan bijektif
   $\chi^{-1} : S \longrightarrow S$.
   Dan $(\forall\ x \in S)\ (\chi\circ\chi^{-1})(x) = \chi(\chi^{-1}(x)) = x = \iota(x)$.
   Jadi $\chi\circ\chi^{-1} = \iota$.
   Maka $(\forall\ \chi \in M(S))(\exists\ \chi^{-1} \in M(S))\ \chi^{-1}\circ\chi = \chi\circ\chi^{-1} = \iota$.□

Grup $M(S)$ ini disebut grup *simetrik* dari S.

10. Subgrup

Kadang-kadang terjadi bahwa himpunan-himpunan bagian dari suatu grup akan juga membentuk sebuah grup terhadap operasi yang sama. Himpunan bagian yang demikian disebut suatu *subgrup* atau grup bagian.

Definisi 2.22

Suatu himpunan bagian H dari grup G yang tidak kosong disebut subgrup bila H sendiri juga merupakan grup terhadap operasi dari G.

Akibat langsung dari definisi subgrup ini adalah jika G sebarang grup dengan operasi $*$, H adalah subgrup dari G, dan $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ yaitu bahwa himpunan bagian H harus tertutup terhadap operasi *. Hukum asosiatif akan dipenuhi karena H himpunan bagian dari G. Ada suatu teorema yang akan memberikan suatu cara yang tepat untuk menentukan bahwa suatu himpunan bagian dari suatu grup adalah suatu subgrup tetapi sebelumnya kita buktikan dulu teorema berikut ini.

Teorema 2.16

Ditentukan $(G, *)$ adalah suatu grup; H adalah suatu subgrup dari G maka

a. Jika f adalah identitas dari H dan e adalah identitas dari G, maka $f = e$

b. Jika $a \in H$, maka inversnya dalam H adalah sama dengan inversnya yang di dalam G.

Bukti:

a. Elemen f adalah identitas dari H maka $f \in H$, karena $H \subset G$ maka $f \in G$. Sebagai anggota G, f mempunyai invers, kita namakan f^{-1}. Jadi $f^{-1}*f = f*f^{-1} = e$.

   Elemen f adalah elemen identitas dari H. Jadi berlaku $f*f = f$. Maka $f^{-1}*(f*f) = f^{-1}*f$ (kedua ruas dikalikan f^{-1})

   Jadi $(f^{-1}*f)*f = f^{-1}*f$ (hukum asosiatif)

   $e*f = e$

   $f = e$.

b. Diambil sebarang elemen $a \in H$. Inversnya dalam G adalah a^{-1} dan inversnya dalam H dinamakan c.

   Maka $a*c = c*a = f$, sehingga $a*c = c*a = e$. Menurut teorema 2.12b invers dari setiap elemen dalam grup G adalah tunggal, maka $a^{-1} = c$.□

Teorema 2.17

Andaikan G grup dengan operasi * dan andaikan H himpunan bagian dari G maka H adalah subgrup bila dan hanya bila

a. H bukan himpunan kosong

b. Untuk setiap $a,b \in H$ maka $a*b \in H$

c. Untuk setiap $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan H subgrup dari G maka (H,*) adalah grup sehingga syarat a, b dan c dipenuhi.

($\Leftarrow$) Misalkan H adalah himpunan bagian dari G dan syarat a, b dan c dipenuhi kita buktikan bahwa H subgrup.

1. Syarat b menjamin bahwa operasi * tertutup pada H
2. Sifat asosiatif berlaku di H (karena $H \subset G$)
3. Diambil sebarang elemen $a \in H$ ($H \neq \emptyset$).

   Menurut syarat c, $a^{-1} \in H$ dan selanjutnya menurut syarat b, $a*a^{-1} \in H$. Padahal $a*a^{-1} = e$, yaitu elemen identitas dari G. Jadi $e \in H$ atau H memuat elemen identitas.
4. Setiap elemen dari H mempunyai invers menurut syarat c.

Kesimpulannya (H,*) adalah grup, jadi H adalah subgrup dalam G.□

11. Subgrup dari grup simetrik

Definisi 2.23

Andaikan G adalah grup pemetaan bijektif dari suatu himpunan S ke S. Himpunan $T \subset S$ dan α adalah suatu pemetaan bijektif maka

1. $G_T = \{\alpha \in G \mid \alpha(t) = t \ \forall \ t \in T \}$
2. $G_{(T)} = \{\alpha \in G \mid \alpha(T) = T \}$.

Dalam definisi 2.23 anggota G_T adalah pemetaan-pemetaan yang membiarkan T invarian, dan elemen demi elemen tetap 'demikian'. Sedangkan pada $G_{(T)}$, $\alpha(T)$ adalah himpunan semua elemen $\alpha(t)$ untuk setiap $t \in T$. Maka jika $\alpha \in G_{(T)}$, α memetakan elemen T di antara mereka sendiri dan tidak memetakan elemen-elemennya keluar T. Teorema berikut ini membuktikan bahwa G_T dan $G_{(T)}$ kedua-duanya merupakan subgrup dari G. Dan untuk semua G dan T berlaku $G_T \subset G_{(T)}$.

Teorema 2.18

Jika G adalah suatu grup pemetaan bijektif dari S ke S, dan T adalah suatu himpunan bagian dari S, maka G_T dan $G_{(T)}$ adalah subgrup-subgrup dari G. Juga G_T adalah subgrup dari $G_{(T)}$.

Bila teorema itu ditulis dengan singkat: $S \neq \emptyset$, $G = M(S)$ dan $T \subset S$ maka

1. G_T adalah subgrup dari G
2. $G_{(T)}$ adalah subgrup dari G
3. G_T subgrup dari $G_{(T)}$.

Bukti:

Menggunakan teorema 2.17

1. a. Pemetaan $\iota : S \longrightarrow S$ dengan $\iota(x) = x$ untuk $(\forall\, x \in S)$.

   Pemetaan ι adalah elemen identitas dari grup G. Jadi $\iota \in G_T$ atau $G_T \neq \emptyset$.

   b. Diambil dua elemen sebarang $\alpha, \beta \in G_T$. Maka $\alpha(t) = t$ dan $\beta(t) = t$ untuk setiap $t \in T$. Selanjutnya

   $\alpha \circ \beta(t) = \alpha(\beta(t)) = \alpha(t) = t$ untuk tiap $t \in T$.

   Jadi $\alpha \circ \beta \in G_T$.

   c. Diambil sebarang elemen $\alpha \in G_T$. Maka $\alpha(t) = t$ untuk setiap $t \in T$ sehingga $\alpha^{-1}(\alpha(t)) = \alpha^{-1}(t)$

   $$\alpha^{-1} \circ \alpha(t) = \alpha^{-1}(t)$$

   $$\iota(t) = \alpha^{-1}(t)$$

   $$t = \alpha^{-1}(t)$$ untuk setiap $t \in T$.

   Dari a, b dan c maka G_T adalah subgrup dari G.

2. a. Pemetaan $\iota \in G_{(T)}$ sebab $\alpha(x) = x$ untuk semua $x \in S$.

   Jadi $G_{(T)} \neq \emptyset$.

   b. Diambil dua elemen sebarang $\alpha, \beta \in G_{(T)}$. Maka

   $\alpha(T) = T$ dan $\beta(T) = T$

   $\alpha \circ \beta(T) = \alpha(\beta(T)) = \alpha(T) = T$.

   Jadi $\alpha \circ \beta \in G_{(T)}$.

   c. Diambil sebarang elemen $\alpha \in G_{(T)}$. Harus dibuktikan bahwa $\alpha^{-1} \in G_{(T)}$.

   Pemetaan $\alpha \in G_{(T)}$ maka $\alpha(T) = T$

   $$\alpha^{-1}(\alpha(T)) = \alpha^{-1}(T)$$

   $$\alpha^{-1} \circ \alpha(T) = \alpha^{-1}(T)$$

   $$\iota(T) = \alpha^{-1}(T)$$

   $$T = \alpha^{-1}(T).$$ Jadi $\alpha^{-1} \in G_{(T)}$.

3. Harus dibuktikan bahwa G_T subgrup dari $G_{(T)}$.

   Diambil sebarang elemen $\alpha \in G_T$. Maka $\alpha(t) = t$ untuk setiap $t \in T$.

   Jadi, $\alpha(T) = \{\alpha(t) \mid t \in T\} = \{t \mid t \in T\} = T$.

   Kesimpulan $\alpha \in G_{(T)}$ atau $G_T \subset G_{(T)}$.

   Karena G_T dan $G_{(T)}$ kedua-duanya subgrup dari G dan $G_T \subset G_{(T)}$ maka G_T adalah subgrup dari $G_{(T)}$.□

12. Grup Siklik

Andaikan bahwa a adalah suatu elemen dari suatu grup G. Kita akan membahas himpunan semua elemen, perpangkatan bilangan bulat dari a, yaitu $\{\ \ldots\ , a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots\ \}$., dengan adanya kemungkinan elemen-elemen berpangkat itu sama. Himpunan itu kita notasikan dengan $\langle a\rangle$. Jadi $\langle a\rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.19

Jika G adalah suatu grup dan $a \in G$, maka $\langle a\rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu subgrup dari G.

Bukti:

Membuktikan teorema ini cukup memeriksa apakah memenuhi teorema 2.17. Pertama-tama bahwa $\langle a\rangle \subset G$ sebab $a^n \in G$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

1. Elemen $a \in \langle a\rangle$ sebab $a = a^1$, $1 \in \mathbb{Z}$. Jadi $\langle a\rangle \neq \emptyset$.
2. Diambil dua elemen sebarang x dan $y \in \langle a\rangle$.

   Maka $x = a^m$, $m \in \mathbb{Z}$

   $y = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$

   sehingga $xy = a^m a^n = a^{m+n}$ dengan $m + n \in \mathbb{Z}$.

Jadi $xy \in \langle a \rangle$.

3. Diambil sebarang $x \in \langle a \rangle$. Maka $x = a^m$, $m \in \mathbb{Z}$, sehingga $x^{-1} = (a^m)^{-1} = a^{(m)(-1)} = a^{-m}$ dengan $-m \in \mathbb{Z}$.

   Jadi $x^{-1} \in \langle a \rangle$.

Dari 1, 2, dan 3 menurut teorema 2.17 $\langle a \rangle$ subgrup dari G. Subgrup $\langle a \rangle$ ini dihasilkan oleh a.□

Selanjutnya jika himpunan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G, bila ada $a \in G$ sedemikian hingga $H = \langle a \rangle$ maka H disebut subgrup siklik yang dihasilkan oleh a. Kita definisikan yang berikut:

Definisi 2.24

Subgrup H dalam grup G disebut subgrup siklik dan dihasilkan oleh a bila dan hanya bila $(\exists\ a \in G)$ sedemikian hingga $H = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema berikut ini menyelidiki apa yang terjadi bila pangkat dari suatu elemen berbeda tetapi elemennya sama.

Teorema 2.20

Jika ditentukan G grup dan $a \in G$ dan ada bilangan-bilangan bulat r dan s yang tidak sama sedemikian hingga $a^r = a^s$ maka

1) Ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$
2) Jika t adalah suatu bilangan bulat maka $a^t = e$ bila dan hanya bila n adalah faktor dari t
3) Elemen-elemen $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ adalah semuanya

berbeda

4) $\langle a \rangle = \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$

Bukti:

1) Pertama-tama prinsip bilangan bulat terkecil mengatakan bahwa setiap himpunan bilangan bulat positif yang tidak kosong memuat elemen yang terkecil.

Ditentukan $a^r = a^s$ dimana $r \neq s$ dan $r, s \in \mathbb{Z}$.

Andaikan $r>s$ maka dari satu pihak,

$(a^r)(a^{-s}) = (a^s)(a^{-s}) = a^0 = e$. Dari lain pihak,

$a^r\ a^{-s} = a^{r-s}$. Sehingga $a^{r-s} = e$. Misalkan n bilangan bulat terkecil, dengan sifat bahwa $a^n = e$.

$P = \{ n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\} \neq \emptyset$.

Menurut prinsip di atas ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$, yaitu suatu faktor dari r-s.

Untuk kejadian $r<s$, maka $s-r > 0$

Dari satu pihak $a^r a^{-r} = a^s\ a^{-r}$

$$a^0 = a^s\ a^{-r}$$

$$e = a^s\ a^{-r}.$$

Dari lain pihak $a^s\ a^{-r} = a^{s-r}$. Sehingga $a^{s-r} = e$.

Menurut prinsip di atas ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$, yaitu suatu faktor dari s-r.

Menurut algoritma pembagian, setiap bilangan bulat m dapat ditulis dengan bentuk $m = kn+l$ dengan $0 \leq l < n$.

Maka $a^m = a^{kn+l} = a^{kn}\ a^l = (a^n)^k\ a^l = e\ a^l = a^l$.

Sehingga untuk grup siklik terdiri atas n elemen berlakulah : $e = a^n = a^{2n}$ dst ... $a = a^{n+1} = a^{2n+1}$ dst.

Jadi ada bilangan bulat positif terkecil n sehingga $a^n = e$.

2) ($\Rightarrow$) Andaikan $a^t = e$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}$.

Menurut algoritma pembagian, ada $p, q \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $t = pn + q$ dengan $0 \leq q < n$. Maka

$a^t = a^{pn+q} = a^{np+q} = (a^n)^p\, a^q = e^p\, a^q = e\, a^q = a^q$.

Karena $a^t = e$ maka $a^q = e$.

Karena n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$, maka haruslah $q = 0$.

Jadi $t = pn$ ($p \in \mathbb{Z}$).

($\Leftarrow$) Andaikan $t = kn$ ($k \in \mathbb{Z}$), maka $a^t = a^{kn} = a^{nk} = (a^n)^k = e^k = e$. Jadi $a^t = e$.

3) Elemen-elemen $a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ semuanya berbeda.

Andaikan ($\exists\, u,v \in \mathbb{Z}$, $u \neq v$, $0 \leq u < n$, $0 \leq v < n$) $a^u = a^v$.

Misal $u > v$ atau $u - v > 0$. Maka $(a^u)(a^{-v}) = (a^v)(a^{-v})$ atau $a^{u-v} = a^0 = e$.

Karena n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$, maka haruslah $u - v > n$. Kontradiksi, sebab $u < n$, $v < n$ sehingga $u - v < n$.

Jadi $a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ tidak ada yang sama.

4) Himpunan $\langle a \rangle = \{ a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Akan dibuktikan bahwa $\langle a \rangle = \{ a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$.

Diambil sebarang elemen $x \in \langle a \rangle$. Maka $x = a^k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Jadi $k = pn + q$ dengan $0 \leq q < n$ sehingga

$a^k = a^{pn+q}$ atau $a^k = (a^n)^p\, a^q = e^p\, a^q = e\, a^q = a^q$.

Jadi $x = a^q$ dengan $0 \leq q < n$ yang berarti

$x \in \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Jadi

$\langle a \rangle \subseteq \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ ......(i)

Jelas bahwa $\{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a\rangle$ sebab bila $x \in \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ maka

$x \in \langle a\rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .... (ii).

Dari (i) dan (ii) maka $\langle a\rangle = \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ □

Selanjutnya teorema di bawah ini menjelaskan tentang ordo $\langle a\rangle$ itu.

Teorema 2.21

Jika a adalah suatu elemen dari suatu grup, maka ordo dari a (ditulis o(a)) sama dengan $|\langle a\rangle|$.

Bukti:

Jika G suatu grup dan $a \in G$ maka harus dibuktikan bahwa $o(a) = |\langle a\rangle|$.

Misalkan $o(a) = n$. Maka n ini adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$. Dan menurut teorema 2.20 4) $\langle a\rangle = \{a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Jadi $|\langle a\rangle| = n$. Terbukti $o(a) = |\langle a\rangle|$.□

Selanjutnya kata ordo telah digunakan pertama dalam grup yang kedua pada suatu elemen. Teorema Lagrange akan memperlihatkan relasi antara kedua bilangan bulat itu. Teorema ini akan memberikan penjelasan juga tentang himpunan-himpunan bagian suatu grup berhingga yang merupakan subgrup.

13. Teorema Lagrange

Definisi 2.25

Andaikan H adalah suatu subgrup dari grup G dan $a \in G$, himpunan $Ha = \{ ha \mid h \in H\}$ disebut suatu *koset kanan* dari

H (dalam G), dan himpunan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut suatu *koset kiri* dari H (dalam G).

Teorema 2.22

Ditentukan H adalah subgrup dari grup G. Pada G didefinisikan relasi ~ sebagai berikut, $a \sim b$ bila dan hanya bila $ab^{-1} \in H$. Maka relasi ~ tersebut adalah relasi ekuivalensi dalam G.

Bukti:

1. Diambil sebarang elemen $a \in G$. Maka $aa^{-1} = e \in H$ (H subgrup) atau $aa^{-1} \in H$.

   Jadi $a \sim a$ atau relasi ~ bersifat refleksif.
2. Andaikan $a \sim b$, maka $ab^{-1} \in H$. Karena H subgrup, maka $(ab^{-1})^{-1} \in H$ (Teorema 2.17 (c)). Padahal $(ab^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} a^{-1} = ba^{-1}$. Jadi $ba^{-1} \in H$ atau $b \sim a$.

   Dengan kata lain relasi ~ bersifat simetris.
3. Andaikan $a \sim b$ dan $b \sim c$. Maka $ab^{-1} \in H$ dan $bc^{-1} \in H$. Karena H subgrup maka $(ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$. Padahal $(ab^{-1})(bc^{-1}) = a(b^{-1}b)c^{-1} = a\,e\,c^{-1} = ac^{-1}$.

   Jadi $ac^{-1} \in H$ atau $a \sim c$. Dengan kata lain relasi ~ bersifat transitif.

Dari 1, 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa relasi ~ adalah relasi ekuivalensi dalam G. □

Maka menurut teorema 2.11 dan definisi 2.16 dalam G timbul partisi dengan klas-klas ekuivalensi $H_a = \{x \in G \mid x \sim a\}$. Sekarang akan kita buktikan bahwa klas ekuivalensi ini tidak lain daripada koset kanan dari H dalam G.

Teorema 2.23

Jika H adalah subgrup dari grup G maka untuk sebarang $a \in G$, klas ekuivalensi H_a seperti diterangkan dalam teorema 2.22 adalah sama dengan koset kanan dari H dalam G. Jadi koset-koset kanan dari H dalam G merupakan partisi dari G.

Bukti:

Kita akan membuktikan bahwa untuk sebarang $a \in G$
$H_a = \{ x \in G \mid ax^{-1} \in H \} = \{ ha \mid h \in H \} = Ha.$

Diambil sebarang $a \in G$, maka

$H_a = \{ x \in G \mid ax^{-1} \in H \}$

$= \{ x \in G \mid (ax^{-1})^{-1} \in H \}$ (karena H adalah subgrup)

$= \{ x \in G \mid xa^{-1} = h \in H \}$

$= \{ x \in G \mid xa^{-1}a = ha,\ h \in H \}$

$= \{ x \in G \mid x = ha,\ h \in H \}$

$= \{ ha \mid h \in H \} = Ha.$

Jadi koset-koset kanan dari H dalam G merupakan partisi dari G.□

Teorema 2.24

Jika H adalah suatu subgrup dari suatu grup G, dan $a, b \in G$, maka keempat pernyataan berikut ini ekuivalen

(1). $ab^{-1} \in H$

(2). $a = hb$ untuk suatu $h \in H$

(3). $a \in Hb$

(4). $Ha = Hb$

Bukti: untuk membuktikan bahwa keempat pernyataan tersebut ekuivalen cukup dibuktikan bahwa (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2)

Andaikan $ab^{-1} \in H$. Maka $ab^{-1} = h$ untuk suatu $h \in H$ sehingga $(ab^{-1})\ b = hb \Leftrightarrow a(b^{-1}b) = hb \Leftrightarrow ae = hb \Leftrightarrow a = hb$ untuk suatu elemen $h \in H$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Andaikan $a = hb$ untuk suatu $h \in H$. Maka $a \in Hb$.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Andaikan $a \in Hb$. Maka $a = h_1b$, $h_1 \in H$ yaitu $h_1^{-1}a = b$.

Diambil sebarang elemen $x \in Ha$. Maka $x = h_2a$ untuk suatu $h_2 \in H$ sehingga $x = h_2(h_1b) = (h_2h_1)b = h_3b$ dengan $h_3 = h_2h_1 \in H$. Jadi $x = h_3b$, $h_3 \in H$ yaitu $x \in Hb$.

Maka $Ha \subseteq Hb$ ....(i)

Diambil sebarang elemen $x \in Hb$. Maka $x = h_4b$ untuk suatu $h_4 \in H$ sehingga $x = h_4(h_1^{-1}a) = (h_4h_1^{-1})a = h_5\ a$ dengan $h_5 = h_4h_1^{-1}$. Jadi $x = h_5a$, $h_5 \in H$ yaitu $x \in Ha$.

Maka $Hb \subseteq Ha$ ....(ii).

Dari (i) dan (ii) maka $Ha = Hb$.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Ditentukan $Ha = Hb$. Karena H subgrup maka $e \in H$ sehingga $ea \in Ha$. Tapi karena $ea = a$ maka $a \in Ha$. Jika $Ha = Hb$, maka $a \in Hb$ sehingga $a = hb$ untuk suatu $h \in H$. Jadi $ab^{-1} = (hb)b^{-1} = h(bb^{-1}) = h\ e = h$.

Maka terbukti $ab^{-1} \in H$.□

Akibat dari teorema di atas adalah teorema 2.25

Teorema 2.25

H sendiri adalah salah satu dari koset kanan dari H atau $He = H$

Bukti:

1. Diambil sebarang elemen $x \in He$. Maka $x = he$ dengan $h \in H$. Karena $he = h$, maka $x = h$. Jadi $x \in H$ atau $He \subseteq H$ ......1)
2. Diambil sebarang elemen $h \in H$. Maka $he \in He$. Padahal $he = h$. Jadi $h \in He$ atau $H \subseteq He$ ......2)

   Dari 1) dan 2) $He = H$.□

Untuk menentukan semua koset kanan dari suatu subgrup H dalam suatu grup berhingga G, pertama-tama kita tulis H kemudian dipilih sebarang elemen $a \in G$ sedemikian hingga $a \notin H$, kemudian dihitung Ha. Langkah berikutnya, dipilih sebarang elemen $b \in G$ sedemikian hingga $b \notin (H \cup Ha)$, dan dihitung Hb. Cara ini dilanjutkan sampai semua elemen dari G terdaftar atau masuk dalam koset-koset.

Teorema 2.26

Jika H adalah suatu subgrup berhingga dari grup G, dan $a \in G$ maka $|H| = |Ha|$.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema di atas cukup dibuktikan adanya pemetaan bijektif dari $H \longrightarrow Ha$.

Didefinisikan $\alpha : H \longrightarrow Ha$ dengan $\alpha(h) = ha$, $\forall\, h \in H$. Akan dibuktikan bahwa α bijektif.

Pemetaan α "well defined", sebab bila $h_1 = h_2$, maka $h_1a = h_2a$ yaitu $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$.

Diambil sebarang elemen $h_1, h_2 \in H$ sedemikian hingga $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$. Maka $h_1a = h_2a$. Menurut teorema 2.13c, diperoleh $h_1 = h_2$. Jadi α injektif.

Diambil sebarang elemen $x \in Ha$. Maka $x = ha$ dengan $h \in H$. Karena $h \in H$, maka $\alpha(h) = ha$, sehingga $\alpha(h) = x$.

Jadi $(\forall\ x \in Ha)(\exists\ h \in H)\ \alpha(h) = x$.

Kesimpulannya, α surjektif. Maka terbukti α bijektif.

Jadi $|H| = |Ha|$ □

Teorema Lagrange.

Ordo dari setiap subgrup dalam suatu grup berhingga selalu merupakan faktor dari ordo grupnya.

Bukti:

Andaikan G grup berhingga, H subgrup dari G. Menurut teorema 2.23 koset-koset kanan dari H dalam G merupakan partisi dalam G, yaitu: $P = \{\ Ha\ |\ a \in G\}$. Karena H berhingga maka P juga berhingga, misalkan

$P = \{Ha_1, Ha_2, \ \dots\ , Ha_k\}$. Karena P adalah partisi dari G, maka $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_k$ sehingga

$$\begin{aligned} |G| &= |Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_k\ | \\ &= |Ha_1| + |Ha_2| + \dots + |Ha_k| \\ &= |H| + |H| + \dots + |H| \qquad \text{(Teorema 2.26)} \\ &= k\ |H|. \end{aligned}$$

Jadi $|G| = k\ |H|$ □

Telah terbukti bahwa ordo dari H merupakan faktor dari ordo G. Bilangan bulat k di atas disebut *indeks* dari H dalam G dan dinyatakan dengan $[G : H]$.

Akibat dari teorema Lagrange ini ialah teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.27

1. Jika G adalah grup berhingga dan $a \in G$, maka $o(a)$ merupakan faktor dari $|G|$.
2. Grup G dengan ordo prima tak mempunyai subgrup kecuali $\{e\}$ dan G sendiri.
3. Setiap grup dengan ordo bilangan prima adalah grup siklik.

Bukti:

1. Menurut teorema 2.19, himpunan $<a>$ merupakan subgrup dari G dan menurut teorema 2.21 $o(a) = |<a>|$.

   Menurut teorema Lagrange $|<a>|$ merupakan faktor dari $|G|$. Jadi $o(a)$ merupakan faktor dari $|G|$.
2. Misalkan G dengan ordo prima p atau $|G| = p$, p adalah bilangan prima. Maka p tidak punya faktor lain kecuali 1 dan p sendiri.

   Jadi G tidak punya subgrup kecuali yang berordo satu, yaitu $\{e_G\}$ dan berordo p, yaitu G sendiri.
3. Grup G disebut siklik bila dan hanya bila $(\exists\ a \in G)$ dan $G = <a>$. Jadi harus membuktikan bila G grup berordo prima, maka $G = <a>$ untuk setiap $a \in G$, $a \neq e$.

   Ordo $G = p$, p adalah bilangan prima. $a \in G$, $a \neq e$. Maka $<a> \neq \{e\}$. Jadi menurut no.2 di atas didapat $<a> = G$ □

14. Pemetaan Homomorphisma dari grup

Definisi 2.26

Andaikan $(G, *)$ dan $(H, \#)$ adalah grup. Pemetaan $\theta : G \longrightarrow H$ disebut *homomorphisma* bila dan hanya bila untuk setiap $a,b \in G$ berlaku $\theta(a*b) = \theta(a) \# \theta(b)$. Jika θ itu

bijektif maka θ disebut *isomorphisma*, dan grup $(G, *)$ dan $(H, \#)$ dikatakan *isomorphik* serta dinotasikan sebagai $(G, *) \cong (H, \#)$. Sedangkan *kernel* dari θ, dinotasikan dengan $\text{Ker}\theta$, adalah himpunan semua $g \in G$ sedemikian hingga $\theta(g)$ adalah elemen identitas dari H. Atau $\text{Ker}\theta = \{ g \in G \mid \theta(g) = e_H \}$. Dan $\theta(G)$ disebut *bayangan homomorphisma* dari G, yaitu
$\theta(G) = \{y \in H \mid (\exists\, x \in G)\ \theta(x) = y \}$.

Suatu homomorphisma mengawetkan operasi-operasi dari suatu grup. Dapat dibuktikan teorema berikut ini yang menyatakan bahwa homomorphisma itu juga mengawetkan segala hal yang didefinisikan berkaitan dengan operasi dari grup itu, misalnya elemen identitas dan invers-inversnya.

Teorema 2.28

Jika ditentukan G dan H grup dan $\theta : G \longrightarrow H$ homomorphisma. Maka

1. $\theta(e_G) = e_H$
2. $\theta(a^{-1}) = \theta(a)^{-1}$ untuk setiap $a \in G$
3. $\theta(a^k) = \theta(a)^k$ untuk setiap $a \in G$, dan setiap $k \in \mathbb{Z}$
4. $\theta(G)$ subgrup dari H
5. θ injektif $\Rightarrow G \cong \theta(G)$.

Grup-grup yang isomorphik satu dengan yang lain pasti mempunyai sifat-sifat yang sama sehingga kita dapat menyebut suatu grup dengan grup isomorphiknya dan memberikan nama kepada grup itu nama yang sama. Jika $\theta : G \longrightarrow H$ adalah suatu isomorphisma di antara grup-grup berhingga, tabel Cayley dari H sama seperti tabel G apabila setiap elemen $g \in G$ diganti oleh $\theta(g) \in H$.

Teorema 2.29

Grup-grup siklik yang berordo sama adalah isomorphik.

Bukti:

Andaikan grup G dan H siklik dihasilkan berturut-turut oleh g dan h.

1. Jika ordo G dan H tak berhingga.

   Didefinisikan $\theta : G \longrightarrow H$ dengan $\theta(g^r) = h^r$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$.

   - Diambil h^r dan h^s anggota H, untuk $r,s \in \mathbb{Z}$ dengan $r \neq s$ jika $h^r = h^s$ maka $\theta(g^r) = \theta(g^s)$ (definisi θ), sehingga $g^r = g^s$. Jadi pemetaan θ injektif. ....1)
   - Diambil $h^t \in H$, dengan $t \in \mathbb{Z}$. Maka $\exists\ g^t \in G$ sedemikian hingga $\theta(g^t) = h^t$. Jadi θ surjektif. ....2)

   Dari 1) dan 2) maka θ bijektif dari G ke H ....3)

   Menurut teorema 2.14a maka

   $\theta(g^r g^s) = \theta(g^{r+s}) = h^{r+s} = h^r h^s = \theta(g^r)\theta(g^s)$ sehingga θ adalah suatu homomorphisma ....4)

   Dari 3) dan 4) maka θ adalah isomorphisma.

2. Jika ordo G dan H berhingga dan sama, misalnya n,

   $G = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ dan $H = \{e, h, h^2, \ldots, h^{n-1}\}$

   Didefinisikan pemetaan bijektif $\theta : G \longrightarrow H$ dengan $\theta(g^r) = h^r$ untuk $r = 0, 1, \ldots, n-1$. Jika r dan s di antara 0 dan n-1, $r + s = kn + l$, dengan l di antara 0 dan n-1.

   Maka $\theta(g^r g^s) = \theta(g^{r+s}) = \theta(g^{kn+l}) = \theta((g^n)^k g^l) =$

$\theta(e^k g^l) = \theta(g^l) = h^l$ dan

$\theta(g^r)\ \theta(g^s) = h^r h^s = h^{r+s} = h^{kn+l} = (h^n)^k h^l = e^k h^l = h^l$. Jadi $\theta(g^r g^s) = \theta(g^r)\theta(g^s)$, atau θ adalah suatu homomorphisma. Karena θ didefinisikan bijektif maka θ adalah isomorphisma.□

Elemen-elemen dari grup-grup yang isomorphik saling berkorespodensi yaitu ordenya sama.

Teorema 2.30

Andaikan $\theta : G \longrightarrow H$ adalah suatu isomorphisma, dan $\theta(g) = h$, $o(g) = m$, $o(h) = n$ maka $m = n$.

Bukti:

Jika m berhingga maka $h^m = \theta(g)^m = \theta(g^m) = \theta(e) = e$ sehingga, n, juga berhingga dan $n \leq m$, karena n adalah bilangan bulat terkecil dengan sifat $h^n = e$.

Jika n berhingga, $\theta(g^n) = \theta(g)^n = h^n = e = \theta(e)$.

Karena θ bijektif, $g^n = e$, jadi m adalah berhingga dan $m \leq n$. Kesimpulannya, baik m maupun n keduanya berhingga, dan $m = n$ atau m dan n keduanya tak berhingga.□

Maka sekarang kita bahas tentang representasi dari suatu grup.

15. Representasi dari suatu grup

Definisi 2.27

Jika G,H adalah grup. Pemetaan $\theta : G \longrightarrow H$ disebut *representasi* dari G ke H bila θ adalah homomorphisma dari G ke H. Jika θ adalah suatu isomorphisma maka representasi itu *tepat* ("faithful").

Teorema 2.31

Setiap grup pastilah isomorphik dengan suatu subgrup dari M(S).

Bukti:

Andaikan G adalah grup. Untuk himpunan S dalam M(S) kita ambil G sendiri sebagai suatu himpunan. Untuk $x \in G$, kita definisikan suatu pemetaan $\rho_x : G \longrightarrow G$ dengan $\rho_x(g) = gx$, untuk semua $g \in G$ (ρ_x disebut *multiplikasi kanan* yang diakibatkan oleh elemen x). Pemetaan ρ_x ini merupakan suatu pemetaan yang bijektif. Sebab,

1. Jika $\rho_x(g) = \rho_x(h)$, maka $gx = hx$ sehingga $g = h$ (teorema 2.13c). Jadi ρ_x adalah pemetaan yang injektif.
2. Menurut teorema 2.13d, setiap elemen $y \in G$ sama dengan gx, dengan $g \in G$, sebab persamaan $gx = y$ pasti mempunyai penyelesaian tunggal dalam G. Atau jika $y \in G$, maka $\rho_x(yx^{-1}) = (yx^{-1})x = y$, sehingga ρ_x adalah pemetaan yang surjektif.

Karena terbukti bahwa ρ_x pemetaan yang bijektif maka $\rho_x \in M(G)$. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\theta : G \longrightarrow M(G)$ dengan $\theta(x) = \rho_{x^{-1}}$ (multiplikasi kanan yang diakibatkan oleh x^{-1}).

1. Pemetaan $\theta : G \longrightarrow \theta(G)$ adalah pemetaan yang surjektif. (definisi dari $\theta(G)$)
2. Untuk memperlihatkan bahwa θ adalah suatu homomorphisma, kita andaikan $x,y \in G$. Maka $\theta(xy) = \rho_{(xy)^{-1}}$ dan $\theta(x)\circ\theta(y) = \rho_{x^{-1}}\circ\rho_{y^{-1}}$. Untuk memperlihatkan bahwa kedua bijeksi ini adalah sama, andaikan $g \in G$ dan dipandang $\rho_{(xy)^{-1}}(g) = g(xy)^{-1} = gy^{-1}x^{-1} = \rho_{x^{-1}}(\rho_{y^{-1}}(g)) =$

$\rho_{x^{-1}} \circ \rho_{y^{-1}}(g)$

Jadi $\rho_{(xy)^{-1}} = \rho_{x^{-1}} \circ \rho_{y^{-1}}$ sehingga $\theta(xy) = \theta(x) \circ \theta(y)$; dengan kata lain θ adalah suatu homomorphisma.

Karena θ adalah suatu homomorphisma, $\theta(G)$ adalah suatu subgrup dari $M(G)$.

3. Untuk memperlihatkan bahwa θ adalah injektif, kita andaikan $\theta(x) = \theta(y)$. Maka $\rho_{x^{-1}} = \rho_{y^{-1}}$. Kita gunakan pemetaan-pemetaan bijektif itu untuk $x \in G$ kita dapatkan $e = xx^{-1} = xy^{-1}$, sehingga $x = y$.

Dari 1, 2 dan 3 grup G isomorphik dengan $\theta(G)$, suatu subgrup dari $M(G)$. □

Dari teorema 2.31 dapat kita simpulkan bahwa setiap grup G pasti mempunyai suatu representasi yang tepat.

16. Subgrup Normal dan Grup Faktor

Definisi 2.28

Subgrup dari suatu grup G yang koset-koset kanannya sama dengan koset-koset kirinya, disebut subgrup *normal*.

Teorema 2.32

Suatu subgrup N dari grup G adalah subgrup normal bila dan hanya bila $(\forall g \in G)(\forall n \in N)\ gng^{-1} \in N$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan $Ng = gN$ untuk setiap $g \in G$, maka jika mengambil sebarang $n \in N$, berlakulah $gn \in gN = Ng$.

Jadi $gn = n_1g$ untuk suatu $n_1 \in N$.

Di lain pihak $gn = n_1g \Leftrightarrow gng^{-1} = n_1gg^{-1} = n_1 \in N$.

Jadi $(\forall g \in G)(\forall n \in N)\ gng^{-1} \in N$.

($\Leftarrow$) Andaikan $(\forall\ g \in G)(\forall\ n \in N)\ gng^{-1} \in N$, maka jika diambil $gng^{-1} = n_1 \in N$ maka $(gng^{-1})g = n_1g \in Ng$

$$gn = n_1g \in Ng.$$

Sehingga $gN \subseteq Ng$ .... (1)

Karena G adalah grup maka $g^{-1} \in G$. Jadi berlakulah $g^{-1}n(g^{-1})^{-1} \in N$.

Di lain pihak $g^{-1}n(g^{-1})^{-1} = g^{-1}ng = n_2$ untuk suatu $n_2 \in N$.

$g(g^{-1}ng) = gn_2 \in gN$

$ng = gn_2 \in gN$

$ng \in Ng$.

Sehingga $Ng \subseteq gN$ .... (2)

Dari (1) dan (2) maka $gN = Ng$. Jadi N adalah subgrup normal.□

Selanjutnya kita definisikan subgrup Normal sebagai klas yang istimewa dari antara para subgrup suatu himpunan.

Definisi 2.29

Jika gNg^{-1} kita artikan sebagai himpunan semua gng^{-1}, $n \in N$, maka N adalah subgrup normal bila dan hanya bila $gNg^{-1} \subset N$ untuk setiap $g \in G$.

Teorema 2.33

N adalah suatu subgrup normal dalam grup G bila dan hanya bila $gNg^{-1} = N$ untuk setiap $g \in G$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Jika $gNg^{-1} = N$ untuk setiap $g \in G$, maka pasti $gNg^{-1} \subset N$, jadi menurut definisi 2.29 N adalah subgrup normal dalam G

($\Rightarrow$) Andaikan bahwa N adalah subgrup normal dalam G. Jadi jika $g \in G$ maka $gNg^{-1} \subset N$ .... 1)

di lain pihak $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subset N$.

Sekarang karena $g^{-1}Ng \subset N$ dan $N = g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}$.

Maka $N \subset gNg^{-1}$ ....2)

Dari 1) dan 2) maka $N = gNg^{-1}$ untuk setiap $g \in G$.

Jadi terbukti bahwa jika N adalah subgrup normal dalam G maka untuk setiap $g \in G$, $N = gNg^{-1}$.□

Teorema di atas bukan mau mengatakan bahwa untuk setiap $n \in N$ dan setiap $g \in G$, $gng^{-1} = n$. Yang ingin dikatakan bahwa himpunan gNg^{-1} adalah sama dengan himpunan N.

Selanjutnya kita akan membahas grup faktor, tetapi untuk membahas grup itu kita perlu membahas dulu tentang hasilkali dua subgrup.

Dalam definisi 2.25 kita telah mendefinisikan, jika H adalah suatu subgrup dari grup G dan $a \in G$, maka Ha memuat semua elemen dari G yang berbentuk ha, dengan $h \in H$. Definisi berikut ini menggeneralisir notasi Ha itu.

Definisi 2.30

Jika H, K adalah dua subgrup dari G maka

$HK = \{ x \in G | x = hk, h \in H, k \in K\}$.

Jika $H = K$ maka $HH = \{h_1h_2 | h_1,h_2 \in H\}$. Dan $HH \subset H$ karena H tertutup terhadap operasi perkalian. Tetapi $HH \supset He = H$, $e \in H$. Jadi $HH = H$.

Selanjutnya kita ambil N suatu subgrup normal dari G, dan $a,b \in G$. Bagaimana dengan $(Na)(Nb)$?. Karena N adalah normal dalam G, maka $aN = Na$, sehingga

$$NaNb = N(aN)b = N(Na)b = NNab = Nab.$$

Teorema 2.34

Jika G adalah grup dan N adalah subgrup normal dari G. Maka himpunan semua koset kanan dari subgrup normal N kita beri lambang $G/N = \{ Na | a \in G\}$ membentuk sebuah grup $(G/N,.)$ dengan operasi . didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $Na, Nb \in G/N$ $(Na).(Nb) = N(ab)$. Grup G/N ini disebut *grup faktor*.

Bukti:

Kita buktikan dulu bahwa jika $Na_1 = Na_2$ dan $Nb_1 = Nb_2$ maka $(Na_1).(Nb_1) = (Na_2).(Nb_2)$ yaitu bahwa operasi tersebut "well defined".

Jika ditentukan $Na_1 = Na_2$ dan $Nb_1 = Nb_2$. Karena N subgrup maka $e \in N$ dan $ea_1 \in Na_1$ atau $a_1 \in Na_1$. Karena $Na_1 = Na_2$, maka $a_1 \in Na_2$. Jadi $a_1 = n_1a_2$, dengan $n_1 \in N$.

Demikian pula: $b_1 \in Nb_1$. Karena $Nb_1 = Nb_2$, maka $b_1 \in Nb_2$. Jadi $b_1 = n_2b_2$, dengan $n_2 \in N$.

Sekarang $a_1b_1 = (n_1a_2)(n_2b_2)$

$= n_1(a_2n_2)b_2$

$= n_1(a_2n_2a_2^{-1}a_2)b_2$

$= n_1(a_2n_2a_2^{-1})(a_2b_2)$

$= n_1 \ n_3 \ (a_2b_2)$ dengan $n_3 = a_2n_2a_2^{-1} \in N$

(sebab N adalah subgrup normal dari G). Jika $n_4 = n_1n_3 \in N$ maka

$a_1b_1 = n_4 \ (a_2b_2)$, dengan $n_4 \in N$. Jadi $a_1b_1 \in N(a_2b_2)$ atau

$N(a_1b_1) = N(a_2b_2)$ atau $(Na_1).(Nb_1) = (Na_2).(Nb_2)$.

Operasi . itu assosiatif dapat dibuktikan demikian:

Diambil Na, Nb dan Nc anggota G/N maka

$$\begin{aligned}((Na)(Nb))(Nc) &= (N(ab))(Nc) = N((ab)c) = N(a(bc)) \\ &= (Na)(N(bc)) = (Na)((Nb)(Nc)).\end{aligned}$$

Elemen identitasnya G/N adalah Ne = N sebab: untuk setiap $Na \in G/N$ maka

$(Na)(Ne) = N(ae) = Na$ dan $(Ne)(Na) = N(ea) = Na$.

Invers dari sebarang elemen $Na \in G/N$ ialah $Na^{-1} \in G/N$, sebab $(Na)(Na^{-1}) = N(aa^{-1}) = Ne$ dan

$(Na^{-1})(Na) = N(a^{-1}a) = Ne$.

Jadi G/N adalah grup.□

Ordo dari G/N adalah banyaknya koset-koset dari N dalam G. Jadi $|(G/N)|$ = indeks N dalam G = $\frac{|G|}{|N|}$.

Teorema 2.35

Jika H adalah suatu subgrup berindeks 2 dalam G, sedemikian hingga indeks [G:H] = 2, maka H adalah suatu subgrup normal dalam G, dan G/H adalah grup siklik berordo 2.

Bukti:

Jika indeks H dalam G adalah 2, berarti hanya ada 2 buah koset kanan dari H dalam G. Yang satu adalah H sendiri yang lain dapat dinyatakan dengan Ha dengan a sebarang anggota G yang tidak berada di dalam H. Banyaknya koset kiri juga 2, yaitu H dan aH. Jadi Ha = aH. Menurut definisi 2.28 maka H adalah suatu subgrup normal dalam G.□

Teorema 2.36

Ditentukan G suatu grup, $\theta : G \longrightarrow H$ adalah homomorphisma. Maka

1. Kerθ merupakan subgrup normal dari G
2. θ injektif bila dan hanya bila Ker$\theta = \{e_G\}$.

Bukti:

1. Kita akan memperlihatkan dahulu bahwa Kerθ adalah suatu subgrup dari G.

   Andaikan a,b $\in$ Kerθ sedemikian hingga $\theta(a) = \theta(b) = e_H$. Maka $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) = e_He_H = e_H$, sehingga ab $\in$ Kerθ dan $\theta(a^{-1}) = \theta(a)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$ sehingga $a^{-1} \in$ Kerθ.

   Dari uraian di atas maka Kerθ adalah suatu subgrup dari G.

   Jika a $\in$ Kerθ dan g $\in$ G, maka

   $$\begin{aligned}\theta(g^{-1}ag) = \theta(g^{-1})\theta(a)\theta(g) &= \theta(g)^{-1}e_H\theta(g)\\ &= \theta(g)^{-1}\theta(g)\\ &= e_H.\end{aligned}$$

   Jadi $g^{-1}ag \in$ Kerθ, dan Kerθ adalah suatu subgrup normal dari G.

2. ($\Rightarrow$) Jika θ adalah injektif.

   Pemetaan θ injektif artinya $(\forall\ x,y \in G)$ $\theta(x) = \theta(y)$ maka x = y.

   Menurut teorema 2.28 $\theta(e_G) = e_H$. Jadi $e_g \in$ Kerθ.

   Andaikan ada a $\in$ G sedemikian hingga a $\in$ Ker θ dan $a \neq e_G$. Karena a $\in$ Kerθ maka $\theta(a) = e_H$.

   Karena $\theta(e_G) = e_H$, maka $\theta(a) = \theta(e_G)$. Padahal θ adalah injektif, maka $a = e_G$. Kontradiksi.

   Jadi tidak ada elemen dari G yang berada dalam Kerθ

kecuali e_G. Terbukti $Ker\theta = \{e_G\}$.

($\Leftarrow$) Jika $Ker\theta = \{e_G\}$.

Diambil sebarang elemen $a,b \in G$ sedemikian hingga $\theta(a) = \theta(b)$.Jika kedua ruas dari persamaan yang terakhir ini dikalikan dengan $\theta(b)^{-1}$ maka

$\theta(a)\theta(b)^{-1} = \theta(b)\theta(b)^{-1}$

$\theta(a)\theta(b)^{-1} = e_h$

$\theta(ab^{-1}) = e_H$.

Jadi $ab^{-1} \in Ker\theta$.

Karena $Ker\theta = \{ e_G\}$ maka $ab^{-1} = e_G$.

$ab^{-1}b = e_G\ b \Leftrightarrow a = b$.

Terbukti untuk setiap $a,b \in G$ jika $\theta(a) = \theta(b)$ maka $a = b$, atau θ injektif.□

Teorema Homomorphisma untuk Grup

Ditentukan G dan H grup dan $\theta: G \longrightarrow H$ adalah homomorphisma, K adalah $ker\theta$. Maka G/K adalah isomorphik dengan bayangan homomorphisma dari G, dan isomorphismenya $\psi : G/K \longrightarrow \theta(G)$ dengan $\psi(Kg) = \theta(g)$.

Bukti:

Fungsi ψ didefinisikan pada suatu koset dengan menggunakan satu elemen tertentu dalam koset itu, maka kita harus memeriksa apakah ψ "well defined", untuk elemen sebarang yang kita gunakan.

Jika $Kg = Kg'$, maka $g' \sim g$ bhb $g'g^{-1} \in K$, dan $g'g^{-1} = k$, dengan $k \in K$, $K = Ker\theta$. Dan $g'g^{-1} = k$ ekuivalen dengan $g'g^{-1}g = kg$ atau $g' = kg$.

Jadi $\theta(g') = \theta(kg) = \theta(k)\theta(g) = e_H\theta(g) = \theta(g)$.

Jadi ψ adalah "well defined" pada koset-koset.

Pemetaan ψ adalah suatu homomorphisma karena

$$\psi(Kg_1Kg_2) = \psi(Kg_1g_2) = \theta(g_1g_1)$$
$$= \theta(g_1)\theta(g_2) = \psi(Kg_1)\psi(Kg_2).$$

Jika $\psi(Kg) = e_H$ maka $\theta(g) = e_H$ dan $g \in K$.

Jadi satu-satunya elemen dalam Kerψ adalah elemen identitas koset K, dan ψ adalah injektif.

Akhirnya bayangan homomorphisma ψ dari $G/K = \theta(G)$ karena definisi dari pemetaan ψ yaitu $G/K \longrightarrow \theta(G)$ dengan $\psi(Kg) = \theta(g)$ dan koset-koset kanan adalah saling asing. Jadi ψ surjektif.

Jadi ψ adalah isomorphisma dari G/K ke $\theta(G)$.□

Sebaliknya, jika N adalah sebarang subgrup normal dari G, maka terdapatlah suatu homomorphisma η dari G ke G/N, dan kerη adalah N.

Jika θ adalah homomorphisma dari G ke G (dirinya sendiri) maka implikasi Teorema Homomorphisma adalah bahwa $G/\{e\} \cong G$.

17. Aksi grup pada suatu himpunan

Definisi 2.31

Aksi dari suatu grup G pada suatu himpunan X adalah suatu pemetaan $\psi : G\times X \longrightarrow X$ yang, bila $\psi(g,x) \in X$ kita tulis dengan lambang $g(x) \in X$, memenuhi syarat-syarat:

i) $g_1(g_2(x)) = (g_1g_2)(x)$, untuk setiap $g_1,g_2 \in G$, $x \in X$ dan

ii) $e(x) = x$ bila e adalah elemen identitas dari G dan $x \in X$.

Grup G tersebut di atas dikatakan beraksi pada himpunan X, dan terhadap kedua syarat di atas X adalah suatu *G-set* (X yang dikenai aksi dari G).

Teorema 2.37

Jika g adalah suatu elemen dari suatu grup G yang beraksi pada himpunan X, maka pemetaan $f_g : X \longrightarrow X$ dengan aturan $f_g(x) = g(x)$ atau $x \in X \xmapsto{f_g} \psi(g,x) \in X$ adalah bijektif. Dan bila θ adalah pemetaan dari G ke M(X) dengan aturan $\theta(g) = f_g$, maka θ adalah suatu homomorphisma.

Bukti.

1) Diambil $x, y \in X$ sedemikian hingga $f_g(x) = f_g(y)$. Maka

   $g(x) = g(y)$, sehingga $(g^{-1},g(x)) = (g^{-1},g(y))$

   $$\psi(g^{-1},g(x)) = (g^{-1},g(y))$$
   $$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(g(y))$$
   $$(g^{-1}g)(x) = (g^{-1}g)(y)$$
   $$e(x) = e(y) \text{ atau } x = y.$$

   Jadi pemetaan $f_g : X \longrightarrow X$ injektif.

2) Diambil sebarang $z \in X$, maka

   $z = e(z) = (gg^{-1})(z) = g(g^{-1}(z)) = f_g(x)$, dengan $x = g^{-1}(z) \in X$. Jadi ada $x \in X$ sedemikian hingga $f_g = z$. Pemetaan f_g surjektif.

Jadi f_g adalah bijektif. Karena f_g bijektif maka f_g adalah suatu elemen dari M(X).

Ditentukan pemetaan $\theta : G \longrightarrow M(X)$, dengan aturan $\theta(g) = f_g$ seperti didefinisikan di atas.

Jika $\theta(g_1) = f_{g_1}$ dan $\theta(g_2) = f_{g_2}$, maka

$\theta(g_1g_2)(x) = f_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x)) =$

$f_{g_1}(f_{g_2}(x)) = f_{g_1} \circ f_{g_2}(x) = \theta(g_1) \circ \theta(g_2)(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi $\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1) \circ \theta(g_2)$.

Terbukti pemetaan θ adalah suatu homomorphisma.□

Jika Kerθ = {e}, maka θ adalah injektif, dan grup G dikatakan beraksi tepat ("faithfully") pada himpunan X. G beraksi "faithfully" pada himpunan X jika elemen dari G, yang tidak mengubah setiap elemen dari X, adalah elemen identitas $e \in G$.

Sekarang jika kita ambil X adalah suatu G-set. Kita tentukan $x \in X$ dan $g \in G$. Kita perhatikan hal-hal yang tidak berubah ("fixed") bila $g(x) = x$.

Kita tentukan

$$X_g = \{x \in X \mid g(x) = x\} \text{ dan } G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Teorema berikut ini akan membuktikan bahwa para subset G_x adalah subgrup-subgrup dari G. Subset G_x itu juga disebut *Stabilisator* dari x (*stab* x).

Teorema 2.38

Jika G beraksi pada suatu himpunan X dan $x \in X$, maka Stab $x = G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ adalah suatu subgrup dari G.

Bukti.

Stab x adalah suatu subgrup karena

i) jika $g_1 g_2 \in$ Stab x, maka $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(x) = x$, sehingga $g_1 g_2 \in$ Stab x;

ii) jika $g \in$ stab x, maka $g^{-1}(x) = x$, sehingga $g^{-1} \in$ stab x .□

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa setiap G-set X dapat dipartisikan ke dalam subset-subset yang disebut klas orbit.

Teorema 2.39

X adalah suatu G-set. Untuk $x_1, x_2 \in X$, didefinisikan relasi ~ sebagai berikut, $x_1 \sim x_2$ bila dan hanya bila ada $g \in G$ sedemikian hingga $g(x_1) = x_2$. Maka relasi ~ adalah suatu relasi ekuivalensi.

Bukti:

Untuk setiap $x \in X$, kita mempunyai $e(x) = x$, maka $x \sim x$ dan relasi ~ adalah refleksif.

Andaikan ditentukan $x_1 \sim x_2$, maka $g(x_1) = x_2$ untuk beberapa $g \in G$. Maka $g^{-1}(x_2) = g^{-1}(g(x_1)) = (g^{-1}g)(x_1) = e(x_1) = x_1$, sehingga $x_2 \sim x_1$, dan relasi ~ adalah simetrik.

Akhirnya, jika $x_1 \sim x_2$ dan $x_2 \sim x_3$, maka $g_1(x_1) = x_2$ dan $g_2(x_2) = x_3$ untuk beberapa $g_1, g_2 \in G$. Sehingga $(g_2g_1)(x_1) = g_2(g_1(x_1)) = g_2(x_2) = x_3$, jadi $x_1 \sim x_3$ dan relasi ~ adalah transitif.□

Maka pada X timbul partisi dengan klas-klas ekuivalensi. Klas-klas ekuivalensi ini disebut *orbit-orbit* dari X.

Marilah sekarang kita definisikan orbit dari x.

Definisi 2.32

X adalah suatu G-set. Setiap klas ekuivalensi yang ditimbulkan oleh relasi ekuivalensi seperti telah diuraikan dalam teorema 2.39 adalah suatu *orbit* dalam X terhadap G. Jika $x \in X$, maka klas yang memuat x disebut *orbit* dari x (disingkat orb x).

Selanjutnya kita akan menggeneralisir hubungan antara orbit-orbit dalam X dan struktur grup G dalam dua teorema berikut ini.

Teorema 2.40

Jika G beraksi pada X, maka untuk setiap $x \in X$

$[G : \text{Stab } x] = |\text{Orb } x|$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema di atas cukup dibuktikan adanya pemetaan bijektif dari $G/\text{Stab } x \longrightarrow \text{Orb } x$.
Andaikan $H = \text{Stab } x$ dan didefinisikan fungsi $\zeta : G/H \longrightarrow \text{Orb } x$ dengan $\zeta(Hg) = g^{-1}(x)$. Ini adalah "well defined" pada koset kanan, karena jika $Hg = Hk$, maka $k = hg$ untuk $h \in H$, sehingga $k^{-1}(x) = (hg)^{-1}(x) = g^{-1}h^{-1}(x) = g^{-1}(x)$, karena $h^{-1} \in H = \text{Stab } x$.

Fungsi ζ adalah surjektif karena definisi dari Orb x. Juga injektif, karena $\zeta(Hg_1) = \zeta(Hg_2)$, yang mempunyai implikasi bahwa $g_1^{-1}(x) = g_2^{-1}(x)$, sehingga $g_2g_1^{-1}(x) = x$ dan $g_2g_1^{-1} \in \text{Stab } x = H$. Maka dari itu, pemetaan ζ adalah suatu bijeksi.□

Teorema 2.41

Jika suatu grup berhingga G beraksi pada suatu himpunan X, maka untuk setiap $x \in X$,

$|G| = |\text{stab } x||\text{orb } x|$.

Bukti:

Teorema ini akibat dari teorema 2.40 dan teorema Lagrange. Jika G adalah suatu grup berhingga dengan subgrup H, maka $[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$. Menurut teorema 2.40 maka

$[G:\text{Stab } x] = |\text{Orb } x|$

$\frac{|G|}{|\text{Stab } x|} = |\text{Orb } x|$

$|G| = |\text{Stab } x||\text{Orb } x|$.□

18. Direct Product

Teorema 2.42

Andaikan A dan B grup. Maka $A \times B$ adalah suatu grup terhadap operasi yang didefinisikan oleh

$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2,b_1b_2)$, untuk semua $a_1,a_2 \in A$ dan $b_1,b_2 \in B$.

Grup $A \times B$ ini disebut *"direct product"* dari A dan B.

Bukti:

Semua aksioma dari grup $A \times B$ berasal dari aksioma-aksioma yang berlaku pada grup A dan B.

Elemen identitas dari $A \times B$ adalah (e_A,e_B) dengan e_A dan e_B berturut-turut elemen identitas dari A dan B. Invers dari (a,b) adalah (a^{-1},b^{-1}). Sedang sifat asosiatifnya merupakan akibat langsung dari definisi operasinya dan sifat asosiatif dari masing-masing grup terhadap operasinya yang bersesuaian.□

Dapat dibuktikan bahwa jika A dan B adalah grup berhingga maka $|A \times B| = |A||B|$.

BAB III

PERMUTASI DAN SIMETRI

Dalam bab III ini akan dibahas grup yang anggota-anggotanya pemetaan bijektif dengan komposisi sebagai operasinya, dan simetri sebagai sifat dasar yaitu yang akan dipelajarai dalam sistem grup tersebut, lewat ciri dan elemen-elemennya. Pembahasan diawali dengan Permutasi dan Grup Permutasi, yang mempunyai peranan sentral dalam mempelajari simetri, kemudian dilanjutkan dengan simetri.

A. Permutasi

1. Grup Permutasi

Definisi 3.1

Suatu *permutasi* dari sebuah himpunan S yang tidak kosong adalah suatu pemetaan bijektif dari S ke S.

Menurut teorema 2.15, himpunan semua pemetaan bijektif dari S ke S terhadap komposisi adalah suatu grup, yang disebut grup simetrik dari S dan dinotasikan dengan M(S).

Setiap grup yang elemen-elemennya adalah permutasi-permutasi dengan komposisi sebagai suatu operasinya disebut *grup permutasi*. M(S) adalah grup permutasi penuh pada S. Jadi grup permutasi belum tentu M(S). Berikut ini akan kita bahas grup-grup permutasi dan M(S).

Jika S himpunan {1, 2, ..., n}, terdiri dari n bilangan bulat positif yang pertama maka grup M(S) kita beri simbol S_n. Sebuah elemen α dari S_n disajikan demikian:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & . & . & . & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Pemetaan α adalah pemetaan bijektif yang membawa $a \in S$ ke $\alpha(a) \in S$. Dan elemen identitas dari S_n adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \end{pmatrix}.$$

Invers dari suatu elemen diperoleh dengan membaca dari barisan bawah ke barisan atas : jika 1 terletak diatas 4 dalam pemetaan α, maka 4 akan nampak di atas 1 dalam α^{-1}.

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dalam mengkomposisikan permutasi kita mengadakan kesepakatan seperti mengkomposisikan pemetaan yaitu *baca dari kanan ke kiri*. Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sekarang kita lihat S_3: elemen-elemennya ialah

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Grup S_1 berordo 1; S_2 berordo 2 dan ordo S_3 adalah 6.

Teorema berikut ini untuk menentukan ordo S_n, bila n adalah bilangan bulat positif.

Teorema 3.1 : Ordo dari S_n adalah n!.

Bukti:

Menghitung banyaknya permutasi dari S dapat kita kerjakan sebagai berikut:

Andaikan $\alpha : S \longrightarrow S$ dan elemen-elemen dari S kita lambangkan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Maka, untuk menentukan $\alpha(x_1)$ kita mempunyai n pilihan,

untuk $\alpha(x_2)$ ada (n-1) pilihan,

dan seterusnya

untuk $\alpha(x_{j+1})$ ada (n - j) pilihan dan

untuk $\alpha(x_n)$ hanya ada 1 pilihan.

Jadi seluruhnya ada n(n-1)(n-2) ... (1) = n! pilihan □

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa S_n pada umumnya bersifat Non Abelian.

Maksud dari teorema itu ialah jika elemen S hanya 1 maka S_n hanya mempunyai 1 elemen. Jadi merupakan grup Abelian. Untuk sebarang himpunan dengan 2 elemen maka S_n terdiri dari elemen identitas

$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ dan elemen $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$. Maka grup S_2 merupakan grup Abelian sebab

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}.$$

Teorema 3.2 : Jika $n \geq 3$ maka S_n Non Abelian

Bukti:

Akan dibuktikan dengan contoh sebagai berikut:

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Andaikan α dan $\beta \in S_n$ dengan

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . \\ 1 & 3 & 2 & . & . & . \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . \\ 3 & 2 & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$, bilangan sesudah 3 dipetakan ke dirinya sendiri, maka

$$\beta\circ\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ 3 & 1 & 2 & . & . & . & n \end{pmatrix} \text{ sedangkan}$$

$$\alpha\circ\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ 2 & 3 & 1 & . & . & . & n \end{pmatrix}.$$

Jadi $\beta\circ\alpha \neq \alpha\circ\beta$, sehingga S_n Non Abelian.□

Anggota-anggota S_n seringkali ditulis dengan notasi lain yaitu notasi *sikel*.

2. Sikel

Definisi 3.2

Andaikan ditentukan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Suatu elemen $\alpha \in S_n$ dikatakan suatu *sikel dengan panjang r* (ditulis sikel-r) bila ada elemen-elemen dari S yang berbeda yaitu $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(r \geq 1)$ sedemikian, hingga $\alpha(a_1) = a_2$, $\alpha(a_2) = a_3$, ... , $\alpha(a_{r-1}) = a_r$, $\alpha(a_r) = a_1$ dan $\alpha(x) = x$ untuk setiap elemen $x \in S$ selain $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Sikel α ini dinyatakan dengan $(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$.

Permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n & 1 \end{pmatrix}$ yaitu dengan $1 \longmapsto 2$, $2 \longmapsto 3$, $3 \longmapsto 4$, . . . $n \longmapsto 1$ ditulis $(1\ 2\ 3\ .\ .\ .\ .\ n)$.

Sikel $(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$ menyatakan suatu permutasi dalam S_n dengan $a_1 \longmapsto a_2$, $a_2 \longmapsto a_3$, ..., $a_{r-1} \longmapsto a_r$, $a_r \longmapsto a_1$ dan untuk setiap x yang lain anggota S, $x \longmapsto x$.

Andaikan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Bilangan n dapat tidak tampak dalam notasi sikel. Misalnya

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ adalah suatu sikel-4 dalam S_4.

Sedangkan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ adalah suatu sikel-4 dari S_6 dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (2\ \ 5\ \ 4)$, adalah suatu sikel-3 dalam S_6.

Jika a sebarang elemen dari S, maka sikel (a) adalah permutasi identitas dari S. Dalam tulisan ini sikel identitas sering ditulis dengan (1). Sikel dikomposisikan seperti permutasi (kecuali simbol $\circ$ seringkali dihilangkan). Kita akan membicarakan komposisi dari sikel-sikel atau dari permutasi-permutasi lainnya seperti suatu *perkalian*.

$$(1\ 2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(1) = (2) = (3) = (1)(2)(3)$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 4) = (1\ 2\ 4\ 3)$$

Teorema 3.3

Suatu sikel-r dalam S_n mempunyai ordo r.

Bukti:

Jika $\alpha = (a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$ adalah suatu sikel-r dalam S_n, maka $\alpha(a_1) = a_2$, $\alpha^2(a_1) = a_3$ kalau $r \geq 3$, karena $\alpha^2(a_1) = \alpha(\alpha(a_1)) = \alpha(a_2) = a_3$. Secara sama oleh karena α^3, a_1 dipetakan ke a_4 (jika $r \geq 4$). Jadi $\alpha^3(a_1) = a_4$, dan seterusnya. Selanjutnya $\alpha^r(a_1) = a_1$. Karena kita juga menulis $\alpha = (a_2\ a_3\ .\ .\ .\ a_r\ a_1)$, dengan cara yang sama seperti di atas maka $\alpha^r(a_2) = a_2$, dan umumnya untuk $i = 1, 2, \ldots, r$ maka $\alpha^r(a_i) = a_i$. Akibatnya bahwa $\alpha^r = e$, yaitu permutasi identitas dengan r adalah pangkat terkecil dari α yang sama dengan e.□

Permutasi-permutasi berhingga yang bukan sikel dapat dinyatakan dalam dua atau lebih sikel-sikel yang saling asing sebagai berikut. Jika α adalah suatu permutasi dalam S_n dan $a \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, *orbit* atau putaran a oleh α adalah himpunan yang terdiri dari elemen-elemen yang berbeda a, $\alpha(a)$, $\alpha^2(a)$, $\alpha^3(a)$, ..., $\alpha^r(a)$ sedemikian hingga $\alpha^{r+1} = a$.

Contoh $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$. Di sini $\alpha(1) = 3$, $\alpha^2(1) = 8$, $\alpha^3(1) = 4$ dan $\alpha^4(1) = 1$. Jadi orbit dari 1 adalah {1, 3, 8, 4}. Himpunan {1, 3, 8, 4} juga merupakan orbit dari 3, 4 dan 8. Sebab

$\alpha(3) = 8$, $\alpha^2(3) = 4$, $\alpha^3(3) = 1$ dan $\alpha^4(3) = 3$

$\alpha(4) = 1$, $\alpha^2(4) = 3$, $\alpha^3(4) = 8$, dan $\alpha^4(4) = 4$

$\alpha(8) = 4$, $\alpha^2(8) = 1$, $\alpha^3(8) = 3$ dan $\alpha^4(8) = 8$.

Karena α membawa 2 dan 5 masing-masing ke pada dirinya sendiri maka orbit mereka berurut-turut adalah {2} dan {5}. Orbit dari 6 dan 7 adalah {6, 7}.

Jadi α dapat ditulis sebagai (1 3 8 4)(2)(5)(6 7). Karena tidak ada bilangan yang sama berada dalam 2 sikel yang berbeda maka sikel-sikel itu dikatakan saling asing.

Jadi dua buah sikel $(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$ dan $(b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_s)$ dari S_n disebut saling asing jika himpunan $\{a_1, a_2, \ldots,$

$a_r\}$ dan $\{b_1, b_2, \ldots b_s\}$ tidak mempunyai elemen berserikat. Sikel-sikel yang saling asing mempunyai peranan khusus dalam pembahasan permutasi atau grup simetri.

Dari uraian di atas sebarang permutasi α pada suatu himpunan S menyebabkan suatu relasi ekuivalensi, $\sim$, pada S yang didefinisikan sebagai berikut, $a \sim b$ bila dan hanya bila ada $r \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $b = \alpha^r(a)$. Klas-klas ekuivalensi yang ditimbulkan oleh relasi $\sim$ disebut *orbit-orbit* yang dihasilkan oleh α. Dan pada penguraian permutasi α ke dalam sikel-sikel yang saling asing, elemen-elemen dalam setiap sikel merupakan satu orbit. Sedangkan grup yang beraksi pada himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah subgrup yang dibangkitkan oleh α.

Jadi menurut definisi 2.32 orbit-orbit dalam himpunan $S = \{1, 2, \ldots, 8\}$ seperti pada contoh di atas yaitu: $\{1, 3, 4, 8\}$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{6, 7\}$ diakibatkan oleh grup yang beraksi pada S, yaitu $G = \{\iota, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ dengan $\alpha = (1\ 3\ 8\ 4)(2)(5)(6\ 7)$. Tabel 3.1 menyatakan aksi G pada S yang menyebabkan orbit-orbit itu.

Tabel 3.1: Tabel aksi grup G pada S yang menyebabkan orbit $\{1, 3, 4, 8\}$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{6, 7\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
ι	1	2	3	4	5	6	7	8
α	3	2	8	1	5	7	6	4
α^2	8	2	4	3	5	6	7	1
α^3	4	2	1	8	5	7	6	3

Teorema 3.4

Setiap permutasi dapat ditulis sebagai suatu komposisi dari sikel-sikel yang saling asing.

Bukti:

Diambil sebarang permutasi α selain permutasi identitas, karena permutasi identitas adalah sikel yang panjangnya satu.

Diambil sebarang simbol a_1 sedemikian sehingga $\alpha(a_1) \neq a_1$, dan andaikan bahwa $\alpha(a_1) = a_2$, $\alpha(a_2) = a_3$, $\alpha(a_3) = a_4$ dan seterusnya sehingga sampai pada $\alpha(a_r)$ sama dengan satu dari antara $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ yang telah digunakan. Pasti kita akan memilih a_1 sehingga $\alpha(a_r) = a_1$ sebab andaikata a_r dibawa ke salah satu di antara a_2, a_3, ... maka hal ini akan bertentangan dengan pengertian permutasi α sebagai pemetaan bijektif (one-one). Maka dari itu α berkedudukan seperti sikel $(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$. Ada kemungkinan α memindahkan simbol-simbol yang lain ke dirinya sendiri, jadi tak berubah. Andaikata ada simbol b_1 yang tidak sama dengan sebarang a_i dan karena $\alpha(b_1) \neq b_1$ maka proses seperti di atas diulang lagi dan berlakulah suatu sikel $(b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_s)$. Jika semua simbol yang karena α tidak memetakan ke dirinya sendiri sudah digunakan maka

$\alpha = (a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)(b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_s)$.

Jika ada simbol lain c_1 sedemikian hingga $\alpha(c_1) \neq c_1$, secara sama akan kita peroleh sikel yang lain. Proses itu dapat dilanjutkan sampai semua simbol yang dipetakan oleh α sudah digunakan dan tampil dalam sikel-sikel.□

Contoh :

Andaikan bahwa $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, diambil sebarang simbol yang tidak dipetakan ke dirinya sendiri, misalnya simbol 1. Kita lihat $\alpha(1) = 3$, $\alpha(3) = 4$. $\alpha(4) = 2$ dan $\alpha(2) = 1$. Selanjutnya diambil sebarang simbol yang belum dipakai dan tidak memetakan ke dirinya sendiri, misalnya 5. Maka $\alpha(5) = 6$ dan $\alpha(6) = 5$. Sekarang semua simbol telah digunakan, jadi $\alpha = (1\ 3\ 4\ 2)(5\ 6)$.

Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa dua buah sikel dari S_n yang saling asing terhadap komposisi bersifat komutatif.

Teorema 3.5

Jika α dan β adalah sikel-sikel yang menyatakan elemen dari S_n saling asing dengan $\alpha = (a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r)$, dan $\beta = (b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_s)$, dengan $a_i \neq b_j$ untuk setiap i dan j maka $\alpha\circ\beta = \beta\circ\alpha$.

Definisi 3.3

Suatu sikel dengan panjang dua disebut transposisi

Sebuah transposisi (ij) dapat ditulis dengan cara lain (ji) yaitu hanya menukar simbol-simbolnya saja. Kita perhatikan bahwa (ij)(ij) = e. Jadi suatu transposisi adalah invers dari dirinya sendiri. Kita dapat langsung menghitung bahwa sikel yang panjangnya lebih dari dua dapat dinyatakan sebagai suatu komposisi dari transposisi-transposisi (tidak perlu saling asing).

$(a_1a_2 \ \ldots \ a_k) = (a_{k-1}a_k)(a_{k-2}a_k) \ \ldots \ (a_2a_k)(a_1a_k)$ atau $(a_1a_2 \ldots a_k) = (a_1a_k)(a_1a_{k-1}) \ldots (a_1a_3)(a_1a_2)$.

Contoh: (1 2 3 4) = (3 4)(2 4)(1 4)

= (1 4)(1 3)(1 2), tetapi

(1 2 3 4) = (1 4)(1 2)(3 2)

= (1 4)(3 4)(1 2)(4 2)(3 4).

(1 2 3)(4 5) = (1 3)(1 2)(4 5)

(1 2 3)(4 5) = (4 5)(2 3)(1 3).

(1 2 3)(4 5) = (3 4)(3 5)(2 4)(1 4)(3 4).

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa ada lebih dari satu cara untuk menyatakan suatu permutasi sebagai suatu komposisi transposisi-transposisi.

Berikut ini diberikan contoh suatu grup permutasi, grup G_T dan $G_{(T)}$.

3. Contoh grup permutasi, G_T dan $G_{(T)}$

Contoh 3.1

Ditentukan $G = S_3$ dan $H = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Maka H adalah subgrup dari S_3. Tabel 3.2 adalah tabel Cayley untuk subgrup ini.

Tabel 3.2: Tabel Cayley subgrup {(1), (1 2 3), (1 3 2)} dari S_3

∘	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)

Kita perhatikan: pertama-tama H tidak kosong. Sifat ketertutupan dipenuhi sebab elemen-elemen yang muncul dalam setiap baris atau kolom adalah (1), (1 2 3) dan (1 3 2). Syarat c dalam teorema 2.17 juga dipenuhi sebab $(1)^{-1}$ = (1), $(1\ 2\ 3)^{-1}$ = (1 3 2), $(1\ 3\ 2)^{-1}$ = (1 2 3) dan semuanya berada dalam himpunan {(1), (1 2 3), (1 3 2)}.

Contoh 3.2

Himpunan S = {1, 2, 3, 4}, G = Sym(S) = S_4 yang memuat 24 elemen, dan T = {1, 2}, maka

1. G_T = {(1), (3 4)}.
2. $G_{(T)}$ = {(1), (3 4), (1 2), (1 2)(3 4)}

G_T dan $G_{(T)}$ kedua-duanya merupakan subgrup dari G. Dan untuk semua G dan T berlaku $G_T \subset G_{(T)}$. Tabel 3.3 dan 3.4 berturut-turut adalah daftar Cayley subgrup G_T dan $G_{(T)}$ itu.

Tabel 3.3: Tabel Cayley subgrup G_T untuk T = {1, 2} dan S = {1, 2, 3, 4}

∘	(1)	(3 4)
(1)	(1)	(3 4)
(3 4)	(3 4)	(1)

Tabel 3.4: Tabel Cayley subgrup $G_{(T)}$ untuk T = {1, 2} dan S = {1, 2, 3, 4}

∘	(1)	(3 4)	(1 2)	(1 2)(3 4)
(1)	(1)	(3 4)	(1 2)	(1 2)(3 4)
(3 4)	(3 4)	(1)	(1 2)(3 4)	(1 2)
(1 2)	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1)	(3 4)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(1 2)	(3 4)	(1)

4. Grup Alternating

Suatu subgrup dari S_n yang dapat dibangun sebagai grup simetri adalah grup "alternating". Untuk mendefinisikan grup "alternating" beserta contohnya kita perlu memahami dulu permutasi genap, kemudian hasil kali permutasi-permutasi genap atau ganjil.

Definisi 3.4

Suatu permutasi anggota S_n disebut suatu permutasi *genap* bila permutasi itu dapat dinyatakan sebagai suatu hasil kali transposisi-transposisi yang banyaknya genap.

Setiap permutasi dapat ditulis sebagai suatu hasil kali beberapa sikel-2 (tidak perlu saling asing), secara khusus bila kita tentukan

$(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_n) = (a_1\ a_2)\circ(a_2\ a_3)\circ\ ...\ \circ(a_{n-1}\ a_n)$ maka banyaknya para sikel-2 adalah n-1. Maka suatu permutasi adalah genap bila permutasi itu dapat ditulis sebagai hasil kali transposisi-transposisi seperti cara di atas yang banyaknya genap, dan permutasi adalah ganjil bila sebaliknya. Maka dapat dirumuskan teorema berikut ini.

Teorema 3.6

Suatu sikel-n adalah suatu permutasi genap bila n adaah ganjil dan permutasi ganjil bila n adalah genap.

Selanjutnya kita catat tentang genap atau ganjilnya hasil kali permutasi sebagai berikut.

Teorema 3.7

1. Hasil kali dua permutasi genap adalah suatu permutasi genap
2. Hasil kali suatu permutasi genap dan suatu permutasi ganjil adalah suatu permutasi ganjil
3. Hasil kali dua permutasi ganjil adalah suatu permutasi genap.

Bukti teorema ini dapat diperoleh dari buku referensi 4 terdaftar dalam daftar pustaka. Dapat kami tambahkan bahwa rumus mengkombinasikan genap dan ganjilnya para permutasi dalam teorema di atas seperti mengkombinasikan genap dan ganjilnya bilangan terhadap operasi penjumlahan.

Definisi 3.5

Himpunan permutasi genap dari n elemen yang dinotasikan dengan A_n adalah suatu subgrup dari S_n. Subgrup ini disebut grup *"alternating" pada n elemen.*

Contoh: $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$A_4 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4), (2\ 3\ 4),$
$(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 4\ 3),$
$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\},$

suatu grup berordo 12.

Teorema 3.8

Setiap permutasi genap dapat ditulis sebagai suatu hasil kali sikel-3 (tidak perlu saling asing).

Bukti.

Suatu permutasi genap dapat dinyatakan sebagai suatu hasil kali para transposisi yang banyaknya genap. Diambil hasil kali dua transposisi. Jika kedua transposisi itu sama maka hasil kalinya adalah permutasi identitas. Jika kedua transposisi itu mempunyai elemen berserikat, misalnya (a b) dan (b c), hasil kalinya adalah (a b)∘(b c) = (a b c), suatu sikel-3. Jika kedua transposisi tidak mempunyai elemen berserikat, misalnya (a b) dan (c d) kita dapat menulis hasil kalinya sebagai
(a b)∘(c d) = (a b)∘(b c)∘(b c)∘(c d) = (a b c)∘(b c d), suatu hasil kali 2 sikel-3.
Jadi sebarang permutasi genap dapat ditulis sebagai hasil kali sikel-3.□

Teorema 3.9

A_n adalah suatu subgrup normal dari S_n dan $|A_n|=n!/2$.

Bukti.

Dipandang A_n subset dari S_n, A_n memuat semua permutasi genap. Karena hasil kali 2 permutasi genap adalah genap, A_n pasti suatu subgrup dari S_n. Dan A_n adalah subgrup normal dalam S_n. Untuk memperlihatkan hal ini kita ambil langkah sebagai berikut.

Kita ambil W grup bilangan real 1 dan -1 terhadap perkalian. Didefinisikan θ: $S_n \longrightarrow W$ dengan $\theta(\alpha) = 1$ jika α adalah suatu permutasi genap, $\theta(\alpha) = -1$ jika α suatu permutasi ganjil. Menurut teorema 3.7, θ adalah suatu homomorphisma kepada W. Dan Kerθ nya adalah A_n, dan Kerθ

ini adalah suatu subgrup normal dari S_n.

Sehingga $S_n/A_n \cong W$. Ordo dari W atau $|W| = 2$. Jadi

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = n!/2.\square$$

5. **Grup Simetrik X beraksi pada X**

Andaikan X adalah sebarang himpunan yang tidak kosong, grup simetrik X atau grup semua permutasi dari X, yang dilambangkan dengan M(X), adalah suatu grup yang beraksi pada X oleh pemetaan ψ dengan aturan $\psi(\sigma,x) = \sigma(x)$, untuk semua $\sigma \in M(X)$, $x \in X$. Khususnya jika $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ maka X adalah suatu S_n-set.

B. Simetri

Dalam Geometri, transformasi adalah suatu pemetaan bijektif antara semua titik dalam bidang : $P \longmapsto P'$, yaitu suatu aturan untuk mengadakan pasangan titik-titik dengan catatan bahwa:

1 setiap pasangan mempunyai anggota pertama P dan anggota kedua P'

2 setiap titik hanya satu kali menjadi anggota pertama dan satu kali menjadi anggota kedua dari satu pasangan (P,P').

Telah diuraikan dalam Teorema 2.10 bahwa pemetaan bijektif itu invertibel. Karena transformasi adalah pemetaan bijektif dalam bidang kepada himpunan yang sama maka kalau transformasi itu dinotasikan dengan T, T ini mempunyai invers dan inversnya berupa transformasi juga. I disebut tranformasi identitas bila I(P) = P untuk setiap titik dalam bidang.

Selanjutnya, dalam membahas transformasi perlu dipelajari segala sesuatu yang bertahan (tidak berubah = invarian/tetap) terhadap transformasi tersebut.

Jika kedua anggota suatu pasangan (P,P′) berimpit, yaitu P = P′, maka P disebut titik invarian (titik tetap) dari transformasi itu dan suatu garis yang bertahan terhadap transformasi T dinamakan garis tetap (garis bertahan terhadap T), sebaliknya T sendiri dinamakan mempertahankan titik atau garis tadi.

1. Isometri

Definisi 3.6

Suatu transformasi yang tidak mengubah jarak disebut *isometri* atau *transformasi kongruensi*. Jika (P,P′) dan (Q,Q′) adalah dua pasang titik yang berkorespondensi, maka PQ = P′Q′.

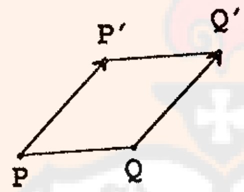
Dalam kaitannya dengan permutasi dapat dijelaskan demikian: ditentukan himpunan semua titik pada suatu bidang dan M adalah himpunan semua permutasi dari bidang itu ke dirinya sendiri sehingga mengawetkan jarak antara titik-titiknya, jadi jika P dan Q adalah titik-titik pada bidang itu dan α adalah di dalam M maka jarak antara $\alpha(P)$ dan $\alpha(Q)$ sama dengan jarak antara P dan Q. Permutasi dalam M itu disebut isometri dalam bidang.

Isometri dalam bidang yaitu translasi, transformasi identitas, rotasi dan refleksi (percerminan). Sebelum kita membuktikan bahwa M terhadap komposisi membentuk suatu grup, kita definisikan masing-masing isometri itu.

Definisi 3.7

Suatu *translasi* dalam suatu bidang adalah suatu pemetaan yang membawa semua titik-titiknya dengan jarak yang sama dan dalam arah yang sama. Contoh, translasi membawa P ke P' dalam Gambar 3.1 akan membawa Q ke Q'

Jika T adalah translasi itu dengan arah PP' maka $T : P \longmapsto P'$, $T : Q \longmapsto Q'$. Dan $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$.



Gambar 3.1 : Ilustrasi dari translasi

Suatu translasi juga dapat dikatakan sebagai suatu isometri yang tidak mempunyai titik invarian; setiap titik berpasangan dengan titik lain.

Definisi 3.8

Suatu isometri yang setiap titiknya berpasangan dengan titik itu sendiri disebut *transformasi Identitas*. (*isometri identitas*), isometri ini dinotasikan dengan I. Semua titik dalam isometri identitas adalah titik invarian, jadi $I : P \longmapsto P$.

Jika beberapa isometri dikerjakan berturut-turut kita dapatkan hasilkali ("product") isometri-isometri itu. Jika hasilkali dua isometri sama dengan identitas, maka isometri yang satu adalah *invers* dari yang lain.

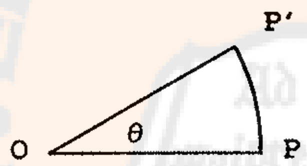
Definisi 3.9

Jika O suatu titik tertentu dan θ suatu sudut dengan ukuran tertentu, maka *rotasi* $R : P \longmapsto P'$ dengan definisi

i jika $P = O$, maka $P = P'$, yaitu $R : O \longmapsto O$

ii jika $P \neq O$, maka $OP = OP'$ dan $\angle POP' = \theta$ dengan arah berlawanan dengan arah perputaran jarum jam.

O ialah titik invarian. Suatu rotasi ialah suatu isometri dengan satu titik invarian O.



Gambar 3.2 : Ilustrasi dari Rotasi

Suatu rotasi dengan titik pusat O dan sudut rotasi θ dinyatakan dengan $R(O,\theta)$. Jika $\theta = 0^0$ atau $\theta = k\ 360^0$, maka $R(O.0^0) = I$ atau $R(O,k\ 360) = I$ dengan k suatu bilangan bulat. Jika $\theta = 180^0$, maka $R(O,180^0)$ disebut setengah putaran dan biasa disingkat dengan H ("half turn") atau $R_{1/2}$. $H = R(O,180^0) = R(O,-180^0) = R_{1/2}$.

Definisi 3.10

Suatu *refleksi* (*percerminan*) dengan cermin c dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_c : P \longmapsto P'$$

dengan definisi c ialah sumbu PP', yaitu $c \perp PP'$ dan c melalui titik tengah PP'. Suatu refleksi adalah suatu isometri yang titik-titik invariannya adalah titik-titik suatu garis lurus yang tidak lain adalah cermin itu.

Teorema 3.10

Himpunan M dari semua isometri dari suatu bidang V membentuk suatu subgrup dalam grup M(V).

Bukti. $V = \{P \mid P = \text{titik pada bidang datar}\}$ atau

$$V = R \times R = \{(x,y) \mid x \in R\ ,\ y \in R\}.$$

$M(V) = \{\alpha : V \longrightarrow V \mid \alpha \text{ pemetaan bijektif}\}$, menurut teorema 2.15 M(V) terhadap komposisi membentuk suatu grup. Himpunan M adalah himpunan bagian dari M(V) dengan $M = \{\alpha \in M(V) \mid d(P,Q) = d(\alpha(P),\alpha(Q)),\ \text{untuk } \forall\ P,Q \in V\}$ dan d(P,Q) adalah jarak antara dua titik P dan Q $\in$ V. Harus dibuktikan bahwa M adalah suatu subgrup dari M(V). Menggunakan teorema 2.17

a. Elemen identitas dari grup M(V) ialah $\iota : V \longrightarrow V$ dengan $\iota(X) = X$ untuk setiap $X \in V$. Maka untuk setiap $P,Q \in V$, $d(\iota(P),\iota(Q)) = d(P,Q)$. Jadi $\iota \in M$.
   Maka $M \neq \emptyset$.

b. Diambil sebarang dua elemen $\alpha,\ \beta \in M$, maka
   $d(\alpha(P),\alpha(Q)) = d(P,Q)$ untuk setiap $P,Q \in V$
   $d(\beta(P),\beta(Q)) = d(P,Q)$ untuk setiap $P,Q \in V$. Jadi untuk setiap $P,Q \in V$ berlaku

$$\begin{aligned} d((\alpha\circ\beta)(P),\ (\alpha\circ\beta)(Q)) &= d(\alpha(\beta(P)),\alpha(\beta(Q))) \\ &= d(\beta(P),\beta(Q)) \\ &= d(P,Q). \text{ Jadi } (\alpha\circ\beta) \in M. \end{aligned}$$

c. Diambil sebarang elemen α di dalam M.

Maka $d(\alpha(P),\alpha(Q)) = d(P,Q)$ untuk setiap $P,\ Q \in V$.

$$d(\alpha^{-1}(P),\alpha^{-1}(Q)) = d(\alpha(\alpha^{-1}(P)),\alpha(\alpha^{-1}(Q)))$$
$$= d((\alpha\circ\alpha^{-1})(P),(\alpha\circ\alpha^{-1})(Q))$$
$$= d(\iota(P),\iota(Q))$$
$$= d(P,Q).$$ Jadi $\alpha^{-1} \in M$.

Kesimpulan M adalah subgrup dari M(V).□

Teorema 3.10 menjamin bahwa M, himpunan semua isometri dari suatu bidang V membentuk suatu grup, maka marilah kita lihat komposisi dari setiap isometri: Komposisi dua translasi adalah suatu translasi dan dapat kita tunjukkan bahwa himpunan translasi membentuk grup Abelian.

Komposisi dua refleksi dapat kita bagi menurut relasi kedua cerminnya, yaitu

1. Bila kedua cermin berimpit maka $M_c{}^2 = I$ atau $M_c = M_c{}^{-1}$
2. Bila kedua cermin sejajar maka komposisi kedua refleksi itu adalah suatu translasi dengan vektor translasi yang besarnya dua kali jarak kedua cermin itu atau
   $M_{c_2}M_{c_1} = T_{2\underline{d}}$ dan $M_{c_1}M_{c_2} = T_{2\underline{d}}{}^{-1}$,
3. Jika kedua cermin berpotongan maka komposisi kedua refleksi pada dua garis cermin berpotongan adalah suatu rotasi dengan sudut rotasi dua kali sudut antara kedua cermin itu. Jika $M_{c_2}M_{c_1} = R_{(P,2\alpha)}$, maka
   $M_{c_1}M_{c_2} = R_{(P,-2\alpha)}$.

Komposisi dua rotasi yang sepusat adalah suatu rotasi dengan pusat yang sama dan sudut rotasi jumlah kedua sudut rotasinya. Himpunan rotasi yang sepusat ini merupakan model grup komutatif (grup Abelian). Sedangkan komposisi dua rotasi yang tidak sepusat belum tentu merupakan suatu rotasi maka himpunan para rotasi bukan grup.

Komposisi 2 isometri yang berlainan ada yang tidak termasuk dalam keempat isometri yang telah didefinisikan di atas maka untuk membentuk grup sesuai dengan teorema 3.10 perlu ada isometri yang ke lima yaitu refleksi geser.

Definisi 3.11

Suatu *refleksi geser* (dinotasikan dengan G) adalah komposisi dari suatu refleksi dan translasi sejajar cermin.

Pada refleksi geser tidak ada titik invarian karena memuat translasi. Selanjutnya kita lihat isometri langsung dan isometri lawan.

Definisi 3.12

1. Suatu transformasi T dikatakan mengawetkan suatu arah apabila untuk setiap tiga titik tak segaris (P_1,P_2,P_3) arahnya sama dengan arah peta-petanya (P_1',P_2',P_3') dengan $P_1' = T(P_1)$, $P_2' = T(P_2)$, $P_3' = T(P_3)$.
2. Suatu transformasi T dikatakan membalik suatu arah apabila setiap tiga titik yang tak segaris (P_1,P_2,P_3) arahnya tidak sama dengan arah peta-petanya (P_1',P_2',P_3') dengan $P_1' = T(P_1)$, $P_2' = T(P_2)$, $P_3' = T(P_3)$.

Definisi 3.13

Suatu isometri dikatakan *langsung* apabila isometri itu mengawetkan arah; suatu isometri dikatakan isometri *lawan* apabila isometri itu mengubah arah.

Suatu translasi, rotasi dan komposisi dari keduanya tidak mengubah arah maka disebut isometri langsung. Sedangkan suatu refleksi itu mengubah arah, maka komposisi dua refleksi tidak mengubah arah. Dapat ditunjukkan bahwa komposisi refleksi terhadap cermin yang banyaknya ganjil, akan mengubah arah, sedangkan terhadap cermin yang banyaknya genap tidak mengubah arah. Refleksi geser mengubah arah karena memuat satu refleksi atau komposisi tiga refleksi (refleksi ganjil). Marilah kita kumpulkan komposisi dua isometri dari kelima isometri yang sudah kita kenal.

Jika I adalah isometri identitas; T isometri translasi; $\mathfrak{R}$ isometri rotasi; M isometri refleksi; G isometri refleksi geser maka

komposisi TT adalah T

komposisi T$\mathfrak{R}$ atau $\mathfrak{R}$T adalah $\mathfrak{R}$

komposisi TM atau MT adalah G atau M

komposisi TG atau GT adalah G atau M

komposisi $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ adalah $\mathfrak{R}$ atau T

komposisi $\mathfrak{R}$M atau M$\mathfrak{R}$ adalah G atau M

komposisi MM adalah $\mathfrak{R}$ atau T

komposisi $\mathfrak{R}$G atau G$\mathfrak{R}$ adalah G atau M

komposisi MG atau GM adalah $\mathfrak{R}$ atau T komposisi GG adalah $\mathfrak{R}$ atau T.

Sesudah membahas transformasi dan grup isometri marilah kita sekarang membahas operasi simetri dan grup simetri.

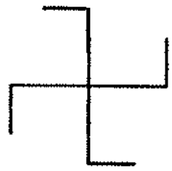
Definisi 3.14

Apabila kita mengatakan, bahwa suatu bangun itu simetrik maka padanya dapat dikerjakan isometri tertentu yang disebut operasi simetri. Oleh operasi simetri suatu bangun ditransformasikan ke dirinya sendiri sedemikian, hingga bangun itu tidak berubah dan hanya terjadi permutasi dari elemen-elemennya.

Misalnya, huruf A dan E serta segitiga samakaki. Mereka itu masing-masing mempunyai satu garis simetri. Garis g dinamakan garis simetri dari huruf A atau E atau segitiga samakaki B apabila berlaku $M_g(A) = A$, $M_g(E) = E$ dan $M_g(B) = B$. Oleh refleksi terhadap g huruf A ditransformasikan ke dirinya sendiri. Maka dikatakan huruf A mempunyai simetri bilateral. Demikian pula huruf E atau segitiga samakaki B.

Huruf N mempunyai satu titik simetri. Titik O dinamakan titik simetri untuk himpunan S apabila $R(O,\theta)(S) = S$. Oleh rotasi $R(O,180^0)$ atau $H(O)$ huruf N ditransformasikan ke dirinya sendiri, maka dikatakan huruf N mempunyai simetri putar.

Bangun swastika seperti gambar 3.3 mempunyai simetri putar.



Gambar 3.3 : Bangun Swastika

Operasi simetri bangun swastika adalah $R(O,90^0)$, dapat pula $R(O,180^0)$, $R(O,270^0)$ dan transformasi identitas. Jika $R(O,90^0)$ kita singkat dengan R, maka himpunan operasi simetri itu ialah $\{R, R^2, R^3, I\}$, dengan $R^4 = I$.

Sekarang kita ambil sebarang himpunan bagian T dari V, yaitu himpunan semua titik pada suatu bidang dan seperti pada $G_{(T)}$ kita bentuk $M_{(T)}$ yaitu himpunan $\alpha \in M$ dengan syarat $\alpha(T) = T$ atau

$M_{(T)} = \{\alpha \in M \mid \alpha(T) = T\}$. Menurut teorema 2.18 $M_{(T)}$ ini adalah suatu subgrup dari M. Selanjutnya kita definisikan Grup operasi simetri.

2. Definisi grup simetri

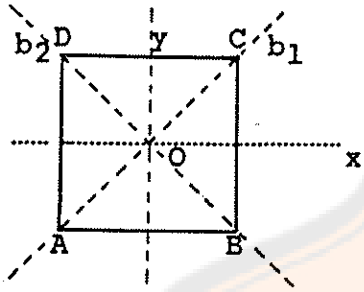
Definisi 3.15

Jika T adalah suatu himpunan titik-titik dalam bidang V maka grup $M_{(T)}$ grup dari semua isometri yang membiarkan T invarian disebut *Grup Simetri* dari T.

Jadi $M_{(T)} = \{\alpha \in M \mid \alpha(T) = T\}$.

Contoh 3.3: T adalah persegi (bujur sangkar)

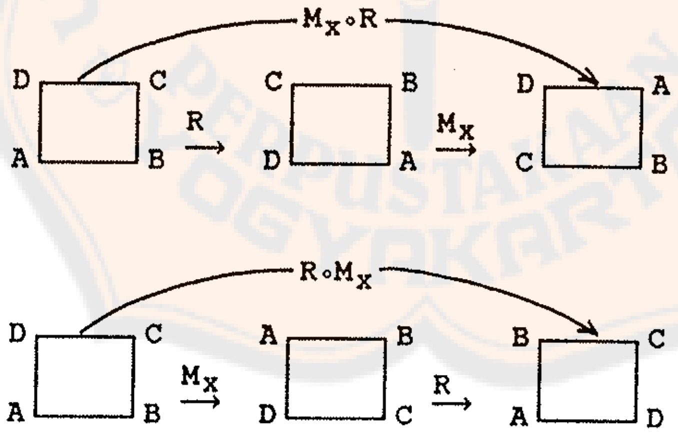
Ada operasi simetri, selain permutasi identitas yang membawa bujur sangkar T ke diri sendiri sedemikian, hingga bangun itu tidak berubah dan hanya terjadi permutasi dari elemen-elemennya.



Gambar 3.4 : Bujur sangkar dengan simetri bilateral dan titik simetri

Grup operasi simetri bujur sangkar menurut gambar 3.4 ialah $M_{(T)}$ = {I, R(O,90^0), R(O,180^0), R(O,270^0), M_x, M_y, M_{b_1}, M_{b_2}} atau R = R(O,90^0) maka $M_{(T)}$ = {I, R, R^2, R^3, M_x, M_y, M_{b_1}, M_{b_2}}.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $M_x \circ R$ sama dengan M_{b_2} yaitu refleksi terhadap b_2, dan $R \circ M_x$ sama dengan M_{b_1} yaitu refleksi terhadap b_1.



Gambar 3.5 : Hasil kali operasi simetri

Tabel 3.5 adalah tabel Cayley dari grup operasi simetri bujur sangkar tersebut.

Tabel 3.5 : Tabel Cayley grup simetri bujur sangkar

$\circ$	I	R	R^2	R^3	M_x	M_y	M_{b_1}	M_{b_2}
I	I	R	R^2	R^3	M_x	M_y	M_{b_1}	M_{b_2}
R	R	R^2	R^3	I	M_{b_1}	M_{b_2}	M_y	M_x
R^2	R^2	R^3	I	R	M_y	M_x	M_{b_2}	M_{b_1}
R^3	R^3	I	R	R^2	M_{b_2}	M_{b_1}	M_x	M_y
M_x	M_x	M_{b_2}	M_y	M_{b_1}	I	R^2	R^3	R
M_y	M_y	M_{b_1}	M_x	M_{b_2}	R^2	I	R	R^3
M_{b_1}	M_{b_1}	M_x	M_{b_2}	M_y	R	R^3	I	R^2
M_{b_2}	M_{b_2}	M_y	M_{b_1}	M_x	R^3	R	R^2	I

Setiap isometri dapat dibedakan oleh cara kita mempermutasikan titik-titiknya. Selanjutnya setiap elemen dalam grup simetri itu akan berkorespondensi dengan suatu permutasi dari M({A,B,C,D}).

Permutasi dari bujur sangkar ABCD berkorespondensi dengan setiap operasi simetri yaitu I berkorespondensi dengan (A), R dengan (A B C D), R^2 dengan (A C B D), R^3 dengan (A D C B), M_x dengan (A D)(B C), M_y dengan (A B)(C D), M_{b_1} dengan (A)(C)(B D) = (B D) dan M_{b_2} dengan (A C)(B)(D) = (A C).

Grup simetri huruf E ialah {I, M_g}, demikian pula grup simetri huruf A. Grup simetri huruf N ialah {I, H} dan grup simetri swastika {I, R, R^2, R^3} jika R = R(O,90^0).

BAB IV
GRUP SIMETRI

Himpunan operasi simetri suatu bangun membentuk suatu grup, yaitu memenuhi sifat tertutup, sifat asosiatif, ada elemen identitas dan ada invers untuk setiap elemennya terhadap operasi komposisi. Kita telah membahas dan mendefinisikannya dalam definisi 3.15. Untuk aplikasi-aplikasi dari teori grup ke geometri dan kristalografi, grup yang dapat dibangun sebagai grup simetri adalah grup siklik, grup dihedral, grup simetrik dan grup "alternating".

A. Grup Simetri Berhingga

1. Suatu contoh grup siklik

Andaikan $G = S_3$. Elemen $a \in G$. Sekarang kita tinjau himpunan semua elemen, perpangkatan bilangan bulat dari a, yaitu $\langle a\rangle = \{ \ldots , a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots \}$, dengan adanya kemungkinan elemen-elemen berpangkat itu sama.

$S_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$.

Dalam S_3 itu, $(1\ 2\ 3)^0 = (1)$, $(1\ 2\ 3)^1 = (1\ 2\ 3)$,

$(1\ 2\ 3)^2 = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2) \neq (1)$,

$(1\ 2\ 3)^3 = (1\ 2\ 3)^2(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3) = (1)$,

$(1\ 2\ 3)^4 = (1\ 2\ 3)^3(1\ 2\ 3) = (1)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)$,

$(1\ 2\ 3)^5 = (1\ 2\ 3)^4(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)$,

$(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 3)^{-2} = (1\ 2\ 3)$ dan

$(1\ 2\ 3)^{-3} = (1\ 2\ 3)^{-2}(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1)$.

Jadi

$(1\ 2\ 3)^3 = (1\ 2\ 3)^0 = (1)$

$(1\ 2\ 3)^4 = (1\ 2\ 3)$

$(1\ 2\ 3)^5 = (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2)$

$(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2)$.

Maka himpunan semua elemen (1 2 3) berpangkat bilangan bulat yaitu <(1 2 3)> adalah $\{(1),\ (1\ 2\ 3)^1,\ (1\ 2\ 3)^2\} = \{(1),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$.

Jadi $<(1\ 2\ 3)> = \{(1\ 2\ 3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, yang merupakan suatu subgrup dari S_3 (Contoh 3.1).

Sehingga {(1), (1 2 3), (1 3 2)} adalah subgrup siklik dalam S_3. Karena himpunan itu memuat semua permutasi genap dari S_3 maka <1 2 3)>, juga merupakan A_3. Ordo <(1 2 3)> = 3, sama dengan ordo dari elemen (1 2 3).

Selain <(1 2 3)>, himpunan H = {(1), (1 2)} juga merupakan subgrup siklik dari S_3. Koset kanan dari H ialah

1. H(1) = {(1)(1), (1 2)(1)} = {(1), (1 2)}
2. H(1 2 3) = {(1)(1 2 3), (1 2)(1 2 3)}
   = {(1 2 3), (2 3)}
3. H(1 3 2) = {(1)(1 3 2), (1 2)(1 3 2)}
   = {(1 3 2), (1 3)}.

Ketiga himpunan di atas membentuk partisi pada G. Dan indeks dari H dalam S_3 atau $[S_3 : <(1\ 2)>] = 6 : 2 = 3$.

Andaikan G adalah grup simetri bangun bujursangkar. Maka $G = M_{(T)} = \{I,\ R,\ R^2,\ R^3,\ M_x,\ M_y,\ M_{b_1},\ M_{b_2}\}$.

Koset kanan dari $<M_x> = \{M_x^0,\ M_x^1\} = \{I,\ M_x\}$ dapat kita hitung sebagai berikut

1. $<M_x>(I) = \{(I \circ I),\ (M_x \circ I)\} = \{I,\ M_x\}$
2. $<M_x>(R) = \{(I \circ R),\ (M_x \circ R)\} = \{R,\ M_{b_2}\}$
3. $<M_x>(R^2) = \{(I \circ R^2),\ (M_x \circ R^2)\} = \{R^2,\ M_y\}$

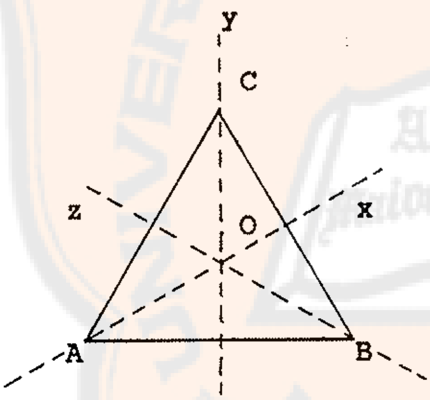
4. $<M_x>(R^3) = \{(I \circ R^3), (M_x \circ R^3)\} = \{R^3, M_{b_1}\}$.

Keempat himpunan tersebut membentuk partisi pada G dan indeks $<M_x>$ dalam G yaitu $[G:<M_x>] = \frac{|G|}{|<M_x>|} = 4$.

Selanjutnya kita bahas grup Siklik C_n dan grup Dihedral D_n.

2. Grup Siklik C_n dan grup dihedral D_n

Sekarang kita perhatikan grup simetri segibanyak beraturan. Kita mulai dengan segitiga samasisi.

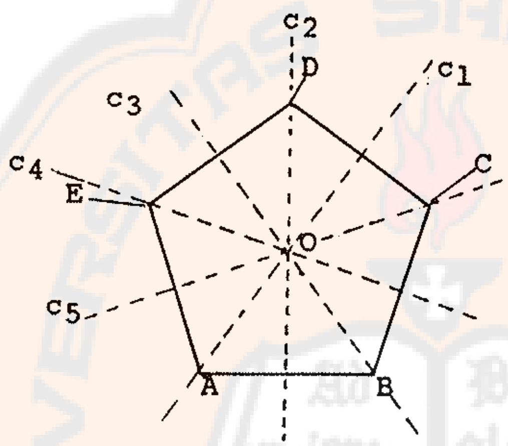


Gambar 4.1 : Segitiga samasisi dengan ke 3 sumbu simetri dan 1 titik simetri

Ada 3 cermin pada segitiga samasisi. Himpunan operasi simetrinya $\{I, M_x, M_y, M_z, R(O,120^0), R(O,240^0)\}$ atau $\{I, R, R^2, M_x, M_y, M_z\}$. Sudut antara cermin berdekatan ialah 60^0. Banyaknya anggota grup simetri itu ada 6. Grup simetri segitiga samasisi ini disebut grup dihedral dan dinyatakan dengan D_3.

Grup simetri bangun huruf A juga suatu grup dihedral yang dinyatakan dengan D_1 dan grup simetri bangun huruf H dapat dinyatakan dengan D_2. Selanjutnya dari Contoh 3.3 yaitu tentang grup simetri suatu bujur sangkar, himpunan operasi simetrinya $\{I, R, R^2, R^3, M_x, M_y, M_{b_1}, M_{b_2}\}$ dengan $R = R(O, 90^0)$ dan sudut antara 2 cermin berdekatan 45^0. Grup simetri bujur sangkar itu juga merupakan grup dihedral dan dinyatakan dengan D_4.

Untuk segi lima beraturan gambar 4.2



Gambar 4.2 : Segilima beraturan dengan 5 sumbu simetri dan 1 titik simetri

Ada 5 cermin dan sudut antara 2 cermin yang berdekatan besarnya $\frac{1}{5} \cdot 180^0 = 36^0$. Jika rotasi dengan titik pusat O dan sudut rotasi sebesar $\frac{1}{5} \cdot 360^0 = 72^0$ kita nyatakan degan R yaitu $R = R(O, 72^0)$, maka grup simetri segi lima beraturan ialah $\{I, R, R^2, R^3, R^4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.

Dengan jalan yang serupa kita dapatkan grup simetri segi enam beraturan, yaitu $\{I, R, R^2, R^3, R^4, R^5, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$. Karena ada 6 cermin dan sudut antara 2 cermin berdekatan $\frac{1}{6} \cdot 180^0 = 30^0$, dan R ialah $R = R(O, \frac{360^0}{6}) = R(O, 60^0)$.

Mengingat hal-hal di atas maka dapat kita simpulkan, bahwa suatu segi n beraturan akan mempunyai grup simetri

$\{I, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, M_1, M_2, \ldots, M_n\}$.

Ada n cermin dan sudut antara 2 cermin berdekatan besarnya $\frac{1}{n}.180^0$ dan $R = R(O, \frac{360^0}{n})$.

Banyaknya anggota grup simetri segi n beraturan atau ordo grup itu ialah 2n, dan grup itu memuat suatu grup siklik berordo n.

Jadi jika $G = \{I, R, R^2, \ldots R^{n-1}, M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, maka

$|G| = 2n$

$C_n = \{I, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\}$

$|C_n| = n$.

Andaikan pada sebuah bujur sangkar ABCD seperti pada Contoh 3.3, ρ(rho) = R ialah rotasi 90^0 dengan pusat O μ(mu) = M_{b_1} ialah refleksi terhadap sumbu diagonal b_1, dan ι(iota) ialah operasi simetri identitas, maka dari tabel Cayley dapat kita tentukan

$\rho = M_x \circ M_{b_2} = \rho^{-3}$

$\rho^2 = M_x \circ M_y = \rho^{-2}$

$\rho^3 = M_x \circ M_{b_1} = \rho^{-1}$

$\rho\mu = M_y$ sedangkan $\mu\rho = M_x$. Jadi $\rho\mu \neq \mu\rho$.

$\rho^2\mu = M_{b_2}$ dan $\mu\rho^2 = M_{b_2}$

$\rho^3\mu = M_x$ sedangkan $\mu\rho^3 = M_y$. Jadi $\rho^3\mu \neq \mu\rho^3$.

Sekarang grup simetri bujur sangkar $D_4 = \{\iota, \rho, \rho^2, \rho^3, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}$. Grup simetri ini dihasilkan oleh $\{\rho, \mu\}$ dan berordo 8. Untuk mengisi Tabel Cayleynya kita dapat menggunakan rumus $\mu\rho^k = \rho^{n-k}\mu$ (karena $\mu\rho^k$ adalah sebuah refleksi pada sebuah garis yang melalui O, jadi inversnya adalah refleksi itu sendiri).

Sekarang kita definisikan grup C_n dan grup D_n.

Definisi 4.1

Suatu grup C_n adalah grup siklik berordo n, anggotanya rotasi dengan sudut putar sebesar $k(360^0/n)$, $0 \leq k < n$, dan pusatnya titik O yaitu titik pusat segi-n beraturan.

Definisi 4.2

Grup dihedral umum D_n adalah grup simetri yang dihasilkan oleh 2 generator : {a,b} dengan hubungan $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba = a^{n-1}b$ atau $ba^{n-1} = ab$, dengan e adalah elemen identitas dan secara lengkap $D_n =$ $\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$.

Berikut ini teorema dari Leonardo da Vinci. Dengan menyusun teorema ini Leonardo bermaksud memberi penjelasan tentang suatu kemungkinan memecahkan masalah simetri pada bangunan utama kapel.

3. Teorema Leonardo da Vinci

Sebuah grup simetri berhingga dari suatu bangun dalam bidang adalah salah satu dari suatu grup siklik C_n atau suatu grup dihedral D_n.

Bukti.

Andaikan G sebuah grup simetri berhingga dari suatu bangun bidang.

1. Andaikan G berordo n dan memuat rotasi saja. Setiap rotasi, kecuali elemen identitas, dapat diandaikan akan mengitari sudut positif kurang dari 360^0. Andaikan ρ adalah rotasi yang sudut putarnya terkecil. Maka G me-

muat $\iota = \rho^0, \rho, \rho^2, \rho^3, \ldots$; dan setiap elemen G pasti muncul dalam daftar itu. Kita buktikan demikian. Pertama-tama kita ambil $\beta \in G$ dan $\beta \neq \rho^k$ untuk setiap k. Jika sudutnya ρ dan β berturut-turut θ_ρ (sudut putar yang terkecil) dan θ_β, maka $t\theta_\rho < \theta_\beta < (t+1)\theta_\rho$, untuk $t \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, rotasi ρ^{-t} mempunyai sudut putar sebesar $t\theta_\rho$ dengan arah negatif sedangkan β mempunyai sudut putar positif lebih besar dari $t\theta_\rho$. Jadi komposisi $\beta\rho^{-t}$, yang merupakan elemen G, berkorespodensi dengan rotasi arah positif dan sudut rotasinya kurang dari θ_ρ. Kontradiksi dengan pengandaian bahwa θ_ρ adalah sudut putar yang terkecil. Maka dari itu $G = \{\iota = \rho^0, \rho, \ldots, \rho^{n-1}\}$, dengan $\rho^n = \iota$ dan $\theta_\rho = (360/n)^0$.

2. G memuat suatu refleksi μ, dan andaikan H himpunan rotasi dalam G. Maka H adalah suatu subgrup dari G dan menurut bukti 1 andaikan $H = \{\iota = \rho^0, \rho, \ldots, \rho^{n-1}\}$, untuk ρ rotasi. Pasti G memuat $\iota, \rho, \ldots, \rho^{n-1}, \mu, \mu\rho, \ldots, \mu\rho^{n-1}$. Setiap elemen $\mu\rho^k$ $(0 \leq k < n)$ adalah suatu refleksi, dan para elemen ini semuanya berbeda.

   Diambil suatu refleksi $\gamma \in G$. Maka $\mu\gamma$ adalah hasil 2 refleksi, jadi suatu rotasi. Maka dari itu $\mu\gamma = \rho^k$ untuk suatu k yang tertentu sehingga $\gamma = \mu^{-1}\rho^k = \mu\rho^k$. Selanjutnya $G = \{\iota, \rho, \ldots, \rho^{n-1}, \mu, \mu\rho, \ldots, \mu\rho^{n-1}\}$, yaitu suatu grup dihedral D_n.□

4. Beberapa contoh grup simetri yang saling isomorphik

Grup simetri dari huruf A atau E adalah grup dihedral berordo 2 dihasilkan oleh suatu refleksi tunggal dan dinyatakan dengan D_1. Grup simetri huruf **N** berordo 2 juga, tetapi dihasilkan oleh setengah putaran dan dikatakan grup siklik, C_2. Grup $D_1 \cong C_2$ karena mereka itu sebenarnya grup tunggal berordo 2, yang penampilannya secara geometri berbeda. Grup itu didefinisikan oleh $\alpha^2 = \iota$ atau $\alpha = \alpha^{-1}$, dan dinyatakan dengan $(\{\iota, \alpha\},\circ)$.

Grup simetri dari bangun Swastika gambar 3.3 adalah C_4, yaitu grup siklik berordo 4, dihasilkan oleh rotasi 1/4 putaran, α dan didefinisikan oleh $\alpha^4 = \iota$. Sedangkan bangun huruf H adalah D_2, grup dihedral berordo 4, dihasilkan oleh 2 refleksi μ dan γ dan didefinisikan oleh relasi $\mu^2 = \iota$, $\gamma^2 = \iota$, $\mu\gamma = \gamma\mu$.

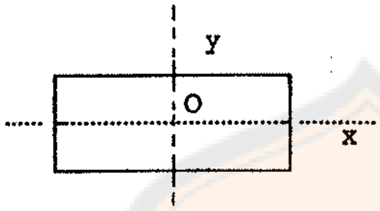
Walaupun C_4 dan D_2 keduanya berordo 4, mereka tidak isomorphik karena kedua grup itu berbeda struktur dan tabel Cayleynya. Ordo dari masing-masing elemennya dapat dilihat dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1 : Ordo elemen-elemen dari D_2 dan C_4

D_2		C_4	
elemen	ordo	elemen	ordo
ι	1	ι	1
ρ	2	ρ	4
μ	2	ρ^2	2
$\rho\mu$	2	ρ^3	4

C_4 memuat 2 elemen berordo 4 sedangkan semua operasi simetri dalam D_2 (kecuali elemen identitas) berordo 2, generatornya berordo 2, demikian juga hasil kedua generator itu, karena $(\rho\mu)^2 = (\rho\mu)(\rho\mu) = \rho\mu\mu\rho = \rho\mu^2\rho = \rho\iota\rho = \rho^2 = \iota$.

Grup simetri dari persegi panjang (sering disebut grup dari Klein) adalah ({e, a, b, c}, $\circ$), dengan operasi-operasi simetrinya adalah sebagai berikut.



Gambar 4.3 : Persegi panjang dengan sumbu simetri dan titik simetri

Elemen e adalah isometri identitas, a adalah refleksi terhadap sumbu x, b adalah refleksi terhadap sumbu y dan c adalah rotasi setengah putaran.
Ordo dari masing-masing elemennya seperti terlihat pada tabel 4.2 berikut ini.

Tabel 4.2 : Ordo elemen-elemen grup dari Klein

elemen	ordo
e	1
a	2
b	2
c	2

Tabel 4.3 : Daftar Cayley dari D_2 dan Grup Klein

Grup D_2

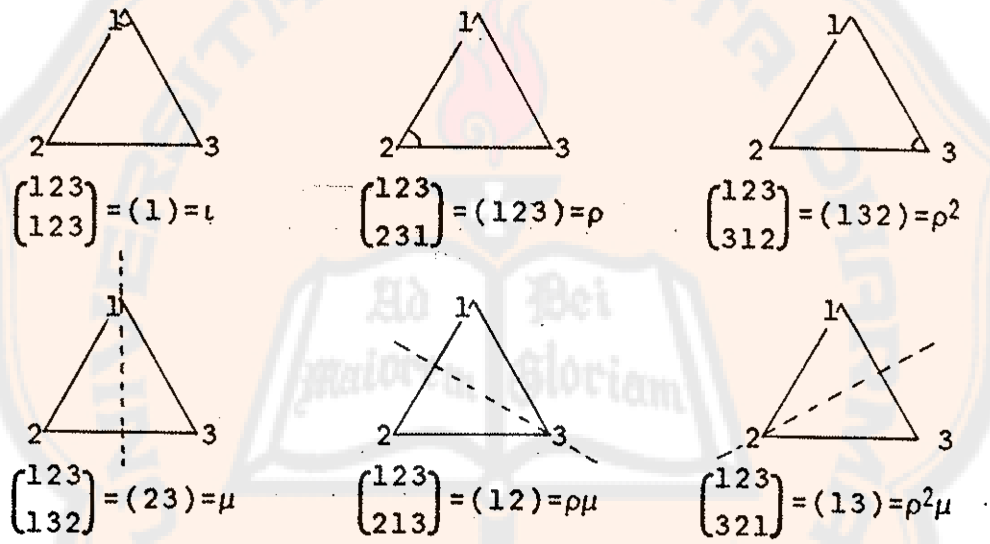
$\cdot$	ι	ρ	μ	$\rho\mu$
ι	ι	ρ	μ	$\rho\mu$
ρ	ρ	ι	$\rho\mu$	μ
μ	μ	$\rho\mu$	ι	ρ
$\rho\mu$	$\rho\mu$	μ	ρ	ι

Grup dari Klein

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Dalam grup dari Klein kita dapat menulis bahwa $c = a \circ b$ dan pemetaan bijektif θ dari D_2 ke grup dari Klein itu, dengan $\theta(\iota) = e$, $\theta(\rho) = a$, $\theta(\mu) = b$ adalah suatu isomorphisma. Tabel 4.3 adalah daftar Cayley kedua grup itu.

Selanjutnya, $D_3 \cong S_3$. D_3 adalah grup simetri dari segitiga samasisi, dan sebarang operasi simetri menentukan suatu permutasi dari titik-titik sudutnya. Definisi pemetaannya adalah $\theta : D_3 \longrightarrow S_3$. Jika τ dan $\gamma \in D_3$, maka $\theta(\tau \circ \gamma)$ adalah permutasi titik-titik sudutnya, yang sama dengan $\theta(\tau) \circ \theta(\gamma)$.



Gambar 4.4: Elemen D_3 dengan permutasinya yang bersesuaian

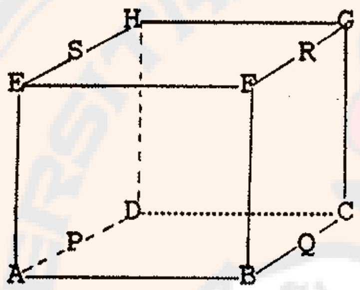
Gambar 4.4 mengilustrasikan ke 6 elemen dari D_3 dan permutasi-permutasinya yang bersesuaian.

Pemetaan θ adalah isomorphisma antara operasi simitri segitiga samasisi dan permutasinya.

Sekarang marilah kita membahas grup simetri pada bangun-bangun ruang berdimensi 3.

5. Grup Simetri bangun-bangun ruang berdimensi 3

Dalam membahas grup simetri pada bangun-bangun ruang berdimensi 3 pertama-tama supaya kita mudah mendapat gambaran tentang grup simetri itu kita lebih dahulu mengambil contoh, misalnya bangun kubus. Kita mulai melihat struktur bidang sisi (permukaan), rusuk dan titik-titik sudut kubus, bidang diagonal dan bidang bimedian.



Gambar 4.5 : Kubus ABCD EFGH

Dari gambar 4.5 dapat kita lihat bahwa struktur kubus ABCD EFGH: mempunyai 6 bidang sisi,salah satu cara mengelompokkan bidang sisi kubus itu ialah ABCD berhadapan dengan EFGH; ABFE berhadapan dengan DCGH dan BCGF berhadapan dengan ADHE. Jadi ada 3 kelompok.

Struktur rusuknya: kubus mempunyai 12 rusuk, salah satu cara mengelompokkannya ialah dengan menyebut rusuk yang saling berhadapan, ada 6 kelompok yaitu

AB berhadapan dengan HG; BF berhadapan dengan DH;
EF berhadapan dengan DC; AD berhadapan dengan FG;
AE berhadapan dengan CG; BC berhadapan dengan EH.

Struktur titik sudutnya: kubus mempunyai 8 titik sudut. Ke 8 titik sudut ini dapat dikelompokkan menjadi 4 pasang yang berhadapan yaitu A dengan G, B dengan H, C dengan E dan D dengan F.

Masih ada bagian penting dari kubus yaitu bidang diagonal, pada kubus dapat dibuat 6 bidang diagonal salah satu bidang diagonal itu ialah ABGH. Sedangkan bidang bimedian adalah bidang yang melalui titik-titik tengah ke 4 rusuk yang searah. Ada 3 bidang bimedian, salah satunya ialah PQRS.

Sumbu-sumbu putar kubus yaitu

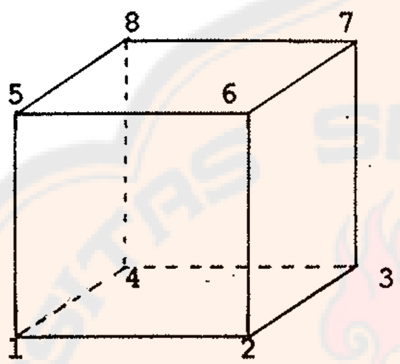
1. Tiga buah sumbu simetri putar tingkat-4, yaitu garis-garis penghubung 2 titik pusat bidang-bidang sisi yang berhadapan.
2. Enam buah sumbu simetri putar tingkat-2, yaitu garis penghubung titik-titik tengah 2 rusuk yang berhadapan.
3. Empat buah sumbu simetri putar tingkat-3, yaitu garis penghubung 2 titik sudut yang saling berhadapan, atau garis diagonal.

Bidang simetri balik atau bidang refleksi dari kubus:

1. Enam buah bidang diagonal dan
2. Tiga buah bidang bimedian.

Selanjutnya kita melihat operasi simetri kubus dengan melihat titik-titik sudutnya. Cara memberi nomor ke 8 titik itu seperti pada gambar 4.6

Andaikan G adalah grup permutasinya {1, 2, ... , 8} dengan syarat permutasi itu mempertahankan hubungan ketetanggaan titik-titiknya ("adjacent vertex"). Ada 48 permutasi seperti yang dimaksudkan itu (24 berkorespondensi dengan isometri langsung dan 24 yang lain dengan isometri tidak langsung). Dari ke 48 operasi simetri itu ada 10 tipe permutasi yang dalam masing-masing kelompok secara geometri ekuivalen. Tabel 4.4 di bawah ini adalah daftar ke 10 tipe itu berikut contoh serta banyaknya operasi simetri dari masing-masing tipe.



Gambar 4.6 : Kubus 1234 5678

Tabel 4.4 : Tabel 10 tipe permutasi kubus 1234 5678

TIPE	CONTOH	BANYAKNYA OP.SIMETRI.
1. Identitas	(1)	1
2. Refleksi terhadap titik pusat kubus	(17) (28) (35) (46)	1
3. Rotasi 90^0-sumbu permukaan	(1234) (5678)	6
4. Refleksi trhd ttk pusat∘Rotasi 90^0sb permukaan.	(1836) (2547)	6
5. Rotasi 180^0-sumbu permukaan	(13) (24) (57) (68)	3
6. Refleksi-terhadap bidang bimedian	(15) (26) (37) (48)	3
7. Rotasi 180^0-sumbu tengah-tengah rusuk	(14) (67) (28) (35)	6
8. Refleksi-terhadap bidang diagonal	(16) (47)	6
9. Rotasi 120^0-sumbu garis diagonal	(245) (386)	8
10. Refleksi trhd ttk pusat∘Rotasi 120^0sb gr. diagonal	(17) (265843)	8

Beberapa subgrup G, yaitu G_T dan $G_{(T)}$ yang mengesan misalnya,

1. Subgrup G yang memuat operasi simetri yang membiarkan sisi atas (tutup) tetap demikian yaitu $G_{(Y)}$ dengan Y = {5, 6, 7, 8} mempunyai ordo 8, elemen-elemennya:
   1. Identitas (1)
   2. Rotasi 90^0 dengan sumbu garis penghubung pusat sisi alas dan tutup, permutasinya (5 6 7 8)(1 2 3 4)
   3. Rotasi 180^0 dengan sumbu yang sama dengan no.2, permutasinya (6 8)(5 7)(1 3)(2 4)
   4. Rotasi 270^0 dengan sumbu yang sama dengan no.2, permutasinya (5 8 7 6)(1 4 3 2)
   5. Refleksi terhadap bidang diagonal, permutasinya ialah (6 8)(2 4)
   6. Idem , permutasinya (1 3)(5 7)
   7. Refleksi terhadap bidang bimedian, permutasinya ialah (6 7)(5 8)(1 4)(2 3)
   8. Idem, permutasinya ialah (1 2)(4 3)(5 6)(8 7).
2. $G_{(Y)}$ dengan Y = {1, 2}

   Ordo subgrup ini 4, elemen-elemennya yaitu
   1. Identitas
   2. Refleksi terhadap bidang diagonal, permutasinya (1)(2)(3 6)(4 5)
   3. Refleksi terhadap bidang bimedian, permutasinya (1 2)(5 6)(8 7)(4 3)
   4. Rotasi 180^0 terhadap sumbu garis penghubung tengah-tengah rusuk yang berhadapan, permutasinya ialah (1 2)(5 3)(8 7)(4 6).

Sedangkan G_Y dengan Y = {1, 2} elemen-elemennya adalah Identitas dan Refleksi terhadap bidang diagonal yang permutasinya ialah (1)(2)(3 6)(4 5) = (3 6)(4 5). Jadi subgrup itu berordo 2.

Dari ke 48 operasi simetri kubus itu telah dikelompokkan menjadi 10 tipe permutasi, yang dalam masing-masing kelompok secara geometri dianggap sama. Dalam kelompok tipe ke 3 yaitu rotasi 90^0 dengan sumbu garis yang menghubungkan titik pusat 2 bidang sisi yang berhadapan, termasuk juga rotasi 270^0 dengan sumbu yang sama. Tetapi rotasi 180^0 dengan sumbu yang sama mempunyai kelompok berbeda. Untuk menjelaskan pengelompokan itu marilah kita bahas tentang elemen-elemen konjugat dalam suatu grup.

Definisi 4.3

Jika f dan g adalah elemen-elemen dari suatu grup G, maka hasil gfg^{-1} disebut konjugat kanan dari f oleh g. Himpunan semua konjugat kanan dari f, $\{gfg^{-1} \mid g \in G\}$ disebut klas konjugat dari f dalam G.

Secara garis besarnya, jika f dan g adalah permutasi-permutasi, maka konjugat dari f oleh g menunjukkan reaksi seakan-akan f itu diubah oleh g. Misalnya, jika f adalah rotasi 90^0 dengan sumbu permukaan atau berasal dari kelompok tipe ke 3 maka konjugat dari f ada/termasuk dalam kelompok itu juga. Pada umumnya, untuk permutasi-permutasi, kita dapat menyatakan yang berikut:

Teorema 4.1

Suatu permutasi, α, memetakan x ke y bila dan hanya bila $\beta\alpha\beta^{-1}$ memetakan $\beta(x)$ ke $\beta(y)$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Ditentukan $\alpha : x \longmapsto y$ dan $\beta : x \longmapsto \beta(x)$.

Maka invers β, yaitu β^{-1} akan memetakan $\beta(x)$ ke x atau $\beta^{-1} : \beta(x) \longmapsto x$.

$\beta\alpha\beta^{-1}(\beta(x)) = \beta\alpha(\beta^{-1}(\beta(x))) = \beta\alpha(x) = \beta(y)$.

Jadi $\beta\alpha\beta^{-1} : \beta(x) \longmapsto \beta(y)$.

($\Leftarrow$) Konjugat $\beta\alpha\beta^{-1} : \beta(x) \longmapsto \beta(y)$.

Maka $\beta\alpha\beta^{-1}(\beta(x)) = \beta(y)$

$\beta\alpha\beta^{-1}\beta(x) = \beta(y)$

$\beta\alpha(x) = \beta(y)$

$\beta^{-1}\beta\alpha(x) = \beta^{-1}\beta(y)$ atau

$\alpha(x) = y$ sehingga $\alpha : x \longmapsto y$.□

Dari teorema di atas kita dapat mendefinisikan untuk permutasi α dan β sebagai berikut.

Definisi 4.4

Untuk sebarang permutasi α dan β, jika Y adalah himpunan semua titik yang dipermutasikan oleh α, maka $\beta(Y)$ adalah himpunan semua titik yang dipermutasikan oleh $\beta\alpha\beta^{-1}$.

Teorema 4.2.

Bila f,g dan h adalah elemen-elemen dari suatu grup G, maka:

1. Konjugat dari fg oleh h adalah hasil dari konjugat f dan g oleh h, yaitu $h(fg)h^{-1} = (hfh^{-1})(hgh^{-1})$
2. Konjugat dari f^{-1} oleh h adalah invers konjugat dari f oleh h, yaitu $hf^{-1}h^{-1} = (hfh^{-1})^{-1}$

3. Konjugat dari f oleh h adalah f bila dan hanya bila f dan h komutatif, yaitu $hfh^{-1} = f$ bhb $hf = fh$
4. Konjugat dari konjugatnya f oleh g, oleh h adalah konjugat dari f oleh hg, yaitu $h(gfg^{-1})h^{-1} = (hg)f(hg)^{-1}$
5. Bila h adalah konjugat dari f oleh g, maka f adalah konjugat h oleh g^{-1}

Bukti.

Bila f, g dan h adalah elemen-elemen dari grup G

1. Konjugat dari fg oleh h adalah $h(fg)h^{-1} = h(feg)h^{-1}$ (e adalah elemen identitas).

   Selanjutnya $h(feg)h^{-1} = h(fh^{-1}hg)h^{-1}$

   $= (hfh^{-1})(hgh^{-1})$.

   Jadi $h(fg)h^{-1} = (hfh^{-1})(hgh^{-1})$.
2. Konjugat dari f^{-1} oleh h adalah $hf^{-1}h^{-1}$.

   Dari teorema 1 di atas $h(ff^{-1})h^{-1} = (hfh^{-1})(hf^{-1}h^{-1})$.

   Andaikan e adalah elemen identitas dari G maka $e = heh^{-1} = h(ff^{-1})h^{-1}$.

   Di pihak lain invers dari (hfh^{-1}) adalah $(hfh^{-1})^{-1}$.

   Jadi $(hfh^{-1})(hfh^{-1})^{-1} = e$.

   Dari ke tiga persamaan di atas diperoleh $(hfh^{-1})(hfh^{-1})^{-1} = (hfh^{-1})(hf^{-1}h^{-1})$, dengan hukum kanselasi diperoleh $(hf^{-1}h^{-1}) = (hfh^{-1})^{-1}$.
3. Kita harus membuktikan bahwa $hfh^{-1} = f \Leftrightarrow hf = fh$.

   ($\Rightarrow$) Ditentukan $hfh^{-1} = f$. Jika kedua ruas dikalikan h maka $hfh^{-1}h = fh$ atau $hfe = fh$. Jadi $hf = fh$.

   ($\Leftarrow$) Ditentukan $hf = fh$. Jika kedua ruas dikalikan h^{-1} maka $hfh^{-1} = fhh^{-1}$ atau $hfh^{-1} = f$.
4. Konjugat dari konjugat dari f oleh g, oleh h adalah

$h(gfg^{-1})h^{-1}$. Dan $h(gfg^{-1})h^{-1} = (hg)f(g^{-1}h^{-1})$

$= (hg)f(hg)^{-1}$.

5. Bila h adalah konjugat f oleh g. Jadi $h = gfg^{-1}$ maka

   $g^{-1}h = g^{-1}gfg^{-1}$ (kedua ruas dikalikan g^{-1})

   $g^{-1}h = efg^{-1}$

   $g^{-1}hg = fg^{-1}g$ (kedua ruas dikalikan g).

   Jadi $g^{-1}hg = f$ atau $f = g^{-1}h(g^{-1})^{-1}$.□

Implikasi dari teorema 4.2 bagian 4 dan 5 itu adalah teorema berikut ini.

Teorema 4.3

Jika pada grup G didefinisikan relasi ~ sebagai berikut g ~ f bila dan hanya bila g adalah konjugat dari f oleh paling sedikit satu elemen anggota G, maka relasi ~ tersebut adalah relasi ekuivalensi.

Bukti.

1. Andaikan diambil $h \in G$. Maka $(h^{-})^{1-1} \in G$.

   Jika g ~ f bila dan hanya bila g adalah konjugat dari f oleh h maka $g = hfh^{-1}$. Menurut teorema 4.2 bagian 5 maka $f = h^{-1}gh = h^{-1}g(h^{-1})^{-1}$. Jadi f adalah konjugat dari g oleh paling sedikit satu elemen, yaitu $h^{-1} \in G$.

   Jadi f ~ g atau relasi ~ bersifat simetris.

2. Diambil p ~ q , yaitu p adalah konjugat q oleh $h \in G$ dan q ~ r, yaitu q adalah konjugat r oleh $g \in G$. Karena $h \in G$, $g \in G$ maka $hg \in G$, begitu juga $(hg)^{-1} \in G$.

   Selanjutnya q ~ r oleh g berarti $q = grg^{-1}$ dan p ~ q oleh h berarti $p = hqh^{-1} = h(grg^{-1})h^{-1} = (hg)r(g^{-1}h^{-1})$ $= (hg)r(hg)^{-1}$. Atau p adalah konjugat r oleh paling sedikit satu elemen $(hg) \in G$.

Jadi $p \sim r$ atau relasi $\sim$ bersifat transitif.

3. Diambil $f = efe^{-1}$, dengan e adalah elemen identitas, $e \in G$. Jadi $f \sim f$ atau relasi $\sim$ bersifat refleksif.

Dari 1, 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalensi pada G.□

Akibatnya pada G timbul klas ekuivalensi yang kita sebut klas konjugat.

Kalau kita menggunakan induksi dan teorema 4.2.1 dan 2 untuk sebarang bilangan bulat n maka
$hf^nh^{-1} = (hfh^{-1})(hfh^{-1}) \ . \ . \ . \ (hfh^{-1})$ dengan n faktor hfh^{-1}. Atau $hf^nh^{-1} = (hfh^{-1})^n$.
Maka ordo dari elemen f adalah sama dengan ordo dari sebarang konjugat-konjugatnya.

Sekarang marilah kita melihat klas konjugat S_n.
Jika $X = \{1, 2, ..., n\}$ dan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ adalah elemen-elemen yang berbeda dari himpunan X itu dan β anggota S_n maka konjugat dari sikel $(a_1 \ a_2 \ . \ . \ . \ a_k)$ oleh β adalah sikel $(\beta(a_1) \ \beta(a_2) \ . \ . \ . \ \beta(a_k))$ sebab jika
$\alpha = (a_1 \ a_2 \ . \ . \ . \ a_k)$ dan $\beta \in S_n$ maka $\alpha : a_1 \longmapsto a_2$ atau $\alpha(a_1) = a_2$, $\alpha(a_2) = a_3$ dan seterusnya. Menurut teorema 4.1 $\beta\alpha\beta^{-1}$ akan membawa $\beta(a_1)$ ke $\beta(a_2)$, membawa $\beta(a_2)$ ke $\beta(a_3)$ dan seterusnya.

Menurut teorema 4.2.1 konjugat dari hasil perkalian sikel-sikel dapat dihitung dengan perhitungan konjugat setiap sikelnya. Jadi konjugat dari α, suatu hasil produk sikel-sikel, oleh β adalah produk dari sikel-sikel yang dihasilkan oleh penggantian masing-masing simbol dalam α

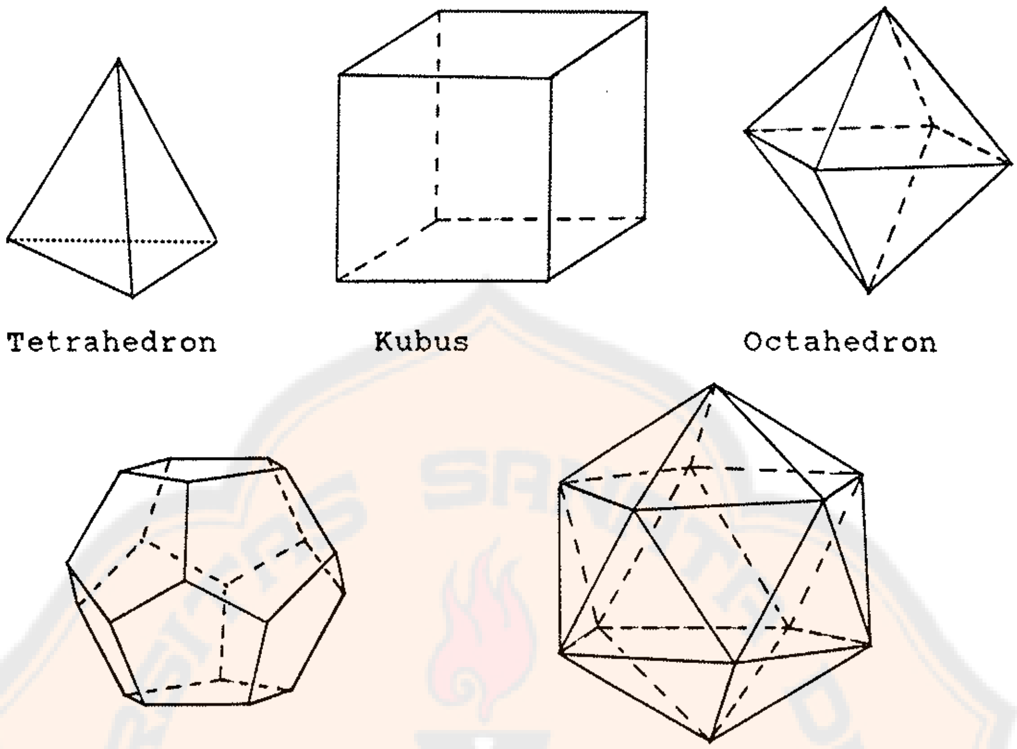
oleh bayangannya karena β. Misalnya, jika α = (1 3 5)(2 4) dan β = (1 2)(3 6 7) maka $\beta\alpha\beta^{-1}$ = (2 6 5)(1 4).

Dengan tehnik penghitungan konjugat dalam S_n seperti di atas dua permutasi dalam S_n adalah konjugat bila dan hanya bila mereka mempunyai tipe sikel-sikel terurai yang sama, yaitu bila dan hanya bila mereka berdua dapat difaktorkan ke dalam k buah sikel-sikel yang saling asing dengan panjang n_1, n_2, ..., n_k dengan $1 < n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_k$ dan $\Sigma n_i = n$. Misalnya, ada lima klas konjugat dalam S_4 yaitu berkorespondensi dengan kelima "tipe" permutasi dalam S_4 yang direpresentasikan oleh sikel-sikel : (x), (x y), (x y z), (x y)(z w) dan (x y z w).

Mengenai klas konjugat dalam grup simetri kubus, dilihat dari titik-titik sudutnya dapat dijelaskan sebagai berikut. Andaikan G adalah grup simetri kubus itu, elemen ι adalah elemen identitas, maka untuk setiap α anggota G, $\alpha\iota\alpha^{-1} = \iota\alpha\alpha^{-1} = \iota$. Jadi klas konjugat dari ι adalah $\{\iota\}$. Begitu juga untuk λ, jika λ adalah refleksi terhadap titik pusat kubus. Untuk setiap α anggota G maka $\alpha\lambda\alpha^{-1} = \lambda\alpha\alpha^{-1} = \lambda\iota = \lambda$. Jadi klas konjugat dari λ adalah $\{\lambda\}$. Dan sebarang permutasi berkonjugat dalam G harus juga berkonjugat dalam S_8; dengan menguji tipe-tipe dari representasi yang didaftar dalam Tabel 4.4 dan menggunakan hasil yang telah diuraikan di atas, maka kita lihat bahwa paling sedikit ada lima klas konjugat, dan khususnya tidak ada refleksi terhadap bidang diagonal dapat dikonjugasikan ke sebarang simetri berordo 2 tipe lain. Ada 10 klas konjugat dalam G berkorespondensi tepat dengan ke 10 tipe simetri terdaftar dalam Tabel 4.4.

Sekarang kita mencari kaitan antara klas konjugat (Definisi 4.3) dan subgrup normal. Misalnya kita ambil contoh $G = S_3 = \{\iota, \rho, \rho^2, \mu, \mu\rho, \mu\rho^2\}$. Klas konjugat dari ι dalam G adalah $\{\iota\}$, sedangkan dari ρ adalah $\{\rho, \rho^2\}$ dan dari μ adalah $\{\mu, \mu\rho, \mu\rho^2\}$. Subgrup $\{\iota, \mu\}$ bukan subgrup normal, subgrup $\{\iota, \rho, \rho^2\}$ adalah subgrup normal, sedangkan himpunan $\{\iota, \mu, \mu\rho, \mu\rho^2\}$ bukan normal karena ia bukanlah subgrup dari S_3, karena banyaknya elemen himpunan itu 4, bukan merupakan faktor dari 6, yaitu ordo dari S_3 (Teorema Lagrange). Jadi suatu subgrup dari G adalah subgrup normal bila subgrup itu mempunyai sifat istimewa yaitu bahwa ia tidak pernah memuat satu elemenpun dari G tanpa memuat penuh klas konjugatnya.

Marilah kita membahas grup simetri bidang banyak beraturan ("Platonic Solids"): bidang-4 (tetrahedron) beraturan, kubus (hexahedron) beraturan, bidang-8 (octahedron) beraturan, bidang-12 (dodecahedron) beraturan dan bidang-20 (icosahedron) beraturan. Kita akan membahas grup rotasi/isometri langsungnya saja. Kita membatasi perhatian kita pada rotasi karena hanya operasi-operasi simetri itu yang dapat diwujudkan secara fisik dalam ruang berdimensi tiga. Kelima bidang banyak beraturan yang telah kita sebut di atas diilustrasikan dalam Gambar 4.7 dan struktur mereka disajikan dalam tabel 4.5.

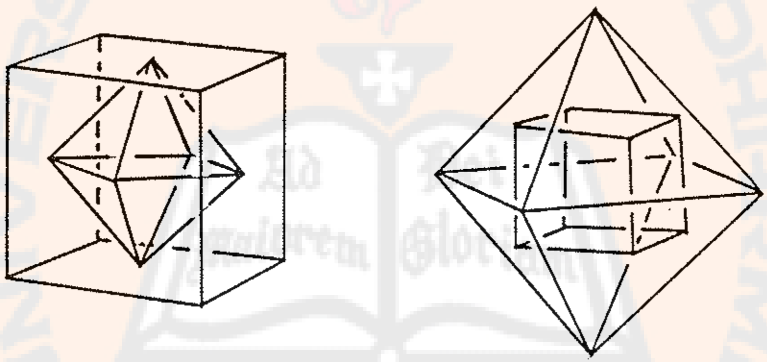


Gambar 4.7 : "Platonic Solids"

Tabel 4.5 : Struktur dari "Platonic Solids"

BID BANYAK BERATURAN	BANYAK TTK SDT	BANYAK RUSUK	BANYAK PERMUKAAN	BENTUK PERMUKAAN	BANYAKNYA BD SISI DI ∀ TTK SDT
Tetrahe-dron	4	6	4	Segitiga samasisi	3
Kubus	8	12	6	bujur sangkar	3
Octahe-dron	6	12	8	Segitiga samasisi	4
Dodeca-hedron	20	30	12	Segi-5 beraturan	3
Icosa-hedron	12	30	20	Segitiga samasisi	5

Kalau kita mengambil sebarang bidang banyak beraturan, kita dapat mengkonstruksikan bidang banyak dualnya dengan cara berikut: Titik-titik dari dual adalah pusat dari permukaan bidang banyak aslinya. Dua pusat itu dihubungkan oleh suatu garis yang menjadi rusuk, jika bidang-bidang sisinya bertemu dalam satu rusuk. Dual dari suatu bidang-4 beraturan adalah bidang-4 beraturan yang lain. Dualnya kubus adalah bidang-8 beraturan, dualnya bidang-8 beraturan adalah suatu kubus. Bidang-12 beraturan dan 20 beraturan adalah dual satu sama lain. Sebarang simetri pada bidang banyak beraturan akan menyebabkan sebuah simetri pada dualnya dan sebaliknya. Jadi dual bidang banyak beraturan akan mempunyai grup simetri rotasi yang sama.



Gambar 4.8 : Octahedron & dualnya

Untuk memahami seluk beluk grup simetri rotasi bangun ruang berdimensi 3 maka perlu lebih dahulu membahas aksi grup simetri pada suatu himpunan.

a. Aksi grup simetri pada suatu himpunan

Kita pandang D_4 yaitu grup simetri dari bangun bujur sangkar. $D_4 = \{I, R, R^2, R^3, M_x, M_y, M_{b_1}, M_{b_2}\}$.

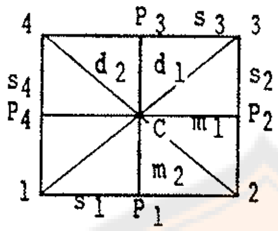
Sekarang jika notasi D_4 kita ganti yaitu

ι(iota) = I = operasi simetri identitas

ρ_1(rho) = R; $\rho_2 = R^2$; $\rho_3 = R^3$; μ_1(mu) = M_x;

$\mu_2 = M_y$; δ_1(delta) = M_{b_1}; dan $\delta_2 = M_{b_2}$. Maka

$D_4 = \{\iota, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$.



Gambar 4.9: Bujur sangkar 1234

Dalam gambar 4.9 diperlihatkan suatu bujur sangkar dengan titik-titik sudut 1,2,3 dan 4. Sisi-sisinya kita beri nama s_1, s_2, s_3, s_4; diagonalnya d_1 dan d_2; sumbu horisontal dan vertikalnya dengan m_1 dan m_2; titik pusat C dan titik-titik tengah P_i dari sisi s_i. Jika

$$X = \{1,2,3,4,s_1,s_2,s_3,s_4,m_1,m_2,d_1,d_2,C,P_1,P_2,P_3,P_4\},$$

maka X adalah suatu D_4-set. Tabel 4.6 di bawah ini menyatakan secara lengkap aksi D_4 pada X.

Tabel 4.6: Tabel aksi D_4 pada suatu himpunan X

	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ι	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_1	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_2	P_3	P_4	P_1
ρ_2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_3	P_4	P_1	P_2
ρ_3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_4	P_1	P_2	P_3
μ_1	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_3	P_2	P_1	P_4
μ_2	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_1	P_4	P_3	P_2
δ_1	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_4	P_3	P_2	P_1
δ_2	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_2	P_1	P_4	P_3

Dari Tabel 4.6 kita dapat menunjuk himpunan-himpunan yang tidak berubah ("fixed set") X_σ untuk setiap $\sigma \in D_4$ yaitu

$X_\iota = X$ $\quad$ $X_{\mu_1} = \{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}$

$X_{\rho_1} = \{C\}$ $\quad$ $X_{\mu_2} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$

$X_{\rho_2} = \{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}$ $\quad$ $X_{\delta_1} = \{1, 3, d_1, d_2, C\}$

$X_{\rho_3} = \{C\}$ $\quad$ $X_{\delta_2} = \{2, 4, d_1, d_2, C\}$

Jika $G = D_4$ maka G_x untuk setiap $x \in X$ adalah

$G_1 = \{\iota, \delta_1\} = G_3$, $G_2 = \{\iota, \delta_2\} = G_4$,

$G_{s_1} = \{\iota, \mu_2\} = G_{s_3} = G_{P_1} = G_{P_3}$,

$G_{s_2} = \{\iota, \mu_1\} = G_{s_4} = G_{P_2} = G_{P_4}$,

$G_{m_1} = \{\iota, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} = G_{m_2}$,

$G_{d_1} = \{\iota, \rho_2, \delta_1, \delta_2\} = G_{d_2}$,

$G_C = D_4$.

Kalau kita memperhatikan para G_x di atas maka para subset G_x adalah subgrup-subgrup dari G. G_x inilah yang disebut *Stabilisator* dari x (*stab* x).

Kita perhatikan lagi D_4-set, X, elemen-elemen dalam subset {1,2,3,4} dipetakan ke elemen-elemen dari subset yang sama terhadap aksinya D_4. Dan masing-masing dari elemen 1,2,3 dan 4 dipetakan oleh elemen-elemen D_4 yang bervariasi ke semua elemen dari subset itu. Menurut teorema 2.39, setiap G-set X dapat dipartisikan ke dalam subset-subset seperti subset {1,2,3,4} itu, yang disebut orbit. Maka orbit-orbit dalam X terhadap D_4 adalah $\{1,2,3,4\}$, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $\{m_1, m_2\}$, $\{C\}$, $\{d_1, d_2\}$ dan $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Dan orbit $s_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, sehingga $|\text{Orb } s_3| = 4$; sedangkan $|\text{Stab } s_3| = |\{\iota, \mu_2\}| = 2$.

Jadi indeks Stab s_3 dalam $D_4 = [D_4 : \text{Stab } s_3] = |\text{Orb } s_3|$.

Contoh: Menentukan banyaknya rotasi sebuah kubus.

Andaikan G adalah grup simetri rotasi dari suatu kubus. Andaikan kubus digambarkan dan diberi nomor seperti pada gambar 4.6.

Stabilisator dari titik sudut 7 dalam gambar 4.6 adalah Stab 7 = $\{(1), (8\ 6\ 3)\circ(5\ 4\ 2), (8\ 3\ 6)\circ(5\ 2\ 4)\}$. Orbit 7 adalah himpunan semua titik sudut, karena ada suatu elemen dari G yang akan menempatkan 7 ke sebarang titik sudut. Oleh karena itu, menurut teorema 2.41 $|G| = |\text{Stab } 7| \times |\text{Orb } 7| = 3 \times 8 = 24$.□

b. Grup tetrahedral A_4, octahedral S_4 dan icosahedral A_5

Teorema 4.4

Grup simetri rotasi dari suatu tetrahedron beraturan adalah isomorphik dengan A_4.

Bukti.

Pertama-tama tetrahedron beraturan kita beri label 1, 2, 3 dan 4. Sebarang rotasi dari tetrahedron itu akan mempermutasikan titik-titik itu. Maka, jika G adalah grup rotasi dari tetrahedron beraturan, kita mempunyai suatu homomorphisma $\chi : G \longrightarrow S_4$ yang kernelnya hanya memuat elemen identitas. Jadi menurut teorema homomorphisma G adalah isomorphik dengan $\chi(G)$.

Kita dapat mempergunakan teorema 2.41 untuk menghitung banyaknya elemen dari G. Stabilisator titik sudut 1 adalah himpunan para permutasi dengan syarat yang menentukan titik sudut 1 tetap, yaitu $\{(1), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$. Kemudian titik 1 digantikan oleh sebarang dari keempat titik dari G, maka orbit dari 1 adalah himpunan keempat titik. Jadi $|G| = |\text{Stab } 1||\text{Orb } 1| = 3 \times 4 = 12$.

Ada 2 tipe elemen nontrivial dalam G yang diilustrasikan dalam gambar 4.10 a dan b.

Gambar 4.10 : Tetrahedron beraturan

1. Rotasi tingkat 3 dengan sumbu garis yang menghubungkan satu titik sudut dengan titik pusat bidang sisi di hadapannya. Rotasi ini menampilkan suatu permutasi genap dari titik-titiknya karena masing-masing rotasi dengan satu titik sudut tetap dan mempermutasikan ketiga yang lain secara siklis.
2. Rotasi berordo 2 yang sumbunya adalah garis yang menghubungkan titik tengah sepasang rusuk yang saling bersilangan. Permutasi yang berkorespondensi dengan rotasi itu, saling menukar dua pasang titik-titik sudut dan permutasi itu adalah hasilkali dua transposisi yang merupakan permutasi genap.

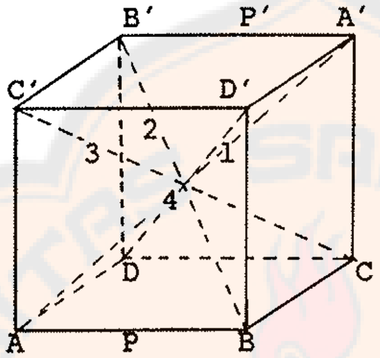
Jadi bayangan χ memuat 12 permutasi yang semuanya genap dan $\chi(G) = A_4$.□

Grup alternating A_4 juga disebut grup *tetrahedral*.

Teorema 4.5

Grup simetri rotasi dari suatu oktahedron beraturan dan kubus isomorphik dengan S_4.

Bukti.



Gambar 4.11: Kubus ABCD C'D'A'B'

Diagonal AA' dikorespondensikan dengan bilangan 1, BB' dengan 2, CC' dengan 3 dan DD' dengan 4. Dengan demikian diagonal-diagonal itu diberi nomor 1, 2, 3 dan 4 seperti diilustrasikan pada gambar 4.11. Sebarang rotasi dari suatu kubus akan mempermutasikan diagonal-diagonal itu, dengan demikian kita telah mendefinisikan suatu homomorphisma $\theta : G \longrightarrow S_4$, dengan G adalah grup rotasi dari kubus.

Stabilisator dari sebarang titik tengah rusuk kubus adalah suatu grup siklik berordo 2, elemen-elemennya yaitu identitas dan rotasi 180^0 dengan sumbu yang melalui titik tengah rusuk itu. Orbit dari sebarang titik tengah itu adalah himpunan keduabelas rusuknya. Jadi menurut teorema 2.41 $|G| = 2 \times 12 = 24$.

Dipandang rotasi berordo 2 dengan sumbu garis yang menghubungkan P dan P' seperti digambarkan dalam Gambar

4.11. Permutasi yang berkorespondensi dengan rotasi itu adalah transposisi $(1\ 2) \in \theta(G)$. Transposisi-transposisi yang lain adalah dalam $\theta(G)$. Karena setiap permutasi dapat ditulis sebagai hasilkali sikel-2 (tidak perlu saling asing) maka $\theta(G) = S_4$.

Menurut teorema homomorphisma, $G/\mathrm{Ker}\theta \cong S_4$ dan $\dfrac{|G|}{|\mathrm{Ker}\theta|} = |S_4|$. Karena $|G| = |S_4| = 24$, maka $|\mathrm{Ker}\theta| = 1$, dan θ adalah suatu isomorphisma.

Octahedron beraturan adalah dual dari kubus, sehingga grup rotasinya sama dengan grup rotasi kubus.□

Grup simetrik S_4 disebut grup *octahedral.*

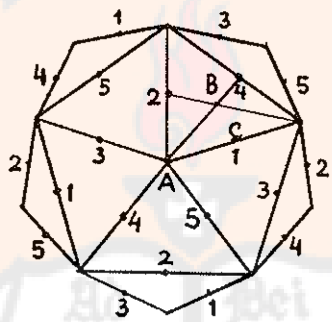
Teorema 4.6

Grup simetri rotasi suatu dodecahedron beraturan dan suatu icosahedron beraturan adalah isomorphik dengan A_5.

Bukti:

Ada 30 rusuk dalam suatu icosahedron beraturan, dan ada 15 garis yang melalui pusat icosahedron itu yang menghubungkan titik-titik tengah dua rusuk yang berhadapan (Refleksi setiap rusuk menurut titik pusat icosahedron itu adalah suatu rusuk paralel, disebut rusuk yang saling berhadapan). Jika ditentukan satu sebarang dari kelimabelas garis itu, ada tepat dua yang lain yang keduanya tegak lurus pada yang pertama dan tegak lurus satu sama lain. Ketiga garis yang saling tegak lurus itu kita sebut tiga serangkai. Ke limabelas garis itu terbagi menjadi 5 himpunan para tiga serangkai. Kita beri nomor pada ke 5 himpunan itu 1, 2, 3, 4 dan 5. Gambar 4.12 memperlihatkan separoh dari suatu icosahedron beraturan bagian atas dan kita beri label titik-titik ujung dari masing-masing tiga serangkai itu.

Suatu rotasi dari icosahedron beraturan mempermutasikan 5 tiga serangkai itu di antara mereka sendiri, dengan demikian kita telah mendefinisikan suatu homomorphisma θ : $G \longrightarrow S_5$, dengan G adalah suatu grup rotasi dari icosahedron beraturan.



Gambar 4.12: Separoh icosahedron beraturan bagian atas

Stabilisator dari sebarang titik sudut dari icosahedron itu adalah suatu grup berordo 5 yang mempermutasikan secara siklik kelima titik yang berdekatan. Orbit dari sebarang titik sudut adalah himpunan semua titik-titik sudutnya. Jadi menurut teorema 2.41 $|G| = 5 \times 12 = 60$.

Ada 3 tipe elemen nontrivial dari G yaitu:

1. Rotasi berordo 5 dengan sumbu rotasi melalui suatu titik sudut. Rotasi dengan pusat A pada gambar 4.12 berkorespondensi dengan perkalian para permutasi siklik (1 2 3 4 5), yang semuanya adalah permutasi genap.
2. Rotasi berordo 3 yang sumbu rotasinya melalui titik pusat suatu bidang sisi. Rotasi dengan sumbu melalui B pada gambar 4.12 berkorespondensi dengan perkalian per-

mutasi (1 4 2) yang adalah permutasi genap.

3. Rotasi berordo 2 dengan sumbu-sumbu ke 15 garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari rusuk-rusuk yang berhadapan. Permutasi yang berkorespondensi dengan suatu rotasi dengan sumbu melalui C, dalam gambar 4.12 adalah $(2\ 3)\circ(4\ 5)$, yang merupakan permutasi genap.

Menurut teorema 3.8 setiap permutasi genap dapat ditulis sebagai hasilkali para sikel-3 maka $\theta(G) = A_5$. Karena G dan A_5 kedua-duanya berordo 60, maka implikasi dari teorema homomorphisma adalah bahwa G adalah isomorphik dengan A_5.

Suatu dodecahedron beraturan adalah dual dari icosahedron beraturan maka grup rotasinya sama.□

Grup alternating A_5 disebut grup *icosahedral*.

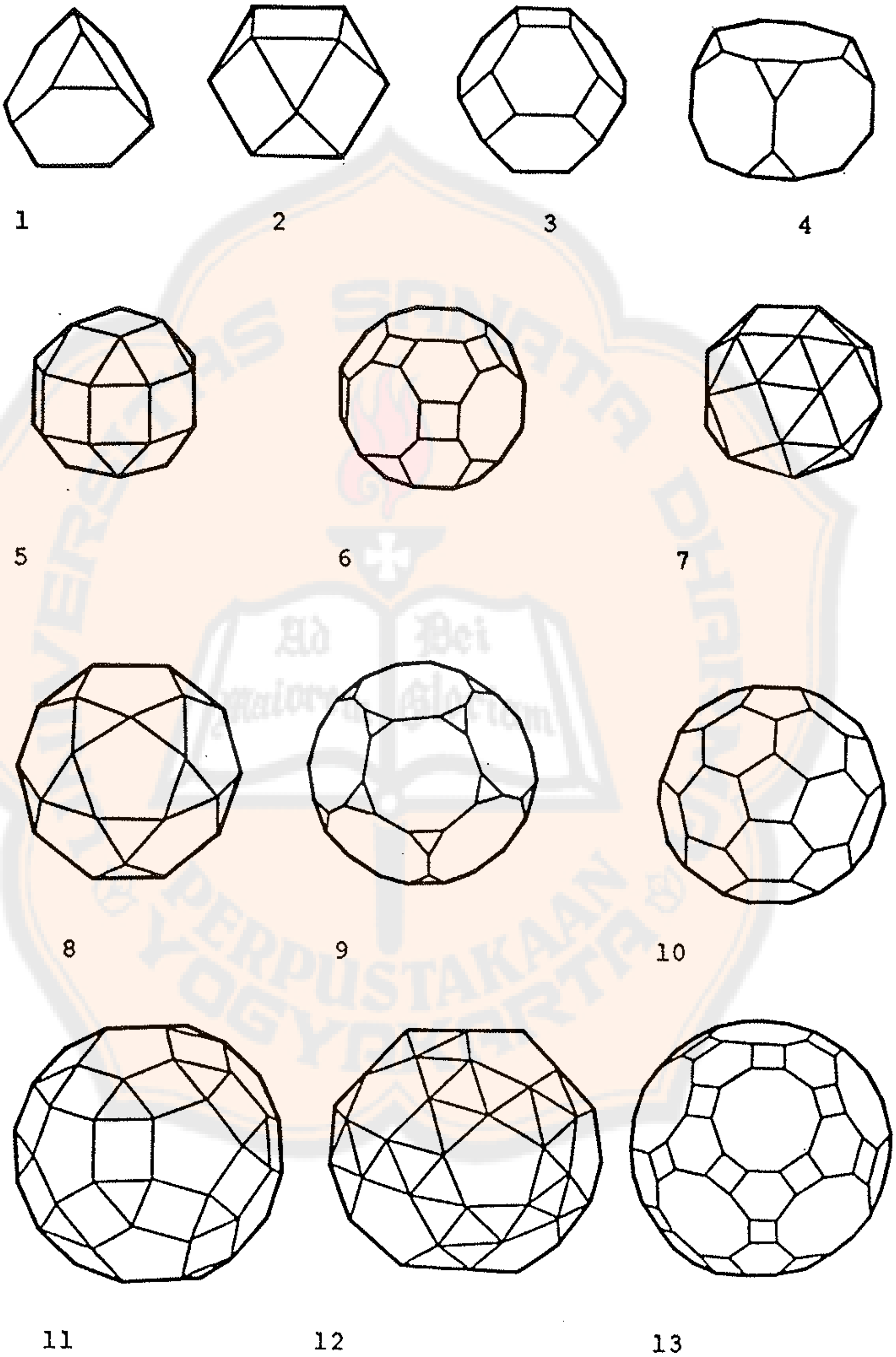
Kita telah membahas grup simetri berhingga dalam ruang berdimensi 3 secara khusus grup rotasinya. Selain "Platonic Solids" masih ada bidang banyak yaitu piramida beraturan, prisma beraturan dan "Archimedian Solids" (ada 13 macam). Grup simetri prisma beraturan adalah grup simetri D_n. Grup simetri (rotasi/isometri langsung) piramida beraturan dan "Archimedian Solids" ialah grup Siklik C_n, grup tetrahedral A_4, grup octahedral S_4 atau grup icosahedral A_5.

"Archimedian Solids" mempunyai sifat istimewa yaitu bahwa bidang-bidang sisinya merupakan segi banyak beraturan dan semua titik sudutnya sama, maksudnya bidang-bidang sisi yang mengelilingi titik-titik sudutnya sama dalam jumlah dan macamnya.

Suatu piramida beraturan /piramida-n ($n \geq 3$) adalah suatu piramida tegak yang alasnya adalah segi-n beraturan. Grup simetri dari suatu piramida-n adalah isomorphik dengan C_n. Garis penghubung titik pusat bidang alasnya dengan titik di luar bidang alasnya merupakan suatu sumbu putar/lipat-n, dan elemen-elemen dari grup itu adalah rotasi mengelilingi sumbu putar itu.

Alas suatu prisma beraturan/prisma-n ($n \geq 3$) adalah segi-n beraturan. Grup simetri dari suatu prisma-n adalah isomorphik dengan D_n. Garis penghubung antara titik pusat-titik pusat bidang alas dan tutupnya merupakan sumbu putar tingkat n. Untuk n genap, garis yang menghubungkan titik tengah-titik tengah 2 bidang sisi yang berhadapan (bidang selimut) adalah sumbu putar-2. Kalau n ganjil, setiap garis penghubung titik pusat dari suatu bidang sisi dengan titik tengah rusuk di hadapannya adalah suatu sumbu putar-2. Elemen-elemen dari grup itu adalah rotasi-rotasi terhadap sumbu-sumbu yang berbeda ini.

Selanjutnya ke 13 "Archimedian Solids" diperlihatkan dalam Gambar 4.13. Ada 13 bidang banyak yang mempunyai titik sudut yang ekuivalen dan rusuk-rusuknya sama panjang. Permukaan-permukaan dari suatu "Archimedian Solid" adalah segi banyak beraturan. Benda-benda itu dinotasikan dengan memberi nomor pada bidang-bidang permukaannya dalam ordo siklik dari salah satu(sebarang) titik sudutnya. Tabel 4.7 adalah daftar notasi dan nama dari "Archimedian Solids".



Gambar 4.13 : "Archimedian Solids"

Tabel 4.7 : Daftar notasi dan nama "Archimedian Solids"

BENDA	NO PERMUKAAN	KETERANGAN
1	3.6^2	tetrahedron terpancung
2	$(3.4)^2$	cuboctahedron
3	4.6^2	octahedron terpancung
4	3.8^2	kubus terpancung
5	3.4^3	rhombicuboctahedron
6	4.6.8	"archimedian dual" dari cubuctahedron
7	$3^4.4$	snub cube
8	$(3.5)^2$	dodeca/icosahedron terpancung
9	3.10^2	dodecahedron terpancung
10	5.6^2	icosahedron terpancung
11	3.4.5.4	
12	3^4 5	snub dodecahedron
13	4.6.10	

Dalam mempelajari tentang grup-grup simetri kebanyakan homomorphisma dan isomorphisma dengan sendirinya muncul kalau kita sedang dalam proses mencoba mendapatkan alat/sarana menghitung yang efektif untuk mencatat hasil-hasil operasi simetri. Alat penting untuk masalah grup simetri itu antara lain permutasi. Selain permutasi masih ada representasi grup simetri yaitu matriks. Dalam pembahasan grup simetri langsung dalam ruang berdimensi 3 diperlukan representasi matriks ini.

Himpunan para matriks real nxn dinotasikan dengan $\mathfrak{M}(n\times n;\mathbb{R})$. Perkalian matriks adalah suatu operasi yang bersifat assosiatif pada $\mathfrak{M}(n\times n;\mathbb{R})$. Matriks identitas I terhadap perkalian ini ialah matriks yang elemen ke (ij) nya adalah 1 jika $i = j$, dan 0 jika $i \neq j$. Matriks yang mempunyai invers terhadap perkalian itu disebut matriks *nonsingular*.

Misalnya: $X, Y \in \mathbb{M}(2\times 2;\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ maka

$XY = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix}$.

Matriks identitasnya ialah $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dan tidak semua matriks anggota himpunan ini mempunyai invers, yang mempunyai invers hanyalah matriks nonsingular. Matriks yang determinannya 1 atau -1 pasti mempunyai invers. Cara menentukan invers matriks nonsingular antara lain dengan metode mereduksi matriks itu menjadi matriks identitas I dengan transformasi elementer atau dengan metode partisi.

Matriks berordo nx1 disebut vektor kolom atau vektor saja. Elemen-elemen bilangan real di dalam vektor itu disebut komponen. Misalnya :

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Untuk memudahkan menulis vektor-vektor itu ditulis dalam bentuk transposnya, yaitu

$\underline{v}^t = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\underline{w}^t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Dan dua buah vektor tidak bisa dikalikan secara matriks kecuali bila faktor sebelah kiri kita transpose dulu, seperti

$$\underline{v}^t\underline{w} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Sekarang kita definisikan *perkalian titik* atau *perkalian skalar* dari dua buah vektor $\underline{v}$ dan $\underline{w}$ sebagai berikut

$$\underline{v}.\underline{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Maka kita peroleh hubungan $\underline{v}^t\underline{w} = \underline{v}.\underline{w}$.

Jika $\underline{v} = \underline{w}$ maka kita peroleh

$\underline{v}^t\underline{w} = \underline{v}.\underline{v} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = |\underline{v}|^2$, dengan $|\underline{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geq 0$.

Lambang $|\underline{v}|$ kita sebut *besar vektor*. Jika $\underline{v}$ dan $\underline{w}$ bukan vektor nol dan $\underline{v}.\underline{w} = 0$, maka kita katakan bahwa kedua vektor itu *ortogonal* atau saling *tegak lurus*. Dan vektor-vektor berbentuk $\underline{e}^t = (1,0, \ldots ,0)$, $\underline{f}^t = (0,1, \ldots, 0)$ ... kita sebut vektor *satuan*, karena panjangnya adalah 1.

Dalam geometri suatu vektor adalah suatu ruas garis berarah, misalnya $\underline{a}$, $\overrightarrow{AB}$ dan sebagainya. Tetapi dalam hubungannya dengan translasi, vektor adalah himpunan semua ruas garis berarah yang menunjukkan satu translasi, jadi dapat menyatakan suatu transformasi.

Sekarang kita lihat beberapa matriks yang digunakan dalam transformasi.

1. Rotasi

$R(O,90^0)$ = rotasi dengan titik pusat O dan sudut rotasi 90^0 atau $R_{1/4}$ ditunjukkan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$R(O,180^0)$ atau $R_{1/2}$ oleh matriks $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R(O,270^0)$ atau $R_{3/4}$ oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriks untuk trasformasi identitas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jika sudut rotasinya α maka matriksnya $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

dan inversnya ialah $\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2. Refleksi

Matriks refleksi terhadap sumbu x, $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, terhadap sumbu y, $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sedangkan matriks untuk refleksi terhadap garis bagi sudut kuadran I, $M_{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan terhadap garis bagi sudut kuadran II, $M_{b_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sedangkan matriks refleksi terhadap garis g yang melalui titik O dengan persamaan garis $y = x\ \mathrm{tg}\alpha$, adalah

$$M_g = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Jadi grup simetri dari bujur sangkar D_4 dan segitiga samasisi S_3 dapat kita nyatakan dengan matriks sebagai berikut.

$$D_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

dan

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinan dari para matriks rotasi adalah 1 dan dari matriks refleksi -1. Ini sesuai dengan pernyataan bahwa suatu rotasi tidak mengubah arah sedangkan suatu refleksi mengubah arah. Hasilkali dua refleksi juga tidak mengubah arah. Dan pada matriks rotasi kita lihat bahwa vektor-

vektor kolom maupun vektor-vektor barisnya merupakan vektor-vektor ortogonal. Yaitu, matriks rotasinya

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$\underline{v}_1 = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\sin\alpha$ dan $\underline{v}_2 = -\hat{i}\sin\alpha + \hat{j}\cos\alpha$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$ maka $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$,

$\underline{w}_1 = \hat{i}\cos\alpha - \hat{j}\sin\alpha$ dan $\underline{w}_2 = \hat{i}\sin\alpha + \hat{j}\cos\alpha$

$\underline{w}_1 \cdot \underline{w}_2 = 0$ maka $\underline{w}_1 \perp \underline{w}_2$.

Sekarang kita membahas subgrup-subgrup dari grup Euclides yang berkaitan dengan grup simetri bangun-bangun ruang berdimensi 3.

Pemetaan-pemetaan yang mengawetkan jarak dari ruang berdimensi 3 membentuk suatu grup disebut Grup Euclides, yang dasarnya adalah Geometri Euclides. Dengan kata lain, grup semua isometri dari $\mathbb{R}^3$ disebut grup Euclides berdimensi 3 dan dinotasikan dengan E(3). Himpunan semua translasi dalam $\mathbb{R}^3$ membentuk subgrup yang dinotasikan dengan T(3). Subgrup T(3) ini isomorphik dengan O(3), karena T(3) adalah suatu subgrup normalnya E(3) yang grup faktornya adalah E(3)/T(3), dan O(3) adalah grup ortogonalnya dimensi 3. Grup O(3) ini memuat semua matriks ortogonal real 3x3 terhadap perkalian matriks. Suatu matriks ortogonal berkorespondensi dengan suatu transformasi linear dari $\mathbb{R}^3$ yang mengawetkan perkalian skalar dan jarak. A adalah matriks real ortogonal 3x3 bila $AA^T = I$, dengan I adalah matriks identitas dan A^T adalah transpose dari matriks A.

Teorema 4.7

Grup isometri dalam $\mathbb{R}^3$ yang tidak mengubah titik asal adalah isomorphik dengan grup ortogonal O(3).

Bukti.

Andaikan α adalah suatu isometri dalam $\mathbb{R}^3$, yang tidak mengubah titik asal, $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ adalah 2 vektor dalam $\mathbb{R}^3$. Dipandang jajaran genjang dengan titik-titik $\underline{o}$, $\underline{x}$, $\underline{y}$ dan $\underline{x}+\underline{y}$. Oleh isometri α jajaran genjang itu ditransformasikan ke $\underline{o}$, $\alpha(\underline{x})$, $\alpha(\underline{y})$ dan $\alpha(\underline{x}+\underline{y})$. Jadi $\alpha(\underline{x}+\underline{y}) = \alpha(\underline{x})+\alpha(\underline{y})$. Garis yang menghubungkan $\underline{o}$ ke $\underline{x}$ melalui $\lambda\underline{x}$, untuk setiap bilangan real λ. Oleh α garis ini ditransformasikan ke garis yang menghubungkan $\underline{o}$ dengan $\alpha(\underline{x})$, yang melalui $\alpha(\lambda\underline{x})$. Juga $\alpha(\lambda\underline{x}) = \lambda\alpha(\underline{x})$, sehingga α adalah suatu transformasi linear.

Jika A adalah matriksnya transformasi linear α ini terhadap sistem koordinat maka A pasti matriks ortogonal. Sebaliknya, sebarang matriks ortogonal menentukan suatu transformasi linear yang mengawetkan jarak, sekaligus merupakan suatu isometri yang tidak mengubah titik asal. Korespondensi antara matriks-matriks dan transformasi linear menghasilkan suatu isomorphisma antara O(3) dan isometri-isometri yang tak mengubah titik asal.□

Untuk selanjutnya kita mengidentifikasi grup ortogonal O(3) dengan isometri-isometri dari $\mathbb{R}^3$ yang tidak mengubah titik asal.

Selanjutnya matriks ortogonal adalah invertibel dengan $A^{-1} = A^t$. Jika detA adalah notasi dari determinan dari suatu matriks A, maka detA = ± 1 jika A ortogonal, karena jika A ortogonal maka $\det(A^tA) = (\det A^t)(\det A) = (\det A)^2$. Jadi dapat kita katakan bahwa grup orthogonal O(3) adalah suatu grup matriks real, dan sebarang elemen pastilah mempunyai determinan +1 atau -1. Pemetaan determinannya adalah

$$\det: O(3) \longrightarrow \{1, -1\}$$

adalah suatu homomorphisma dari (O(3),.) ke ({1,-1},.). Kernelnya yang memuat matriks-matriks orthogonal dengan determinan +1 disebut grup orthogonal spesial dimensi 3 dan dinotasikan dengan $SO(3) = \{A \in O(3) | \det A = +1\}$. Grup orthogonal spesial itu merupakan suatu subgrup normalnya O(3) yang berindeks 2. Elemen-elemen dari SO(3) disebut isometri langsung, sedangkan elemen-elemen di dalam koset yang lain dari O(3) oleh SO(3), memuat matriks-matriks orthogonal dengan determinan -1, disebut isometri lawan atau tidak langsung.

Grup-grup rotasi langsung dari "Platonic Solids" semua menjadi subgrup-subgrup dari SO(3). Setiap elemen $A \in SO(3)$ mempunyai sumbu tetap, dan A itu adalah suatu rotasi terhadap sumbu tersebut.

Oleh setiap elemen dari O(3) bola satuan berjari-jari 1, yaitu $S^2 = \{x \in R^3 \mid |x| = 1\}$ dipetakan ke dirinya sendiri. Setiap grup rotasi menetapkan titik asalnya ditentukan oleh beraksinya grup itu pada S^2 itu. Karena setiap elemen $\alpha \in SO(3)$ mempunyai sumbu tetap dan α adalah rotasi terhadap sumbu itu maka untuk setiap elemen nonidentitas $\alpha \in SO(3)$ pasti ada 2 titik kutub yang berlawanan pada S^2 atau dengan kata lain ada $x \in S^2$ sedemikian hingga $\alpha(x) =$

x dan $\alpha(-x) = -x$. x dan -x ini disebut kutub-kutub dari α. Jika ditentukan P ("pole") adalah himpunan para kutub dari elemen-elemen G yang bukan identitas. G adalah suatu subgrup dari SO(3) yang ordonya berhingga, maka G beraksi pada himpunan P.

Teorema 4.8

G adalah subgrup dari SO(3) dan P adalah himpunan semua kutub dari elemen-elemen nonidentitasnya maka G beraksi pada P.

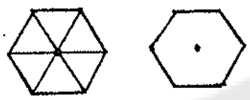
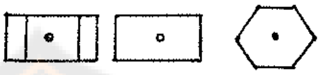
Bukti.

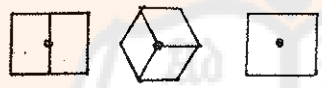
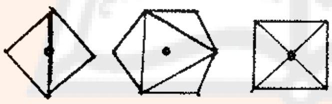
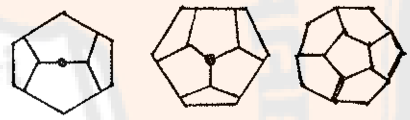
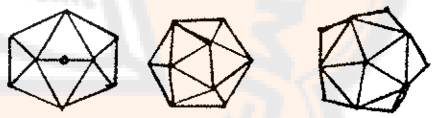
Kita melihat bahwa G mempermutasikan kutub-kutub itu di antara mereka sendiri. Andaikan $\alpha,\beta \in G$ dengan α,β bukan elemen identitas dan x adalah suatu kutub dari α. Maka $(\beta\alpha\beta^{-1})\beta(x) = \beta\alpha(x) = \beta(x)$.

Jadi $\beta(x)$ adalah suatu kutub dari $\beta\alpha\beta^{-1}$. Akibatnya bayangan dari sebarang kutub adalah kutub yang lain, jadi G beraksi pada himpunan kutub-kutub itu.□

Sekarang marilah kita mengklasifikasikan grup-grup rotasi dengan melihat banyaknya elemen dalam Stabilisator dan Orbit dari para kutub. Stabilisator dari suatu kutub x, yaitu Stabx = $\{\alpha \in G \mid \alpha(x) = x\}$ adalah suatu subgrup dari G, sedangkan Orbx = $\{\beta(x) \mid \beta \in G\}$ adalah suatu himpunan dari P. Dalam Tabel 4.11 kita melihat stabilisator dan orbit kutub- kutub dari grup C_n, D_n, A_4, S_4 dan A_5. (Kita bagi menjadi 2 bagian yaitu bangun yang mempunyai dual dan yang tidak).

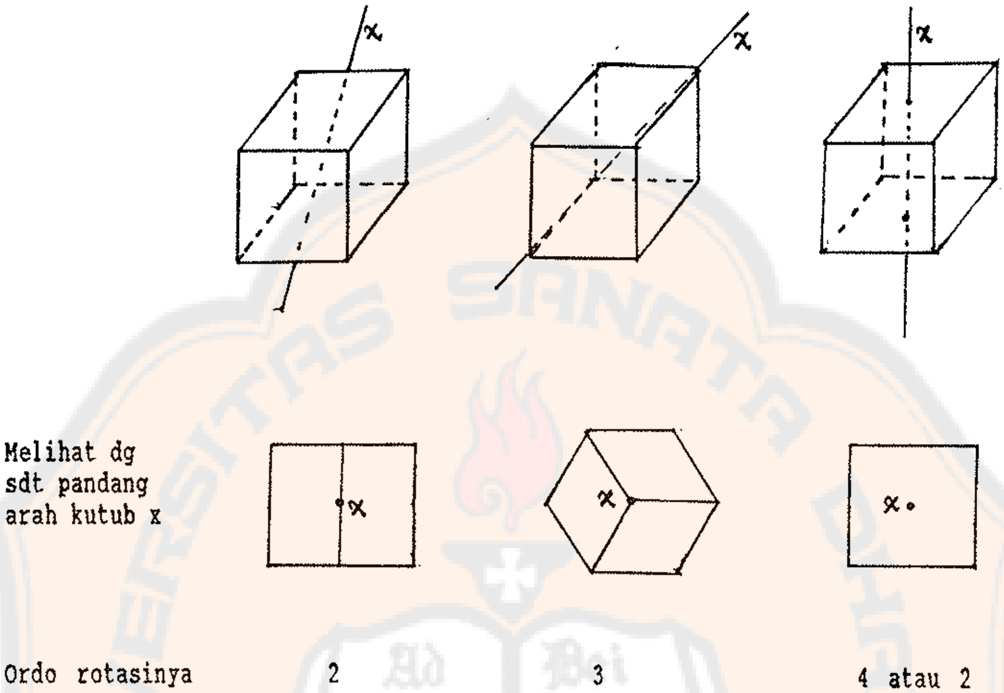
Tabel 4.11: Daftar stabilisator dan Orbit C_n, D_n, A_4, S_4, A_5

Grup G = |G| = Simetrinya bangun	C_n n  piramida-n	D_n 2n  prisma-n	A_4 12  tetrahedron
Melihat dg sudut pandang arah kutub x |Stabx|= |Orb x|=	 n n 1 1	 2 2 n n n 2	 2 3 3 6 4 4

Grup G = |G| = Simetrinya bangun	S_4 24  kubus/octahedron	A_5 60  dodecahedron / icosahedron
Melihat dg sudut pandang arah kutub x |Stabx|= |Orb x|=	 atau atau atau  2 3 4 12 8 6	 atau atau atau  2 3 5 30 20 12

Setiap grup Stabilisator, Stabx, adalah suatu subgrup siklik dari para rotasi bangun beraturan itu menurut sumbu yang melalui x. Orbit dari x yaitu Orbx adalah himpunan para kutub yang bertipe sama dengan x. Untuk memeriksa banyaknya elemen-elemen dalam para stabilisator dan para orbit dipergunakan rumus $|G| = |Stabx||Orbx|$, untuk setiap kutub x.

Misalnya, kubus mempunyai 3 tipe kutub dan 4 tipe elemen nontrivial dalam grup rotasinya, ini kita ilustrasikan dengan gambar 4.14.



Gambar 4.14: Rotasi-rotasi dari kubus.

Teorema 4.9

Sebarang subgrup berhingga dari SO(3) adalah isomorphik dengan salah satu dari $C_n(n \geq 1)$, $D_n(n \geq 2)$, A_4, S_4 atau A_5.

Bukti.

Andaikan G adalah suatu subgrup berhingga dari SO(3). Diambil suatu himpunan kutub-kutub $x_1, \ldots, x_r$, satu dari masing-masing orbit. Selanjutnya $p_i = |\mathrm{Stab}x_i|$ dan $q_i = |\mathrm{Orb}\ x_i|$, maka $p_i q_i = n = |G|$.

Setiap elemen G yang bukan elemen identitas mempunyai 2 kutub, maka banyaknya kutub dengan pengulangan-pengulangannya adalah 2(n -1). Kutub x_i terpikir/bertindak sebagai suatu kutub dari suatu elemen adalah sebanyak p_i-1 kali. Ada sebanyak q_i kutub yang bertipe sama seperti x_i. Maka dari itu, banyaknya kutub total, dengan menghitung pengulangannya, adalah

$$2(n-1) = \sum_{i=1}^{r} q_i(p_i-1) = \sum_{i=1}^{r} q_ip_i - q_i = \sum_{i=1}^{r}(n-q_i)$$

sehingga

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad \text{(kedua ruas dibagi n).} \quad .....1)$$

Jika G bukan grup trivial, $n \geq 2$ dan berlakulah

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2 \quad ....2)$$

Karena x_i adalah sebuah kutub dari elemen-elemen nonidentitas, $\text{Stab}x_i$ memuat sebuah elemen nonidentitas, dan $p_i \geq 2$. Maka dari itu $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{p_i} < 1$. Menurut persamaan 1) bilangan r pasti 2 atau 3.

Jika orbitnya 2, maka $2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2}$

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \Leftrightarrow 2 = q_1 + q_2 \text{ (dikalikan n).}$$

Jadi $q_1 = q_2 = 1$, dan $p_1 = p_2 = n$. Ini berarti $x_1 = x_2$, sehingga hanya ada satu sumbu rotasi. Maka dari itu, G isomorphis dengan grup siklik C_n.

Jika ada 3 orbit, maka

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_3} \text{ dan}$$

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \quad .... 3)$$

Andaikan $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Bila $p_1 \geq 3$, maka

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

Menurut persamaan 2) dan 3) maka ada kontradiksi sebab $\frac{2}{n} > 0$. Jadi $p_1 = 2$ dan $q_1 = \frac{n}{2}$.

Jika $p_1 = 2$ maka $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$ atau

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \quad \ldots\ldots \ 4).$$

Jika $p_2 \geq 4$, maka $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, dan menurut 4) maka ada kontradiksi sebab $\frac{2}{n} > 0$. Jadi p_2 adalah 2 atau 3. Kemungkinan-kemungkinannya sebagai berikut.

Kasus (i) $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = \frac{n}{2}$, n genap dan $n \geq 4$,
$q_1 = \frac{n}{2}$, $q_2 = \frac{n}{2}$ dan $q_3 = 2$.

Kasus (ii) $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 3$, $n = 12$,
$q_1 = 6$, $q_2 = 4$ dan $q_3 = 4$.

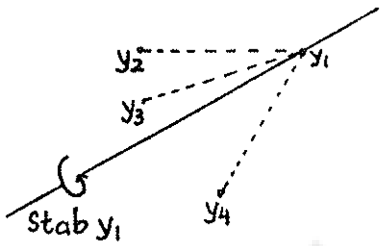
Kasus (iii) $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$, $n = 24$,
$q_1 = 12$, $q_2 = 8$, dan $q_3 = 6$.

Kasus (iv) $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $n = 60$,
$q_1 = 30$, $q_2 = 20$ dan $q_3 = 12$.

Jika $p_2 = 3$ dan $p_3 \geq 6$, maka $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ yang kontradiksi dengan persamaan 3), karena $\frac{2}{n} > 0$.

Kasus (i). Andaikan $H = \text{Stab } x_3$. H ini adalah suatu grup rotasi terhadap 1 sumbu putar, itu berarti suatu grup siklik berordo $\frac{n}{2}$. Sebarang elemen A yang lain yang tidak di H adalah berordo 2, berarti setengah putaran (half turn). Maka dari itu, $G = H \cup HA$, dan G adalah isomorphik dengan $D_{n/2}$, grup dihedral berordo n.

Kasus (ii). Andaikan y_1, y_2, y_3 dan y_4 adalah 4 buah kutub dalam orbit x_2. Sekarang $p_2 = |\text{Stab } y_i| = 3$; jadi Stab y_1 mempermutasikan y_2, y_3 dan y_4 seperti dalam gambar 4.15.



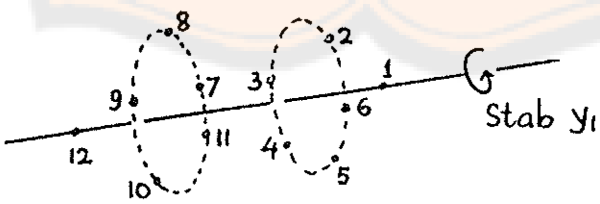
Gambar 4.15: Stab y_1 mempermutasikan y_2, y_3, y_4

Maka dari itu, $|y_2 - y_1| = |y_3 - y_1| = |y_4 - y_1|$.

Dengan cara yang sama akan diperoleh Stab y_2 dan Stab y_3. Jadi y_1, y_2, y_3 dan y_4 adalah titik-titik sudut suatu tetrahedron beraturan, dan G adalah suatu subgrup simetri tetrahedron. Karena $|G| = 12$, maka G adalah grup rotasi penuh A_4.

Kasus (iii). Andaikan y_1, y_2, ... y_6 adalah keenam kutub dalam Orb x_3. Karena $p_3 = 4$, suatu rotasi dalam stabilisator y_i pasti menentukan 2 dari para kutub dan merotasikan kutub-kutub yang lain siklik 4 kali. Jadi y_1, y_2 ... y_6 tetap pada titik-titik sudut suatu octahedron beraturan. Karena $|G| = 24$, maka G merupakan grup rotasi penuh dari octahedron yaitu S_4.

Kasus (iv).



Gambar 4.16: Operasinya suatu elemen berordo 5

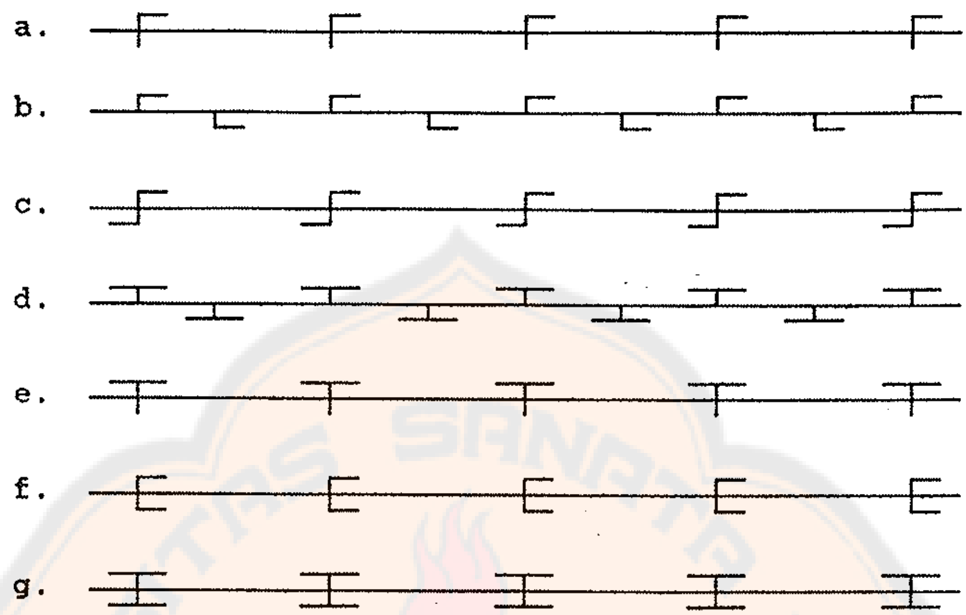
Andaikan y_1, y_2, ... , y_{12} adalah ke 12 kutub dalam

Orb x_3. Sebarang elemen berordo 5 dalam G mempermutasikan kutub-kutub itu dan pasti akan menetapkan 2 kutub dan mempermutasikan yang lain-lainnya, seperti Gambar 4.16 dalam 2 buah sikel-5 yang saling asing, kita sebut (2 3 4 5 6)∘(7 8 9 10 11), dengan notasinya y_i adalah i. Selanjutnya y_2, y_3, y_4, y_5 dan y_6 membentuk segi-5 beraturan dan jarak mereka dari y_1 semuanya sama. Dengan cara yang sama untuk rotasi berordo 5 terhadap kutub-kutub yang la-in, kita lihat bahwa kutub-kutub adalah titik-titik dari suatu icosahedron, dan grup G adalah grup rotasi langsung A_5 dari icosahedron.□

B. Grup Simetri tak berhingga dalam ruang berdimensi 2

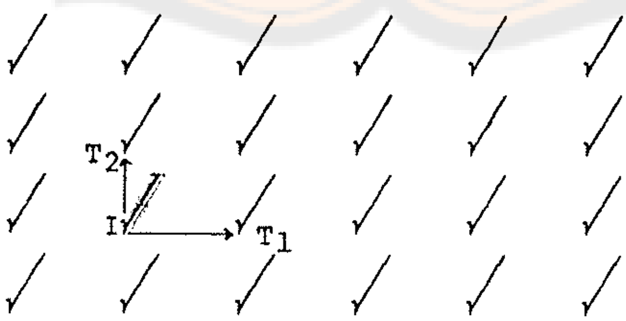
Bangun-bangun yang grup simetrinya tak berhingga dapat kita temukan misalnya pada dekorasi atau hiasan yang melintang pada dinding di dalam/luar rumah atau gedung, pada kain, atau kain batik; dengan ciri khas coraknya berulang-ulang takberhingga kali. Ada 2 klas grup-grup simetri tak-berhingga.

1. Grup Simetri dari jalur tak berhingga, yaitu grup simetri dari bangun-bangun yang membiarkan satu garis lurus tetap. Ada 7 macam kelompok jalur tidak berhingga yang masing-masing mempunyai grup operasi simetri yang berlainan, dan disebut "Frieze group". Setiap jalur tidak berhingga mempunyai grup simetri salah satu dari 7 macam grup tersebut. Berikut ini contoh jalur-jalur yang dapat dipandang sebagai kelompok dasar yang mempunyai grup simetri tidak berhingga.

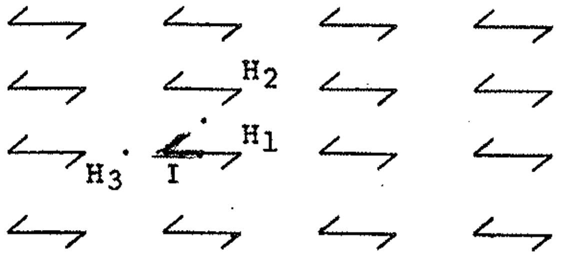


Gambar 4.17 : Sebuah contoh dari ke 7 jalur tak hingga/"Frieze group"

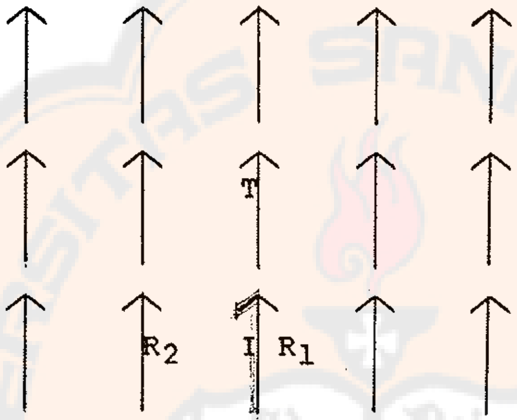
2. Grup-grup simetri takberhingga dari bangun yang tidak membiarkan satu garis lurus yang tetap. Ada 17 macam kelompok bangun demikian. Pola dari tipe bangun-bangun semacam itu biasanya ditemukan pada hiasan dinding, langit-langit rumah/bangunan atau aransemen tembok yang dibuat dari batubata. Gambar-gambar berikut ini dapat dipandang sebagai satu pola yang berkorespondensi dengan masing-masing grup, sekaligus para generatornya.



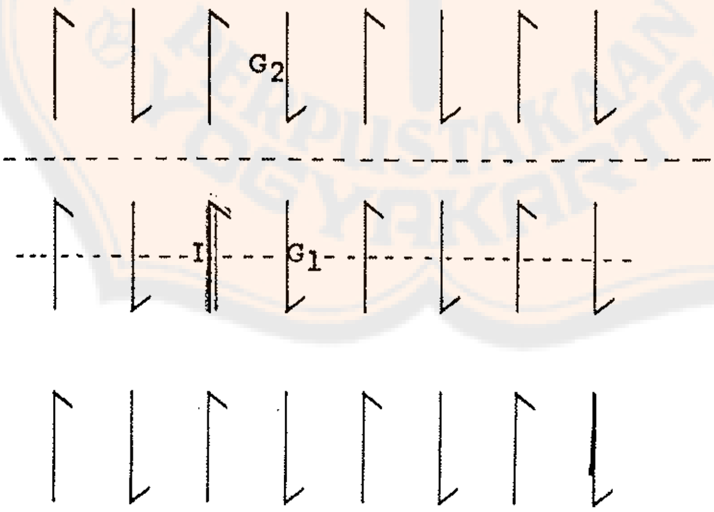
Gambar 4.18: **p1** dihasilkan oleh 2 translasi



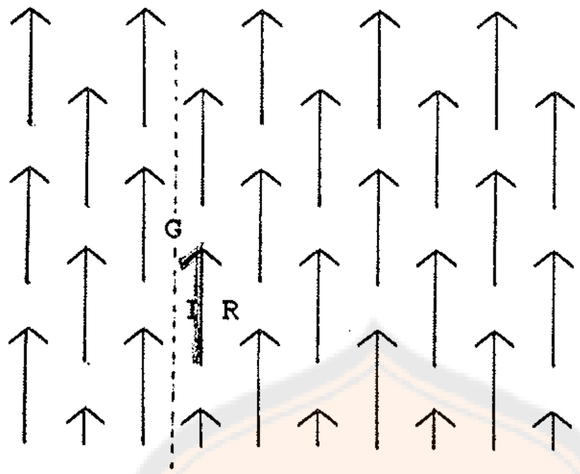
Gambar 4.19: **p2** dihasilkan oleh 3 setengah putaran



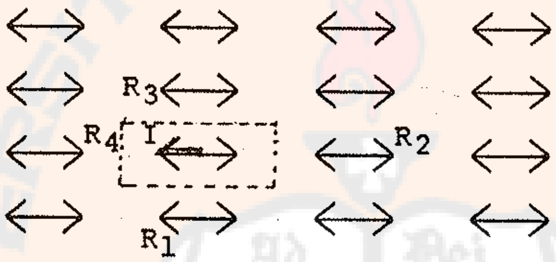
Gambar 4.20 : **pm** dihasilkan oleh 2 refleksi dan satu translasi



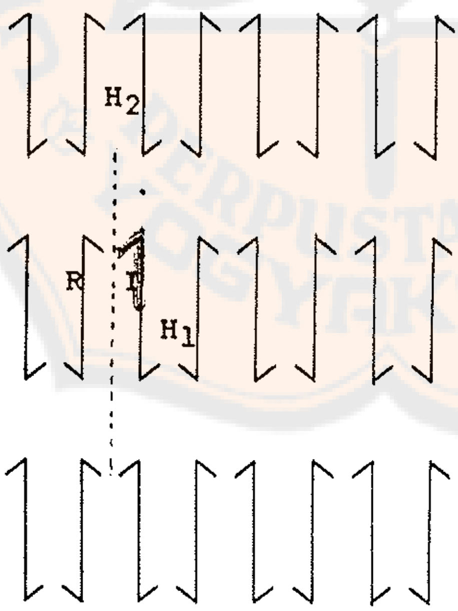
Gambar 4.21 :**pg** dihasilkan oleh 2 refleksi geser yang sejajar



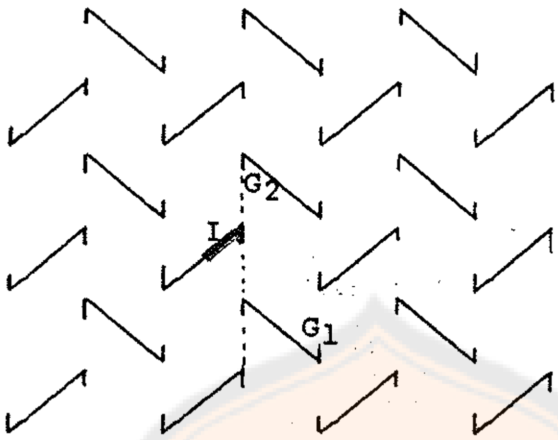
Gambar 4.22 : cm dihasilkan oleh 1 refleksi dan 1 refleksi geser



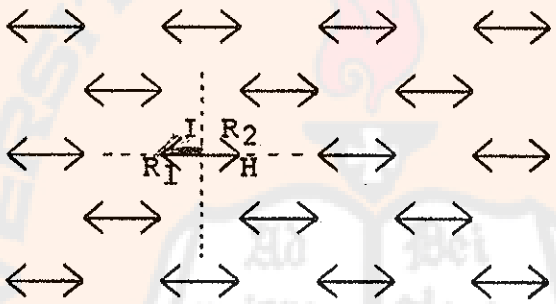
Gambar 4.23 : pmm dihasilkan oleh semua refleksi terhadap ke 4 sisi suatu persegi panjang



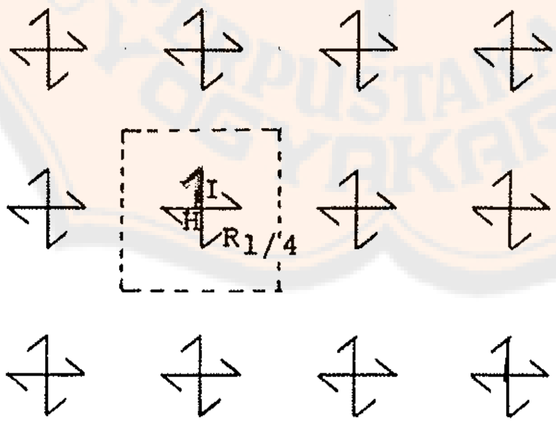
Gambar 4.24 : pmg dihasilkan oleh 1 refleksi dan 2 setengah putaran



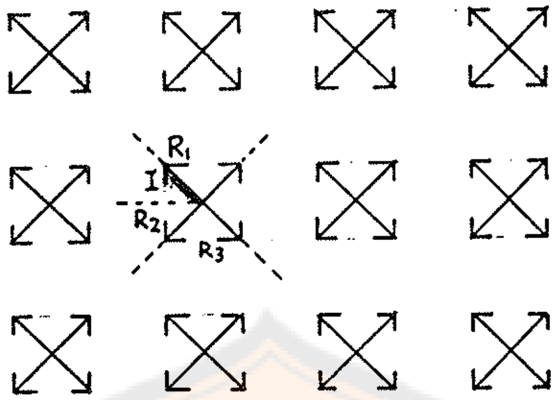
Gambar 4.25 : **pgg** dihasilkan oleh 2 refleksi geser yang saling tegaklurus



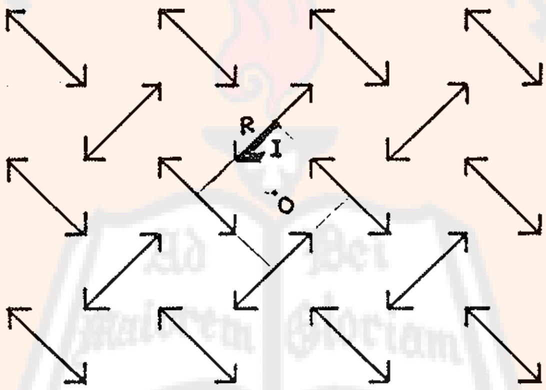
Gambar 4.26 : **cmm** dihasilkan oleh 2 refleksi saling tegak lurus dan 1 setengah putaran



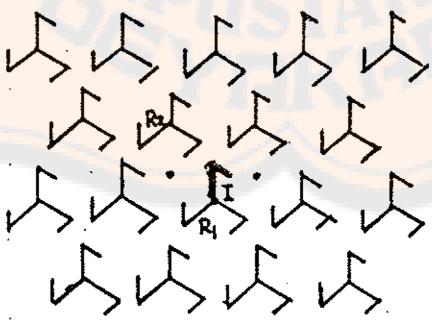
Gambar 4.27 : **p4** dihasilkan oleh 1 setengah putaran dan 1 seperempat putaran



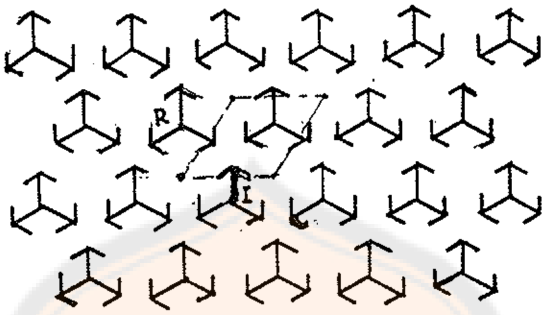
Gambar 4.28 : **p4m** dihasilkan oleh semua refleksi terhadap ke 3 sisi segitiga yang sudutnya 45^0, 45^0, 90^0.



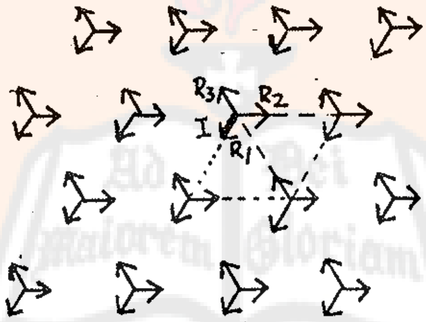
Gambar 4.29 : **p4g** dihasilkan oleh 1 refleksi dan 1 seperempat putaran



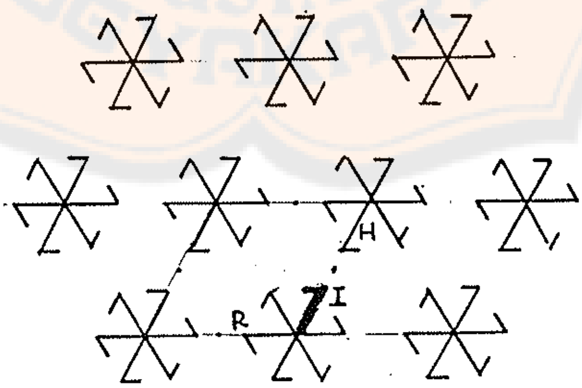
Gambar 4.30 : **p3** dihasilkan oleh 2 rotasi dengan sudut putar 120^0



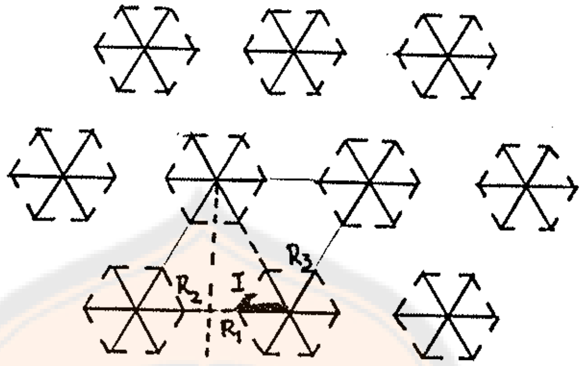
Gambar 4.31 : **p3ml** dihasilkan oleh 1 refleksi dan 1 rotasi dengan sudut putar 120^0



Gambar 4.32 : **p31m** dihasilkan oleh semua refleksi terhadap ke 3 sisi suatu segitiga samasisi



Gambar 4.33 : **p6** dihasilkan oleh 1 setengah putaran dan suatu rotasi dg sudut putar 120^0



Gambar 4.34 : **p6m** dihasilkan oleh semua refleksi menurut ke 3 sisi suatu segitiga yang sudutnya 30^0, 60^0, 90^0.

Sekarang marilah kita membahas ke tujuh jalur takberhingga. Tetapi untuk memperjelas grup tipe jalur ke 6 dan 7 kita perhatikan dulu contoh tentang "direct product" berikut ini.

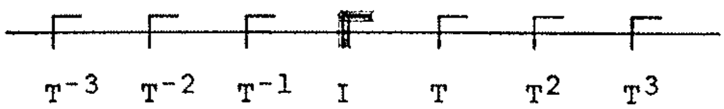
Contoh: $\mathbb{Z}_3 = \{[0],[1],[2]\}$ dan $S_2 = \{(1),\ (1\ 2)\}$, maka

$$\mathbb{Z}_3 \times S_2 = \{([0],(1)),\ ([1],(1)),\ ([2],(1),\ ([0],(1\ 2)),\ ([1],(1\ 2)),\ ([2],(1\ 2))\}.$$

Dan hasilkali $([1],(1\ 2))([2],(1)) = (([1]\oplus[2]),(1\ 2)(1))$

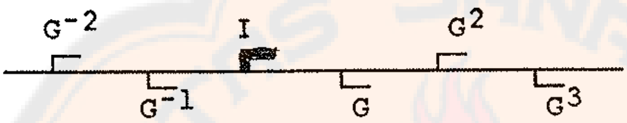
$$= ([0],(1\ 2)).$$

Dengan mengasumsikan bahwa jalur-jalur itu diperpanjang tak hingga kearah kanan dan kiri maka Grup simetri dari ke 7 jalur tak berhingga ialah

a. 

Grup dari jalur di atas hanya memuat translasi. Jika T adalah notasi dari translasi dengan jarak terkecil ke arah kanan, maka grup itu dapat dinyatakan dengan $F_1 = \{T^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, yang merupakan grup siklik tak berhingga yang dihasilkan oleh translasi tunggal dan dinotasikan dengan C_∞. Grup simetri ini juga sering ditulis sebagai

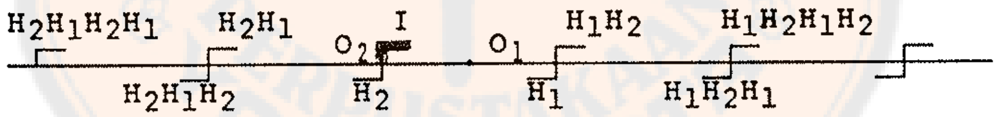
$F_1 = \{\ .\ .\ .\ ., T^{-3}, T^{-2}, T^{-1}, I, T, T^2, T^3, .\ .\ .\ .\ \}$.

b. 

Grup dari jalur di atas hanya memuat refleksi geser. Jika G adalah notasi dari refleksi geser itu, dan pangkat genap dari refleksi geser itu adalah translasi maka grup simetri dari jalur itu juga grup siklik tak berhingga atau C_∞ yang dihasilkan oleh G.

Jadi $F_2 = \{G^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\ .\ .\ .\ ., G^{-2}, G^{-1}, I, G, G^2, G^3, .\ .\ .\ .\ .\}$.

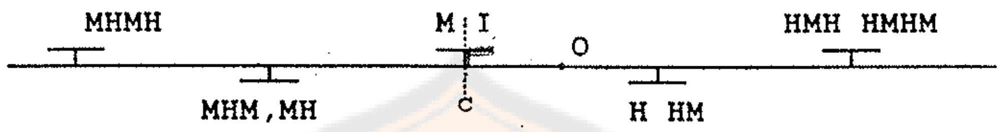
c. 

Grup simetri ini terdiri dari 2 macam setengah putaran ("Half-turn") H_1 dan H_2. Sehingga grup itu dapat ditulis sebagai $F_3 = \{\ ...\ , H_2H_1H_2, H_2H_1, H_2, I, H_1, H_1H_2, H_1H_2H_1, \ ...\ \}$.

Grup jalur di atas juga dapat dikatakan memuat sebuah translasi dan rotasi, atau dihasilkan oleh suatu translasi misalnya dinotasikan dengan T dan suatu rotasi 180^0 dengan pusat suatu titik misalnya O_1, dinotasikan dengan $R = H_1$. Dengan demikian grup simetrinya adalah suatu grup dihedral tak berhingga, D_∞.

Jadi $F_3 = \{ T^k R^m \mid k \in \mathbb{Z},\ m = 0,1 \}$.

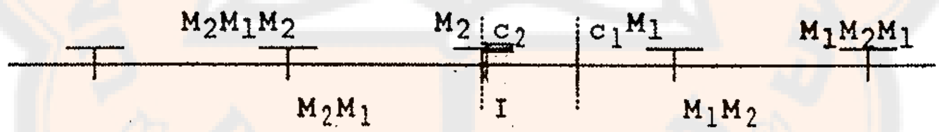
d.



Grup simetri jalur di atas dihasilkan oleh suatu refleksi M dan suatu setengah putaran H, sehingga grup simetrinya adalah grup simetri dihedral tak berhingga, D_∞ dan dinyatakan sebagai $F_4 = \{ \ldots, MHMH, MHM, MH, M, I, H, HM, HMH, HMHM, \ldots \}$.

Grup simetri jalur di atas juga dapat dikatakan dihasilkan oleh suatu refleksi geser G dan suatu rotasi 180^0 dengan pusat suatu titik misalnya titik O dan dinotasikan dengan R. Jadi $F_4 = \{ G^k R^m \mid k \in \mathbb{Z},\ m = 0,1 \}$.

e.

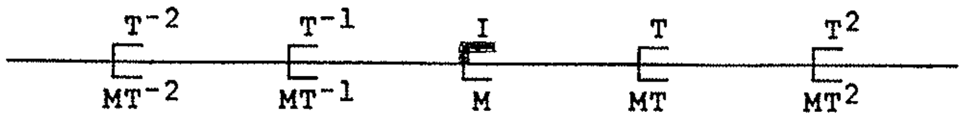


Grup simetri jalur di atas dihasilkan oleh 2 refleksi M_1 dan M_2 berturut-turut terhadap cermin c_1 dan c_2, sehingga grup simetrinya adalah grup simetri dihedral tak berhingga, D_∞ dan dinyatakan sebagai

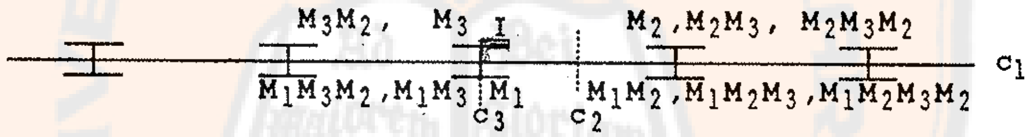
$F_5 = \{ \ldots, M_2M_1M_2, M_2M_1, M_2, I, M_1, M_1M_2, M_1M_2M_1, \ldots \}$.

Grup simetri ini juga dapat dikatakan dihasilkan oleh suatu traslasi T dan suatu refleksi M dengan cermin c_1. Dengan rumus $TM = MT^{-1}$ maka

$F_5 = \{T^k M^m \mid k \in \mathbb{Z},\ m = 0,1\}$.

f. 

Grup simetri jalur di atas dihasilkan oleh suatu translasi T dan suatu refleksi M dengan sumbu simetri garis horisontal. Grup simetrinya adalah "direct product" dari grup simetri siklik tak berhingga dengan grup simetri dihedral D_1, yaitu F_6 = { ..., (T^{-3},I), (T^{-2},I), (T^{-1},I), (I,I), (T,I), (T^2,I), (T^3,I), ... , ... , (T^{-3},M), (T^{-2},M), (T^{-1},M), (I,M), (T,M), (T^2,M), ...}. Jadi grup simetri jalur di atas adalah $C_\infty \times D_1$.

g. 

Grup simetri jalur di atas dihasilkan oleh 3 refleksi, berturut-turut M_1 dengan sumbu simetri horisontal, M_2 terhadap cermin c_2 dan M_3 terhadap cermin c_3. Grup simetrinya juga "direct product" dari grup simetri dihedral tak berhingga D_∞ dengan grup simetri dihedral D_1.

Jadi F_7 = { ..., (M_3M_2,I), (M_3,I), (I,I), (M_2,I), (M_2M_3,I), $(M_2M_3M_2,I)$, ..., ..., (M_3M_2,M_1), (M_3,M_1), (I,M_1), (M_2,M_1), (M_2M_3,M_1), ... }, dan grup simetri jalur di atas adalah $D_\infty \times D_1$.

Grup simetri dari pola gambar 4.18 - 4.34 disebut ke tujuh belas grup "crystallography" dalam ruang berdimensi dua atau ke tujuh belas "wallpaper groups". Tabel 4.9 berikut ini memperlihatkan notasi dari masing-masing grup sekaligus para generatornya.

Tabel 4.9 : Daftar ke 17 "crystallography groups"

GAMBAR	SIMBUL	GENERATOR-GENERATOR
4.24	p1	2 macam translasi
4.25	p2	3 setengah putaran
4.26	pm	2 refleksi dan sebuah translasi
4.27	pg	2 refleksi geser yang sejajar
4.28	cm	1 refleksi dan 1 refleksi geser sejajar
4.29	pmm	para refleksi terhadap ke 4 sisi suatu persegi panjang
4.30	pmg	Suatu refleksi dan 2 setengah putaran
4.32	cmm	2 refleksi saling tegak-lurus dan 1 setengah putaran
4.33	p4	1 setengah putaran dan 1 seperempat putaran
4.34	p4m	semua refleksi menurut ke 3 sisi segitiga yang sudutnya 45^0, 45^0 dan 90^0
4.35	p4g	1 refleksi dan 1 seperempat putaran
4.36	p3	2 rotasi dengan sudut putar 120^0
4.37	p3m1	1 refleksi dan 1 rotasi dengan sudut putar 120^0
4.38	p31m	semua refleksi menurut ke 3 sisi suatu segitiga samasisi
4.39	p6	1 setengah putaran dan suatu rotasi dengan sudut putar 120^0
4.40	p6m	semua refleksi menurut ke 3 sisi suatu segitiga yang sudutnya 30^0, 60^0 dan 90^0.

Gambar-gambar pada Lampiran 2 - 7 adalah gambar dari motif kain atau kain batik yang telah ditentukan grup simetrinya seperti telah tercantum pada keterangan dari masing-masing gambar.

BAB V

KESIMPULAN

A. Kesimpulan

Grup simetri suatu bangun T adalah himpunan semua operasi simetri yang membiarkan bangun T invariant terhadap komposisi. Grup simetri berhingga suatu bangun dalam bidang adalah C_n atau D_n, sedang dalam ruang C_n atau D_n atau grup tetrahedral A_4 atau S_4 atau grup icosahedral A_5. Grup simetri tak berhingga bangun dalam bidang adalah ke tujuh jalur tak berhingga "Frieze group" dan ke tujuhbelas "Crystallography group". Ada 2 representasi grup simetri yaitu representasi permutasi dan representasi matriks.

Untuk menentukan tipe simetri bangun-bangun dalam bidang maupun dalam ruang dipergunakan teorema-teorema antara lain: Teorema Koset suatu subgrup dan Teorema Lagrange, yang mengatakan tentang hubungan ordo suatu grup dan subgrupnya; teorema homomorphisma yang muncul untuk memberi nama grup simetrinya dan mencari representasinya yang sesuai; grup faktor; subgrup normal; direct product; kernel dari suatu homomorphisma, aksi grup pada suatu himpunan; elemen konjugat dan klas konjugat serta teorema Leonardo da Vinci.

Ada hubungan antara grup simetri (Matematika) dan seni yaitu bahwa Grup Simetri dapat dipergunakan untuk mengukur keindahan suatu bangun. Maksudnya, setiap bangun dapat ditentukan ukuran simetrinya, yaitu ordo dari grup simetri bangun tersebut. Ordo grup simetri bangun, baik dalam bidang maupun dalam ruang berbeda-beda. Semakin besar ordo grup simetri suatu bangun, maka semakin nampak indah bangun tersebut.

B. Implikasi

Ilmu Pengetahuan dan Teknologi terus berkembang, demikian pula Matematika. Grup simetri dapat diajarkan di Sekolah Menengah supaya dijadikan bekal untuk mempelajari Matematika terutama geometri transformasi, matriks, dan struktur Aljabar. Grup simetri juga meluaskan cakrawala siswa sehingga mudah menemukan model-model Matematika dari benda-benda nyata yang banyak terdapat di sekitar kita. Sedangkan penerapan grup simetri secara langsung pada Ilmu Pengetahuan adalah untuk memecahkan masalah-masalah pengelompokan kristal-kristal sesuai dengan tipe simetrinya. Tipe simetri suatu kristal adalah ukuran keteraturan susunan atom-atom atau molekul-molekul dalam kristal tersebut. Susunan atom-atom atau molekul-molekul ini kemungkinan dapat dilihat melalui teknik penyinaran dengan sinar-X.

C. Saran

Bagi calon guru alangkah baiknya memperdalam grup simetri dan memperhatikan keindahan dari benda-benda nyata, mengingat kedua hal ini bisa dipergunakan untuk memotivasi peserta didik dalam mempelajari dan mencintai Matematika terutama Geometri Transformasi, Matriks, dan Struktur Aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2nd Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969
2. Durbin, John R. *Modern Algebra*. 2nd Ed. New York: John Wiley & Sons, 1985
3. Fraleigh, John B. *A First Course In Abstract Algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley Publising Company, 1989
4. Gilbert, William J. *Modern Algebra With Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1976
5. Herstein, I. N. *Topics In Algebra*. New York: Blaisdell Publishing Company, 1964
6. Martin, G.E. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1982
7. McCoy, Neal H. *Introduction to Modern Algebra*. Boston: Allyn and Bacon, INC, 1987
8. Moeharti Hadiwidjojo. *Vektor dan Transformasi dalam Geometri*. Yogyakarta: FPMIPA IKIP Yogyakarta, 1989
9. Moeharti Hadiwidjojo. *Model Matematika Sebagai Sarana Pemantapan Belajar Matematika*, Makalah yang disampaikan pada Konferensi Matematika Nasional V Universitas Indonesia, Jakarta: 5-8 Desember 1983

10 Nian S. Djoemena. *Ungkapan Sehelai Batik*. Jakarta: Penerbit Djambatan, 1990

11.Rawuh. *Geometri Transformasi*. Jakarta: Departemen Pendidikan Dan Kebudayaan, Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi, 1983

12.Soehakso, R.M.J.T. *Aljabar Abstrak (Himpunan-himpunan,* *Relasi-relasi dan Fungsi)*. Yogyakarta: FMIPA UGM, 1980

13. Soehakso, R.M.J.T. *Pengantar Teori Grup*. Yogyakarta: FMIPA UGM, 1980

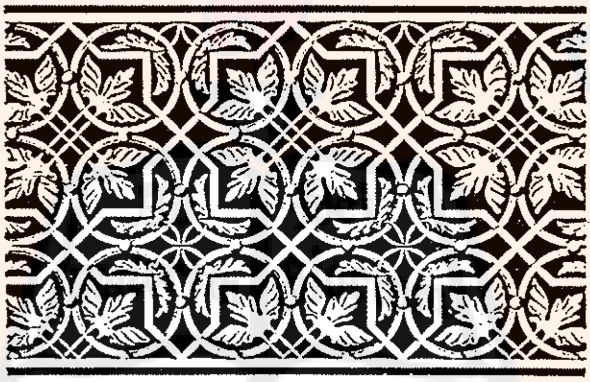
14. Susanta, B. *Geometri Trasformasi*. Yogyakarta: FMIPA UGM, 1990

15. Yale, Paul B. *Geometry and Symmetry*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1968.

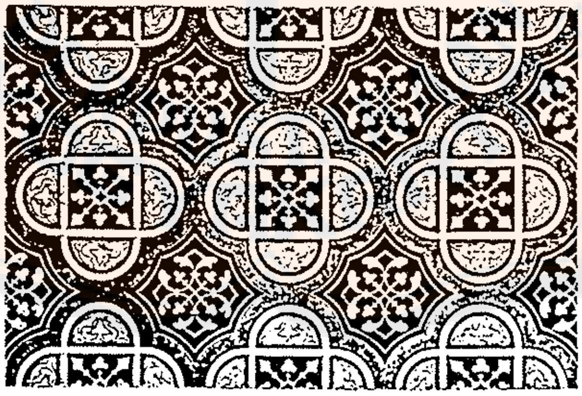
LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Arabic (13th century).



San Francesco in Assisi (13th century).

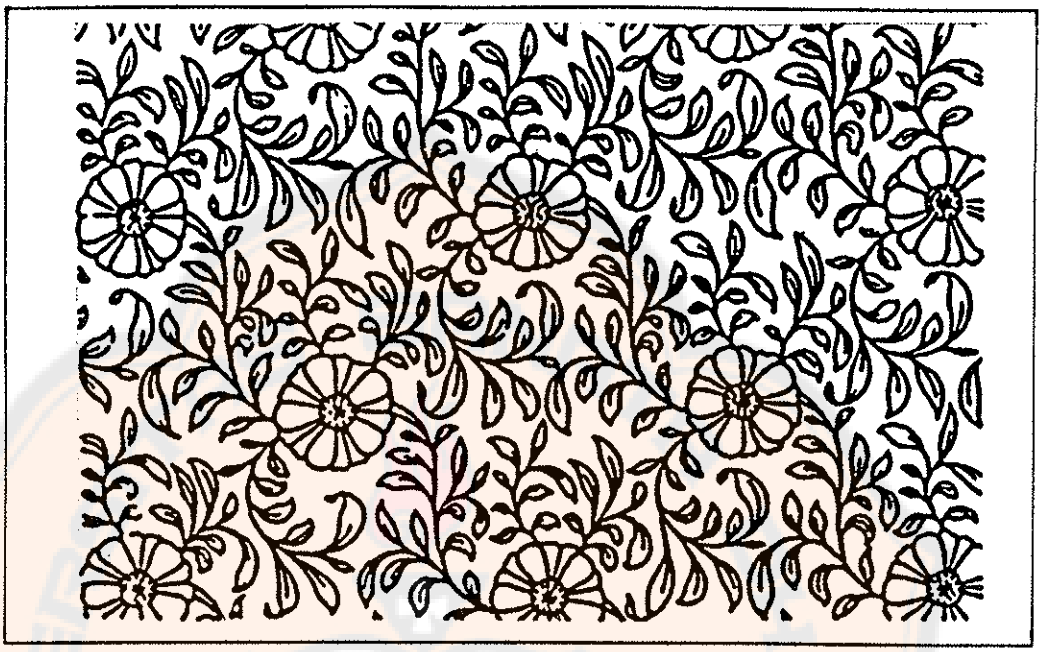


San Francesco in Assisi (13th century).

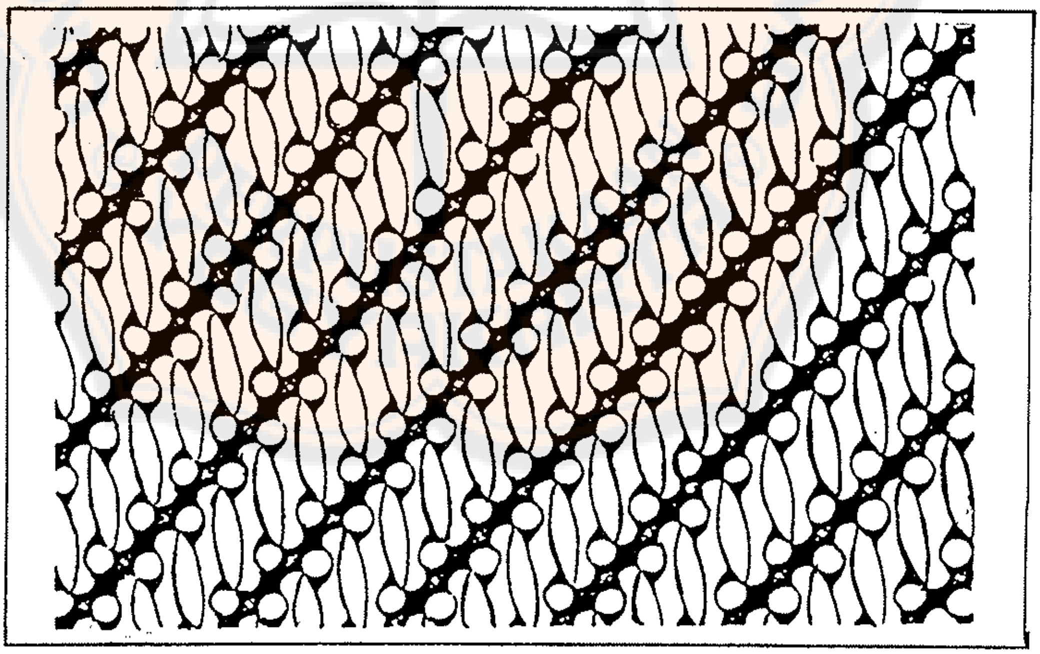
FIGURE 1

Gambar 1, diambil dari buku Durbin, John R

LAMPIRAN 2



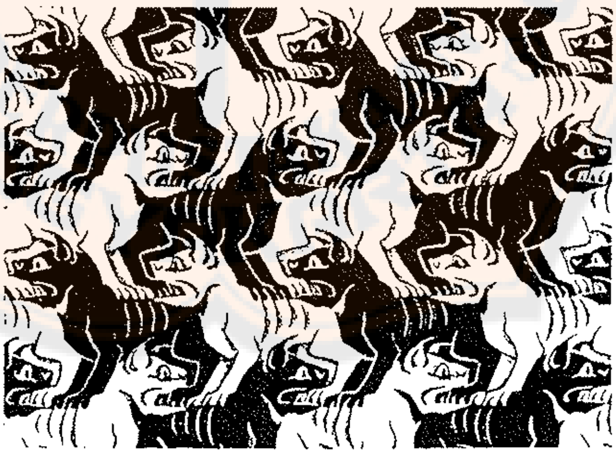
Gambar 2 Grup p1, Martin George E hal 114



Gambar 2 Grup p2, Nian S. Djoemena hal. 54

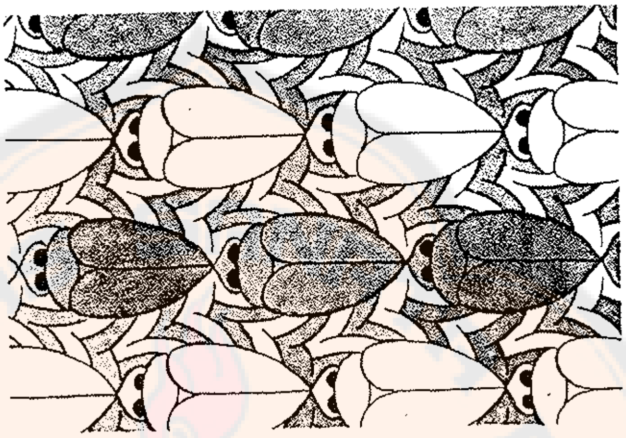
LAMPIRAN 3

Gambar 3 Grup pm, Martin, George E hal 113

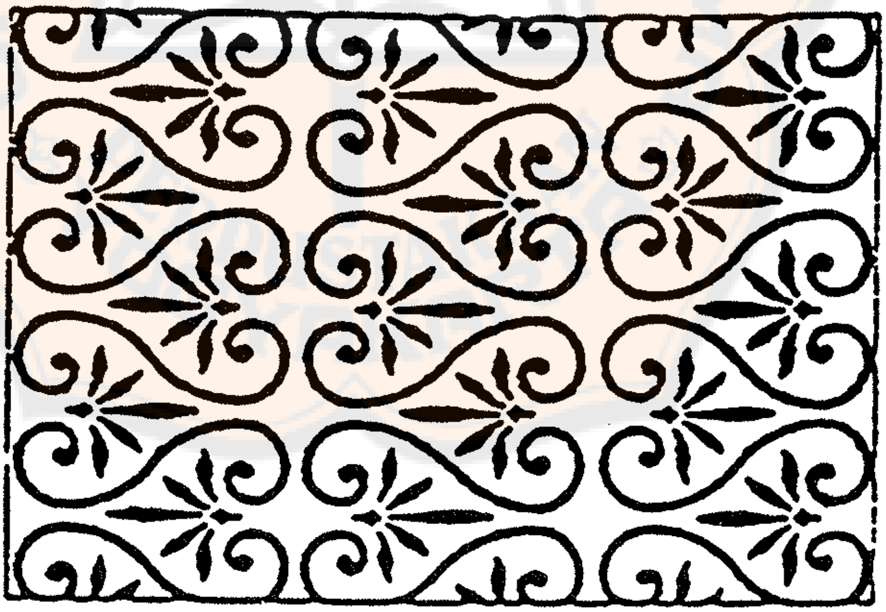


Gambar 4 Grup pg, Harold R. Jacobs hal 227

LAMPIRAN 4

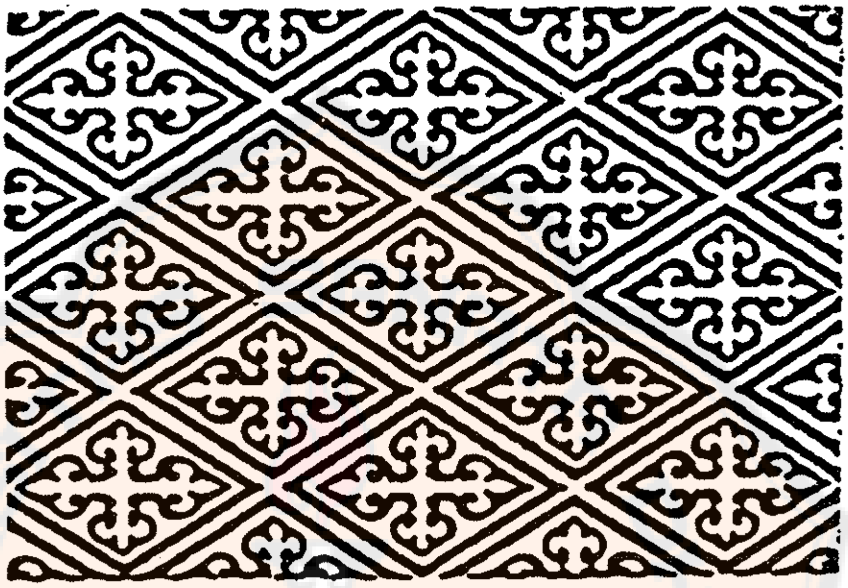


Gambar 5 Grup cm, Harold R. Jacobs hal 227

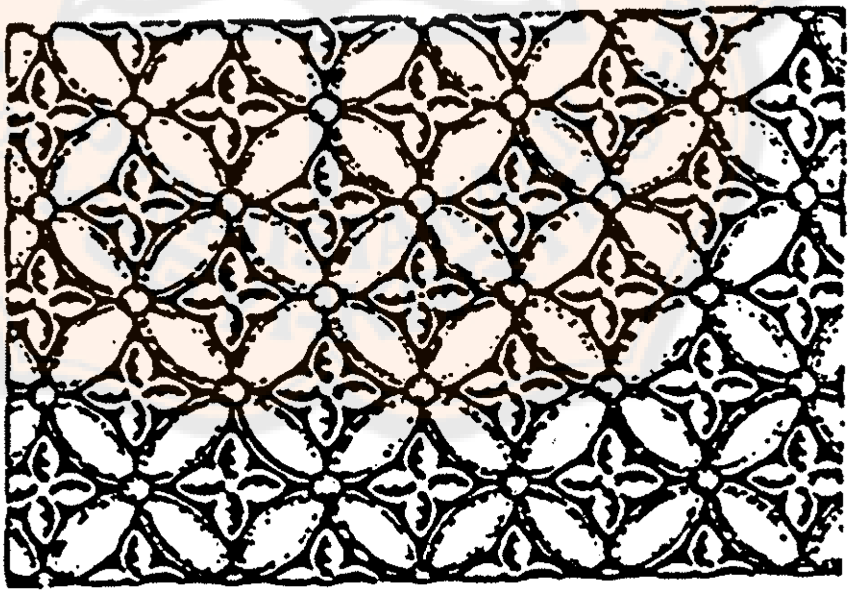


Gambar 6 Grup pmg, Martin, George E hal 113

LAMPIRAN 5

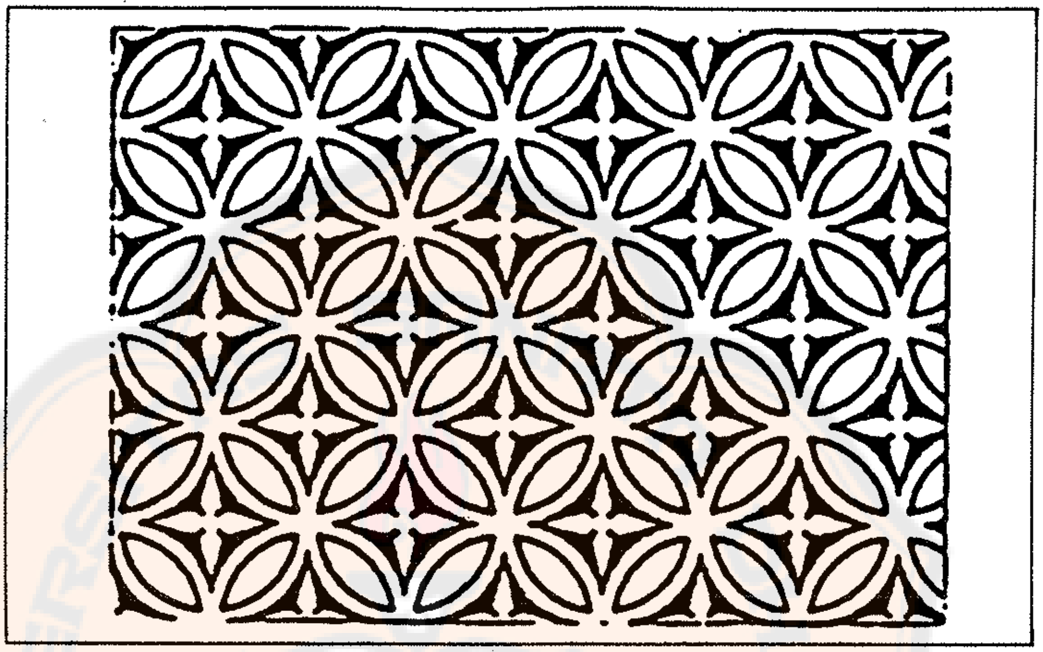


Gambar 7 Grup cmm, Martin, George E hal 113

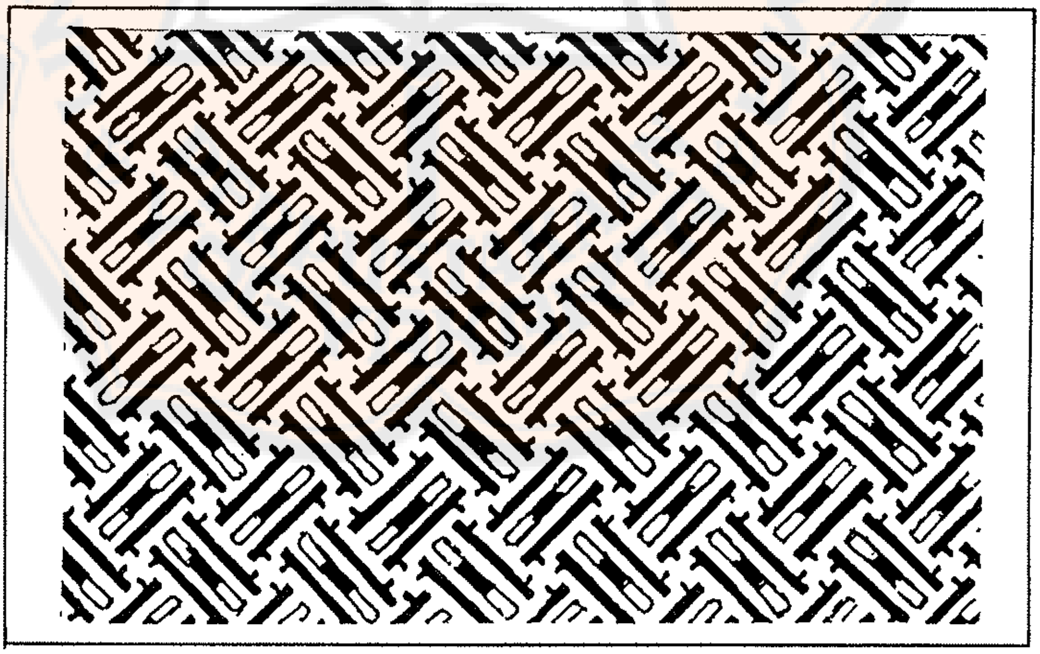


Gambar 8 Grup p4, Martin, George E hal 113

LAMPIRAN 6

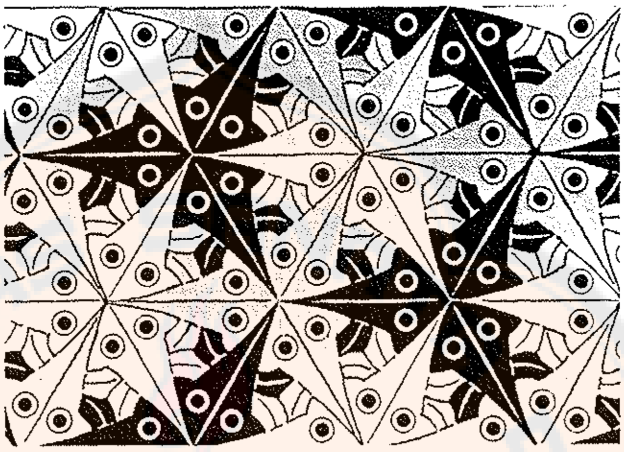


Gambar 9 Grup **p4m**, Martin, George E hal 114



Gambar 10 Grup **p4g**, Nian S. Djoemena hal 55

LAMPIRAN 7



Gambar 11 Grup p31m, Harold R. Jacobs hal 227