TEOREMA LIMIT PUSAT LINDEBERG DAN TERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Hongki Julie

NIM : 941414001

NIRM : 940051120501120021

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

1999

SKRIPSI

TEOREMA LIMIT PUSAT dan PENERAPANNYA

Oleh:

Hongki Julie

NIM: 941414001

NIRM: 940051120501120021

Telah Disetujui Oleh:

Pembimbing I

Prof. Drs. R. Soemantri tanggal: 13 Juli 1999

Pembimbing II

Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M. Sc. tanggal: 19 Juli 1999

SKRIPSI

TEOREMA LIMIT PUSAT dan PENERAPANNYA

Dipersiapkan dan Ditulis Oleh:

Hongki Julie

NIM: 941414001

NIRM: 940051120501120021

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal: 28 Juni 1999

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M. Pd.	....
Sekretaris	Drs. St. Suseno, M. Si.	....
Anggota	Prof. Drs. R. Soemantri	....
Anggota	Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc.	....
Anggota	Dr. Y. Marpaung	....

Yogyakarta, 29 Juli 1999

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. Paulus Suparno, S.J. M.S. T.

Halaman Persembahan

" Marilah kepada-Ku, semua yang letih lesu dan berbeban berat.

Aku akan memberikan kelegaan kepadamu.

Pikullah kuk yang Kupasang dan belajarlah kepada-Ku,

karena Aku lemah lembut dan rendah hati dan

jiwamu akan mendapat ketenangan.

Sebab kuk yang kupasang itu enak

dan ringanlah bebanmu " (Mat. 11: 28-30).

Kupersembahkan juga skripsi ini untuk:

Ayahanda Lingga, Ibunda Kitty, dan adik Frengki

Adik Agustina Ivani S.

Keluarga Pakpak F.X. Hambali

Keluarga Oom Sapano

LPPS-KWI

Teman-teman di dalam perkuliahan dan di dalam berkegiatan

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skrisi yang saya tulis tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang sudah disebutkan dalam daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta,

Penulis

Hongki Julie

ABSTRAK

Dalam suatu penelitian, peneliti pada umumnya tidak mengetahui apakah sampel random yang diambilnya berasal dari populasi yang berdistribusi normal atau tidak, sehingga perlu diadakan uji kenormalan. Dengan keberadaan Teorema Limit Pusat hal tersebut tidak perlu dilakukan karena Teorema Limit Pusat memberikan jaminan bahwa apapun bentuk distribusi populasinya untuk jumlah sampel yang cukup besar distribusi sampling dari statistik yang berasal dari populasi tersebut akan berdistribusi normal.

Tulisan ini membahas Teorema Limit Pusat Lindeberg secara teoritik beserta dengan beberapa aplikasinya. Pembahasan dilakukan dengan pendekatan fungsi karakteristik yang cakupannya lebih luas karena melibatkan fungsi-fungsi yang bernilai kompleks.

Teorema Limit Pusat dapat diterapkan dalam pendekatan beberapa distribusi peluang, seperti: distribusi binomial, distribusi poisson, oleh distribusi normal yang sangat berguna dalam pendugaan parameter.

ABSTRACT

In a research, generally, researcher does not know whether random samples are taken from a population with normal distribution or not, therefore he or she needs to have a normal test before analysing the samples. Due to existance of the Central Limit Theorem, this test doesn't need to be done. Central Limit Theorem guarantee that for a big number of sample, whatever the population distribution, the sampling distribution of statistics which are computed from the population is normally distributed.

This paper discuss about the Lindeberg's Central Limit Theorem from theoretical point of view and also some of its application. The discussion was done by a characteristics function approach which has a wider scope due to the existance of complex functions.

The Central Limit Theorem can be implemented in approaching some probability distributions by normal distribution, such as: binomial distribution, poisson distribution, which are very useful in the parameter estimation.

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Kasih atas rahmat dan kasih-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. R. Soemantri, selaku pembimbing I yang telah membimbing dan memberikan masukan yang berharga;
2. Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M. Si., selaku pembimbing II yang dengan teliti, sabar, dan penuh pengertian dalam membimbing penyusunan skrisi ini;
3. Bp. Dr. Y. Marpaung selaku dosen penasehat akademik penulis, yang telah dengan sabar memberi masukan di dalam perencanaan studi selama penulis belajar di Universitas Sanata Dharma;
4. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma;
5. Ibu Warni, Bp. Sumarjo, dan Mas Sugeng yang dengan sabar membantu penyusun selama kuliah hingga menyelesaikan penyusunan skripsi ini;

6. Rekan-rekan mahasiswa yang telah membantu penyusun selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma, khususnya untuk M. I. Ita Rosita dan Endah Permata Sari.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih ada kekurangan dan kelemahannya. Untuk itu segala masukan dan kritikan yang membangun akan penulis terima dengan senang hati.

Yogyakarta,

Penulis

Hongki Julie

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Statistika adalah sekumpulan konsep dan metoda yang digunakan untuk mengumpulkan dan menginterpretasikan data tentang bidang kegiatan tertentu dan mengambil kesimpulan dalam situasi di mana ada ketidakpastian dan variasi. Kata " statistika " diambil dari bahasa Latin " status " yang artinya " negara ". Untuk beberapa dekade, statistika hanya dikaitkan dengan fakta-fakta dalam bentuk bilangan-bilangan tentang situasi perekonomian, kependudukan , dan politik yang terjadi di suatu tempat. Saat ini, metodologi dan teori statistika modern telah membuat suatu lompatan yang lebih maju daripada hanya sekedar kompilasi grafik-grafik dan tabel-tabel bilangan. Sebagai disiplin ilmu, statistika meliputi berbagai metoda dan konsep yang sangat penting di dalam setiap penelitian yang melibatkan pengumpulan data dengan cara eksperimen dan observasi, dan pengambilan kesimpulan dengan menganalisis data. Statistika dapat berkembang sedemikian pesat karena adanya perkembangan teori himpunan dan teori peluang.

Tujuan dikembangkannya model matematika dalam teori peluang adalah untuk mendeskripsikan peluang munculnya suatu kejadian dalam ruang sampel. Karena model matematika diekspresikan dalam bentuk nilai-nilai numeris, maka timbullah suatu gagasan untuk mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan semua hasil dalam observasi atau eksperimen dengan suatu bilangan. Fungsi semacam ini yang dikenal sebagai *variabel random.*

Dalam melakukan eksperimen atau observasi terhadap suatu populasi, peneliti biasanya tidak mungkin melakukan eksperimennya atau observasinya terhadap semua anggota populasi. Oleh karena itu, peneliti hanya mengambil beberapa sampel dari populasi untuk diobservasi atau dieksperimentasi.

Parameter populasi adalah suatu bilangan yang mencirikan suatu populasi. Analisis statistika dilakukan untuk dapat mengambil kesimpulan tentang parameter populasinya berdasarkan hasil observasi atau eksperimen terhadap sampel yang diambil. Jadi, harus diupayakan agar dapat diambil sampel yang representatif untuk populasinya. Karena dalam berbagai penelitian kerap kali dijumpai populasi yang berbeda-beda keadaannya, maka untuk memperoleh sampel yang representatif seringkali harus digunakan sampel yang berbeda-beda pula macamnya. Salah satu macam sampel yang dianggap representatif adalah *sampel random.* Sampel random adalah sampel yang pengambilannya sedemikian hingga setiap anggota populasinya mempunyai peluang yang sama untuk terambil sebagai sampel dan observasi-observasi yang dilakukan harus saling bebas.

Suatu harga yang dihitung dari suatu sampel disebut *statistik,* contohnya: nilai rata-rata, variansi, dan deviasi standar. Fungsi distribusi suatu statistik disebut *distibusi sampling harga statistik* atau disingkat *distibusi sampling*. Distribusi sampling mempunyai tiga sifat, yaitu:

1. Apabila sampel-sampel random dengan n anggota diambil dari suatu populasi yang mempunyai nilai rata-rata μ dan variansi σ^2, maka distribusi sampling nilai rata-rata akan mempunyai nilai rata-rata sama dengan μ dan variansinya sama dengan $\frac{\sigma^2}{n}$, dengan n adalah jumlah sampel atau ulangan;
2. Apabila populasi berdistribusi normal maka distribusi sampling nilai rata-rata akan berdistribusi normal;
3. Jika populasi tidak berdistibusi normal maka untuk jumlah sampel yang cukup besar distribusi sampling nilai rata-rata akan berdistribusi normal;

   Sifat ketiga dari distribusi sampling adalah suatu contoh penerapan *Teorema Limit Pusat* dalam pendugaan parameter μ.

Disribusi normal standar dapat memainkan peranan dalam analisis statistika karena adanya Teorema Limit Pusat. Dengan adanya Teorema Limit Pusat menyebabkan sampel yang diambil dari populasi yang tidak berdistibusi normal dapat didekati dengan distribusi normal standar, asalkan jumlah sampelnya cukup besar.

Teorema Limit Pusat merupakan salah satu hasil dalam statistika yang penting. Jangkauannya paling jauh, baik dari segi teori maupun terapannya. Teorema Limit Pusat merupakan sumbangan yang paling modern, tidak hanya untuk statistika tetapi juga untuk matematika. Karena keindahan dan penerapannya, kelihatannya memudarkan fakta bahwa Teorema Limit Pusat merupakan hasil gabungan dari aljabar, topologi, dan matematika terapan yang klasik.

Ada beberapa Teorema Limit Pusat dan yang akan dibahas dalam skripsi ini hanya satu, yaitu *Teorema Limit Pusat Lindeberg*. Teorema Limit Pusat Lindeberg mempunyai asumsi-asumsi yang lebih umum bila dibandingkan dengan Teorema Limit Pusat yang lainnya.

Teorema Limit Pusat dapat dibangun melalui dua cara, yaitu dengan menggunakan fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik. Di dalam skripsi ini, Teorema Limit Pusat akan dibangun melalui pendekatan fungsi karakteristik. Karena jika dibangun melalui fungsi pembangkit momen terdapat distribusi yang tidak mempunyai fungsi pembangkit momen yang berkaitan dengan distribusi tersebut, misalnya: Distribusi Cauchy. Hal ini disebabkan karena fungsi pembangkit momen adalah fungsi yang bernilai real, sehingga hanya terbatas pada bidang real. Fungsi karakteristik adalah fungsi bernilai kompleks, sehingga lebih luas cakupannya bila dibandingkan dengan fungsi pembangkit momen.

Hukum bilangan besar dan teorema limit pusat saling berkaitan. Hukum bilangan besar lebih mempunyai arti teoritis daripada arti praktisnya, karena hukum ini tidak memberikan perkiraan nilai peluang untuk beberapa kondisi yang diberikan. Hukum bilangan besar ada dua macam, yaitu hukum bilangan besar kuat dan lemah. Dalam skripsi ini, masing-masing hukum bilangan besar akan dibicarakan untuk variabel random yang berdistribusi bebas stokastik dan identik dan untuk variabel random yang saling bebas stokastik.

Di dalam pembahasan skripsi ini terdapat beberapa definisi dan teorema dasar yang tidak dibahas, misalnya: definisi kontinu seragam, dan teorema deret sisa Taylor.

Bab II

Teori Himpunan

Pembahasan pada bab II ini dikhususkan untuk mendalami materi prasyarat yang berkaitan dengan teori himpunan, yaitu tentang himpunan berhingga dan tak berhingga, himpunan terbilang dan tak terbilang, limit inferior dan superior, serta medan Borel dan medan-σ. Konsep-konsep tersebut diperlukan dalam pembahasan bab III, yaitu tentang variabel random dan ruang probabilitas, serta definisi atau teorema yang didasarkan pada teori himpunan.

A. Himpunan Berhingga, Tak berhingga, Terbilang, dan Tak Terbilang

Sebelum masuk pada pengertian himpunan berhingga dan tak berhingga akan didefinisikan terlebih dahulu bilangan kardinal.

Definisi 1. Bilangan Kardinal:
Dua himpunan A dan B dikatakan mempunyai *bilangan kardinal* yang sama jika terdapat fungsi korespondensi satu-satu dari A kepada B. Bilangan kardinal dari himpunan A dinyatakan dengan $n(A)$. Bilangan kardinal dari $\mathbb{N}$ = himpunan semua bilangan asli dinyatakan dengan $\aleph_0$.

Contoh 1:

a. Jika $k \in \mathbb{N}$ maka $Y_k = \{ 1 , 2 , \ldots , k \}$ mempunyai k elemen. Jika A berkorespondensi satu-satu kepada Y_k maka cacah elemen dari A adalah k dan sebaliknya. Didefinisikan $n(A) = k$.

b. Didefinisikan $n(\emptyset) = 0$

c. Jika $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat maka $n(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, sebab terdapat fungsi korespondensi satu-satu dari $\mathbb{N}$ kepada $\mathbb{Z}$, yaitu:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \textit{jika n genap} \\ -\frac{n-1}{2}, & \textit{jika n ganjil} \end{cases}$$

Definisi 2. Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga:
Himpunan A disebut sebagai *himpunan berhingga* jika $A = \varnothing$ atau $(\exists p \in \mathbb{N}) \ni n(A) = p$, sedangkan himpunan yang bukan berhingga disebut *himpunan tak berhingga*.

Untuk mendefinisikan himpunan terbilang dan tak terbilang diperlukan definisi himpunan denumerabel, yang definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 3. Himpunan Denumerabel:
Himpunan A disebut sebagai himpunan yang *denumerabel* jika bilangan kardinalnya adalah $\aleph_0$.

Definisi 4. Himpunan Terbilang dan Tak Terbilang:
Himpunan A adalah *terbilang* jika A merupakan himpunan denumerabel atau himpunan berhingga, sedangkan *himpunan tak terbilang* adalah himpunan yang bukan himpunan terbilang.

Contoh 2:

a. $E = \{2,3,5,7,11,13\}$ maka $n(E) = 6$ berarti $(\exists 6 \in \mathbb{N}) \ni n(E) = 6$. Oleh karena itu, E merupakan himpunan berhingga sehingga E juga merupakan himpunan terbilang.

b. $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$ maka B bukan himpunan berhingga karena

$(\forall p \in \mathbb{N})$ maka $n(B) \neq p$.

B. Irisan dan Gabungan yang Digeneralisir

Operasi irisan dan gabungan yang digeneralisir merupakan perluasan dari operasi irisan dan gabungan dari dua himpunan. Kedua operasi ini perlu dibahas karena dalam pembahasan selanjutnya tidak hanya dibicarakan dua atau tiga himpunan saja, tetapi n buah himpunan atau lebih.

Definisi 5. Irisan dan Gabungan yang Digeneralisir:
Jika I adalah himpunan indeks dan $I \neq \emptyset$ maka

(i) $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid x \in A_i ,\ untuk\ suatu\ i \in I \}$ disebut *gabungan yang digeneralisir*

(ii) $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid x \in A_i ,\ untuk\ setiap\ i \in I \}$ disebut *irisan yang digeneralisir*

Jika I merupakan himpunan berhingga maka akan diperoleh irisan dan gabungan yang digeneralisir berhingga pula. Demikian pula, jika I adalah himpunan yang terbilang maka akan diperoleh pula irisan dan gabungan yang digeneralisir yang terbilang, dinotasikan dengan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ untuk gabungannya dan $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ untuk irisannya.

Teorema 1. de Morgan:
Jika $I \neq \emptyset$ dan merupakan himpunan indeks maka

(i) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$;

(ii) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$;

Bukti:

(i) $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c$

$\Leftrightarrow x \notin A_i$, *untuk setiap* $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in A_i^c$, *untuk setiap* $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

$\therefore \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

(ii) $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c$

$\Leftrightarrow x \notin A_i$, *untuk suatu* $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in A_i^c$, *untuk suatu* $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$

$\therefore \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ □.

Teorema di atas hendak menyatakan bahwa komplemen dari gabungan atau irisan yang digeneralisir dari suatu himpunan sama dengan irisan atau gabungan yang digeneralisir dari komplemen himpunan tersebut.

Contoh 3:

a. Andaikan: $A_1 = \{1,3,5,7,9\}$;

$A_2 = \{2,4,6,8,9\}$;

$A_3 = \{2,3,5,7,9\};$

$A_4 = \{7,8,9,10\}.$

Di dalam himpunan semesta $S = \{\, x \,/\, x \le 10,\ x \in \mathbb{N}\}$, maka

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = S,\ \bigcap_{i=1}^{4} A_i = \{9\}$$

$A_1^c = \{2,4,6,8,10\}, A_2^c = \{1,3,5,7,10\},$

$A_3^c = \{1,4,6,8,10\}, A_4^c = \{1,2,3,4,5,6\}$, sehingga

$$\left.\begin{aligned} &\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)^c = \varnothing \\ &\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c = \varnothing \end{aligned}\right\} \therefore \left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{4} A_i^c \text{ ,dan}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)^c = \{1,2,\ldots,8,10\} \\ &\bigcup_{i=1}^{4} A_i^c = \{1,2,\ldots,8,10\} \end{aligned}\right\} \therefore \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{4} A_i^c$$

b. Andaikan: $S = \mathbb{R}$ dan $A_n = [0,n]$ maka $A_n^c = (-\infty,0) \cup (n,\infty)$. Akibatnya:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \text{ dan } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = (-\infty,0) \cup (1,\infty) \\ &\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (-\infty,0) \cup (1,\infty) \end{aligned}\right\} \therefore \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c .$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = (-\infty,0) \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c = (-\infty,0)\end{array}\right\} \therefore \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c .$$

C. Supremum dan Infimum

Pengertian infimum dan supremum akan berguna di dalam pembahasan tentang teorema ketaksamaan dasar, ketaksamaan Markov, dan ketaksamaan Chebyshev. Untuk dapat memahami pengertian infimum dan supremum haruslah dipahami terlebih dahulu pengertian himpunan terurut, himpunan yang terbatas bawah dan batas bawah, dan himpunan yang terbatas atas dan batas atas.

Definisi 6. Himpunan Terurut:
Bila diberikan himpunan semesta S maka yang dimaksud dengan *urutan* dalam himpunan S adalah suatu relasi, dinotasikan dengan " $<$ ", yang memenuhi dua sifat berikut:
1. Jika $x \in S$ dan $y \in S$ maka hanya satu dari pernyataan $x < y$, $y < x$, $x = y$ yang benar. Relasi " $x < y$ " menyatakan x lebih kecil daripada y;
2. Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$, dengan $x, y, z \in S$.

Himpunan yang didalamnya terdefinisi suatu urutan disebut *himpunan terurut*.

Definisi 7. Himpunan yang Terbatas Atas dan Batas Atas:
Diberikan himpunan terurut S dan himpunan E, dengan $E \subseteq S$ maka E disebut *terbatas atas* jika terdapat $b \in S$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq b$, dan b disebut *batas atas* dari E.

Definisi 8. Himpunan yang Terbatas Bawah dan Batas Bawah:
Andaikan: S adalah himpunan terurut, dan $E \subseteq S$ maka E disebut *terbatas bawah* jika terdapat $a \in S$ sedemikian hingga untuk setiap $y \in E$ berlaku $y \geq a$, dan a disebut *batas bawah* dari E.

Definisi 9. Infimum dan Supremum:
Andaikan: S adalah himpunan terurut, $E \subseteq S$, dan E terbatas bawah maka $a \in S$ disebut *infimum* dari E jika a mempunyai dua sifat berikut :
1. a adalah batas bawah dari E;
2. Jika $c > a$ maka c bukan batas bawah dari E.

Andaikan: S adalah himpunan terurut, $E \subseteq S$, dan E terbatas atas maka $b \in S$ disebut *supremum* dari E jika b yang mempunyai dua sifat berikut:
1. b adalah batas atas dari E;
2. Jika $d < b$ maka d bukan batas atas dari E.

Contoh 4:

Andaikan: $G = \{ x / x = 1/n\ ,\ n \in \mathbb{N} \}$, maka batas atas dari G adalah 1, sebab $(\forall x \in G)$ berlaku $x \leq 1$ dan jika $y < 1$ maka y bukan batas atas dari G sehingga $\sup G$ = 1. Batas bawah dari G adalah 0, sebab $(\forall d \in G)$ berlaku $d > 0$ dan $\inf G$ = 0, sebab jika $g > 0$ maka g bukan batas bawah dari G.

D. Limit Inferior dan Superior Suatu Barisan Himpunan

Pengertian limit inferior dan limit superior banyak dipergunakan di dalam pembuktian teorema-teorema pada bab selanjutnya, antara lain pada Lema Borel-Cantelli. Sebelum membahas definisi limit inferior dan superior akan dibahas terlebih dahulu pengertian barisan monoton, baik yang naik maupun yang turun, dan limitnya.

Definisi 10. Barisan Monoton Turun dan Limitnya:
Barisan himpunan $< A_n >$ disebut barisan *monoton turun* jika $A_{n+1} \subseteq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan $A_n \downarrow$, sedangkan $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$ disebut sebagai limitnya dan dinotasikan dengan $A_n \downarrow A$.

Definisi 11. Barisan Monoton Naik dan Limitnya:
Barisan himpunan $< A_n >$ disebut barisan *monoton naik* jika $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan $A_n \uparrow$, sedangkan $\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ disebut sebagai limitnya dan dinotasikan dengan $A_n \uparrow A$.

Definisi 12. Limit Inferior, Limit Superior, dan Kekonvergenan Barisan Himpunan:
Andaikan : $< A_n >$ adalah barisan himpunan dan didefinisikan:

$$B_n = \inf_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ dan } C_n = \sup_{k \geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

Maka $< B_n >$ adalah barisan monoton naik dengan limitnya $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underline{\lim} A_n$ disebut *limit inferior* dan $< C_n >$ adalah barisan monoton turun dengan limitnya $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim} A_n$ disebut *limit superior* .
Jika $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$ maka limit dari $< A_n >$ dikatakan ada dan himpunan A disebut *limit dari* $< A_n >$ serta barisan himpunan $< A_n >$ disebut konvergen ke himpunan A, yang dinotasikan dengan $A_n \to A$.

Jika barisan himpunan $< A_n >$ barisan yang tidak monoton, yaitu barisan yang tidak monoton naik dan barisan yang tidak monoton turun , dan $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ maka barisan himpunan $< A_n >$ disebut konvergen ke himpunan A, dinotasikan dengan $A_n \to A$.

Contoh 5:

a. Andaikan: $A_n = \{\omega / 0 < \omega < 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}\}$

$$B_n = \{\omega / 0 < \omega < 1 + 1/n, n \in \mathbb{N}\}$$

maka $A_n \uparrow A = \{\omega / 0 < \omega < 1\}, B_n \downarrow B = \{\omega / 0 < \omega \leq 1\}$.

b. Andaikan: $A_n = \{(x, y) / 0 \leq x < n,\ 0 \leq y < 1/n \in \mathbb{N}\}$ maka $<A_n>$ bukan

barisan yang monoton dan $\overline{\lim} A_n = \{(x, y) / 0 \leq x < \infty, y = 0\} = A$, serta

$\underline{\lim} A_n = \{(x, y) / 0 \leq x < \infty, y = 0\} = A$.

$\therefore \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = A$, sehingga diperoleh: $A_n \to A$

E. Medan-σ dan Medan Borel

Pembahasan dimulai dengan pengertian medan, karena dengan memahami pengertian medan maka akan mempermudah pemahaman tentang medan-σ dan medan Borel. Pengertian medan-σ dan medan Borel mendasari pendefinisian ukuran probabilitas dan variabel random.

Definisi 13. Himpunan Kuasa:
Himpunan kuasa dari himpunan A adalah kelas himpunan yang elemen-elemennya adalah semua himpunan bagian dari A, dinotasikan $P(A)$.

Definisi 14. Medan:
Suatu kelas himpunan $\mathbb{A} \subseteq P(S)$, S adalah himpunan semesta, disebut sebagai *medan*, jika:
1. $\mathbb{A} \neq \emptyset$;
2. Jika $A \in \mathbb{A}$ maka $A^c \in \mathbb{A}$;
3. Jika $A_1 \in \mathbb{A}$ dan $A_2 \in \mathbb{A}$ maka $A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A}$.

Akibat dari definisi 14:
1. $S \in \mathbb{A}$
2. $\emptyset \in \mathbb{A}$
3. Jika $A_j \in \mathbb{A}$, j = 1, 2, ..., n maka $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathbb{A}$ dan $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathbb{A}$

Bukti:

1. Karena $A \in \mathbb{A}$ maka $A^c \in \mathbb{A}$ (dari sifat 2 definisi 14).

$\therefore A \in \mathbb{A}$ dan $A^c \in \mathbb{A}$ maka $A \bigcup A^C = S \in \mathbb{A}$.

$\therefore S \in \mathbb{A}$.

2. $\varnothing \in \mathbb{A}$ sebab $S \in \mathbb{A}$ sehingga $S^c = \varnothing \in \mathbb{A}$ (dari sifat 3 definisi 14).

3. Jika $A_j \in \mathbb{A}$, j = 1, 2, ..., n maka $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathbb{A}$ dan $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathbb{A}$, sebab:

Pangkal: jika $A_1 \in \mathbb{A}$ dan $A_2 \in \mathbb{A}$ maka menurut sifat ketiga definisi 14 diperoleh: $A_1 \bigcup A_2 \in \mathbb{A}$.$\therefore$ pernyataan benar untuk $n = 2$.

Hipotesis Induksi : diandaikan pernyataan benar untuk $n = k$ maka $A_j \in \mathbb{A}, j = 1, 2, ..., k$ sehingga $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathbb{A}$.

Langkah: dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$.

Andaikan : $A_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, 2, ..., k + 1$ maka menurut sifat ketiga dari definisi 14 diperoleh: $\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \bigcup A_{k+1} \in \mathbb{A}$. $\therefore \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \in \mathbb{A}$.

Pangkal: Andaikan : $A_1 \in \mathbb{A}$ dan $A_2 \in \mathbb{A}$ maka $A_1^c \in \mathbb{A}$ dan $A_2^c \in \mathbb{A}$,

sehingga $A_1^c \bigcup A_2^c = (A_1 \bigcap A_2)^c \in \mathbb{A}$ (dari sifat 3 definisi 14).

$\therefore \left(\left(A_1 \cap A_2 \right)^c \right)^c = A_1 \bigcap A_2 \in \mathbb{A}$ (dari sifat 2 definisi 14).

$\therefore$ pernyataan benar untuk $n = 2$.

Hipotesis induksi: diandaikan pernyataan benar untuk $n = k$ maka $A_j \in \mathbb{A}$,

$j = 1, 2, \ldots, k$ sehingga $\bigcap_{j=1}^{k} A_j \in \mathbb{A}$.

Langkah: dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$.

Andaikan : $A_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$ maka $A_j^c \in \mathbb{A}$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$

(dari sifat 2 definisi 14). $\therefore \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j^c \in \mathbb{A}$ (menurut sifat 3 definisi 14),

maka menurut sifat kedua dari definisi 14 diperoleh:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j^c \right)^c = \bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \in \mathbb{A}.$$

Contoh 6:

$\mathbb{A} = \{S, \varnothing\}$ merupakan medan. Alasannya:

1. $\mathbb{A} \neq \varnothing$ sebab $S \in \mathbb{A}$, maka kondisi pertama dari definisi 14 terpenuhi;
2. Karena $S = \varnothing^c \in \mathbb{A}$ dan $\varnothing = S^c \in \mathbb{A}$ maka kondisi kedua dari definisi 14 terpenuhi.
3. Karena $S = S \cup \varnothing \in \mathbb{A}$ maka kondisi ketiga dari definisi 14 terpenuhi.

1. Medan-σ

Definisi 15. Medan-σ:
Suatu kelas himpunan $\mathbb{A} \subseteq P(S)$, S adalah himpunan semesta, disebut sebagai *medan-σ*, jika:
1. $\mathbb{A} \neq \emptyset$;
2. Jika $A \in \mathbb{A}$ maka $A^c \in \mathbb{A}$;
3. Jika $A_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, 2, \ldots$ maka $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathbb{A}$.

Definisi 16. Medan-σ Minimal:
Diberikan sembarang kelas himpunan $\mathbb{A} \subseteq P(S)$, S adalah himpunan semesta, maka *medan-σ minimal yang memuat* $\mathbb{A}$ adalah medan-σ yang terkecil yang memuat $\mathbb{A}$, dinotasikan dengan $\sigma(\mathbb{A})$.

2. Medan Borel

Definisi 17. Medan Borel:
Andaikan: $\mathbb{A}$ adalah kelas himpunan dari semua interval yang berbentuk $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$ dan jika $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ adalah medan-σ minimal yang memuat $\mathbb{A}$ maka $\mathbb{B}$ disebut *medan Borel*, sedangkan himpunan yang dibentuk dari elemen $\mathbb{B}$ disebut *himpunan Borel*.

Contoh 7:

a. $F = \{ \text{medan } \mathbb{B} \mid \mathbb{B} \text{ medan yang memuat } \mathbb{A} \}$, maka $\sigma(\mathbb{A}) = \bigcap_{\mathbb{B} \in F} \mathbb{B}$.

b. Karena $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)$ dan $[x, \infty) = (-\infty, x)^c$, dengan $x \in \mathbb{R}$

maka singelton $\{x\} = (-\infty, x] \cap [x, \infty)$ adalah himpunan Borel. Jadi, sembarang subset terbilang dari $\mathbb{R}$ yang terdiri atas gabungan yang terbilang dari singelton adalah himpunan Borel. Oleh karena itu, $\mathbb{Q}$ = himpunan semua bilangan rasional adalah himpunan Borel, sebab $\mathbb{Q}$ merupakan subset terbilang dari $\mathbb{R}$ yang terdiri atas gabungan yang terbilang dari singelton. Karena $\mathbb{Q}$ adalah himpunan Borel maka himpunan semua bilangan irrasional juga himpunan Borel sebab himpunan semua bilangan irrasional merupakan komplemen dari $\mathbb{Q}$.

Definisi 18. Fungsi yang Terukur:
Andaikan: $f: S \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ adalah medan Borel dan $\mathcal{B} \subseteq P(\mathbb{R})$, dan $\mathbb{A}$ adalah medan-σ dan $\mathbb{A} \subseteq P(S)$. Jika untuk setiap himpunan Borel $B \in \mathcal{B}$ berlaku $f^{-1}(B) \in \mathbb{A}$, maka fungsi f disebut *fungsi yang terukur dalam* $\mathbb{A}$.

Definisi 19. Fungsi Borel:
Jika $S = \mathbb{R}$ atau $S \subset \mathbb{R}$ dan jika f adalah fungsi yang terukur dalam $\mathcal{B}$ maka fungsi f disebut *fungsi Borel*.

Bab III

Teori Ukuran dan Teori Peluang

A. Teori Ukuran

Untuk dapat memahami pengertian ukuran peluang maka perlu dipahami terlebih dahulu arti ukuran. Pengertian ukuran yang akan dibahas adalah pengertian ukuran dalam ring. Selain akan membahas pengertian ukuran dalam ring akan dibahas pula pengertian ukuran Lebesgue dan ukuran Lebesgue-Stieltjes. Kedua pengertian ini digunakan untuk mendefinisikan pengertian Integral Lebesgue dan Integral Lebesgue-Stieltjes yang memegang peranan penting dalam pembuktian Teorema Limit Pusat Lindeberg.

1. Medan Boolean dan Medan-σ

Definisi 20. Ring Boolean dan Ring-σ Boolean:
Ring Boolean adalah kelas himpunan $\mathfrak{R}$ yang tidak kosong sedemikian hingga jika $E \in \mathfrak{R}$ dan $F \in \mathfrak{R}$ maka $E \cup F \in \mathfrak{R}$ dan $E - F \in \mathfrak{R}$.

Ring -σ Boolean adalah kelas himpunan $\mathfrak{R}$ yang tidak kosong sedemikian hingga :
a. Jika $E \in \mathfrak{R}$ dan $F \in \mathfrak{R}$ maka $E - F \in \mathfrak{R}$;
b. $E_i \in \mathfrak{R}, i = 1,2,... \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{R}$.

Definisi 21. Medan Boolean dan Medan-σ Boolean:
Medan Boolean adalah ring Boolean $\mathfrak{R}$ yang mempunyai suatu elemen $X \neq \varnothing$ sedemikian hingga $E \subseteq X$, $\forall E \in \mathfrak{R}$.

Medan-σ Boolean adalah ring-σ Boolean $\mathfrak{R}$ yang merupakan medan Boolean.

2. Ukuran dalam Ring, Ukuran Lebesgue dan Ukuran Lebesgue-Stieltjes

Sebelum didefinisikan ukuran dalam ring Boolean akan didefinisikan terlebih dahulu pengertian fungsi himpunan , aditif, dan aditif terbilang.

Definisi 22. Fungsi Himpunan:
Fungsi himpunan adalah suatu fungsi bernilai real yang diperluas yang domainnya adalah suatu kelas himpunan.

Definisi 23. Aditif dan Aditif Terbilang:
Fungsi himpunan μ , yang didefinisikan dalam kelas himpunan $\mathcal{A}$, disebut *aditif* jika $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$, $E \cup F \in \mathcal{A}$, dan $E \cap F = \varnothing$ maka $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Fungsi himpunan μ , yang terdefinisi dalam kelas himpunan $\mathcal{A}$, disebut *aditif terbilang* jika untuk setiap barisan himpunan $< E_n >$ yang saling asing dalam $\mathcal{A}$ maka gabungannya juga berada dalam $\mathcal{A}$ sedemikian sehingga $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Definisi 24. Ukuran dalam Ring:
Ukuran dalam ring adalah fungsi himpunan μ yang aditif terbilang yang terdefinisi dalam ring $\mathfrak{R}$, bernilai real yang diperluas dan tak negatif, dan sedemikian hingga $\mu(\varnothing) = 0$.

Untuk dapat mengerti apa yang dimaksud dengan ukuran Lebesgue dan ukuran Lebesgue-Stieltjes, harus dimengerti dahulu pengertian ukuran lengkap dan pelengkap.

Definisi 25. Ukuran Lengkap:
Ukuran μ disebut *lengkap* jika berlaku implikasi " jika $E \in \mathfrak{R}$, $F \subseteq E$ dan $\mu(E) = 0$ maka $F \in \mathfrak{R}$.

Definisi 26. Pelengkap:
Andaikan: μ adalah ukuran dalam ring-σ $\mathfrak{R}$, dan $\overline{\mathfrak{R}}$ merupakan ring-σ dengan $\overline{\mathfrak{R}} = \{ E \Delta N = (E - N) \cup (N - E) \mid E \in \mathfrak{R}$ dan N adalah subhimpunan dari himpunan berukuran nol dalam $\mathfrak{R}$ }. Jika fungsi himpunan $\overline{\mu}$ yang didefinisikan $\overline{\mu}(E \Delta N) = \mu(E)$ merupakan ukuran lengkap dalam $\overline{\mathfrak{R}}$, maka $\overline{\mu}$ disebut *pelengkap* dari μ dalam $\mathfrak{R}$.

Definisi 27. Ukuran Lebesgue:
Andaikan: $P = \{ [a,b) \,/\, a < b,\ dan\ a,\ b \in \mathbb{R} \}$, $\mathfrak{R}$ adalah ring- σ yang dibangun oleh P, μ adalah fungsi himpunan dalam P yang didefinisikan:

$$\mu([a,b)) = b - a,$$

dan $\overline{\mu}$ dalam $\overline{\mathfrak{R}}$ adalah pelengkap dari μ dalam $\mathfrak{R}$ maka himpunan $\overline{\mathfrak{R}}$ disebut *himpunan terukur Lebesgue* dan $\overline{\mu}$ disebut *ukuran Lebesgue*.

Definisi 28. Ukuran Lebesgue-Stieltjes:
Diberikan fungsi g yang merupakan fungsi yang berhingga, naik, dan kontinu pada $\mathfrak{R}$. Jika terdapat ukuran lengkap yang tunggal $\overline{\mu_g}$ yang terdefinisi dalam ring-σ $\overline{\mathfrak{R}_g}$, yang terdiri atas semua himpunan Borel, sedemikian hingga $\overline{\mu_g}([a,b)) = g(b) - g(a)$ dan $(\forall E \in \overline{\mathfrak{R}_g})\ (\exists F \in \mathcal{B})\ \ni \overline{\mu_g}\ (E \,\Delta\, F) = 0$, maka $\overline{\mu_g}$ disebut *ukuran Lebesgue-Stieltjes* yang dibangun oleh g.

3. Fungsi Terintegralkan

Definisi 29. Ruang Terukur:
Ruang terukur adalah himpunan X dan ring-σ B $\mathfrak{R} \subseteq X$ sedemikian hingga $\bigcup_{E \in \mathfrak{R}} E = X$, dinotasikan $(X,\ \mathfrak{R})$ dan himpunan E disebut *himpunan terukur*.

Definisi 30. Ruang Ukuran:
Ruang ukuran adalah ruang terukur $(X, \mathfrak{R})$ dan ukuran μ dalam $\mathfrak{R}$ dinotasikan dengan $(X,\ \mathfrak{R},\ \mu)$.

Definisi 31. Fungsi Indikator:
Diberikan himpunan A $\subseteq$ S dan didefinisikan fungsi $I_A(\omega)$ di dalam S sebagai berikut:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1,\ jika\ \omega \in A \\ 0,\ jika\ \omega \in A^c \end{cases}$$

Fungsi $I_A(\omega)$ disebut sebagai fungsi indikator dari A.

Dari definisi 31 berlaku sifat: $I_A = I_A^2 = \cdots = I_A^n, n \in \mathbb{N}$ (1)

Definisi 32. Fungsi Sederhana:
Fungsi f, terdefinisi dalam ruang terukur $(X,\ \mathfrak{R})$, disebut *fungsi sederhana* jika terdapat kelas himpunan berhingga $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ yang terukur dan saling asing dan terdapat himpunan berhingga bilangan-bilangan real $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sedemikian hingga:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, \ jika \ x \in E_i, i = 1,2,\ldots,n. \\ 0, \ jika \ x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right). \end{cases}$$

atau $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{E_i}(x)$

Definisi 33. Fungsi Sederhana yang Terintegralkan:

Fungsi sederhana $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{E_i}$ dalam ruang ukuran $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ adalah *terintegralkan* jika $\mu(E_i) < \infty \ \forall i$, $\alpha_i \neq 0$. Integral dari f dinotasikan dengan

$\int f(x) \, d\mu(x)$ atau $\int f(x) \, d\mu$

$$\therefore \int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

Definisi 34. Jarak:

Jika f dan g adalah fungsi sederhana dan terintegralkan maka *jarak* antara f dan g, dinotasikan dengan $\rho(f, g)$, didefinisikan sebagai:

$\rho(f,g) = \int |f - g| \, d\mu.$

Definisi 35. Barisan Fundamental mean:

Andaikan $< f_n >$ adalah barisan dari fungsi sederhana yang terintegralkan maka barisan $< f_n >$ disebut *barisan fundamental mean* jika $\rho(f_n, f_m) \to 0$, untuk $n, m \to \infty$.

Definisi 36. Hampir di mana-mana:

Jika sutu sifat tertentu yang berkaitan dengan titik-titik dalam ruang ukuran berlaku untuk setiap titik, kecuali untuk himpunan titik-titik yang berukuran nol, maka sifat itu dikatakan benar *untuk hampir di mana-mana*.

Definisi 37. Konvergen di dalam ukuran:

Suatu barisan fungsi $< f_n >$ yang bernilai berhingga hampir di mana-mana dan merupakan fungsi terukur disebut konvergen di dalam ukuran ke fungsi terukur f jika $(\forall \varepsilon > 0)$ $\lim_{n \to \infty} \mu\left(\left\{ x \middle| |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0$.

Definisi 38. Fungsi yang Terintegralkan:

Andaikan: f adalah fungsi yang bernilai berhingga hampir di mana-mana dan merupakan fungsi yang terukur dalam ruang ukuran $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Fungsi f

yang disebut *fungsi yang terintegralkan*, jika terdapat barisan fundamental mean $< f_n >$ yang konvergen dalam ukuran ke f. Integral dari f, dinotasikan $\int f(x)\, d\mu\,(x)$, didefinisikan sebagai:

$$\int f(x)\, d\mu\,(x) = \lim_{n \to \infty} \int f_n(x)\, d\mu\,(x)$$

4. Integral Lebesgue dan Integral Lebesgue-Stieltjes

Definisi 39. Integral Lebesgue dan Integral Lebesgue-Stieltjes:
Jika g adalah fungsi berhingga, naik, dan kontinu dari variabel real, $\overline{\mu_g}$ adalah ukuran Lebesgue-Stieltjes yang dibangun oleh g, dan jika f adalah fungsi yang terintegralkan di dalam ukuran Lebegue-Stieltjes maka $\int f(x)\, d\,\overline{\mu}_g(x)$ disebut *integal Lebesgue-Stieltjes*, dinotasikan dengan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dg(x)$. Jika $g(x) = x$ maka akan didapatkan *integral Lebesgue*, dinotasikan dengan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Pada sub bab berikutnya, akan diketahui bahwa ukuran peluang merupakan ukuran dalam ring yang khusus. Kekhususannya terletak pada nilai ukurannya, yaitu terletak pada interval tertutup [0,1].

B. Ukuran Peluang dan Variabel Random

Pada sub bab ini akan dibahas sepuluh hal pokok, yaitu ruang peluang, variabel random, distribusi variabel random, nilai harapan dan variansi variabel random, fungsi densitas peluang, fungsi distribusi kumulatif, fungsi distribusi peluang bersama, beberapa distribusi diskrit dan kontinu yang penting, fungsi karakteristik, dan ketaksamaan dasar, Markov, dan Chebyshev. Kesepuluh hal ini menjadi landasan pokok untuk membahas kekonvergenan variabel random, hukum bilangan besar, baik yang lemah maupun yang kuat, dan teorema limit pusat

Lindeberg. Sebelum masuk pada pembahasan ruang peluang, kiranya perlu disesuaikan dahulu istilah-istilah dan notasi-notasi dalam teori himpunan dengan istilah-istilah dan notasi-notasi dalam teori peluang. Untuk keperluan tersebut diberikan tabel berikut:

Notasi	Arti dalam Teori Himpunan	Arti dalam Teori Peluang
S	himpunan semesta	ruang sampel, kejadian yang pasti terjadi
ω	anggota dari S	hasil percobaan, kejadian sederhana
A	himpunan bagian dari S	kejadian A
A^c	komplemen dari A	kejadian bukan A
$A \cap B$	irisan	kejadian A dan B
$A \cup B$	gabungan	kejadian A atau B
$A \subseteq B$	himpunan bagian	jika kejadian A terjadi maka kejadian B terjadi
$\varnothing$	himpunan kosong	kejadian yang tidak mungkin terjadi

1. Ruang Peluang

Definisi 40. Ukuran Peluang:
Ukuran peluang P dalam $(S, \mathcal{A})$, dengan S adalah himpunan semesta dan $\mathcal{A}$ adalah medan-σ dan $\mathcal{A} \subseteq P(S)$, adalah suatu fungsi $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ yang memenuhi sifat:

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $P(S) = 1$;
3. $A_i \bigcap A_j = \varnothing, i \neq j, i = 1,2,\ldots, j = 1,2,\ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Definisi 41. Ruang Peluang:
Ruang peluang adalah tripel $(S, \mathcal{A}, P)$, dengan S adalah ruang sampel, $\mathcal{A}$ adalah medan-σ dan $\mathcal{A} \subset P(S)$, dan P adalah ukuran peluang dalam ruang terukur $(S, \mathcal{A})$.

Teorema 2:
$$P(A) + P(A^c) = 1 \qquad (2)$$

Bukti:

$\left.\begin{array}{l} A \cap A^c = \emptyset \\ S = A \cup A^c \end{array}\right\}$ maka menurut definisi 40, berlaku: $P(S) = P(A) + P(A^c)$

$\therefore P(A) + P(A^c) = 1 \quad \square$

Teorema di atas hendak mengatakan bahwa jumlah peluang kejadian A dengan peluang kejadian bukan A adalah satu.

Teorema 3:
Jika A dan B adalah sembarang kejadian maka
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (3)$$

Bukti:

$A \cup B = \left(A \cap B^c\right) \cup B$, dan $\left(A \cap B^c\right) \cap B = \emptyset$, maka menurut definisi 40, berlaku: $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$ (4)

$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^c\right)$, dan $(A \cap B) \cap \left(A \cap B^c\right) = \emptyset$, maka menurut definisi 40, berlaku: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \,\square$

Jadi, jika A dan B adalah sembarang kejadian maka peluang kejadian A atau B adalah peluang kejadian A ditambah dengan peluang kejadian B dikurangi dengan peluang kejadian A dan B.

Teorema 4. Sifat Kemonotonan Peluang :
Jika A dan B adalah sembarang kejadian dan kejadian A kejadian bagian dari kejadian B maka $P(A) \leq P(B)$.

Bukti:

$$\left.\begin{array}{l} B = A \bigcup \left(B \bigcap A^c\right), \, dengan \; A \subseteq B \\ A \bigcap \left(B \bigcap A^c\right) = \varnothing \end{array}\right\}$$ maka menurut definisi 40, diperoleh:

$$P(B) = P(A) + P(B \bigcap A^c),$$

karena $P(B \bigcap A^c) \geq 0$ maka $P(A) \leq P(B)$ □

Jadi, jika kejadian A merupakan kejadian bagian dari kejadian B maka peluang kejadian A akan kurang dari atau sama dengan peluang kejadian B.

Teorema 5:

$$B_n \in \mathcal{A}, \; B_n \uparrow B \Rightarrow P(B_n) \uparrow P(B), \; n \to \infty.$$

Bukti:

Andaikan: $A_n = B_n - B_{n-1}$, maka A_n saling asing. Karena $B_n \uparrow$ dan $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,

sehingga untuk $n \to \infty$ berlaku $B_n \uparrow B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\therefore P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(B)$$ □

Akibat 1 teorema 5:
$A_n \in \mathcal{A}$, dan $A_n \downarrow A \Rightarrow P(A_n) \downarrow P(A)$.

Bukti:

Andaikan $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n^c \uparrow A^c$, sehingga $P(A_n^c) \uparrow P(A^c)$, untuk $n \to \infty$ (dari teorema 5).

$\therefore \{1 - P(A_n)\} \uparrow \{1 - P(A)\}$.

$\therefore P(A_n) \downarrow P(A)$ $\square$

Akibat 2 teorema 5:
$A_n \to A \Rightarrow P(A_n) \to P(A)$.

Bukti:

$$\bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k \Rightarrow P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \tag{6}$$

Di lain pihak, diketahui bahwa $\bigcap_{k \geq n} A_k \uparrow \underline{\lim}\, A_n$, $\bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow \overline{\lim}\, A_n$, sehingga

$\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = A$, sebab $A_n \to A$.

Menurut teorema 5 berlaku: $P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \uparrow P(A)$ (7)

dan menurut akibat 1 teorema 5 diperoleh: $P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \downarrow P(A)$ (8)

Dari (6), (7), (8), dan teorema apit diperoleh: $P(A_n) \to P(A)$ $\square$

Jika B_n adalah barisan kejadian-kejadian dalam kelas kejadian $\mathcal{A}$ dan merupakan barisan monoton naik dengan limitnya kejadian B maka untuk $n \to \infty$

peluang kejadian B_n akan konvergen ke peluang kejadian B. Akibatnya, jika A_n adalah barisan kejadian-kejadian dalam kelas kejadian $\mathcal{A}$ dan merupakan barisan monoton turun dengan limitnya adalah kejadian A maka untuk n $\rightarrow \infty$ peluang kejadian A_n akan konvergen ke peluang kejadian A . Jadi, jika kejadian A_n konvergen ke kejadian A maka peluang kejadian A_n akan konvergen ke peluang kejadian A.

2. Variabel Random

a. Pengertian Variabel Random

Tujuan dikembangkannya model matematika dalam teori peluang adalah untuk mendeskripsikan peluang munculnya suatu kejadian dalam ruang sampel. Karena model matematika diekspresikan dalam bentuk nilai-nilai numeris, maka timbullah gagasan untuk mendefinisikan sebuah fungsi yang dikenal dengan variabel random. Variabel random memetakan setiap hasil dalam suatu percobaan dengan sebuah bilangan real. Sebelum masuk pada definisi variabel random diberikan contoh berikut untuk memberi gambaran tentang pengertian variabel random.

Contoh 8:

Dilakukan percobaan melempar tiga buah mata uang yang seimbang sekaligus. Andaikan kejadian A menyatakan kejadian munculnya angka, kejadian

G menyatakan kejadian munculnya gambar , maka dapat didefinisikan variabel X yang menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul dalam percobaan tersebut. Jadi, nilai variabel X ditentukan oleh hasil percobaan yang sifatnya random.

Definisi 42. Vektor Random dan Variabel Random:
Diberikan: ruang sampel S, fungsi bernilai vektor $X(\omega)$, dengan $X: S \to \mathbb{R}^n$, dan $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, dan $\mathcal{B}_n$ adalah medan Borel dalam $\mathbb{R}^n$. $X(\omega)$ disebut vektor random berdimensi n jika $X^{-1}(B_n)$ adalah suatu kejadian untuk setiap himpunan Borel $B_n \in \mathcal{B}_n$.

Jika $n = 1$ maka $X(\omega)$ disebut variabel random. Untuk selanjutnya notasi $X(\omega)$ ditulis X.

Contoh 9:

Dari contoh 8 dapat diketahui bahwa

$S = \{ GGG, AGG, GAG, GGA, AAG, AGA, GAA, AAA \}$

Dibentuk: $\mathcal{A} = P(S)$.

Didefinisikan: $X : S \to \mathbb{R}^3$, $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$, dan

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0, & jika\ \omega = G \\ 1, & jika\ \omega = A \end{cases};\ X_2(\omega) = \begin{cases} 0, & jika\ \omega = G \\ 1, & jika\ \omega = A \end{cases};\ X_3(\omega) = \begin{cases} 0, & jika\ \omega = G \\ 1, & jika\ \omega = A \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa: $X^{-1}(B_3)$ adalah suatu kejadian untuk setiap $B_3 \in \mathcal{B}_3$.

$X^{-1}(B_3) = \varnothing$, jika B_3 tidak mengandung 8 titik dalam S.

= GGG, jika B_3 mengandung (0, 0, 0)

= AGG, jika B_3 mengandung (1, 0, 0), dan seterusnya.

Jadi, $X^{-1}(B_3) = \{\varnothing, GGG, AGG, GAG, \ldots, S\} \subseteq \mathcal{A}$. Jadi, $X(\omega)$ adalah vektor random berdimensi 3.

b. Limit Variabel Random

Definisi 43. Limit Inferior dan Superior Variabel Random:
Andaikan: $< X_n(\omega) >$ adalah barisan variabel random dalam ruang terukur $(S, \mathcal{A})$, $\forall \omega \in S$ didefinisikan fungsi $Y_n(\omega)$ dan $Z_n(\omega)$ sebagai berikut :

$$Y_n(\omega) = \inf_{k \geq n} X_k(\omega),\ Z_n(\omega) = \sup_{k \geq n} X_k(\omega)\ .$$

Jika untuk $n \to \infty$ berlaku:

$$Y_n(\omega) \uparrow \sup Y_n(\omega) = \lim\inf X_n(\omega) = \underline{\lim}\ X_n(\omega) = Y(\omega)$$

$$Z_n(\omega) \downarrow \inf Z_n(\omega) = \lim\sup X_n(\omega) = \overline{\lim}\ X_n(\omega) = Z(\omega)$$

maka variabel random $Y(\omega)$ disebut *limit inferior* variabel random $X(\omega)$ dan variabel random $Z(\omega)$ disebut *limit superior* variabel random $X(\omega)$.

Definisi 44. Kekonvergenan Variabel Random dan Himpunan Kekonvergenan:
Diberikan ruang sampel S, himpunan A dan $A \subseteq S$ dan barisan variabel random $< X_n >$. Jika untuk $\omega \in S$ berlaku $\overline{\lim}\ X_n = \underline{\lim}\ X_n = X$, *maka* barisan variabel random $< X_n >$ disebut *konvergen* ke variabel random X, dinotasikan dengan $X_n \to X$.
Himpunan A *disebut himpunan kekonvergenan* dari barisan variabel random $< X_n >$ jika elemen himpunan A adalah semua $\omega \in S$ sedemikian hingga $\overline{\lim}\ X_n = \underline{\lim}\ X_n = X$. A secara simbolik dapat ditulis:
Untuk $r = n + m$, $m \geq 1$,

$$A = \{\omega | X_n(\omega) \to X(\omega)\}$$

$$= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n} \bigcap_{m} \{\omega \,|\, |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\} \qquad (9)$$

$$= \bigcap_{k} \bigcup_{n} \bigcap_{m} \{\omega \,|\, |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < 1/k, k = 1,2,\ldots\} \qquad (10)$$

3. Variabel Random Diskrit

a. Pengertian Variabel Random Diskrit dan Fungsi Densitas Peluang Diskrit

Definisi 45. Variabel random Diskrit dan Fungsi Densitas Peluang Diskrit:
Andaikan: $X(\omega)$ adalah vektor random yang berdimensi k, $k \geq 1$ dan $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega))$, maka $X(\omega)$ disebut *vektor random diskrit* jika terdapat terbilang titik $z_j \in \mathbb{R}^k$, j = 1, 2, ... , sedemikian sehingga:

$$\sum_{\forall j} P\left(\left\{\omega \,\middle|\, X(\omega) = z_j,\ X(\omega) \in B,\ \omega \in S\right\}\right) = \sum_{\forall j} p_X(z_j) = 1,$$

$p_X(z_j) \geq 0$. p_X disebut *fungsi densitas peluang diskrit. Variabel random diskrit* adalah vektor random yang berdimensi satu.

Contoh 10:

Dari contoh 8, diperoleh $S = \{AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG\}$, dengan A menyatakan kejadian munculnya angka, dan G menyatakan kejadian munculnya gambar.

Didefinisikan:

$$* X_1 : S \to \mathbb{R}, \text{ dengan } X_1(\omega) = \begin{cases} 0, & jika\ \omega = A \\ 1, & jika\ \omega \neq A \end{cases}$$

$$* X_2 : S \to \mathbb{R}, \text{ dengan } X_2(\omega) \begin{cases} 0, & jika\ \omega = A \\ 1, & jika\ \omega \neq A \end{cases}$$

$$* X_3 : S \to \mathbb{R}, \text{ dengan } X_3(\omega) = \begin{cases} 0, & jika\ \omega = A \\ 1, & jika\ \omega \neq A \end{cases}$$

$* X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$, maka

$p_X((0,0,0)) = \frac{1}{8}$, $p_X((1,0,0)) = \frac{1}{8}$, $p_X((0,1,0)) = \frac{1}{8}$, $p_X((0,0,1)) = \frac{1}{8}$,

$p_X((1,0,1)) = \frac{1}{8}$, $p_X((1,1,0)) = \frac{1}{8}$, $p_X((0,1,1)) = \frac{1}{8}$, $p_X((1,1,1)) = \frac{1}{8}$.

$$\therefore \sum_{\forall X} p_X = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1$$

b. Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit

Definisi 45. Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit:
Fungsi distribusi kumulatif diskrit untuk variabel random diskrit X adalah fungsi $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, dengan $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Contoh 11:

Dilakukan percobaan melempar tiga buah mata uang yang seimbang sekaligus. Andaikan: kejadian A menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul dalam pelemparan tersebut dan kejadian G menyatakan kejadian munculnya sisi gambar dalam pelemparan tersebut.

Didefinisikan: $X: S \to \mathbb{R}$, dengan $X(\omega)$ menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul dalam pelemparan tersebut. Fungsi distribusi kumulatif diskritnya adalah sebagai berikut:

$F_X(0) = P(X \leq 0) = 1/8$,

$F_X(1) = P(X \leq 1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$,

$F_X(2) = P(X \leq 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$,

$F_X(3) = P(X \leq 3) = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1.$

$$\therefore\ F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

4. Variabel Random Kontinu

a. Pengertian Variabel Random Kontinu

Definisi 47. Variabel Random Kontinu:
Andaikan: $X(\omega)$ adalah vektor random berdimensi k, $k \geq 1$, dan $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_k(\omega))$ maka $X(\omega)$ disebut *vektor random kontinu* jika $P(X = \mathbf{z}) = 0$ untuk setiap $z \in \mathbb{R}^k$

b. Fungsi densitas peluang Kontinu dan Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Definisi 48. Fungsi densitas peluang Kontinu dan Fungsi Distributif Kumulatif Kontinu:
Fungsi distribusi kumulatif kontinu untuk variabel random kontinu X adalah fungsi $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, dengan

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\,,$$

f_X adalah fungsi yang terintegralkan dan $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$.
f_X disebut *fungsi densitas peluang kontinu*

Contoh 12:

Diberikan: $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ 6 - 6x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain}. \end{cases}$ Tentukanlah $F_X(x)$.

Jawab: untuk $0 < x \leq 1/2$, maka diperoleh:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = 0 + t^2\Big]_0^x = x^2.$$

untuk $1/2 < x \leq 1$ maka diperoleh:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1/2} 2t\,dt + \int_{1/2}^{x} (6 - 6t)\,dt$$

$$= 0 + t^2\Big]_0^{1/2} + (6t - 3t^2)\Big]_{1/2}^{x} = -3x^2 = 6x - 2$$

untuk $x > 1$ maka

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1/2} 2t\,dt + \int_{1/2}^{1} (6 - 6t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt$$

$$= 0 + t^2\Big]_0^{1/2} + \left(6t - 3t^2\right)\Big]_{1/2}^{1} + 0$$

$$= 1/4 + \{(6 - 3) - (3 - 3/4)\} = 1$$

$$\therefore\; F_X(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1/2 \\ -3x^2 + 6x - 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Teorema 6:

Suatu fungsi distribusi kumulatif variabel random X mempunyai sifat sebagai berikut:

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

(ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

(iii) monoton naik, yaitu jika $a < b$ maka $F(a) \leq F(b)$;

(iv) kontinu dari kanan, yaitu $\lim_{h} F(x+h) = F(x)$

Bukti:

(i) Andaikan: $B_n(\omega) = \{ \omega \in S \mid X(\omega) \leq -n \}$ maka barisan $< B_n(\omega) >$ adalah barisan turun, sebab $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $B_n(\omega) \downarrow \emptyset$, maka $P(B_n(\omega)) \downarrow P(\emptyset) = 0$ (akibat 1 teorema 5). Jadi, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(ii) Andaikan $A_n(\omega) = \{ \omega \in S \mid X(\omega) \leq n \}$ maka barisan $< A_n(\omega) >$ adalah barisan naik, sebab $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $A_n(\omega) \uparrow S$, maka $P(A_n(\omega)) \uparrow P(S) = 1$ (teorema 5). Jadi, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

(iii) Andaikan: $A = \{ X / X \leq a \}$, $B = \{ X \mid a < X \leq b \}$ maka $C = \{ X / X \leq b \} = A \cup B$ dan $A \cap B = \emptyset$ maka $P(C) = P(A) + P(B)$ (menurut definisi 40) . Jadi, $F_X(b) = F_X(a) + P(B)$ sehingga $F_X(a) \leq F_X(b)$.

(iv) Andaikan: $A = \{ X \mid X \leq x + h \}$ dan $B = \{ X \mid X \leq x \}$ sehingga jika $h \to 0^+$ maka $P(A) \to P(B)$. Jadi, $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ □

5. Nilai harapan dan Variansi

Pengertian nilai harapan dan variansi dimanfaatkan di dalam teorema ketaksamaan dasar, hukum bilangan besar, dan dalam Teorema Limit Pusat.

Definisi 49. Nilai Harapan, Variansi, dan Deviasi Standar:
Nilai harapan variabel random X, dinotasikan dengan $E(X)$ atau μ_X, didefinisikan sebagai berikut:

(i) Untuk variabel random diskrit X dengan fungsi densitas peluang diskrit $p_X(x)$, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_X(x_i)$;

(ii) Untuk variabel random kontinu X :

Andaikan: (R, B, P_X) adalah ruang peluang yang dibangun oleh X. Jika P_X adalah ukuran Lebesgue-Stieltjes yang dibangun oleh $F_X(x)$

dengan $F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} dF_X(x)$, $x \in R$, maka *nilai harapan dari X* adalah: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x)$, integralnya menggunakan integral Lebegue-Stieltjes. Jika $F_X(x)$ memiliki derivatif $f_X(x)$ maka *nilai harapan dari X* menjadi: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx$, integralnya menggunakan integral Riemann.

Variansi dari variabel random X adalah nilai harapan dari kuadrat selisih X dengan nilai harapannya atau $Var(X) = E\left((X - \mu_X)^2\right)$. Notasi $Var(X)$ sering juga ditulis dengan notasi σ_X^2.

Deviasi standar variabel random X adalah akar kuadrat dari variansi variabel randonm X, dinotasikan de- ngan σ_X.

Teorema 7:
Jika X adalah variabel random dan $g(X)$ adalah fungsi dari variabel random X maka nilai harapan dari $g(X)$ adalah:
(i) Jika X variabel random diskrit dengan fungsi densitas peluang diskrit $p_X(x)$ maka $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(X) \, p_X(x_i)$;
(ii) Jika X variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang kontinu $f_X(x)$ maka $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) \, f_X(x) \, dx$.

Bukti:

Dengan mengambil $x = g(X)$ (dari definisi 49) maka (i) dan (ii) langsung dapat diperoleh □.

6. Fungsi Distribusi Peluang Bersama

Hasil suatu penelitian seringkali tidak hanya dipengaruhi oleh satu macam variabel, misalnya penelitian tentang [illegible] jaran matematika terhadap tingkat prestasi yang dicapai oleh siswa pada mata pelajaran matematika. Banyak variabel yang mempengaruhi minat siswa terhadap mata pelajaran matematika, misalnya: cara guru mengajar, metode yang dipakai guru di dalam mengajar, jenis soal yang disajikan oleh guru, dan sebagainya. Tentunya variabel-variabel ini perlu diperhitungkan atau dipertimbangkan di dalam pengambilan kesimpulan hasil penelitian tersebut.

Pada penelitian-penelitian yang dilakukan seringkali peneliti tidak hanya berhadapan dengan satu variabel yang mempengaruhi hasil penelitiannya, misalnya pada contoh di atas. Pada penelitian tersebut peneliti tidak hanya berhadapan dengan satu variabel saja tetapi dapat melibatkan sampai n varibel.Untuk keperluan tersebut maka didefinisikanlah fungsi distribusi peluang bersama.

Pada pembahasan selanjutnya variabel random yang dibicarakan tidak hanya satu varibel random melainkan n variabel random atau deret variabel random. Untuk itu perlu dibahas tentang fungsi distribusi peluang bersama, baik untuk variabel random diskrit maupun untuk variabel random kontinu.

a. Fungsi densitas peluang Diskrit Bersama

Definisi 50. Fungsi Peluang Densitas Diskrit Bersama:
Fungsi densitas peluang diskrit bersama dari vektor *random* berdimensi k, k ≥ 1 didefinisikan sebagai berikut:

$$p_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k),$$

untuk semua kemungkinan nilai $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega))$.

Definisi 51. Fungsi Peluang Marginal Diskrit:
Fungsi peluang marginal diskrit dari vektor random berdimensi k didefinisikan sebagai berikut:

$$f_{i_1, \ldots, i_m}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = \sum_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}} p_X(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

dengan $p_X(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ adalah fungsi densitas peluang diskrit bersama.

Definisi 52. Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit Bersama:
Fungsi distribusi kumulatif diskrit bersama dari vektor random berdimensi k didefinisikan sebagai berikut:

$$F_{X_1 X_2 \cdots X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k)$$

b. Fungsi densitas peluang Kontinu Bersama

Definisi 53. Fungsi densitas peluang Kontinu Bersama dan Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu Bersama:
Fungsi distribusi kumulatif kontinu bersama dari vektor random berdimensi k didefinisikan sebagai berikut:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k,$$

untuk semua $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega))$,

dan $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ disebut *fungsi densitas peluang kontinu bersama* dari X.

Definisi 54. Fungsi densitas peluang Marginal Kontinu:
Fungsi densitas peluang marginal kontinu dari vektor random berdimensi k didefinisikan sebagai berikut:

$$f_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_{j_1} \cdots dx_{j_n},$$

dengan $f_x(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ adalah fungsi densitas peluang kontinu bersama dari X.

Definisi 55. Nilai harapan untuk k Variabel Random:
Andaikan $g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ adalah fungsi dari variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ yang memiliki fungsi densitas peluang diskrit bersama $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ atau fungsi densitas peluang kontinu bersama $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ maka nilai harapan dari $g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ didefinisikan sebagai berikut:

(i) Untuk variabel random diskrit $X_1, X_2, \ldots, X_k$,

$$E(g(x_1, x_2, \ldots, x_k)) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, p_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)\ ;$$

(ii) Untuk variabel random kontinu $X_1, X_2, \ldots, X_k$,

$$E(g(x_1, x_2, \ldots, x_k))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k.$$

Definisi 56. Momen Orde ke-k:
Jika X adalah variabel random dan k = 1, 2, ..., maka $E(X^k)$ disebut *momen orde ke-k.*

c. Distribusi Bebas Stokastik dan Identik

Pengertian distribusi bebas stokastik dan identik perlu dibahas, karena pembahasan hukum bilangan besar, lemah maupun kuat, pembahasannya dibedakan menjadi dua yaitu hukum bilangan besar untuk variabel random yang berdistribusi bebas stokastik dan identik dan untuk variabel random yang saling bebas stokastik.

Definisi 57. Distribusi Bebas Stokastik dan Identik:
Variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dikatakan *bebas stokastik* jika:

(i) $p_{X_1, X_2, \ldots, X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} p_{X_i}(x_i)$, untuk variabel random diskrit dengan $p_{X_i}(x_i)$ adalah fungsi peluang marginal diskrit;

(ii) $f_{X_1, X_2, \ldots, X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_{X_i}(x_i)$, untuk variabel random kontinu dengan $f_{X_i}(x_i)$ adalah fungsi peluang marginal kontinu.

Variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dikatakan *menyebar identik* jika $\forall X \in \mathbb{R}$ berlaku:
(i) $F_i(x_i) = F_j(x_j)$ atau $p_i(x_i) = p_j(x_j)$, i ≠ j, i = 1, 2, ..., k,
j = 1, 2, ..., k, untuk variabel random diskrit;
(ii) $F_i(x_i) = F_j(x_j)$ atau $f_i(x_i) = f_j(x_j)$, i ≠ j, i = 1, 2, ..., k,
j = 1, 2, ..., k, untuk variabel random kontinu.
Jadi, variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dikatakan *berdistribusi bebas stokastik dan identik* jika saling bebas stokastik dan menyebar identik.

Teorema 8
Jika $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah variabel random yang saling bebas stokastik maka $E(X_1 . X_2 \ldots X_k) = E(X_1) . E(X_2) \ldots E(X_k)$.

Bukti:

Untuk variabel random kontinu:

* **Pangkal**: Andaikan: k = 2, maka

$$E(X_1 . X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 . x_2 . f(x_1 , x_2)\, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 . x_2 . f_1(x_1) . f_2(x_2)\, dx_1 \, dx_2 \tag{11}$$

Karena X_1 , X_2 saling bebas stokastik, maka dari persamaan (11) diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2 . f_2(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} x_1 . f_1(x_1)\, dx_1 \, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 . f_2(x_2) E(X_1)\, dx_2 = E(X_1) . E(X_2).$$

Jadi, pernyataan benar untuk k = 2.

* **Hipotesis induksi**: diandaikan pernyataan benar untuk k = n maka

$E(X_1 , X_2 , \dots , X_n) = E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_n)$.

* **Langkah:** akan dibuktikan pernyataan benar untuk k = n + 1.

$$E(X_1 . X_2 , \dots , X_n . X_{n+1})$$

$$= E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_{n-1}) . E(X_n . X_{n+1})$$

$$= E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n . x_{n+1} . f(x_n , x_{n+1})\, dx_n \, dx_{n+1}$$

$$= E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n . x_{n+1} . f_n(x_n) . f_{n+1}(x_{n+1})\, dx_n \, dx_{n+1}$$

$$= E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} x_{n+1} . f_{n+1}(x_{n+1}) \int_{-\infty}^{\infty} x_n . f_n(x_n)\, dx_n \, dx_{n+1}$$

$$= E(X_1) . E(X_2) . \dots . E(X_{n-1}) . E(X_n) . E(X_{n+1})$$

Jadi, pernyataan benar untuk k = n + 1 .

Dengan jalan yang sama dapat dibuktikan untuk variabel random diskrit n.

Jadi , nilai harapan dari perkalian k buah variabel random yang saling bebas stokastik sama dengan perkalian nilai harapan masing-masing variabel random .

7. Beberapa Contoh Distribusi Diskrit dan Kontinu yang Penting

Dalam sub bab ini, akan dikenalkan tiga jenis distribusi diskrit yang penting di dalam pembahasan selanjutnya, yaitu Distribusi Bernoulli, Distribusi Binomial, dan Distribusi Poisson, serta Distribusi Normal yang merupakan distribusi kontinu.

a. Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli didasarkan atas ruang sampel yang dibangkitkan dari percobaan Bernoulli. Ruang sampelnya terdiri atas dua unsur, yaitu sukses dan gagal, dengan masing-masing peluang munculnya adalah p dan q = 1 - p. Kejadian sukses disimbolkan dengan 1 dan kejadian gagal disimbolkan dengan 0.

Definisi 58. Distribusi Bernoulli:
Andaikan X adalah variabel random maka X disebut *variabel random yang berdistribusi Bernoulli* jika fungsi densitas peluang diskritnya adalah $p(x) = p^x q^{1-x}$, dengan $x = 0, 1$.

Distribusi Bernoulli dapat dinyatakan dengan fungsi indikator, yaitu:

$$p_X(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) \ .$$

b. Distribusi Binomial

Percobaan Binomial tak lain adalah percobaan Bernoulli yang dilakukan berulang-ulang. Dalam percobaan yang berulang-ulang tersebut setiap ulangan harus independen. Artinya kondisi ulangan yang satu tidak mempengaruhi kondisi ulangan yang lain dan peluang sukses untuk setiap ulangan adalah sama.

Definisi 59. Distribusi Binomial:
Andaikan: $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel random yang saling bebas stokastik dan berditribusi Bernoulli, maka $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ disebut variabel random yang berditribusi Binomial, jika fungsi densitas peluang diskritnya adalah $b(x;n;p) = C_{(n,x)}\, p^x q^{n-x} I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x)$

Teorema 9:
Jika variabel random X berdistribusi Binomial dengan peluang sukses p dan peluang gagal $q = 1 - p$, maka
(i) $E(X) = np$;
(ii) $Var(X) = npq$,
n menyatakan banyaknya ulangan dalam suatu percobaan.

Bukti:

$$\mu_X = \sum_{x_i=0}^{n} x_i\, p_X(x_i) = \sum_{x_i=0}^{n} x_i\, C_{(n,x_i)}\, p^{x_i} q^{n-x_i} = \sum_{x_i=0}^{n} x_i \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

$$= \sum_{x_i=1}^{n} \frac{n!}{(x_i-1)!(n-x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

$$= np \sum_{x_i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x_i-1)!(n-x_i)!} p^{(x_i-1)} q^{n-x_i} \qquad (12)$$

Andaikan: $y_i = x_i - 1$,

maka persamaan (12) menjadi:

$$\mu_X = np \sum_{y_i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y_i!(n-y_i-1)!} p^{y_i} q^{n-y_i-1} \tag{13}$$

Andaikan: $m = n - 1$, maka persamaan (13) akan menjadi:

$$\mu_X = np \sum_{y_i=0}^{m} \frac{m!}{y_i!(m-y_i)!} p^{y_i} q^{m-y_i} = np \sum_{y_i=0}^{m} C_{(m,y_i)} p^{x_i} q^{m-y_i}$$

$$= np \sum_{y_i=0}^{n} p_{Y_i}(y_i)$$

Karena $\sum_{y_i=0}^{n} p_{Y_i}(y_i) = 1$ maka diperoleh: $\mu_X = np$

(ii) Dengan jalan yang sama akan diperoleh $Var(X) = npq$ □.

Jadi, jika diketahui banyaknya ulangan yang dilakukan adalah n dan peluang suksesnya adalah p, serta peluang gagalnya adalah $q = 1 - p$, maka nilai harapan dan variansinya masing-masing dapat dicari, yaitu np dan npq.

c. Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi variabel random X, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu tertentu atau suatu daerah tertentu disebut *Percobaan Poisson* .

Ciri-ciri percobaan Poisson:

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu tertentu tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah;

2. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut;
3. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam waktu yang singkat tersebut atau daerah yang kecil tersebut, dapat diabaikan.

Definisi 60. Distribusi Poisson:
Variabel random X dikatakan *berdistribusi Poisson* dengan parameter $\lambda > 0$, bila fungsi peluang diskritnya berbentuk:

$$p_X(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; \quad x = 0,1,2,\cdots$$

Teorema 10:
Jika variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ maka:
a. $E(X) = \lambda$;
b. $Var(X) = \lambda$.

Bukti:

a. $$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p_X(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \tag{14}$$

Misal: $y = x - 1$, maka dari persamaan (14) diperoleh:

$$E(X) = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \left(karena \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda} \right) = \lambda$$

b. $$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} - \lambda^2$$

$$= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} - \lambda^2 \qquad (15)$$

Misal: $y = x - 1$, maka dari persamaan (15) diperoleh:

$$Var(X) = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(y+1)e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} - \lambda^2$$

$$= \lambda \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} \frac{y e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \right\} - \lambda^2$$

$$= \lambda \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{(y-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \right\} - \lambda^2$$

$$= \lambda \left\{ \lambda \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(y-1)}}{(y-1)!} + e^{-\lambda} e^{\lambda} \right\} - \lambda^2$$

$$= \lambda \left\{ \lambda \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(y-1)}}{(y-1)!} + 1 \right\} - \lambda^2 \qquad (16)$$

Misal: $z = y - 1$, maka dari persamaan 16 diperoleh:

$$Var(X) = \lambda \left\{ \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!} + 1 \right\} - \lambda^2 = \lambda\left(\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} + 1\right) - \lambda^2$$

$$= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad \square$$

Teorema 11:
Diandaikan λ adalah suatu parameter dan n adalah sembarang bilangan bulat positip, maka untuk setiap bilangan tak negatip x berlaku:

$$\lim_{n \to \infty} C_{(n,x)}\, p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \textit{dengan } p = \frac{\lambda}{n}.$$

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} C_{(n,x)}\, p^x (1-p)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} C_{(n,x)} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \lambda^x \left(\frac{1}{n^x}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{(n-\lambda)^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \qquad (17)$$

Di lain pihak: $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$, *untuk* $n \to \infty$, sehingga persamaan (17) menjadi:

$$\lim_{n\to\infty} C_{(n,x)}\, p^x (1-p)^{n-x} = \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{(n-\lambda)^x}\right) e^{-\lambda} \qquad (18)$$

Langkah berikutnya akan dibuktikan bahwa:

$$\frac{n!}{(n-x)!(n-\lambda)^x} \to 1, \textit{untuk } n \to \infty$$

$$\frac{n!}{(n-x)!(n-\lambda)^x} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!(n-\lambda)^x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{(n-\lambda)(n-\lambda)\cdots(n-\lambda)} \to 1, \textit{ untuk } n \to \infty \qquad (19)$$

Dari persamaan (18) dan (19) diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} C_{(n,x)}\, p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \square$$

Jadi, untuk n yang semakin besar nilai fungsi densitas peluang diskrit Distribusi Binomial dapat diperoleh dari nilai fungsi densitas peluang diskrit Distribusi Poisson.

Contoh 13:

Suatu sistem terdiri atas 1000 komponen. Masing-masing komponen gagal secara bebas dengan yang lain dan peluang kegagalannya dalam satu bulan 0,001. Akan ditentukan peluang bahwa sistem tersebut akan berfungsi, yaitu tidak ada komponen yang gagal, pada akhir bulan.

Diketahui: $p = 0{,}001$ sehingga $q = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

$n = 1000$

$x = 0$

$np = 1$

Ditanyakan: $P[X = 0] = \ldots$?

Jawab:

* Dengan distribusi Binomial:

$$P[X = 0] = C_{(n,0)}\, p^0 q^{n-0} = \frac{n!}{n!} q^n = q^n = 0{,}999^{1000} = 0{,}3677$$

* Dengan distribusi Poisson:

$$P[X = 0] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},\ dengan\ \lambda = np$$

$$\therefore P[X = 0] = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = e^{-1} = 0{,}368$$

Jadi, untuk n yang semakin besar nilai fungsi peluang densitas Binomial dapat didekati dengan baik oleh nilai fungsi densitas peluang Poisson.

d. Distribusi Normal

Distribusi normal diketemukan oleh De Moivre pada tahun 1733. Persamaan kurva Normal juga diketemukan oleh Gauss melalui studi galat dalam pengukuran yang berulang-ulang terhadap benda yang sama. Oleh karena itu, Distribusi Normal disebut juga Distribusi Gauss.

Definisi 61. Distribusi Normal:
Variabel random X dikatakan berdistribusi Normal dengan mean μ_X dan deviasi standar σ_X, bila fungsi densitas peluang kontinunya berbentuk:

$$f(x;\mu_X,\sigma_X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2},\ \text{untuk } -\infty < x < \infty.$$

Jika disubstitusikan $z=\dfrac{x-\mu_X}{\sigma_X}$, dengan $\mu_X = 0, \sigma_X = 1$ maka akan diperoleh

Distribusi Normal Standar dengan fungsi densitasnya: $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$, dengan $-\infty < z < \infty$ dinotasikan dengan $N(0,1)$.

8. Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik digunakan untuk membangun Teorema Limit Pusat Lindeberg.

Definisi 62. Fungsi Karakteristik:
Andaikan: $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ adalah vektor random yang terdefinisi dalam ruang peluang $(S, \mathcal{A}, P)$ dan nilai-nilainya berada dalam $\mathbb{R}^n$. *Fungsi karateristik* dari $X(\omega)$ adalah

$$\varphi_X(t)=\int_{\Re^n} e^{itx}\,dF_X(x)\ ,\ t\in\mathbb{R}^n, \tag{20}$$

dengan $F_X(x)=F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ adalah fungsi distribusi kumulatif bersama dari vektor $X(\omega)$. Jika $F_X(x)$ mempunyai fungsi densitas peluang $f_X(x)$ maka diperoleh: $\varphi_X(t) = \int_{\Re^n} e^{itx} f_X(x)\, dx$.

Dari persamaan (20) dan dari definisi nilai harapan maka fungsi karakteristik dapat didefinisikan sebagai:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}),\ t \in R^n \tag{21}$$

Andaikan $X(\omega)$ adalah variabel random dengan fungsi distribusi kumulatifnya $F_X(x)$ dan fungsi karakteristiknya $\varphi_X(t) = E(e^{itx})$.

Jika $\eta = ax + b$ maka $\varphi_\eta(t) = E(e^{it\eta}) = E(e^{it(ax+b)}) = e^{itb} E(e^{itax})$.

Akibatnya: $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$.

Oleh karena itu, jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah variabel random yang saling bebas stokastik dan $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_k$, maka $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}$, sebab:

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(t) &= E(e^{it(x_1+x_2+\ldots+x_n)}) \\
&= E(e^{itx_1}.e^{itx_2}\ldots.e^{itx_n}) \\
&= E(e^{itx_1}).E(e^{itx_2})\ldots.E(e^{itx_n}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t).
\end{aligned}$$

Jadi, fungsi karakteristik dari deret variabel random yang saling bebas stokastik sama dengan perkalian fungsi karakteristik dari masing-masing variabel random.

Contoh 14:

1. Fungsi karakteristik dari Distribusi Binomial adalah

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx})$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{itx} . C_{(n,x)} \cdot p^x . q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_{(n,x)} . (pe^{it})^x . q^{n-x}$$

$$= (pe^{it} + q)^n , sebab (a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_{(n,x)} . a^x . b^{n-x} .$$

Jadi, fungsi karakteristik dari Distribusi Binomial adalah

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n .$$

2. Fungsi karakteristik dari Distribusi Normal Standar

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} . e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} . e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2 - 2itx)}{2}} dx$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx ,$$

Andaikan: u = x - it, sehingga du = dx. Oleh karena itu diperoleh:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, du = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

sebab $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

9. Deret Fourier

Pada sub bab ini akan dibahas deret Fourier baik untuk fungsi bernilai real maupun untuk fungsi yang bernilai kompleks. Deret Fourier ini berguna dalam pembuktian teorema ketunggalan fungsi karakteristik yang akan dibahas pada sub bab ini juga.

Definisi 63. Deret Fourier:
Andaikan: $f(x)$ didefinisikan dan kontinu pada selang $[\pi, -\pi]$ dan $f(\pi) = f(-\pi)$. Deret Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \tag{22}$$

dengan:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 1, 2 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n = 1, 2 \ldots$$

a_n dapat diperoleh dengan mengalikan persamaan (22) dengan cos mx dan mengintegralkannya dari π sampai $-\pi$, sehingga diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right) \tag{23}$$

Dari kenyataan bahwa:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\begin{cases}0, \text{untuk } n\neq m\\ \pi, \text{untuk } n=m\end{cases},\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$$

maka dari persamaan (23) diperoleh:

* Untuk m = 0, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\pi\,a_0 \Leftrightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ (24)

* Untuk m = 1, 2, ...,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\pi\,a_m \Leftrightarrow a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \tag{25}$$

b_n dapat diperoleh dengan mengalikan persamaan (22) dengan sin mx dan mengintegralkannya dari π sampai -π, sehingga diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right) \tag{26}$$

Dari kenyataan bahwa:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\begin{cases}0, \text{untuk } n\neq m\\ \pi, \text{untuk } n=m\end{cases},\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx=0$$

maka dari persamaan (26) diperoleh:

* Untuk m = 1, 2, ...,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx=\pi\,b_m \Leftrightarrow b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \tag{27}$$

Dari persamaan (24), (25), dan (27) diperoleh:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n = 1,2,\ldots$$

Selanjutnya akan ditentukan deret Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ yang bernilai kompleks. Diketahui: $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *dan* $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

sehingga persamaan (22) menjadi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{inx}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + e^{-inx}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)\right\}$$

Misal: $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $c_n = \left(\dfrac{a_n - ib_n}{2}\right)$, *dan* $c_{-n} = \left(\dfrac{a_n + ib_n}{2}\right)$, sehingga diperoleh:

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, dengan

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)dx\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (28)$$

Misal: $t = \dfrac{L}{\pi}x$, maka $dt = \dfrac{L}{\pi}dx \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{L}dt = dx$

Untuk: $x = \pi$, maka $t = L$ dan $x = -\pi$, maka $t = -L$.

Oleh karena itu, persamaan (28) menjadi:

$$f\left(\frac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi t}{L}} \quad \text{, dengan } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f\left(\frac{\pi}{L}t\right) e^{-\frac{in\pi t}{L}} \frac{\pi}{L}\, dt$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\left(\frac{\pi}{L}t\right) e^{\frac{in\pi t}{L}}\, dt$$

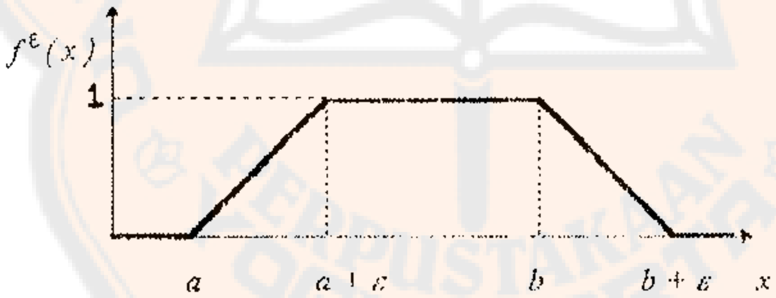
Teorema 12. Ketunggalan Fungsi Karakteristik:
Misal: F dan G adalah fungsi distribusi kumulatif dengan fungsi karakteristik yang sama, yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

maka $F(x) = G(x)$.

Bukti:

Ambil $a, b \in \mathbb{R}$, dan $\varepsilon > 0$ serta $f^{\varepsilon}(x)$, sebagai berikut:



Akan ditunjukan: $\int_{-\infty}^{\infty} f^{\varepsilon} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\varepsilon} dG(x)$ (30)

Andaikan $n \geq 0$ dan cukup besar sedemikian hingga $[\, a+\varepsilon\, , b+\varepsilon] \subseteq [\, -n, n\,]$

dan andaikan $\{\delta_n\}$ adalah barisan bilangan, di mana $1 \geq \delta_n \downarrow 0$, untuk $n \to \infty$

Setiap fungsi kontinu dalam $[\, -n, n\,]$ mempunyai nilai yang sama untuk titik-titik akhirnya, $f^{\varepsilon}(x)$ dapat didekati secara seragam dengan deret Fourier berikut:

$$f_n^{\varepsilon}(x) = \sum_k a_k e^{\left(i\pi x \frac{k}{n}\right)} \quad \text{, dengan } a_k = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-\frac{i\pi xk}{n}}\, dx$$

sedemikian hingga $\sup\limits_{-n \le x \le n} \left| f^{\varepsilon}(x) - f_n^{\varepsilon}(x) \right| \le \delta_n$.

Andaikan $f_n^{\varepsilon}(x)$ adalah fungsi periodik yang diperluas untuk semua $\mathbb{R}$, dan diperoleh: $\sup\limits_{x} \left| f_n^{\varepsilon}(x) \right| \le 2$.

Karena (29) maka diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{\varepsilon} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{\varepsilon} dG(x), \text{ sehingga}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{\varepsilon} dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{\varepsilon} dG(x) \right|$$

$$= \left| \int_{-n}^{n} f^{\varepsilon} dF(x) - \int_{-n}^{n} f^{\varepsilon} dG(x) \right|$$

$$\le \left| \int_{-n}^{n} f_n^{\varepsilon} dF(x) - \int_{-n}^{n} f_n^{\varepsilon} dG(x) \right| + 2\delta_n$$

$$\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{\varepsilon} dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{\varepsilon} dG(x) \right| + 2\delta_n + 2F\left([-n,n]^c\right) + 2G\left([-n,n]^c\right) \tag{31}$$

di mana: $F(A) = \int_A dF(x)$, $G(A) = \int_A dG(x)$.

Jika $n \to \infty$ maka ruas kanan ketaksamaan (31) akan mendekati 0, dan menghasilkan persamaan (30). Jika $\varepsilon \to 0$ maka $f^{\varepsilon}(x) \to I_{(a,b]}(x)$ (x), sehingga dari (30) diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{(a,b]}(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(a,b]}(x)\, dG(x), \text{ yaitu: } F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Karena a dan b tertentu maka $F(x) = G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ □.

Jadi, untuk setiap fungsi distribusi kumulatif terdapat tepat satu fungsi karakteristik yang berkaitan dengan fungsi distribusi kumulatif tersebut.

10. Ketaksamaan Dasar, Markov, dan Chebyshev

a. Ketaksamaan Dasar

Teorema 13. Ketaksamaan Dasar:
Misal: X adalah variabel random dan g adalah fungsi Borel yang tidak negatif dalam $\mathbb{R}$. Jika g adalah fungsi genap dan monoton naik dalam $[0, \infty)$ maka $\forall a > 0$, berlaku:

$$\frac{E(g(X)) - g(a)}{a.s.\sup g(X)} \leq P[|X| \geq a] \leq \frac{E(g(X))}{g(a)} \quad (32)$$

Jika g adalah fungsi yang monoton naik dalam $\mathbb{R}$ dan $P[\,|X| \geq a\,]$ diganti dengan $P[\,X \geq a\,]$ maka ketaksamaan (32) adalah benar untuk setiap a anggota $\mathbb{R}$. Nilai $a.\ s.\ sup\ g(X)$ (= almost surely sup $g(X)$) adalah batas atas terkecil yang hampir pasti dari $g(X)$.

Bukti:

g adalah fungsi Borel dalam $\mathbb{R}$ maka g adalah fungsi yang terukur dalam $S = \mathbb{R}$. Karena g adalah fungsi yang tak negatif dan integralnya ada, maka $E(g(X)) = \int_A g(X)f(x)dx + \int_{A^c} g(X)f(x)dx$, dengan $A = \{\ |X| \geq a\ \}$.

Dalam A berlaku: $g(a) \leq g(X) \leq a.\ s.\ sup\ g(X)$, sebab g adalah fungsi yang monoton naik dan genap.

Oleh karena itu, $g(a).\ P(A) \leq \int_A g(X)f(x)dx \leq (a.s.\sup g(X)).\ P(A)$ (33)

Dalam A^c berlaku: $0 \leq g(X) \leq g(a)$.

Akibatnya: $0 \leq \int_{A^c} g(X)f(x)\,dx \leq g(a).\ P(A^c) \leq g(a)$ (34)

Dari ketaksamaan (33) dan (34) berlaku:

$g(a).\ P(A) \leq E(g(X)) \leq (a.s.\sup g(X).\ P(A)) + g(a)$

Jadi, $\dfrac{E(g(X)) - g(a)}{a.s.\sup g(X)} \leq P[|X| \geq a] \leq \dfrac{E(g(X))}{g(a)}$ □

Jadi, jika X adalah variabel random dan g adalah fungsi Borel yang tidak negatif dalam $\mathbb{R}$ dan g adalah fungsi genap dan monoton naik dalam $[\ 0, \infty\ )$ maka untuk setiap $a > 0$ akan berlaku nilai peluang dari $/X/ \geq a$ terletak di antara selisih nilai harapan dari $g(X)$ dengan $g(a)$ dibagi dengan $a.\ s.\ sup\ g(X)$ dan hasil bagi antara nilai harapan dari $g(X)$ dengan $g(a)$.

b. Ketaksamaan Markov dan Chebyshev

Ketaksamaan Markov merupakan kasus khusus dari ketaksamaan dasar, yaitu dengan mengambil $g(X) = |X|^r$, $r > 0$, sehingga bentuk dari ketaksamaan Markov adalah sebagai berikut:

$$\frac{E\left(|X|^r\right) - a^r}{a.s.\sup|X|^r} \leq P[|X| \geq a] \leq \frac{E\left(|X|^r\right)}{a^r} \tag{35}$$

Ketaksamaan Chebyshev berbentuk:

$$\frac{E\left(X^2\right) - a^2}{a.s.\sup X^2} \leq P[|X| \geq a] \leq \frac{E\left(X^2\right)}{a^2} \tag{36}$$

Tampak bahwa ketaksamaan Chebyshev dapat diperoleh dari ketaksamaan Markov dengan mengambil $r = 2$.

Bab IV

Kekonvergenan Variabel Random

Pada bab ini akan dibahas lima jenis kekonvergenan variabel random, yaitu kekonvergenan bersama, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan lemah, dan kekonvergenan dalam distribusi. Topik ini berkaitan dengan pembahasan selanjutnya, yaitu tentang hukum bilangan besar lemah dan hukum bilangan besar kuat, dan teorema limit pusat.

A. Kekonvergenan Variabel Random

1. Kekonvergenan Bersama

Definisi 64. Kriteria Kekonvergenan Cauchy:
$X_n \to X < \infty$ bila hanya bila $X_n - X_m \to 0$, di mana $m \to \infty$, $n \to \infty$ atau ekuivalen dengan $X_{n+m} - X_n \to 0$, dengan $n \to \infty$. Kejadian ini disebut *kriteria kekonvergenan Cauchy*.

Definisi 65. Kekonvergenan Bersama:
Jika sebuah barisan variabel random memenuhi kriteria kekonvergenan Cauchy, maka barisan tersebut dikatakan konvergen bersama, dengan himpunan kekonvergenannya adalah

$$C = \{\omega | X_{n+m}(\omega) - X_n(\omega) \to 0\}$$
$$= \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_m \left\{\omega \middle| \left|X_{n+m}(\omega) - X_n(\omega)\right| < \frac{1}{k}\right\} \qquad (37)$$

2. Kekonvergenan dalam Peluang

Konsep kekonvergenan dalam peluang memainkan peranan yang sangat penting dalam statistika, misalnya: dalam pembahasan kekonsistenan lemah dan pendugaan parameter, dan dalam hukum bilangan besar lemah.

Definisi 66. Kekonvergenan dalam Peluang:
Barisan variabel random $\{X_n\}$ dikatakan *konvergen dalam peluang ke variabel random X,* dinotasikan dengan $X_n \xrightarrow{P} X$, jika $\forall \varepsilon > 0$ dan untuk $n \to \infty$ maka $P[|X_n - X| \geq \varepsilon] \to 0$.

Definisi 66 ekuivalen dengan, jika $\forall \varepsilon > 0$ dan untuk $n \to \infty$ maka $P[|X_n - X| < \varepsilon] \to 1$.

Konsep di atas mempunyai arti bahwa variabel random X_n dikatakan konvergen dalam peluang ke variabel random X jika untuk setiap nilai $\varepsilon > 0$ dan untuk nilai n yang semakin besar maka peluang jarak antara X_n dengan X kurang dari ε mendekati satu.

Definisi 67. Ekuivalensi Variabel Random:
Dua variabel random X dan X' dikatakan *ekuivalen* jika hampir pasti $X = X'$ atau jika $P[X \neq X'] = 0$ atau $P\left[|X - X'| \geq \frac{1}{k}, k = 1,2,\ldots\right] = 0$.

Teorema 14:
Jika $X_n \xrightarrow{P} X$ dan $X_n \xrightarrow{P} X'$ maka X dan X' ekuivalen.

Bukti:

$$P\left[|X - X'| \geq \frac{1}{k}\right] \leq P\left[|X - X_n| \geq \frac{1}{2k} \cup |X' - X_n| \geq \frac{1}{2k}\right]$$

$$\leq P\left[|X - X_n| \geq \frac{1}{2k}\right] + \left[P|X' - X_n| \geq \frac{1}{2k}\right]$$

Karena ruas kanan akan mendekati 0, untuk $n \to \infty$ berapapun nilai k, maka $P\left[|X - X'| \geq \frac{1}{k}\right] = 0$.

Jadi, X dan X' ekuivalen □.

Teorema 14 hendak mengatakan bahwa barisan variabel random tidak akan konvergen dalam peluang ke dua variabel random yang " berbeda ".

Definisi 68. Kejadian Hampir Pasti dan Kejadian atau Himpunan Nol:
Kejadian A disebut *kejadian yang hampir pasti* jika $P(A) = 1$ dan komplemennya, yaitu A^C dengan $P(A^C) = 0$ disebut kejadian atau himpunan nol.

Teorema 15:
Jika $X_n \xrightarrow{P} X$ maka $X_n - X_m \xrightarrow{P} 0$, untuk n → ∞, m → ∞.

Bukti:

Karena X adalah variabel random yang bernilai real maka hampir pasti X berhingga. Jika himpunan nol tidak digunakan maka diperoleh:

$$\left[|X_n - X_m| \geq \varepsilon\right] \subseteq \left[|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|X_m - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right],$$

akibatnya: $P\left[|X_n - X_m| \geq \varepsilon\right] \leq P\left[|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_m - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]$ (38)

Ruas kanan ketaksamaan (38) akan mendekati nol, untuk $n \to \infty$, $m \to \infty$ □.

Teorema 15 menunjukkan bahwa jika suatu barisan variabel random konvergen dalam peluang maka barisan tersebut konvergen bersama dalam peluang.

3. Konvergen Hampir Pasti

Konsep kekonvergenan hampir pasti memegang peranan penting dalam statistika, yaitu dalam pembahasan kekonsistenan kuat dan pendugaan parameter, serta dalam hukum bilangan besar kuat.

Definisi 69. Kekonvergenan Hampir Pasti :

Barisan variabel random $< X_n >$ dikatakan *konvergen hampir pasti ke variabel random X*, dinotasikan dengan $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, jika $X_n \to X, \forall \omega \in S$, kecuali untuk himpunan nol.
Secara simbolik dapat ditulis:
$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow X_n \to X < \infty$, untuk $\omega \in N^C$, di mana N adalah himpunan nol.

Pada kasus ini, himpunan kekonvergenan dari $< X_n >$ mempunyai peluang tunggal. Akibatnya $\underline{\lim}\, X_n$ dan $\overline{\lim}\, X_n$ adalah ekuivalen.

<u>Catatan</u>: a. s. singkatan dari almost surely (hampir pasti).

Teorema 16:

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ bila hanya bila untuk $n \to \infty$ berlaku:

$$P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega \middle| |X_k - X| \geq \frac{1}{r}\right\}\right] \to 0, \text{ untuk setiap } r = 1, 2, \ldots .$$

Bukti:

Andaikan $X_n \to X$, jika untuk sembarang $r \geq 1$, terdapat $n_0(\omega, r)$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq n_0(\omega, r)$, maka $|X_k - X| < \frac{1}{r}$. Di lain pihak, $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow P[X_n \nrightarrow X] = 0$. Akibatnya, dari persamaan (37) dan Teorema de Morgan, diperoleh:

$$P\left[\bigcup_{r}\bigcap_{n}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega \left| |X_k - X| \geq \frac{1}{r}\right.\right\}\right] = 0.$$

Untuk setiap $r > 1$ berlaku:

$$P\left[\bigcap_{n}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega \left| |X_k - X| \geq \frac{1}{r}\right.\right\}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega \left| |X_k - X| \geq \frac{1}{r}\right.\right\}\right] = 0 \qquad \square$$

Akibat dari teorema 16:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \tag{39}$$

Bukti:

Karena untuk $\varepsilon > 1/r$ berlaku: $\bigcup_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| \geq \frac{1}{r}\right] \supseteq \left[|X_n - X| > \varepsilon\right]$, maka

$$P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] \leq P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} |X_n - X| \geq \frac{1}{r}\right] = 0, \; karena \; X_n \xrightarrow{a.s.} X.$$

$$\therefore P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0, \; sehingga \; X_n \xrightarrow{P} X.$$

Teorema 16 hendak mengatakan bahwa jika suatu barisan variabel random konvergen hampir pasti ke suatu variabel random maka peluang dari himpunan kekonvergenannya akan mendekati nol untuk n yang semakin besar.

Teorema 17:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow X_{n+m} - X_n \xrightarrow{a.s.} 0, \; \text{untuk } n, m \to \infty$$

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan: $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \to X, \forall \omega \in N^c$,dengan $P(N) = 0$.

Karena X adalah variabel random yang bernilai real, dan $X < \infty$ untuk hampir semua ω kecuali untuk himpunan yang sehimpunan dengan N, sehingga

$X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n - X_m \to 0$, untuk $n,\ m \to \infty$ $\forall \omega \in N^c$.

$\therefore X_{n+m} - X_n \to 0$, untuk $n,\ m \to \infty$ $\forall \omega \in N^c$.

$\therefore X_{n+m} - X_n \xrightarrow{a.s.} 0$, untuk $n,\ m \to \infty$ $\forall \omega \in N^c$.

($\Leftarrow$) Diandaikan : $X_{n+m} - X_n \xrightarrow{a.s.} 0$, *untuk* $n \to \infty$ dan untuk setiap m.

$\therefore X_{n+m} - X_n \to 0$, $\forall \omega \in N^c$ maka barisan $< X_{n+m} >$ konvergen ke X.

$\therefore X_n \to X, \forall \omega \in N^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} N_m^c$ di mana $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ adalah gabungan himpunan nol yang terbilang

$\therefore X_n \xrightarrow{a.s.} X$ □

Jadi, suatu barisan variabel random konvergen hampir pasti ke suatu variabel random bila hanya bila barisan tersebut konvergen bersama hampir pasti. Dari teorema 16 dan 17 dapat disimpulkan bahwa kriteria untuk konvergensi hampir pasti untuk barisan $< X_n >$ adalah :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\left[\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\omega \middle| |X_{n+m} - X_n| > \varepsilon\right\}\right] \to 0, \textit{untuk } n, m \to \infty \qquad (40)$$

Teorema 18:

Jika $X_n \xrightarrow{P} X$ maka terdapat sub barisan $< X_{n_k} >$ dari barisan $< X_n >$ yang konvergen hampir pasti ke X.

Bukti:

Andaikan $X_n \xrightarrow{P} X$ maka $X_n - X_m \xrightarrow{P} 0$ (menurut teorema 15), sehingga $X_{n+m} - X_n \xrightarrow{P} 0$ untuk $n, m \to \infty$ Jadi, $(\forall k \in \mathbb{Z})\ (\exists n(k) \in \mathbb{Z})$ sedemikian hingga untuk $n \geq n(k)$ dan untuk setiap m berlaku:

$$P\left[|X_{n+m} - X_n| \geq \frac{1}{2^k}\right] < \frac{1}{2^k} \tag{41}$$

Andaikan: $n_1 = n(1)$, $n_2 = maks\,(n_1 + 1, n(2)), \ldots,\ n_k = maks\,(n_{k-1} + 1, n(k))$, $k = 2, 3, \ldots$, sehingga $n_1 < n_2 < \ldots \to \infty$ dan pertidaksamaan (41) berlaku untuk $n > n_k$.

Andaikan: $< x_k' > = < x_{n_k} >$ sub barisan dari $< x_n >$. Akan ditunjukkan bahwa $< x_k' >$ adalah barisan yang dibutuhkan yang konvergen hampir pasti ke x'.

Menurut persamaan (40) harus ditunjukkan bahwa $P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[|X'_{n+m} - X'_n| \geq \varepsilon\right]\right) \to 0$, untuk $n \to \infty$

Andaikan: $A_k = \left[|X'_{k+1} - X'_k| \geq \frac{1}{2^k}\right]$ maka dari pertidaksamaan (41) berlaku:

$$P(A_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Andaikan: $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$ maka $P(B_n) < \sum_{k \geq n} P(A_k) < \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = 2^{-n+1}$.

Untuk n yang cukup besar sedemikian hingga $2^{-n+1} < \varepsilon$, untuk $\omega \in B_n^c = \bigcap_{k \geq n} A_k^c$, dan untuk setiap m berlaku:

$$|X'_{n+m} - X'_n| \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} |X'_{k+1} - X'_k| \leq \sum_{k \geq n} |X'_{k+1} - X'_k| < 2^{-n+1} < \varepsilon$$

Akibatnya: $|X'_{n+m} - X'_n| \geq \varepsilon$, *untuk* $\omega \in B_n$, dan mengakibatkan

$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[|X'_{n+m} - X'_n| \geq \varepsilon\right]\right) \leq P(B_n) < 2^{-n+1} \to 0$, untuk $n \to \infty$. Jadi, menurut persamaan (40) diperoleh: $X'_n \xrightarrow{a.s.} X'$. Karena $< X'_n >$ subbarisan dari $< X_n >$ maka menurut teorema 14 diperoleh: hampir pasti $X = X'$ □.

Jadi, jika terdapat suatu barisan variabel random yang konvergen dalam peluang ke suatu variabel random maka terdapat subbarisan dari barisan tersebut yang konvergen hampir pasti ke variabel random yang sama.

Teorema 19 Teorema Kemonotonan Konvergensi:
Jika $0 \leq X_n \uparrow X$ maka $E(X_n) \uparrow E(X)$ (42)

Bukti:

Karena $X_k \geq 0$ maka dapat diasosiasikan sebagai barisan variabel random sederhana yang positip, yaitu $< X_{km} >$ yang monoton naik dan konvergen ke X_k, yaitu:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq X_{11} \leq X_{12} \leq \ldots \leq X_{1n} \leq \ldots \to X_1, \\ 0 \leq X_{12} \leq X_{22} \leq \ldots \leq X_{2n} \leq \ldots \to X_2, \\ \vdots \\ 0 \leq X_{n1} \leq X_{n2} \leq \ldots \leq X_{nn} \leq \ldots \to X_n, \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (43)$$

Andaikan: $Y_n = \underset{k \leq n}{maks}\, X_{kn}$ maka dari (43) diperoleh:

$$Y_n = \underset{i \leq n, j \leq n}{maks} (X_{ij}) \quad (44)$$

Karena Y_n adalah fungsi sederhana dan X_{kn} adalah variabel random yang monoton naik dalam m, maka Y_n adalah fungsi monoton naik dalam n.

Karena $X_n \uparrow$ maka $X_{kn} \leq Y_n \leq X_n$ (45)

Akibatnya: $E(X_{kn}) \leq E(Y_n) \leq E(X_n)$ (46)

Untuk $n \to \infty$ dari (43), (45), dan (46) dan definisi dari harga harapan dari X_k maka diperoleh:

$X_k \leq \lim Y_n \leq X$ dan $E(X_k) \leq \lim E(Y_n) \leq \lim E(X_n)$ (47)

Karena Y_n adalah fungsi sederhana maka lim E (Y_n) = E (lim Y_n).

Akibatnya, untuk $k \to \infty$ dalam (47), diperoleh:

$X_k \leq \lim Y_n \leq X$ dan $\lim E(X_k) \leq E(\lim Y_n) \leq \lim E(X_n)$ (48)

Akibatnya $lim\ Y_n = X$ dan $E(lim\ Y_n) = lim\ E(X_k) = lim\ E(X_n) = E(X)$ □.

Jadi, Jika suatu barisan variabel random yang positip dan monoton naik konvergen ke suatu variabel random X maka harga harapan dari barisan tersebut juga akan konvergen ke harga harapan dari variabel random X.

Teorema 20. Teorema Fatou:
(i) Jika $Y \leq X_n$ dan Y terintegralkan maka $E(\underline{lim}\, X_n) \leq \underline{lim}\, E(X_n)$;
(ii) Jika $Z \geq X_n$ dan Z terintegralkan maka $\overline{lim}\, E(X_n) \leq E(\overline{lim}\, X_n)$;
(iii) Jika $Y \leq X_n \leq Z$ dan Y, Z terintegralkan serta $X_n \xrightarrow{a.s} X$, maka lim $E(X_n) = E(X)$.

<u>**Catatan:**</u> Jika $Y \leq X_n$ maka $\underline{\lim}\, X_n$ ada dan hampir pasti berhingga dan $\overline{\lim}\, X_n$ tak berhingga. Jika $Z \geq X_n$ maka $\overline{\lim}\, X_n$ ada dan hampir pasti berhingga dan $\underline{\lim}\, X_n$ tak berhingga

Bukti:

(i) Andaikan: $Y_n \geq 0$ dan $Y_n = \inf_{k \geq n} X_k$, maka $\underline{\lim} X_n = \lim Y_n$ dan $X_n \geq Y_n$.

Karena $0 \leq Y_n \uparrow \underline{\lim} X_n$, menurut teorema 19, maka $E(Y_n) \uparrow E(\underline{\lim} X_n)$,

tetapi $X_n \geq Y_n$ maka $E(X_n) \geq E(Y_n)$.

Akibatnya $\underline{\lim} E(X_n) \geq \lim E(Y_n) = E(\underline{\lim} X_n)$.

Secara umum, diandaikan $Z_n = X_n - Y$ maka $Z_n \geq 0$ dan dari hasil di atas

diperoleh: $\underline{\lim} E(Z_n) \geq E(\underline{\lim} Z_n)$

Karena $\underline{\lim} Z_n = \underline{\lim} X_n - Y$, maka $\underline{\lim} E(X_n) - E(Y) \geq E(\underline{\lim} X_n) - E(Y)$

dan karena Y terintegralkan maka diperoleh $\underline{\lim} E(X_n) \geq E(\underline{\lim} X_n)$.

(ii) Diandaikan: $X_n \leq Z$ dan $Z_n = Z - X_n$, maka $Z_n \geq 0$ dan

$\underline{\lim} E(Z_n) \geq E(\underline{\lim} Z_n)$, tetapi $E(Z_n) = E(Z) - E(X_n)$, $\underline{\lim} Z_n = Z - \overline{\lim} X_n$

dan $\underline{\lim} E(Z_n) = E(Z) - \overline{\lim} E(X_n)$.

$\therefore \overline{\lim} E(X_n) \leq E(\overline{\lim} X_n)$.

(iii) Jika $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ maka hampir pasti $\underline{\lim} X_n = \overline{\lim} X_n = X$.

Dari (i) dan (ii) diperoleh:

$E(X) = E(\underline{\lim} X_n) \leq \underline{\lim} E(X_n) \leq \overline{\lim} E(X_n) \leq E(\overline{\lim} X_n) = E(X)$.

Akibatnya $\lim E(X_n)$ ada dan $\lim E(X_n) = E(X)$ ◻.

Ada tiga hal yang ingin diungkapkan dari teorema di atas, yaitu:

a. Jika suatu barisan variabel random terbatas bawah dan batas bawahnya adalah variabel random yang terintegralkan maka nilai harapan dari limit inferior dari barisan variabel random tersebut akan kurang dari atau sama dengan limit inferior dari nilai harapan barisan variabel random tersebut.

b. Jika suatu barisan variabel random terbatas atas dan batas atasnya adalah variabel random yang terintegralkan maka nilai harapan dari limit superior dari barisan variabel random tersebut lebih besar atau sama dengan limit superior dari nilai harapan barisan variabel random tersebut.

c. Jika suatu barisan variabel random terbatas dan batas-batasnya adalah variabel random yang terintegralkan dan barisan tersebut konvergen hampir pasti ke suatu variabel random maka limit nilai harapan dari barisan variabel random tersebut sama dengan nilai harapan dari variabel random tersebut.

Akibat teorema 20:

Jika $|X_n| \leq Y$ dan Y terintegralkan serta $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ maka $E(X_n) \to E(X)$.

Bukti:

$|X_n| \leq Y \Leftrightarrow -Y \leq X_n \leq Y$ dengan mengambil $Y = -Y$ dan $Z = Y$ serta karena $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ maka dari sifat ketiga teorema 18 diperoleh: $E(X_n) \to E(X)$.

Teorema 21. Teorema Konvergensi yang Terdominasi:

Jika hampir pasti $|X_n| \leq Y$ dan Y terintegralkan maka berlaku implikasi $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow E(X_n) \to E(X)$.

Bukti:

Untuk kasus $X = 0$, yaitu untuk $X_n \xrightarrow{P} 0$

Andaikan: $\underline{lim}\,E(X_n)$ selalu ada, maka terdapat sub barisan $X_n' \xrightarrow{P} 0$ sedemikian hingga $E(X_n') \to \underline{lim}\,E(X_n)$. Menurut teorema 18, terdapat sub barisan $< x_n'' >$ dari $< x_n >$ sedemikian hingga $X_n'' \xrightarrow{a.s} 0$. Menurut akibat teorema 20, $E(X_n'') \to 0$ sehingga $\underline{lim}\,E(X_n) = lim\,E(X_n) = 0$.

Dengan cara yang sama, dengan memilih sub barisan dari sub barisan sedemikian hingga nilai harapannya konvergen ke $lim\,E(X_n)$ dan $\overline{lim}\,E(X_n) = 0$, akibatnya: $lim\,E(X_n)$ ada dan $lim\,E(X_n) = 0$.

Jadi secara umum, jika $x_n \xrightarrow{P} x$ maka $x_n - x \xrightarrow{P} 0$. Jika hampir pasti $|x_n| \le Y$, maka hampir pasti $|x_n - x| \le 2Y$. Akibatnya $E(X_n - X) \to 0$. $\therefore E(X_n) = E(X)$

◻

Jadi, jika hampir pasti suatu barisan variabel random terbatas dan batasnya terintegralkan maka akan berlaku implikasi " jika barisan tersebut konvergen dalam peluang ke suatu variabel random X maka nilai harapan dari barisan tersebut konvergen ke nilai harapan X " .

4. Kekonvergenan Lemah dan Kekonvergenan dalam Distribusi

a. Kekonvergenan Lemah

Definisi 70. Kekonvergenan Lemah:
Andaikan: $< F_n(x) >$ adalah barisan fungsi distribusi kumulatif dan $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Jika $F_n(x) \to F(x), \forall x \in C$, C adalah himpunan titik-titik di mana $F(x)$ kontinu, maka $< F_n(x) >$ dikatakan *konvergen lemah ke* $F(x)$, dinotasikan dengan $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$.

b. Kekonvergenan dalam Distribusi

Definisi 71. Kekonvergenan dalam Distribusi:
Andaikan: $< X_n >$ adalah barisan variabel random dan X adalah variabel random. Jika $E(f(x_n)) \to E(f(x))$, untuk $n \to \infty$, untuk setiap $f(x)$ yang merupakan fungsi kontinu yang terbatas, maka $< X_n >$ dikatakan *konvergen dalam distribusi ke X*, dinotasikan dengan $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 22. Teorema Kontinuitas:
Andaikan: $< F_n(x) >$ adalah barisan fungsi distribusi dan $< \varphi_n(t) >$ adalah barisan fungsi karakteristik yang berkorespondensi dengan $F_n(x)$, dengan $\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x)$, $t \in \mathbb{R}$

Jika $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ ada, $\forall t \in \mathbb{R}$ dan $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ adalah kontinu di $t = 0$ maka $\varphi(t)$ adalah fungsi karakteristik, $F_X(x)$ adalah fungsi distribusi, dan $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$.

Bukti:

Karena, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ untuk $t = 0$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it0}\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it0}\, dF(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)$$

$$\Rightarrow F_n(x) \xrightarrow{W} F(x), \forall x \in C$$

C adalah himpunan titik-titik di mana $F_X(x)$ kontinu.

$\therefore F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$.

Jadi, andaikan $< F_n >$ adalah barisan fungsi distribusi dan $< \varphi_n >$ adalah barisan fungsi karakteristik yang berkorespodensi dengan F_n , jika $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ ada dan sama dengan $\varphi(t)$ serta kontinu di $t = 0$, maka $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$, dengan $F_X(x)$ adalah fungsi distribusi, dan $\varphi(t)$ adalah fungsi karakteristik dari $F_X(x)$.

B. Kekonvergenan dalam Peluang Untuk Deret Variabel Random

Pembicaraan kekonvergenan dalam peluang untuk deret hanyalah perluasan dari pembicaraan kekonvergenan dalam peluang untuk barisan.

Teorema 23:

Andaikan: Var (X_k) = σ_k^2 dan $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ maka

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 - \varepsilon^2}{a.s.\sup\left(S_n - E(S_n)\right)^2} \le P\left[\left|S_n - E(S_n)\right| \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 .$$

Bukti:

Menurut persamaan dasar berlaku:

$$\frac{E(g(x)) - g(a)}{a.s.\sup g(x)} \le P\left[\,|X| \ge a\right] \le \frac{E(g(x))}{g(a)}$$

Dengan mengambil $X = S_n - E(S_n)$, $g(a) = a^2$, dan $\varepsilon =$ a maka diperoleh:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 - \varepsilon^2}{a.s.\sup\left(S_n - E(S_n)\right)^2} \le P\left[\left|S_n - E(S_n)\right| \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \text{, sebab}$$

$$E\left[\left(S_n - E(S_n)\right)^2\right] = Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 . \qquad \square$$

Jadi, nilai $P\left[|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon\right]$ terletak di antara nilai dari selisih antara variansi S_n dengan ε^2 dibagi dengan supremum hampir pasti dari kuadrat selisih S_n dengan nilai harapannya dan nilai variansi S_n dibagi dengan ε^2 .

Teorema 24:

Jika $X_n - X_m \xrightarrow{P} 0$ maka $X_n \xrightarrow{P} X$

Bukti:

Andaikan: $X_m - X_n \xrightarrow{P} 0$, maka menurut teorema 19, terdapat sub barisan $< X_{n_k} >$ yang konvergen selang-seling hampir pasti.

Akibatnya: $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$, X adalah variabel random tertentu (menurut teorema 18), sehingga $\forall \varepsilon > 0$ berlaku:

$$P\left[|X - X_n| \geq \varepsilon\right] \leq P\left[|X - X_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_{n_k} - X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

Untuk $n_k \to \infty$ maka ruas kiri ketaksamaan (49) mendekati nol.

$\therefore X_n \xrightarrow{P} X \qquad \square$

Dari teorema 16 dan 25 diperoleh:

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow X_m - X_n \xrightarrow{P} 0$$

Teorema 25:

Jika deret $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty$ maka $\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k))$ konvergen dalam peluang.

Bukti:

Andaikan: $\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) = S_n - E(S_n) = Z_n$, maka, menurut teorema 24, Z_n akan konvergen dalam peluang jika $P\left[|Z_{n+m} - Z_m| \geq \varepsilon\right] \to 0$, untuk $n, m \to \infty$.

Karena $Var(Z_{n+m} - Z_m) = \sum_{k=m}^{n+m} \sigma_k^2$, maka menurut teorema 23 berlaku:

$$P\left[|Z_{n+m} - Z_n| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m}^{n+m} \sigma_k^2$$

Karena $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty$ maka $\sum_{k=m}^{n+m} \sigma_k^2 \to 0$ untuk $n, m \to \infty$, sehingga berlaku: $P\left[|Z_{n+m} - Z_m| \geq \varepsilon\right] \to 0$.

Jadi, $Z_{n+m} \xrightarrow{P} Z_m$, sehingga $Z_n \xrightarrow{P} Z$ (menurut teorema 24).

Jadi, $\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k))$ konvergen dalam peluang □.

Teorema 25 ingin mengatakan bahwa jika nilai deret dari variansi X_k berhingga maka deret dari selisih X_k dengan harga harapannya akan konvergen dalam peluang.

C. Ketaksamaan Kolmogorov dan Kekonvergenan Hampir Pasti Untuk Deret Variabel Random

Dalam teorema 25 telah dibicarakan kondisi untuk variansi S_n agar $S_n - E(S_n)$ konvergen dalam peluang. Pada sub bab ini akan dibahas kondisi variansi S_n agar $S_n - E(S_n)$ konvergen hampir pasti.

Definisi 72. Terpusat:
Variabel random X dikatakan terpusat di c jika X dapat diganti dengan $X - c$ dan variabel random X dikatakan terpusat di harga harapannya jika X dapat diganti dengan $X - E(X)$.
Terpusat sama sama artinya dengan mengganti titik asal. Jadi variabel random X dikatakan terpusat di c artinya terjadi perubahan titik asal yaitu dari titik-titik di dalam X dengan titik-titik di dalam $X - c$.

Teorema 26:
X terpusat di $E(X)$ bila hanya bila $E(X) = 0$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan: X terpusat di $E(X)$ maka kita dapat mengganti X dengan $X - E(X)$, sehingga $X = X - E(X)$. Jadi, $E(X) = 0$.

($\Leftarrow$) Andaikan: $E(X) = 0$ maka $X = X - E(X)$, sehingga X dapat diganti dengan $X - E(X)$.

Jadi, X terpusat di $E(X)$ ∎

Teorema 27. Ketaksamaan Kolmogorov:
Jika X_k adalah variabel random yang saling bebas stokastik dan terintegralkan, dengan $|X_k| \le c < \infty$ maka $\forall \varepsilon \ge 0$ berlaku:

$$1 - \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} \le P\left[\operatorname{maks}_{1 \le k \le n} |S_k - E(S_k)| \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \qquad (50)$$

Bukti:

Ketaksamaan (50) tidak berlaku jika c tak berhingga dan $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ tak berhingga. Oleh karena itu diasumsikan c dan $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ berhingga. Jika X terbatas oleh c maka $X - E(X)$ terbatas oleh $2c$. Oleh karena itu, teorema cukup dibuktikan untuk variabel-variabel yang terbatas oleh $2c$ dan berpusat pada harga harapannya

Andaikan: $A_k = \left[\underset{j\le k}{maks}|S_j| < \varepsilon\right] = \left[|S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \ldots, |S_k| < \varepsilon\right]$

$$= \left[|X_1| < \varepsilon, |X_1 + X_2| < \varepsilon, \ldots, |X_1 + X_2 + \ldots + X_k| < \varepsilon\right]$$

sehingga $A_{k+1} \subseteq A_k$ dan $A_k \downarrow$.

Andaikan: $A_0 = S$;

$$B_k = A_{k-1} - A_k = \left[|S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \ge \varepsilon\right],$$

sehingga B_k adalah kejadian { $|S_j| \ge \varepsilon$, untuk $j = k$ untuk pertama kalinya }.

Karena B_k saling asing dan $\sum_{k=1}^{n} B_k$ adalah kejadian, untuk $j \le n$, maka

$$\sum_{k=1}^{n} B_k = A_n^c = \left[\underset{k\le n}{maks}|S_k| \ge \varepsilon\right].$$

B_k dikhususkan pada variabel random $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ dan beberapa kejadian dari $\mathcal{B}(X_{k+1}, \ldots, X_n)$, yaitu medan-σ yang dibentuk oleh $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ yang saling bebas.

Karena $E\left[\left(S_k I_{B_k}\right)\left(S_n - S_k\right)\right] = E\left(S_k I_{B_k}\right) E\left(S_n - S_k\right) = 0$,dan $I_{B_k}^2 = I_{B_k}$

maka

$$\int_{B_k} S_n^2 = E\left[\left(S_n I_{B_k}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\left(S_k I_{B_k}\right) + \left(S_n - S_k\right) I_{B_k}\right)^2\right]$$

$$= E\left[S_k^2 I_{B_k}\right] + E\left[\left(\left(S_n - S_k\right) I_{B_k}\right)^2\right] + 2E\left[\left(S_k I_{B_k}\right)\left(S_n - S_k\right)\right]$$

$$= E\left[S_k^2 I_{B_k}\right] + E\left[\left(\left(S_n - S_k\right) I_{B_k}\right)^2\right]$$

$$\geq E\left[S_k^2 I_{B_k}\right]$$

$$\geq \varepsilon^2 P(B_k) \quad \text{, karena dalam } B_k \text{ berlaku } |S_k| \geq \varepsilon .$$

$$\therefore \int_{B_k} S_n^2 \geq \varepsilon^2 P(B_k) \tag{51}$$

Di lain pihak berlaku: $E\left(S_n^2\right) = \int_{A_n} S_n^2 + \int_{A_n^c} S_n^2$

$$\geq \int_{A_n^c} S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{B_k} S_n^2 \tag{52}$$

Dari ketaksamaan (51) dan (52) diperoleh:

$$E\left(S_n^2\right) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \varepsilon^2 P\left(A_n^c\right) \text{, sehingga } P\left(A_n^c\right) \leq \frac{E\left(S_n^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

(terbukti untuk ruas kanan).

Langkah selanjutnya adalah membuktikan ruas kiri. Diketahui bahwa

$$S_{k-1} I_{A_{k-1}} + X_k I_{A_{k-1}} = S_k I_{A_{k-1}} = S_k I_{A_k} + S_k I_{B_k} \tag{53}$$

Karena (S_{k-1}, A_{k-1}) dan X_k saling bebas, maka

$$E\left[\left(S_{k-1} I_{A_{k-1}}\right)\left(X_k I_{A_{k-1}}\right)\right] = E\left[\left(S_{k-1} I_{A_{k-1}}\right)\right] E\left[X_k\right] = 0$$

dan karena $A_k \cap B_k = \emptyset$ maka $E\left[\left(S_k I_{A_k}\right)\left(S_k I_{B_k}\right)\right] = E\left[S_k^2 I_{(A_k, B_k)}\right] = 0$.

Dari (53) diperoleh:

$$E\left[\left(S_{k-1} I_{A_{k-1}}\right)^2\right] + E\left[\left(X_k I_{A_{k-1}}\right)^2\right] = E\left[\left(S_k I_{A_k}\right)^2\right] + E\left[\left(S_k I_{B_k}\right)^2\right] \quad (54)$$

Dalam B_k berlaku: $|S_{k-1}| < \varepsilon$, maka akibatnya:

$$\left|S_k I_{B_k}\right| = \left|S_{k-1} I_{B_k} + X_k I_{B_k}\right| \le (\varepsilon + 2c) I_{B_k}$$

Dari (54) dan kenyataan bahwa X_k dan $I_{A_{k-1}}$ saling bebas maka diperoleh:

$$E\left[\left(S_{k-1} I_{A_{k-1}}\right)^2\right] + E\left(X^2\right) P(A_{k-1}) \le E\left[\left(S_k I_{A_k}\right)^2\right] + (\varepsilon + 2c)^2 P(B_k) \qquad (55)$$

Karena $A_n \subseteq A_{k-1}$ maka $P(A_n) \le P(A_{k-1}), \forall k$ dan $S_0 = 0$, sehingga dari jumlahan (55) $, \forall k = 1, 2, \ldots, n$, dan penghapusan satu suku pada satu sisi,

maka diperoleh: $\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right) P(A_n) \le E\left[\left(S_n I_{A_n}\right)^2\right] + (\varepsilon + 2c)^2 \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

$$\le \varepsilon^2 P(A_n) + (\varepsilon + 2c)^2 P(A_n^c)$$
$$\le (\varepsilon + 2c)^2$$

$$\therefore P(A_n) \le \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} \Rightarrow 1 - \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} \le P(A_n^c) \qquad \square$$

Teorema 27 ingin mengatakan bahwa jika X_k adalah variabel random yang saling bebas dan terintegralkan, dengan $|X_k| \le c < \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon \geq 0$ berlaku nilai $P\left[\underset{k \leq n}{maks}|Y_k - E(Y_k)| \geq \varepsilon\right]$ terletak di antara selisih antara satu dengan kuadrat jumlahan ε dengan $2c$ dibagi dengan variansi S_n dan nilai variansinya dibagi dengan ε^2.

Teorema 28:

$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E(X_k)\right)$ konvergen hampir pasti.

Bukti:

($\Rightarrow$) Jika $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty$ maka $\sum_{k=m+1}^{n+m} \sigma_k^2 \to 0$, untuk $n, m \to \infty$.

Andaikan: $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E(X_k)\right)$ maka $Y_{n+m} - Y_m = \sum_{k=m+1}^{n+m} \left(X_k - E(X_k)\right)$.

Untuk membuktikan Y_n konvergen hampir pasti, cukup dibuktikan:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[|Y_{m+k} - Y_m| \geq \varepsilon\right]\right) \to 0, \text{ untuk } m \to \infty.$$

Dari ketaksamaan Kolmogorov dan $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty$ diperoleh:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[|Y_{m+k} - Y_m| \geq \varepsilon\right]\right) = P\left[\underset{1 \leq k \leq n}{maks}|Y_{m+k} - Y_m| \geq \varepsilon\right]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{n+m} \sigma_k^2 \to 0, \text{ untuk } n, m \to \infty$$

($\Leftarrow$) Jika X_k terbatas seragam oleh c maka $X_k - E(X_k)$ terbatas oleh $2c$.

Dari Ketaksamaan Kolmogorov dan Y_n konvergen hampir pasti, maka

$$1-\frac{(\varepsilon+2c)^2}{\sum\limits_{k=m+1}^{n+m}\sigma_k^2} \leq P\left[\underset{1\leq k\leq n}{maks}\left|Y_{m+k}-Y_m\right| > \varepsilon\right] \to 0 \text{ untuk } n,m \to \infty,$$

sehingga $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\sigma_k^2 = \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=m+1}^{n+m}\sigma_k^2\right) \leq (\varepsilon+2c)^2 < \infty$.

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 < \infty$ □

Jadi, variansi dari S_n akan berhingga bila hanya bila selisih antara S_n dengan harga harapannya konvergen hampir pasti. Dari teorema 25 dan 28 dapat disimpulkan bahwa bila $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))$ konvergen hampir pasti maka $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))$ konvergen dalam peluang. Kesimpulan inilah yang menyebabkan penyebutan hukum bilangan besar yang menggunakan barisan variabel random yang konvergen hampir pasti disebut *hukum bilangan besar kuat* dan hukum bilangan besar yang menggunakan barisan variabel random yang konvergen dalam peluang disebut *hukum bilangan besar lemah*.

BAB V

Hukum Bilangan Besar

Pada kejadian bebas, $E(X)$ adalah rata-rata dari tak berhingga nilai-nilai variabel random X. Dalam masalah kehidupan sehari-hari, nilai-nilai variabel random X yang dapat diobservasi hanyalah berhingga. Oleh karena itu, muncul suatu pertanyaan yang mendasar, yaitu apakah dengan hanya menggunakan berhingga nilai variabel random X dapat ditarik kesimpulan yang dapat dipercaya tentang $E(X)$, yang merupakan rata-rata dari tak berhingga nilai variabel random X? Hukum Bilangan Besar yang akan dibahas dalam bab ini dapat menjawab pertanyaan tersebut.

Hukum bilangan besar, menurut jenis kekonvergenan barisan variabel randomnya, digolongkan menjadi dua yaitu hukum bilangan besar kuat dan hukum bilangan besar lemah. Bila variabel random yang digunakan konvergen hampir pasti maka digunakan istilah hukum bilangan besar kuat, sedangkan istilah hukum bilangan besar lemah digunakan bila barisan variabel random yang digunakan konvergen dalam peluang.

Hukum Bilangan Besar berkaitan erat dengan Teorema Limit Pusat, tetapi Hukum bilangan besar lebih mempunyai arti teoritis daripada arti praktisnya, karena hukum ini tidak memberikan perkiraan nilai peluang yang tepat untuk beberapa kondisi yang diberikan. Perkiraan nilai peluang diberikan oleh teorema limit pusat, misalnya: untuk $n \to \infty$, distribusi dari $\dfrac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}} = \dfrac{S_n - n.\mu}{\sqrt{n.\sigma^2}}$ akan konvergen ke distribusi normal standar. Arti praktisnya, untuk n yang cukup besar , peluang S_n, terletak di antara dua bilangan a dan b dengan $a < b$, dapat diperoleh melalui pendekatan luas di bawah kurva distribusi normal standar di antara dua titik, yaitu: $\dfrac{a - n.\mu}{\sqrt{n.\sigma^2}}$ dan $\dfrac{b - n.\mu}{\sqrt{n.\sigma^2}}$. Jadi, hukum bilangan besar dan teorema limit pusat saling berkaitan.

A. Hukum Bilangan Besar Lemah

1. Hukum Bilangan Besar Lemah Bernoulli

Hukum bilangan besar Bernoulli hanya berlaku untuk deret variabel random yang berdistribusi Bernoulli.

Definisi 73. Pemangkasan:
Variabel random X dikatakan *terpangkas* di a $(0 < a < \infty)$ jika X dapat disubstitusi dengan X^c, di mana $X^c = \begin{cases} X, \text{ jika } |X| < a \\ 0 \ , \text{ jika } |X| \geq a \end{cases}$

Adanya pemangkasan menyebabkan diperolehnya variabel random yang terbatas dari sembarang variabel random. Akibatnya seluruh kejadian dari X^c ada dan berhingga.

Definisi 74. Stabilitas dalam Peluang:

Andaikan: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $< a_n >$ dan $< b_n >$ adalah barisan bilangan dengan $b_n > 0$ dan $b_n \uparrow \infty$. Barisan variabel random $< X_n >$ dikatakan *stabil dalam peluang* jika untuk $n \to \infty$, $\frac{S_n - a_n}{b_n} \to 0$.

Teorema 29:

Jika $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{b_k} \to 0$ maka $\frac{(S_n - E(S_n))}{b_n} \xrightarrow{P} 0$.

Bukti:

Dengan mensubstitusi ε dengan $\varepsilon . b_n$ dalam teorema 23 maka diperoleh:

$P[|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon\, b_n] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, sehingga jika $n \to \infty$ maka

$$\frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \to 0.$$

Jadi, jika $P[|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon\, b_n] \to 0$ maka $P\left[\frac{|S_n - E(S_n)|}{b_n} \geq \varepsilon\right] \to 0$.

$$\frac{S_n - E(S_n)}{b_n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \text{▯}$$

Jadi, jika variansi dari $\left(\frac{S_n}{b_n}\right)$ konvergen ke nol maka $\left(\frac{S_n}{b_n}\right)$ akan konvergen dalam peluang ke hasil bagi antara nilai harapan dari deret S_n dengan suatu konstanta b_n.

Dari teorema 29, bila $< X_n >$ adalah barisan variabel random yang saling bebas stokastik dan merupakan variabel random Bernoulli maka

$\frac{S_n - n.p}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \to p$. Sifat stabilitas seperti ini disebut *hukum bilangan besar lemah Bernoulli*.

Jadi, hukum bilangan besar lemah Bernoulli hanya berlaku untuk barisan variabel random $< X_n >$ yang berdistribusi Bernoulli dan saling bebas stokastik, yaitu, $< \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i >$ konvergen dalam peluang ke suatu konstanta. Konstanta tersebut tak lain adalah " p ", yaitu peluang " sukses " suatu kejadian.

2. Hukum Bilangan Besar Lemah Khinchine

Hukum bilangan besar lemah Khinchine hanya berlaku untuk barisan variabel random $< X_n >$ yang berdistribusi bebas stokastik dan identik.

Teorema 30. Hukum Bilangan Besar Lemah Khinchine:
Bila $< X_i >$ adalah barisan variabel random yang berdistribusi bebas stokastik dan identik dengan fungsi distribusi F maka syarat perlu dan cukup untuk keberadaan dari $< \mu_n >$ sedemikian hingga $\left(\frac{S_n}{n}\right) - \mu_n \xrightarrow{P} 0$ adalah $\lim_{n \to \infty} P\left[|X| > n\right] = \lim_{n \to \infty} [\, 1 - F(n) + F(-n)\,] = 0$. Jika kondisi tersebut dipenuhi maka dapat selalu diambil $\mu_n = \int_{-n}^{n} x\, dF$.

Bukti:

Andaikan: Y_k terpangkas di n oleh X_k, yaitu:

$$Y_k = \begin{cases} X_k \text{ ,untuk } |X_k| < n, \\ 0 \quad \text{,untuk } |X_k| \geq n, \text{sehingga} \end{cases}$$

$E(Y_k) = \int_{-n}^{n} x\,dF = \mu_n < \infty$, $P[X_k \neq Y_k] = 1 - F(n) + F(-n) = 1 - G(n)$, dengan $G(n) = F(n) - F(-n)$.

$$E\left[Y_k^2\right] = \int_{-n}^{n} x^2\,dF = \int_{0}^{n} x^2\,dG = n^2 G(n) - 2\int_{0}^{n} x\,G(x)\,dx$$

$$= -n^2(1 - G(n)) + 2\int_{0}^{n} x(1 - G(x))\,dx = n\,\eta^2(n) \qquad (56)$$

dengan $\eta^2(n) = -n(1 - G(n)) + \frac{2}{n}\int_{0}^{n} x(1 - G(x))\,dx$.

Untuk $n \to \infty$ maka $\tau(n) = n(1 - G(n)) \to 0$. Bila diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\exists N(\varepsilon)$ sedemikian hingga $\forall n > N(\varepsilon), \tau(n) < \varepsilon$, sehingga untuk $n > N(\varepsilon)$ berlaku:

$$\frac{1}{n}\int_{0}^{n} x(1 - G(x))\,dx = \frac{1}{n}\left(\int_{0}^{N} x(1 - G(x))\,dx + \int_{N}^{n} x(1 - G(x))\,dx\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}A + \varepsilon \text{ , } A \text{ berhingga.}$$

Akibatnya: $0 \leq \overline{\lim} \int_{0}^{n} \frac{x(1 - G(x))}{n}\,dx \leq \varepsilon$. Karena ε sembarang maka dari (56) diperoleh: $\eta(n) \to 0$.

Andaikan: $S_n' = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ maka

$$P\left[\left|S_n - n.\mu_n\right| > t\right] \leq P\left[\left|S_n' - n.\mu_n\right| > t\right] + P\left[S_n \neq S_n'\right]$$

$$\leq \frac{Var(S_n')}{t^2} + P\left[X_k \neq Y_k\right] \leq \frac{n^2\eta^2(n)}{t^2} + \tau(n)$$

Ambil $t = n\varepsilon$ maka diperoleh :

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| > \varepsilon\right] \le \frac{\eta^2(n)}{\varepsilon^2} + \tau(n) \to 0, \text{ untuk } n \to \infty \qquad \square.$$

Jadi, syarat perlu dan cukup agar $\frac{S_n}{n}$ konvergen dalam peluang ke μ_n adalah $\lim\limits_{n\to\infty} P[|X| > n] = \lim\limits_{n\to\infty} [\,1 - F(n) + F(-n)\,] = 0$, di mana F adalah fungsi distribusi dari barisan variabel random $< X_n >$ yang berdistribusi bebas stokastik dan identik. Jika kondisi di atas terpenuhi maka $\mu_n = \int_{-n}^{n} x\, dF$.

3. Hukum Bilangan Besar Lemah Untuk Variabel Random yang Saling Bebas Stokastik

Definisi 75. Ekuivalen Konvergen:
Jika $< X_n >$ dan $< X_n' >$ mempunyai himpunan kekonvergenan yang hampir pasti sama maka kedua barisan tersebut dikatakan ekuivalen konvergen.

Teorema 31. Hukum Bilangan Besar Lemah untuk Variabel Random yang Saling Bebas Stokastik:
Diandaikan $\langle X_n \rangle$ dalah barisan variabel random yang saling bebas stokastik. Deret $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0$ jika:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P[|X_k| > n] = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P\left[X_k \neq X_k^n\right] \to 0$, dengan

$$X_k^n = \begin{cases} X_k, \; jika\; |X_k| \le n \\ 0, \quad jika\; |X_k| > n \end{cases};$$

(ii) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(X_k^n\right) \to 0$ atau $\frac{1}{n} E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^n\right) \to 0$;

(iii) $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} Var\left(X_k^n\right) \to 0$ atau $\frac{1}{n^2} Var\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^n\right) \to 0$, dengan

$$S''_n = \sum_{k=1}^{n} X''_k \, .$$

Bukti:

Dari (iii) dan teorema 23, maka diperoleh: $\frac{S''_n - E(S''_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$ (57)

Dari (ii) diperoleh: $\frac{E(S''_n)}{n} \to 0$ maka $\frac{S''_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.

Dari (i) diperoleh bahwa S_n dan S''_n ekuivalen konvergen, sehingga

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ karena $\frac{S''_n}{n} \xrightarrow{P} 0$

Jadi, jika ingin membuktikan bahwa $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0$ berlaku maka cukup dibuktikan kondisi (i), (ii), dan (iii) berlaku.

B. Hukum Bilangan Besar Kuat

1. Hukum Bilangan Besar Kuat Untuk Variabel Random yang Saling Bebas Stokastik

Sebelum dibahas tentang hukum bilangan besar untuk variabel random yang saling bebas stokastik, perlu dibahas terlebih dahulu Teorema Kronecker. Teorema Kronecker akan digunakan untuk membuktikan hukum bilangan besar kuat untuk variabel random yang saling bebas stokastik.

Teorema 32. Teorema Kronecker:

Jika $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \to s < \infty$ dan $b_n \uparrow \infty$ maka $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ dengan $x_k = s_k - s_{k-1}$.

Bukti:

Misal: $b_0 = 0, a_{k-1} = b_k - b_{k-1}$, sehingga $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k (s_k - s_{k-1})$$

$$= s_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} s_{k-1} a_{k-1}$$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k s_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k s + \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k (s_k - s)$$

$$= s + \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k (s_k - s) \tag{58}$$

Karena $\sum_{k > N(\varepsilon)} \left(\frac{a_k}{b_n}\right) \leq 1$ untuk $N(\varepsilon) < n$ maka dari (58) diperoleh:

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k (s_k - s)\right| \leq \left|\sum_{k > N(\varepsilon)} \left(\frac{a_k}{b_n}\right)(s_k - s)\right| + \varepsilon \quad \text{(dari ketaksamaan segitiga)}$$

di mana $N(\varepsilon) < n$ dipilih sedemikian hingga untuk $k > N(\varepsilon)$ berlaku:

$|s_k - s| < \varepsilon$, sehingga untuk $n \to \infty$, karena jumlahan yang pertama hanya untuk berhingga suku.

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k (s_k - s)\right| \leq \frac{1}{b_n}\sum_{k > N(\varepsilon)} |a_k (s_k - s)| + \varepsilon \to 2\varepsilon \tag{59}$$

Dari (58) dan (59) dan karena ε sembarang, maka diperoleh:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k\, x_k \to 0$$

Jadi, jika $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$, dengan $x_k = s_k - s_{k-1}$, konvergen ke s yang berhingga, dan terdapat barisan bilangan $\{b_n\}$ yang monoton naik dan ber-hingga maka deret $\left(\frac{b_k \cdot x_k}{b_n}\right)$ akan konvergen ke nol.

Teorema 33. Hukum Bilangan Besar Kuat Untuk Variabel Random yang Saling Bebas Stokastik:

Jika X_k adalah barisan variabel random yang saling bebas stokastik dan $Var(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$ maka berlaku implikasi " jika $b_n \uparrow \infty$ dan $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma_k^2}{b_k^2}\right) < \infty$ maka $\frac{S_n - E(S_n)}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ ".

Bukti:

Jika $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma_k^2}{b_k^2}\right) < \infty$ maka menurut teorema 29 diperoleh:

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - E(X_k)}{b_k}\right)$ konvergen hampir pasti,

sehingga untuk hampir semua ω, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - E(X_k)}{b_k}\right)$ konvergen.

Ambil: $x_k = \frac{X_k - E(X_k)}{b_k}$ maka menurut teorema 32 diperoleh:

$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - E(X_k)\right) \to 0$, akibatnya $\frac{S_n - E(S_n)}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ $\square$

Teorema di atas hendak mengatakan bahwa jika ada barisan variabel random yang saling bebas, variansinya berhingga maka berlaku implikasi " jika ada barisan bilangan $< b_n >$ yang monoton naik, dan deret dari $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma_k^2}{b_k^2}\right)$ berhingga, maka selisih antara deret variabel random tersebut dengan nilai harapannya dibagi dengan suatu bilangan yang merupakan anggota dari barisan bilangan $< b_n >$ konvergen hampir pasti ke nol ".

Akibat teorema 33:

Jika $\sigma_k^2 \le c^2, \forall k$ maka $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$

Bukti:

Karena $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k^2} \le c^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \infty$, maka berdasarkan teorema 33 diperoleh:

$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

Teorema 34. Borel-Cantelli:

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ maka $P(\overline{\lim} A_n) = 0$.

Bukti:

Karena $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, dengan A_k tidak harus saling bebas,

maka $P\left(\bigcup_{k=r}^{s} A_k\right) \le \sum_{k=r}^{s} P(A_k) \to 0$, untuk $r, s \to \infty$.

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ maka $\lim_{r \to \infty} \lim_{s \to \infty} P\left(\bigcup_{k=r}^{s} A_k\right) = P\left(\overline{lim} A_n\right) = 0$ □

Jadi, jika nilai deret dari $P(A_n)$ berhingga maka nilai peluang dari limit superior A_n adalah nol.

Teorema 35:

Jika X_n saling bebas stokastik dan $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ maka untuk $c > 0$ dan berhingga berlaku: $\sum_{k=1}^{\infty} P[|X_k| \geq c] < \infty$.

Bukti:

Jika X_n adalah variabel random yang saling bebas stokatik maka $A_n = [|X_n| \geq c]$ adalah kejadian yang saling bebas.

Karena $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ maka $P\left(\left[\bigcup_{k=1}^{n} |X_k| \geq c\right]\right) = P(Sup\ A_n) \to 0$, untuk $n \to \infty$ dan c > 0, sehingga $P\left(\overline{lim} A_n\right) = 0$.

Oleh karena itu, $\lim_{r \to \infty} \lim_{s \to \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{k=r}^{s} A_k^c\right)\right) = 0$.

Karena X_n adalah variabel random yang saling bebas maka

$$\lim_{r \to \infty} \lim_{s \to \infty} \left(1 - \prod_{k=r}^{s} \left(1 - P(A_k)\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lim_{r \to \infty} \lim_{s \to \infty} \left(\prod_{k=r}^{s} \left(1 - P(A_k)\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{r \to \infty} \lim_{s \to \infty} \left(\prod_{k=r}^{s} \left(1 - P(A_k)\right)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{r \to \infty} \left(\prod_{k=r}^{\infty} (1 - P(A_k)) \right) = 1 \text{, sehingga } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \qquad \square$$

Definisi 76. Ekuivalensi Bagian Belakang:

Dua barisan $< X_n >$ dan $< X_n' >$ dikatakan *ekuivalen bagian belakang* jika keduanya hampir pasti berbeda hanya untuk berhingga suku.

Jadi, untuk hampir semua $\omega \in S$, terdapat bilangan berhingga $n(\omega)$, sedemikian hingga untuk $n \geq n(\omega)$ kedua barisan itu sama.

Secara simbolik, $< X_n >$ dan $< X_n' >$ ekuivalen bagian belakang jika

$$P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left(X_k \neq X_k' \right) \right] = 0 \Rightarrow P\left[\overline{\lim} \left(X_k \neq X_k' \right) \right] = 0$$

Menurut teorema 34 , jika $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, dengan $A_k = \{ \omega | X_k(\omega) \neq X_k'(\omega) \}$ maka $< X_n >$ dan $< X_n' >$ ekuivalen bagian belakang.

Teorema 36:

Andaikan: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k'$.

Jika $\sum_{k=1}^{n} P\left[X_k \neq X_k' \right] < \infty$ maka $< S_n >$ dan $< S_n' >$ adalah dua barisan yang ekuivalen konvergen dan barisan $\left\langle \frac{S_n}{b_n} \right\rangle$ dan $\left\langle \frac{S_n'}{b_n} \right\rangle$, di mana $b_n \uparrow \infty$, konvergen ke limit yang sama di dalam kejadian yang sama, kecuali untuk kejadian nol.

Bukti :

Karena $\sum_{k=1}^{n} P\left[X_k \neq X_k{}'\right] < \infty$ maka $< X_n >$ dan $< X_n{}' >$ ekuivalen bagian belakang, sehingga untuk ω tertentu, untuk $n > n(\omega)$ berlaku:

$S_n(\omega) - S_n{}'(\omega) = c$, c adalah konstanta. Jika $\lim_{n \to \infty} S_n(\omega)$ ada untuk ω yang diberikan, maka $\lim_{n \to \infty} S_n{}'(\omega)$ selalu ada. Jadi, himpunan kekonvergenan S_n dan $S_n{}'$ hampir pasti sama, sehingga $< S_n >$ dan $< S_n{}' >$ adalah dua barisan yang ekuivalen konvergen.

Karena $S_n(\omega) - S_n{}'(\omega) = c$, maka $\dfrac{S_n(\omega) - S_n{}'(\omega)}{b_n} = \dfrac{c}{b_n} \to 0$, untuk $n \to \infty$.

Jadi, $\dfrac{S_n}{b_n}$ dan $\dfrac{S_n{}'}{b_n}$ konvergen hampir pasti ke limit yang sama □

Teorema di atas hendak mengatakan bahwa, jika deret $\sum_{k=1}^{n} P\left[X_k \neq X_k{}'\right]$ berhingga maka barisan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n{}' = \sum_{k=1}^{n} X_k{}'$ adalah dua barisan yang ekuivalen konvergen dan barisan $\left\langle \dfrac{S_n}{b_n} \right\rangle$ dan $\left\langle \dfrac{S_n{}'}{b_n{}'} \right\rangle$, di mana $b_n \uparrow \infty$, konvergen ke limit yang sama, kecuali untuk kejadian nol.

2. Hukum Bilangan Besar Kuat untuk Variabel Random yang Berdistribusi Bebas Stokastik dan Identik

$\mu_X = E(X)$ menyatakan nilai rata-rata dari populasi yang berkaitan dengan variabel random X. Nilai sebenarnya dari parameter μ_X ini pada umumnya tidak diketahui, tetapi dengan adanya teorema 38, yang akan dibahas di bawah, dapat diperkirakan dengan memakai nilai statistik rata-rata atau biasa disebut mean $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema 37:
Implikasi dari " jika X_i saling bebas dan berdistibusi bebas stokastik dan identik maka $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} c$, c adalah bilangan berhingga " berlaku bila hanya bila $E(|X|) < \infty$, dan c tidak lain adalah $E(X)$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Andaikan: $A_n = \{|X| \ge n\}$, n = 0, 1, ..., $A_0 = S$.

$B_n = A_n - A_{n+1}$, dan n + 1 > $|X| \ge$ n, sehingga $\sum_{k=0}^{\infty} B_k = A_0 = S$.

$\therefore nP(B_n) \le \int_{B_n} |X| \le (n+1)\, P(B_n)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} nP(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le E(|X|) \le \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \qquad (60)$$

Andaikan: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} c < \infty$ maka $\frac{1}{n} X_n = \frac{1}{n} S_n - \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{a.s.} 0$,

maka dari teorema 35 diperoleh:

$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ dan dari (60) diperoleh: $E(|X_1^+|) < \infty$

$(\Leftarrow)$

Diandaikan $E(|X_1^+|) < \infty$ maka dari (60) diperoleh: $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

Andaikan:

$$* X_k^k = \begin{cases} X_k, & jika\ |X_k| < k \\ 0 & jika\ |X_k| \geq k \end{cases} \quad \text{dan } \bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^k$$

Karena X_k berdistribusi bebas stokastik dan identik, diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left[X_k \neq X_k^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[|X_k| \geq k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Menurut teorema 36, $\left(\frac{1}{n} S_n\right)$ dan $\left(\frac{1}{n} \bar{S}_n\right)$ ekuivalen konvergen dan implikasi ke kiri akan berlaku jika dibuktikan: $\frac{1}{n} \bar{S}_n \xrightarrow{a.s.} E(X)$ (61)

Karena $X_n^n \to X$ dan $\left|X_n^n\right| \leq |X|$ terintegralkan, maka $E\left(X_n^n\right) \to E(X)$, untuk $n \to \infty$ (menurut teorema 21).

Jadi, $E\left(\frac{\bar{S}_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^k\right) \to E(X)$, untuk $n \to \infty$.

Akibatnya hal ini dapat berlaku jika dapat dibuktikan bahwa

$\frac{\left(S_n - E(S_n)\right)}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$. Hal tersebut akan terbukti jika dapat dibuktikan

$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2\left(X_k^k\right)}{k^2} < \infty$ (menurut teorema 33).

$$\sigma^2\left(X_k^k\right) \le E\left[\left(X_k^k\right)^2\right] = \int_{-k}^{k} x^2\, dF(x),$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{j} \le \frac{2}{j+1}, \text{untuk } j \ge 1$$

$$\text{Akibatnya: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2\left(X_k^k\right)}{k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \left[\int_{j-1}^{j} x^2 dF(x) + \int_{-j}^{-j+1} x^2 dF(x)\right] \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left[\int_{j-1}^{j} x^2 dF(x) + \int_{-j}^{-j+1} x^2 dF(x)\right] \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{j-1}^{j} x^2 dF(x) + \int_{-j}^{-j+1} x^2 dF(x)\right] \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\le 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty$$

$$\text{Jadi, } \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2\left(X_k^k\right)}{k^2} \le 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty \qquad \square$$

Jadi, implikasi " jika X_k adalah variabel random yang saling bebas dan berdistribusi bebas stokastik dan identik maka $\frac{S_n}{n}$ akan konvergen ke suatu konstanta yang berhingga " , berlaku bila hanya bila nilai harapan dari $|X|$ ber-

BAB VI

Terema Limit Pusat

Pada bab sebelumnya sudah dibahas tentang hukum bilangan besar, baik yang lemah maupun yang kuat. Pada bab ini akan dibahas tentang teorema limit pusat, sehingga akan tampak jelas hubungan antara hukum bilanga besar dengan teorema limit pusat. Pada bab ini akan dibahas juga tentang penerapan teorema limit pusat, yaitu pada pendekatan distribusi normal standar untuk distribusi binomial, pendekatan distribusi normal standar untuk distribusi normal, dan pendekatan distribusi normal standar untuk distribusi poisson, serta pada pendugaan parameter μ.

Teorema limit pusat memainkan peranan penting dalam statistika. Salah satu peranannya yang penting adalah pada pendugaan parameter rata-rata dari suatu populasi. Teorema limit pusat memberikan jaminan jika suatu populasi berdistribusi sembarang (tidak harus normal) maka untuk jumlah sampel yang cukup besar distribusi sampling nilai rata-rata akan berdistibusi normal, sehingga parameter rata-rata dari suatu populasi dapat didekati dengan nilai rata-rata sampel yang diambil dari populasi tersebut. Contoh empirik variabel random yang dapat didekati dengan distribusi normal adalah tinggi badan, berat badan, IQ, pendapatan, dan lain-lain. Dengan demikian Teorema Limit Pusat sangat berguna dalam menyederhanakan model probabilitas untuk masalah-masalah praktis.

A. Teorema Limit Pusat Lindeberg

Teorema 38. Teorema Limit Pusat:

Diandaikan $X_1, X_2, \ldots$ adalah barisan variabel random yang saling bebas stokastik dengan momen tingkat duanya berhingga, $E(X_k) = m_k$, $Var(X_k) = \sigma_k^2$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $D_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, dan $F_k(x)$ adalah fungsi distribusi dari variabel random X_k. Jika kondisi Lindeberg berlaku, yaitu $\forall \varepsilon > 0$ berlaku:

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_L (x - m_k)^2 \, dF_k(x) \to 0 \text{ , untuk } n \to \infty \text{ dengan}$$

$$L = \{x \,/\, |x - m_k| \geq \varepsilon D_n\} \tag{62}$$

$$\text{maka } \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{63}$$

Bukti:

Asumsikan: $m_k = 0$, untuk $k \geq 1$

$\varphi_k(t) = E\left(e^{itX_k}\right)$, $\varphi_{S_n}(t) = E\left(e^{itS_n}\right)$. Andaikan: $T_n = \frac{S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n}{D_n}$, maka

$\varphi_{T_n}(t) = E\left(e^{itT_n}\right)$, sehingga diperoleh:

$$\varphi_{T_n}(t) = E\left(e^{itT_n}\right) = E\left(e^{i\left(\frac{t}{D_n}\right)S_n}\right)$$

$$\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{D_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{t}{D_n}\right) \tag{64}$$

Jika digunakan teorema kontinuitas, maka untuk membuktikan (63) cukup dengan menunjukkan bahwa $\forall t \in \mathbb{R}$ berlaku $\varphi_{Y_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, untuk $n \to \infty$ (65)

Ambil $t \in \mathbb{R}$ dan diandaikan tetap untuk seluruh bukti. Di lain pihak, diketahui:

$e^{iy} = 1 + iy + \dfrac{\theta_1 y^2}{2} = 1 + iy - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{\theta_2 |y|^3}{3!}$, berlaku $\forall y \in \mathbb{R}$ dengan $\theta_1 = \theta_1(y)$, $\theta_2 = \theta_2(y)$ sedemikian hingga $|\theta_1| \le 1$, $|\theta_2| \le 1$, sehingga diperoleh:

$$\varphi_k(t) = E\left(e^{itX_k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_k(x)$$

$$= \int_L \left(1 + itx + \frac{\theta_1 (tx)^2}{2}\right) dF_k(x) + \int_{L^c} \left(1 + itx - \frac{t^2 x^2}{2} + \frac{\theta_2 |tx|^3}{3!}\right) dF_k(x)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} \int_L \theta_1 x^2\, dF_k(x) - \frac{t^2}{2} \int_{L^c} x^2\, dF_k(x) + \frac{|t|^3}{6} \int_{L^c} \theta_2 |x|^3\, dF_k(x)$$

(ingat: asumsi bahwa $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_k(x) = 0$).

Akibatnya: $\varphi_k\left(\dfrac{t}{D_n}\right) = 1 - \dfrac{t^2}{2D_n^2} \displaystyle\int_{L^c} x^2\, dF_k(x) + \dfrac{t^2}{2D_n^2} \int_L \theta_1 x^2\, dF_k(x)$

$$+ \frac{|t|^3}{6D_n^3} \int_{L^c} \theta_2 |x|^3\, dF_k(x) \qquad (66)$$

Karena $\left|\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_L \theta_1 x^2\, dF_k(x)\right| \le \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_L x^2\, dF_k(x)$, maka diperoleh:

$$\frac{1}{2} \int_L \theta_1 x^2\, dF_k(x) = \bar{\theta}_1 \int_L x^2\, dF_k(x) \qquad (67)$$

, di mana $\overline{\theta_1} = \overline{\theta_1}(t,k,n)$ adalah fungsi dari variabel t, k, dan n dengan $\left|\overline{\theta_1}\right| \le \frac{1}{2}$.

Dengan jalan yang sama, diperoleh:

$$\left|\frac{1}{6}\int_{E^c}\theta_2|x|^3 dF_k(x)\right| \le \frac{1}{6}\int_{E^c}\frac{\varepsilon D_n}{|x|}|x|^3 dF_k(x) \le \frac{1}{6}\int_{E^c}\varepsilon D_n x^2 dF_k(x)$$

dan akibatnya: $\frac{1}{6}\int_{E^c}\theta_2|x|^3 dF_k(x) = \overline{\theta_2}\int_{E^c}\varepsilon D_n x^2 dF_k(x)$ (68)

di mana $\overline{\theta_2} = \overline{\theta_2}(t,k,n)$ adalah fungsi dari variabel t, k, dan n dengan $\left|\overline{\theta_2}\right| \le \frac{1}{6}$.

Misal: $A_{k_n} = \frac{1}{D_n^2}\int_{E^c} x^2 dF_k(x), B_{k_n} = \frac{1}{D_n^2}\int_E x^2 dF_k(x)$, maka dari (66) sampai dengan (68) diperoleh:

$$\varphi_k\left(\frac{t}{D_n}\right) = 1 - \frac{t^2 A_{k_n}}{2} + t^2\overline{\theta_1}B_{k_n} + |t|^3\varepsilon\overline{\theta_2}A_{k_n} = 1 + C_{k_n} \quad (69)$$

Perhatikan bahwa : $\sum_{k=1}^{n}\left(A_{k_n} + B_{k_n}\right) = 1$ (70)

dan karena (62) maka untuk $n \to \infty$, $\sum_{k=1}^{n} B_{k_n} \to 0$ (71)

Akibatnya, untuk n yang cukup besar, $\underset{1\le k\le n}{maks}\left|C_{k_n}\right| \le t^2\varepsilon^2 + \varepsilon|t|^3$ (72)

dan $\sum_{k=1}^{n}\left|C_{k_n}\right| \le t^2 + \varepsilon|t|^3$ (73)

Diketahui bahwa untuk sembarang bilangan kompleks z dengan $|z| \leq \frac{1}{2}$ maka

$$ln(1+z) = z + \theta|z|^2, \tag{74}$$

dengan $\theta = \theta(z) = \dfrac{ln|1+z| + i\,arg(z+1) - z}{|z|^2}$ dan $|\theta| \leq 1$ dan ln menyatakan nilai utama dari logaritma, maka untuk n yang cukup besar , dan untuk ε yang cukup kecil serta $\varepsilon > 0$, dari (69) dan (74) berlaku:

$$ln\,\varphi_k\left(\frac{t}{D_n}\right) = ln\left(1 + C_{k_n}\right) = C_{k_n} + \theta_{k_n}\left|C_{k_n}\right|^2, \; dengan \left|\theta_{k_n}\right| \leq 1.$$

Akibatnya dari (64) diperoleh: $\dfrac{t^2}{2} + ln\,\varphi_{T_n}(t) = \dfrac{t^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} ln\,\varphi_k\left(\dfrac{t}{D_n}\right)$

$$= \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} C_{k_n} + \sum_{k=1}^{n} \theta_{k_n}\left|C_{k_n}\right|^2,$$

tetapi $\dfrac{t^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k_n} = \dfrac{t^2}{2}\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k_n}\right) + t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\theta_1}\, B_{k_n} + \varepsilon|t|^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\theta_2}\, A_{k_n}$, dan dari (70), (71), untuk sembarang $\delta > 0$ dapat ditemukan n_0 dan $\varepsilon > 0$ dengan n_0 cukup besar dan $\forall n > n_0$ berlaku: $\left|\dfrac{t^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k_n}\right| < \dfrac{\delta}{2}$.

Dari ketaksamaan (72) dikalikan (73) maka dapat diketemukan ε > 0 sedemikian hingga $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_{k_n}\left|C_{k_n}\right|^2\right| \leq \underset{1\leq k\leq n}{maks}\left|C_{k_n}\right| \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k_n} - \left(t^2\varepsilon^2 + \varepsilon|t|^3\right)\left(t^2 + \varepsilon|t|^3\right)$.

Akibatnya, untuk n yang cukup besar, dapat dipilih ε>0 sehingga diperoleh:

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_{k_n}\left|C_{k_n}\right|^2\right| \leq \dfrac{\delta}{2}$, yang mengakibatkan $\left|\dfrac{t^2}{2} + \ln\varphi_{T_n}(t)\right| < \delta$

Oleh karena itu, untuk sembarang $t \in R$, berlaku:

$$\varphi_{T_n}(t)e^{\frac{t^2}{2}} \to 1, \text{ untuk } n \to \infty, \text{ maka } \varphi_{T_n} \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ untuk } n \to \infty.$$

Karena $\varphi_{T_n} \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ (fungsi karakteristik dari distribusi normal standar), *untuk* $n \to \infty$ maka $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ □

Jadi, Teorema Limit Pusat Lindeberg menyatakan bahwa jika $X_1, X_2, \ldots$ adalah barisan variabel random yang saling bebas stokastik dengan momen tingkat duanya berhingga dan kondisi Lindeberg berlaku, maka

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Teorema 39 , yang akan dibahas berikut ini, digunakan untuk membuktikan akibat 2 teorema 38, yaitu pada kasus pendekatan distribusi normal standar untuk distribusi normal.

Teorema 39:

Jika $E\left(|Y|^n\right) < \infty$ maka

(i) $\varphi_Y^{(n)}(t) = i^n E\left(Y^n\right)$,

(ii) $\varphi_Y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(it)^k E\left(Y^k\right)}{k!} + R_n(t)\, t^n$, (75)

di mana $R_n(t) \to 0$, *untuk* $t \to \infty$

Bukti:

(i) $\varphi_Y(t) = E\left(e^{itX}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\right)$

$$= 1 + \frac{itE(X)}{1!} + \frac{i^2 E\left(X^2\right)}{2!} + \cdots + \frac{(it)^n E(X^n)}{n!} + \cdots$$

$\varphi_Y^{(n)}(t) = 0 + 0 + \cdots + \frac{i^n n! E(X^n)}{n!} + \frac{i^{n+1} t\, (n+1)! E(X^{n+1})}{(n+1)!} + \cdots$

$\therefore \varphi_Y^{(n)}(0) = i^n E(X^n) + 0 + 0 + \cdots = i^n E\left(X^n\right).$

(ii) $\varphi(t)$ dapat ditulis sebagai $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ dengan $\varphi_1(t)$ dan $\varphi_2(t)$ adalah fungsi bernilai real.

Oleh karena itu, $\varphi^{(n)}(t) = \varphi_1^{(n)}(t) + i\varphi_2^{(n)}(t)$.

Akibatnya $\varphi_Y(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$. Di lain pihak, dari Teorema Taylor dapat diperoleh:

$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)t^k}{k!} + \frac{\varphi_1^{(n)}(t_1)t^n}{n!}$, dengan $0 < t_1 < t$, sehingga

$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)t^k}{k!} + \frac{\varphi_1^{(n)}(t_1) - \varphi_1^{(n)}(0)}{n!} t^n$

Hal yang sama juga berlaku untuk $\varphi_2(t)$, sehingga diperoleh:

$\varphi_Y(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

$$= \varphi_Y(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_Y^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t)t^n,$$

dengan $R_n(t) = \frac{\varphi_1^{(n)}(t_1) - \varphi_1^{(n)}(0) + \varphi_2^{(n)}(t_2) - \varphi_2^{(n)}(0)}{n!}$.

Jika $t_1 \to 0, t_2 \to 0$, maka $t \to 0$, sehingga $\lim\limits_{t \to \infty} R_n(t) = 0$

$$\therefore \varphi_Y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k E(Y^k)}{k!} + R_n(t)t^n,$$

dengan $\lim\limits_{t \to \infty} R_n(t) = 0$, sebab $\varphi_Y^{(n)}(t) = i^n E(Y^n)$ 0.

Persamaan (74) ekuivalen dengan:

$$\varphi_Y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k E(Y^k)}{k!} + o(t^n), \text{ sebab } \lim_{t \to \infty} \frac{R_n(t)t^n}{t^n} = 0.$$

B. Contoh Penerapan Teorema Limit Pusat

Pada sub bab ini akan diberikan empat buah contoh penerapan Teorema Limit Pusat , yaitu pada pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Binomial, pada pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Normal, dan pada pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Poisson, serta pada pendugaan parameter μ.

Kata pendekatan mengandung arti representasi sesuatu oleh sesuatu yang lain. Representasi ini diharapkan dapat menggantikan sesuatu yang direpresentasikan, sehingga menyederhanakan proses analisis data. Salah satu penerapan pendekatan yang penting adalah pergantian formula yang kompleks dari suatu distribusi dalam statistika dengan formula yang lebih sederhana.

Ada beberapa kondisi yang harus dipenuhi agar Teorema Limit Pusat Lindeberg berlaku dalam mendekati suatu distribusi dengan distribusi yang lain. Jika kondisi-kondisi tersebut dipenuhi maka fungsi distribusi kumulatif dari

$S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}}$, dengan $E(S_n)$ adalah harga harapan dari S_n dan σ_{S_n} adalah standar deviasi dari S_n, akan didekati dengan fungsi distribusi kumulatif normal standar. Oleh karena itu, nilai $P[X \le x]$ dapat didekati dengan menggunakan tabel Distribusi Normal Standar, dengan $P\left[Z \le z = \dfrac{x - E(S_n)}{\sigma_{S_n}}\right]$.

Salah satu contoh yang penting dari pendekatan suatu distribusi dengan distribusi yang lain adalah pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Binomial. Jika variabel random saling bebas stokastik dan berdistribusi binomial dengan parameter p dan n, maka $P[X \le x] = P\left[Z \le z = \dfrac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$.

Karena Distribusi Binomial adalah distribusi dengan fungsi densitas peluang diskrit maka dalam pendekatan dengan Distribusi Normal Standar diperlukan faktor koreksi yang disebut dengan *koreksi kekontinuan* . Hal ini juga berlaku untuk pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Poisson.

1. Pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Binomial

Akibat 1 teorema 38:
Diandaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi binomial dan berdistribusi bebas stokastik dan identik, dengan $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n)$, $= np$ dan $Var(X_1) = Var(X_2) = \ldots = Var(X_n) = npq$ maka $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Bukti:

$$D_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = n^2 pq \to \infty \text{ dan } L = \left\{ x \,/ \left| x - m_k \right| \geq \varepsilon\, D_n \right\}$$

$$= \left\{ x \,/ \left| x - m_k \right| \geq \varepsilon\, n\sqrt{pq} \right\} \downarrow \varnothing,$$

untuk $n \to \infty$. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_L (x - m_k)^2 \, dF_k(x)$$

$$= \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_L (x - m_k)^2 \, C_{(n,x)}\, p^x q^{1-x} \, dx \to 0, \textit{ untuk } n \to \infty$$

sebab $L \downarrow \varnothing$, untuk $n \to \infty$

Jadi, kondisi Lindeberg terpenuhi maka $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ □.

Jadi, jika X_j, dengan j = 1, 2, ..., n, adalah variabel random yang berdistribusi binomial dan saling bebas stokastik dengan $E(X_j) = np$, dan $Var(X_j) = np(1-p)$ maka Teorema Limit Pusat Lindeberg dapat digunakan untuk mendekati $P[a < S_n \leq b]$, $-\infty < a < b < \infty$ sehingga diperoleh:

$$P[a < S_n \leq b] = P\left[\frac{a - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq \frac{b - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \right]$$

$$= P\left[\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right] \qquad (76)$$

Contoh 15:

Peluang bahwa seorang pemain basket dapat melakukan tembakan dan masuk adalah 0,5. Jika ia melakukan dua puluh kali tembakan maka berapakah peluang bahwa ia dapat memasukkan bola paling sedikit sembilan kali.

Jawab :

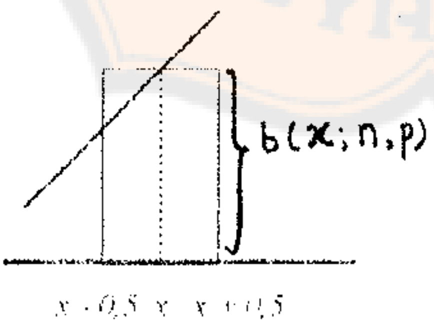
* Dengan binomial:

$$P[X \geq 9] = 1 - P[X \leq 8] = 1 - \sum_{x=0}^{8} C_{(20,x)}\, 0{,}5^x\, 0{,}5^{20-x} = 0{,}7483$$

* Dengan pendekatan distribusi normal standar:

$$P[X \geq 9] = 1 - P[X \leq 8] = 1 - P\left[Z < \frac{8-10}{\sqrt{5}}\right] = 0{,}8133$$

Akan tetapi, karena distibusi binomial adalah distribusi yang diskrit dan distribusi normal standar adalah distibusi yang kontinu, maka pendekatan dengan distribusi normal standar akan menjadi lebih baik bila dibuat koreksi kekontinuan. Secara khusus, nilai $b(x; n, p)$ mempunyai nilai yang sama dengan nilai luas persegi panjang dengan tingginya $b(x; n, p)$ dan lebar intervalnya [x - 0,5, x + 0,5]. Luas daerah persegi panjang ini dapat didekati dengan luas daerah di bawah kurva distibusi normal standar. Pendekatan ini diilustrasikan sebagai berikut:



* Dengan pendekatan distribusi normal standar (dengan koreksi kekontinuan) , dari contoh 15, diperoleh:

$$P[X \geq 9] = P\left[Z > \frac{9-0,5-10}{\sqrt{5}}\right]$$

$$= 1 - P\left[Z < \frac{8,5-10}{\sqrt{5}}\right] = 1 - 0,2514 = 0,7486$$

Jadi, pendekatan dengan menggunakan faktor koreksi kekontinuaa lebih mendakti nilai yang sesungguhnya.

Setelah memperhitungkan faktor koreksi kekontinuan, maka dari persamaan (76) diperoleh:

$$P[a < S_n < b] = P\left[\frac{a-0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq \frac{b+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \quad (77)$$

Misal:

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$$

$$z_1 = \frac{a-0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}},\; z_2 = \frac{b+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Oleh karena itu, maka (77) menjadi:

$$P[a < S_n \leq b] = P[z_1 < Z \leq z_2]$$

2. Pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distribusi Normal

Akibat 2 Teorema 38:

Diandaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi normal dan bebas stokastik dan identik dengan mean $\mu < \infty$ dan variansinya $\sigma^2 \neq 0 < \infty$ dan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, maka $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, *untuk* $n \to \infty$.

Bukti:

Misal: $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$, φ_Y adalah fungsi karakteristik untuk Y_i, sehingga

$\varphi_Y(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$.

ψ_n adalah fungsi karakteristik dari $U_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, maka

$$\psi_n(t) = \left(\varphi_Y\left(tn^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}, \textit{untuk } n \to \infty.$$

Akibatnya: $U_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, sebab fungsi karakteristik untuk

distribusi normal standar adalah $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ □.

3. Pendekatan Distribusi Normal Standar untuk Distibusi Poisson

Akibat 3 teorema 38:
Diandaikan: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi poisson dan berdistribusi bebas stokastik dan identik, dengan $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = \lambda$, dan $Var(X_1) = Var(X_2) = \ldots = Var(X_n) = \lambda$ maka $\dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Bukti:

$$D_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = n\lambda < \infty \text{ dan } L = \{x \,/\, |x - \lambda| \geq \varepsilon D_n\}$$

$$= \{x \,/\, |x - \lambda| \geq \varepsilon \sqrt{n\lambda}\} \downarrow \varnothing,$$

untuk $n \to \infty$. Oleh karena itu, diperoleh:

$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_L (x-\lambda)^2 dF_k(x)$$

$$= \frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_L (x-\lambda)^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}dx \to 0, \text{ untuk } n \to \infty$$

sebab $L \downarrow \varnothing$, untuk $n \to \infty$

Jadi, kondisi Lindeberg terpenuhi maka $\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ □.

Jadi, jika X_j, dengan j = 1, 2, ..., n, adalah variabel random yang berdistribusi poisson dan saling bebas stokastik dengan $E(X_j) = \lambda$, dan $Var(X_j) = \lambda$ maka Teorema Limit Pusat Lindeberg dapat digunakan untuk mendekati $P[a < S_n \le b]$, $-\infty \le a < b < \infty$ sehingga diperoleh:

$$P[a < S_n \le b] = P\left[\frac{a - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \frac{b - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}\right]$$

$$= P\left[\frac{a - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \frac{b - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right] \tag{78}$$

Karena distribusi poisson adalah distribusi yang diskrit, sedangkan distribusi normal standar adalah distribusi yang kontinu, maka perlu memperhitungkan faktor kekontinuan dalam pendekatannya. Setelah memperhitungkan faktor kekontinuan maka (78) menjadi:

$$P[a < S_n \le b] = P\left[\frac{a - 0{,}5 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \frac{b + 0{,}5 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right] \tag{79}$$

Misal:

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$$

$$z_1 = \frac{a - 0.5 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}, \; z_2 = \frac{b + 0.5 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

Oleh karena itu, maka (79) menjadi:

$$P[a < S_n \leq b] = P[z_1 < Z \leq z_2]$$

Contoh 16:

Angka rata-rata kelahiran setiapa hari di suatu rumah sakit adalah 2,15.Tentukanlah peluang bahwa paling sedikit dua puluh bayi lahir dalam satu minggu.

Jawab:

Rata-rata kelahiran dalam satu minggu = 7 x 2,15 = 15,05.

Diasumsikan bahwa angka rata-rata kelahiran dalam satu minggu berdistribusi poisson. Akan dicari peluang bahwa paling sedikit dua puluh bayi lahir dalam satu minggu.

* Dengan Distribusi Poisson:

$$P[X \geq 20] = 1 - P[X \leq 19] = 1 - \sum_{x=0}^{19} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= 1 - 0,8752 = 0,1248$$

Akan didekati dengan distribusi normal standar dengan nilai harapan 15,05 dan deviasi standar $\sqrt{15{,}05}$.

$$P[X \geq 20] = P\left[Z \geq \frac{20-0{,}5-15{,}05}{\sqrt{15{,}05}}\right]$$
$$= P[Z \geq -1{,}15]$$
$$= 1 - P[Z < -1{,}15]$$
$$= 1 - 0{,}8749$$
$$= 0{,}1251$$

Jadi, distribusi normal standar sukses mendekati distribusi poisson.

4. Penerapan Teorema Limit Pusat pada Pendugaan Parameter μ

Menurut bidang yang dipelajari, statistika dibagi menjadi dua, yaitu:

a. *Statistika deskriptif* adalah bidang statistika yang mempelajari metode meringkas dan meggambarkan segi-segi yang sangat penting dari data hasil observasi atau eksperimen;

b. *Statistika inferensia* adalah bidang statistika yang mempelajari semua metoda yang digunakan dalam penarikan kesimpulan.

Pada sub bab ini akan dibahas tentang pendugaan parameter μ yang merupakan salah satu bidang yang dipelajari dalam statistika inferensia dan kaitannya dengan Teorema Limit Pusat dan Hukum Bilangan Besar.

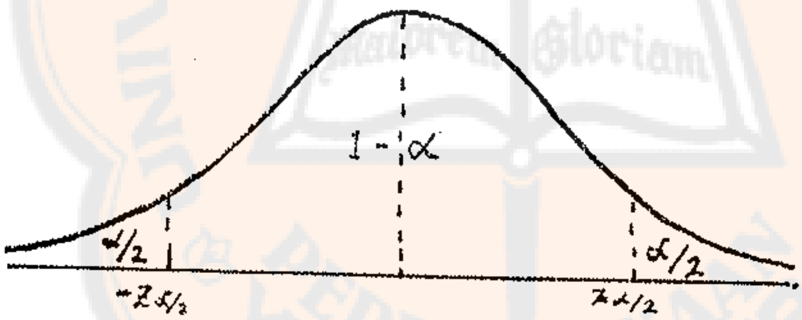
Menurut hukum bilangan besar, nilai μ yaitu nilai rata-rata dari populasi dapat didekati dengan baik oleh $\overline{X}$ yaitu nilai rata-rata dari sampel random yang diambil dari populasi tersebut. Menurut Teorema Limit Pusat, jika kondisi Lindeberg dipenuhi dan variabel randomnya saling bebas stokastik dan identik dengan momen tingkat duanya berhingga maka $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Diambil: $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ maka dari hukum bilangan besar dan teorema limit pusat diperoleh:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\therefore P[\bar{x}_1 < \bar{X} < \bar{x}_2] = P[z_1 < Z < z_2] \qquad (80)$$

dengan $z_1 = \frac{\bar{x}_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$; $z_2 = \frac{\bar{x}_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$; $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.



Diambil: $z_1 = -z_{\alpha/2}$ dan $z_2 = z_{\alpha/2}$ maka dari (80) diperoleh:

$$P\left[-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left[-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left[-\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

Catatan: $(1-\alpha)100\%$ dalam statistika dikenal sebagai tingkat kepercayaan

Jadi, bila $\bar{x}$ adalah nilai tengah dari sampel random berukuran n yang diambil dari suatu populasi dengan variansi σ^2 diketahui maka untuk tingkat kepercayaan $(1-\alpha)100\%$, selang kepercayaan untuk μ adalah:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dengan $z_{\alpha/2}$ adalah nilai Z yang luas daerah di sebelah kanan di bawah kurva normal standar adalah $\frac{\alpha}{2}$ dan $-z_{\alpha/2}$ adalah nilai Z yang luas daerah di sebelah kirinya di bawah kurva normal standar adalah $\frac{\alpha}{2}$

Contoh 17:

Dilakukan penelitian untuk menduga IP rata-rata dari mahasiswa JPMIPA. Untuk keperluan tersebut diambil sampel random berjumlah 36 orang. Diperoleh hasil nilai rata-ratanya 2,6 dan variansinya 0,3. Karena ukuran sampelnya cukup besar maka σ dapat diduga dengan S = 0,3. Untuk tingkat kepercayaan 95% maka selang kepercayaan untuk μ adalah sebagai berikut:

$$2,6-(1,96)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2,6+(1,96)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right) \Leftrightarrow 2,50 < \mu < 2,70$$

Untuk tingkat kepercayaan 99% maka selang kepercayaan untuk μ adalah sebagai berikut:

$$2,6-(2,575)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2,6+(2,575)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right) \Leftrightarrow 2,43 < \mu < 2,73$$

KESIMPULAN

Jika suatu deret dari variabel random konvergen hampir pasti maka deret tersebut akan konvergen dalam peluang. Oleh karena itu hukum bilangan besar yang didasarkan pada kekonvergenan hampir pasti disebut hukum bialngan besar kuat, dan hukum bilangan besar yang didasarkan pada kekonvergenan dalam peluang disebut hukum bialngan besar lemah.

Hukum bilangan besar menyatakan bahwa untuk jumlah sampel yang besar, nilai rata-rata dari sampel random merupakan pilihan yang baik untuk mendekati nilai rata-rata populasi.

Apapun bentuk distribusi populasinya untuk jumlah sampel yang cukup besar distribusi sampling nilai rata-rata akan berdistribusi normal. Sifat seperti di atas yang dikenal sebagai Teorema Limit Pusat.

Kondisi yang harus dipenuhi agar Teorema Limit Pusat Lindeberg berlaku adalah :

1. Barisan variabel randomya harus saling bebas stokastik dengan momen orde duanya berhingga;
2. Kondisi Lindeberg berlaku, yaitu:

   $$(\forall \varepsilon > 0), \text{untuk } n \to \infty, \ \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{L} (x - m_k)^2 \, dF_k(x) \to 0,$$

   dengan $L = \{x \,|\, |x - m_k| \geq \varepsilon D_n\}$, D_n^2 adalah jumlahan dari variansi variabel random X, m_k adalah nilai harapan dari variabel random yang ke-k, dan $F_k(x)$ adalah fungsi distribusi.

Jika dua kondisi di atas berlaku maka selisih antara deret variabel random dengan nilai harapannya dibagi dengan standar deviasinya akan konvergen dalam distribusi ke distribusi normal standar.

Distribusi normal memainkan peranan yang penting di dalam teori peluang dan statistika. Karena banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang dapat didekati dengan distribusi normal, seperti: tinggi badan, berat badan, IQ, dan lain-lain. Selain itu karena distribusi sampling dari suatu statistik dapat didekati dengan baik oleh distribusi normal, tanpa harus memperhatikan jenis distribusi populasi-nya. Distribusi normal dapat memainkan peranannya tersebut karena adanya Teorema Limit Pusat.

Hubungan antara distribusi normal standar, distribusi binomial, distribusi poisson, dan distribusi normal dapat digaambarkan dengan diagram berikut:

$$\begin{tikzcd}
 & \textit{Distribusi Binomial} \arrow[r, dashed, "p \to 0"] \arrow[d, "n \to \infty"] & \textit{Distribusi Poisson} \arrow[dl, "n \to \infty"] \\
\textit{Distribusi Normal} \arrow[r, dashed, "n \to \infty"] & \textit{Distribusi Normal Standar} &
\end{tikzcd}$$

Jadi, dengan adanya Teorema Limit Pusat distribusi normal standar dapat digunakan untuk mendekati distribusi normal, distribusi binomial, dan distribusi poisson.

Keberadaan Teorema Limit Pusat membuat pekerjaan menganalisis data hasil observasi atau eksperimen menjadi lebih sederhana, karena data tidak perlu diuji apakah data tersebut berdistribusi normal atau tidak. Hal ini dapat terjadi karena Teorema Limit Pusat menjamin bahwa apapun distribusi data hasil observasi atau eksperimen akan didekati dengan baik oleh distribusi normal.

Secara umum, temuan Teorema Limit Pusat menjadi bagian yang sangat penting dan mendasar dalam statistika, khususnya pada pendugaan parameter dan pengujian hipotesis.

DAFTAR PUSTAKA

Bhat, B. R. (1985). *Modern Probability Theory*. New York: John Willey and Sons.

Dwiatmoko, Ig. A. *Statistika* Matematika *I*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Grimmett, G. R. & Strizaker, D. R. (1993). *Probability and Random Processes*. New York: Oxford University Pres.

Halmos, P. R. (1951). *Measure Theory*. Amerika: D. Van Nostrand Company, Inc.

Larsen, R. J. & Marx, M. L. (1985). *An Introduction to Probability and Its Applications*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Nasoetion, A. H. & Rambe. A. (1984). *Teori Statistika*. Jakarta: Bhratara Karya Aksara.

Paliouras, J. D. (1990). *Complex Variables for Scientists and Engineers*. New York: Macmillan Publishing Company, Inc.

Papoulis, A. (1992). *Probabilitas, Variabel Random, dan Proses Stokastik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Roussas, G. G. (1973). *A First Course in Mathematical Statistics*. Manila: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Shiryaev, A. N. (1996). *Probability*. New York: Springer.

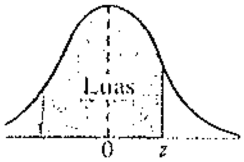
Soemantri, R. *Analisis Real I*. Yogyakarta: Universitas Terbuka.

Soemantri, R. *Analisis Real II*. Yogyakarta: Universitas Terbuka.

Soemantri, R. *Fungsi Variabel Komplek*. Yogyakarta: Unversitas Sanata Dharma.

Walpole, R. E. (1982). *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia.

TABEL A.
Wilayah Luas Di Bawah Kurva Normal



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

TABEL A.2

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

		p									
n	r	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1	0	.9000	.8000	.7500	.7000	.6000	.5000	.4000	.3000	.2000	.1000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.8100	.6400	.5625	.4900	.3600	.2500	.1600	.0900	.0400	.0100
	1	.9900	.9600	.9375	.9100	.8400	.7500	.6400	.5100	.3600	.1900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.7290	.5120	.4219	.3430	.2160	.1250	.0640	.0270	.0080	.0010
	1	.9720	.8960	.8438	.7840	.6480	.5000	.3520	.2160	.1040	.0280
	2	.9990	.9920	.9844	.9730	.9360	.8750	.7840	.6570	.4880	.2710
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.6561	.4096	.3164	.2401	.1296	.0625	.0256	.0081	.0016	.0001
	1	.9477	.8192	.7383	.6517	.4752	.3125	.1792	.0837	.0272	.0037
	2	.9963	.9728	.9492	.9163	.8208	.6875	.5248	.3483	.1808	.0523
	3	.9999	.9984	.9961	.9919	.9744	.9375	.8704	.7599	.5904	.3439
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.5905	.3277	.2373	.1681	.0778	.0312	.0102	.0024	.0003	.0000
	1	.9185	.7373	.6328	.5282	.3370	.1875	.0870	.0308	.0067	.0005
	2	.9914	.9421	.8965	.8369	.6826	.5000	.3174	.1631	.0579	.0086
	3	.9995	.9933	.9844	.9692	.9130	.8125	.6630	.4718	.2627	.0815
	4	1.0000	.9997	.9990	.9976	.9898	.9688	.9222	.8319	.6723	.4095
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.5314	.2621	.1780	.1176	.0467	.0156	.0041	.0007	.0001	.0000
	1	.8857	.6554	.5339	.4202	.2333	.1094	.0410	.0109	.0016	.0001
	2	.9841	.9011	.8306	.7443	.5443	.3438	.1792	.0705	.0170	.0013
	3	.9987	.9830	.9624	.9295	.8208	.6563	.4557	.2557	.0989	.0158
	4	.9999	.9984	.9954	.9891	.9590	.8906	.7667	.5798	.3447	.1143
	5	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9959	.9844	.9533	.8824	.7379	.4686
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.4783	.2097	.1335	.0824	.0280	.0078	.0016	.0002	.0000	
	1	.8503	.5767	.4449	.3294	.1586	.0625	.0188	.0038	.0004	.0000
	2	.9743	.8520	.7564	.6471	.4199	.2266	.0963	.0288	.0047	.0002
	3	.9973	.9667	.9294	.8740	.7102	.5000	.2898	.1260	.0333	.0027
	4	.9998	.9953	.9871	.9712	.9037	.7734	.5801	.3529	.1480	.0257
	5	1.0000	.9996	.9987	.9962	.9812	.9375	.8414	.6706	.4233	.1497
	6		1.0000	.9999	.9998	.9984	.9922	.9720	.9176	.7903	.5217
	7			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.2 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

		p									
n	*r*	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
8	0	.4305	.1678	.1001	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001	.0000	
	1	.8131	.5033	.3671	.2553	.1064	.0352	.0085	.0013	.0001	
	2	.9619	.7969	.6785	.5518	.3154	.1445	.0498	.0113	.0012	.0000
	3	.9950	.9437	.8862	.8059	.5941	.3633	.1737	.0580	.0104	.0004
	4	.9996	.9896	.9727	.9420	.8263	.6367	.4059	.1941	.0563	.0050
	5	1.0000	.9988	.9958	.9887	.9502	.8555	.6846	.4482	.2031	.0381
	6		.9991	.9996	.9987	.9915	.9648	.8936	.7447	.4967	.1869
	7		1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9832	.9424	.8322	.5695
	8				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.3874	.1342	.0751	.0404	.0101	.0020	.0003	.0000		
	1	.7748	.4362	.3003	.1960	.0705	.0195	.0038	.0004	.0000	
	2	.9470	.7382	.6007	.4628	.2318	.0898	.0250	.0043	.0003	.0000
	3	.9917	.9144	.8343	.7297	.4826	.2539	.0994	.0253	.0031	.0001
	4	.9991	.9804	.9511	.9012	.7334	.5000	.2666	.0988	.0196	.0009
	5	.9999	.9969	.9900	.9747	.9006	.7461	.5174	.2703	.0856	.0083
	6	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9750	.9102	.7682	.5372	.2618	.0530
	7		1.0000	.9999	.9996	.9962	.9805	.9295	.8040	.5638	.2252
	8			1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9899	.9596	.8658	.6126
	9					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.3487	.1074	.0563	.0282	.0060	.0010	.0001	.0000		
	1	.7361	.3758	.2440	.1493	.0464	.0107	.0017	.0001	.0000	
	2	.9298	.6778	.5256	.3828	.1673	.0547	.0123	.0016	.0001	
	3	.9872	.8791	.7759	.6496	.3823	.1719	.0548	.0106	.0009	.0000
	4	.9984	.9672	.9219	.8497	.6331	.3770	.1662	.0474	.0064	.0002
	5	.9999	.9936	.9803	.9527	.8338	.6230	.3669	.1503	.0328	.0016
	6	1.0000	.9991	.9965	.9894	.9452	.8281	.6177	.3504	.1209	.0128
	7		.9999	.9996	.9984	.9877	.9453	.8327	.6172	.3222	.0702
	8		1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893	.9536	.8507	.6242	.2639
	9				1.0000	.9999	.9990	.9940	.9718	.8926	.6513
	10					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.3138	.0859	.0422	.0198	.0036	.0005	.0000			
	1	.6974	.3221	.1971	.1130	.0302	.0059	.0007	.0000		
	2	.9104	.6174	.4552	.3127	.1189	.0327	.0059	.0006	.0000	
	3	.9815	.8369	.7133	.5696	.2963	.1133	.0293	.0043	.0002	
	4	.9972	.9496	.8854	.7897	.5328	.2744	.0994	.0216	.0020	.0000
	5	.9997	.9883	.9657	.9218	.7535	.5000	.2465	.0782	.0117	.0003
	6	1.0000	.9980	.9924	.9784	.9006	.7256	.4672	.2103	.0504	.0028
	7		.9998	.9988	.9957	.9707	.8867	.7037	.4304	.1611	.0185
	8		1.0000	.9999	.9994	.9941	.9673	.8811	.6873	.3826	.0896
	9			1.0000	1.0000	.9993	.9941	.9698	.8870	.6779	.3026
	10					1.0000	.9995	.9964	.9802	.9141	.6862
	11						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.2 (*lanjutan*)

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

n	r	p .10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
12	0	.2824	.0687	.0317	.0138	.0022	.0002	.0000			
	1	.6590	.2749	.1584	.0850	.0196	.0032	.0003	.0000		
	2	.8891	.5583	.3907	.2528	.0834	.0193	.0028	.0002	.0000	
	3	.9744	.7946	.6488	.4925	.2253	.0730	.0153	.0017	.0001	
	4	.9957	.9274	.8424	.7237	.4382	.1938	.0573	.0095	.0006	.0000
	5	.9995	.9806	.9456	.8821	.6652	.3872	.1582	.0386	.0039	.0001
	6	.9999	.9961	.9857	.9614	.8418	.6128	.3348	.1178	.0194	.0005
	7	1.0000	.9994	.9972	.9905	.9427	.8062	.5618	.2763	.0726	.0043
	8		.9999	.9996	.9983	.9847	.9270	.7747	.5075	.2054	.0256
	9		1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807	.9166	.7472	.4417	.1109
	10				1.0000	.9997	.9968	.9804	.9150	.7251	.3410
	11					1.0000	.9998	.9978	.9862	.9313	.7176
	12						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.2542	.0550	.0238	.0097	.0013	.0001	.0000			
	1	.6213	.2336	.1267	.0637	.0126	.0017	.0001	.0000		
	2	.8661	.5017	.3326	.2025	.0579	.0112	.0013	.0001		
	3	.9658	.7473	.5843	.4206	.1686	.0461	.0078	.0007	.0000	
	4	.9935	.9009	.7940	.6543	.3530	.1334	.0321	.0040	.0002	
	5	.9991	.9700	.9198	.8346	.5744	.2905	.0977	.0182	.0012	.0000
	6	.9999	.9930	.9757	.9376	.7712	.5000	.2288	.0624	.0070	.0001
	7	1.0000	.9980	.9944	.9818	.9023	.7095	.4256	.1654	.0300	.0009
	8		.9998	.9990	.9960	.9679	.8666	.6470	.3457	.0991	.0065
	9		1.0000	.9999	.9993	.9922	.9539	.8314	.5794	.2527	.0342
	10			1.0000	.9999	.9987	.9888	.9421	.7975	.4983	.1339
	11				1.0000	.9999	.9983	.9874	.9363	.7664	.3787
	12					1.0000	.9999	.9987	.9903	.9450	.7458
	13						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.2288	.0440	.0178	.0068	.0008	.0001	.0000			
	1	.5846	.1979	.1010	.0475	.0081	.0009	.0001			
	2	.8416	.4481	.2811	.1608	.0398	.0065	.0006	.0000		
	3	.9559	.6982	.5213	.3552	.1243	.0287	.0039	.0002		
	4	.9908	.8702	.7415	.5842	.2793	.0898	.0175	.0017	.0000	
	5	.9985	.9561	.8883	.7805	.4859	.2120	.0583	.0083	.0004	
	6	.9998	.9884	.9617	.9067	.6925	.3953	.1501	.0315	.0024	.0000
	7	1.0000	.9976	.9897	.9685	.8499	.6047	.3075	.0933	.0116	.0002
	8		.9996	.9978	.9917	.9417	.7880	.5141	.2195	.0439	.0015
	9		1.0000	.9997	.9983	.9825	.9102	.7207	.4158	.1298	.0092
	10			1.0000	.9998	.9961	.9713	.8757	.6448	.3018	.0441
	11				1.0000	.9994	.9935	.9602	.8392	.5519	.1584
	12					.9999	.9991	.9919	.9525	.8021	.4154
	13					1.0000	.9999	.9992	.9932	.9560	.7712
	14						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.2 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

n	r	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
15	0	.2059	.0352	.0134	.0047	.0005	.0000				
	1	.5490	.1671	.0802	.0353	.0052	.0005	.0000			
	2	.8159	.3980	.2361	.1268	.0271	.0037	.0003	.0000		
	3	.9444	.6482	.4613	.2969	.0905	.0176	.0019	.0001		
	4	.9873	.8358	.6865	.5155	.2173	.0592	.0094	.0007	.0000	
	5	.9978	.9389	.8516	.7216	.4032	.1509	.0338	.0037	.0001	
	6	.9997	.9819	.9434	.8689	.6098	.3036	.0951	.0152	.0008	
	7	1.0000	.9958	.9827	.9500	.7869	.5000	.2131	.0500	.0042	.0000
	8		.9992	.9958	.9848	.9050	.6964	.3902	.1311	.0181	.0003
	9		.9999	.9992	.9963	.9662	.8491	.5968	.2784	.0611	.0023
	10		1.0000	.9999	.9993	.9907	.9408	.7827	.4845	.1642	.0127
	11			1.0000	.9999	.9981	.9824	.9095	.7031	.3518	.0556
	12				1.0000	.9997	.9963	.9729	.8732	.6020	.1841
	13					1.0000	.9995	.9948	.9647	.8329	.4510
	14						1.0000	.9995	.9953	.9648	.7941
	15							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.1853	.0281	.0100	.0033	.0003	.0000				
	1	.5147	.1407	.0635	.0261	.0033	.0003	.0000			
	2	.7892	.3518	.1971	.0994	.0183	.0021	.0001			
	3	.9316	.5981	.4050	.2459	.0651	.0106	.0009	.0000		
	4	.9830	.7982	.6302	.4499	.1666	.0384	.0049	.0003		
	5	.9967	.9183	.8103	.6598	.3288	.1051	.0191	.0016	.0000	
	6	.9995	.9733	.9204	.8247	.5272	.2272	.0583	.0071	.0002	
	7	.9999	.9930	.9729	.9256	.7161	.4018	.1423	.0257	.0015	.0000
	8	1.0000	.9985	.9925	.9743	.8577	.5982	.2839	.0744	.0070	.0001
	9		.9998	.9984	.9929	.9417	.7728	.4728	.1753	.0267	.0005
	10		1.0000	.9997	.9984	.9809	.8949	.6712	.3402	.0817	.0033
	11			1.0000	.9997	.9951	.9616	.8334	.5501	.2018	.0170
	12				1.0000	.9991	.9894	.9349	.7541	.4019	.0684
	13					.9999	.9979	.9817	.9006	.6482	.2108
	14					1.0000	.9997	.9967	.9739	.8593	.4853
	15						1.0000	.9997	.9967	.9719	.8147
	16							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.2 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

n	r	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
17	0	.1668	.0225	.0075	.0023	.0002	.0000				
	1	.4818	.1182	.0501	.0193	.0021	.0001	.0000			
	2	.7618	.3096	.1637	.0774	.0123	.0012	.0001			
	3	.9174	.5489	.3530	.2019	.0464	.0064	.0005	.0000		
	4	.9779	.7582	.5739	.3887	.1260	.0245	.0025	.0001		
	5	.9953	.8943	.7653	.5968	.2639	.0717	.0106	.0007	.0000	
	6	.9992	.9623	.8929	.7752	.4478	.1662	.0348	.0032	.0001	
	7	.9999	.9891	.9598	.8954	.6405	.3145	.0919	.0127	.0005	
	8	1.0000	.9974	.9876	.9597	.8011	.5000	.1989	.0403	.0026	.0000
	9		.9995	.9969	.9873	.9081	.6855	.3595	.1046	.0109	.0001
	10		.9999	.9994	.9968	.9652	.8338	.5522	.2248	.0377	.0008
	11		1.0000	.9999	.9993	.9894	.9283	.7361	.4032	.1057	.0047
	12			1.0000	.9999	.9975	.9755	.8740	.6113	.2418	.0221
	13				1.0000	.9995	.9936	.9536	.7981	.4511	.0826
	14					.9999	.9988	.9877	.9226	.6904	.2382
	15					1.0000	.9999	.9979	.9807	.8818	.5182
	16						1.0000	.9998	.9977	.9775	.8332
	17							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.1501	.0180	.0056	.0016	.0001	.0000				
	1	.4503	.0991	.0395	.0142	.0013	.0001				
	2	.7338	.2713	.1353	.0600	.0082	.0007	.0000			
	3	.9018	.5010	.3057	.1646	.0328	.0038	.0002			
	4	.9718	.7164	.5787	.3327	.0942	.0154	.0013	.0000		
	5	.9936	.8671	.7175	.5344	.2088	.0481	.0058	.0003		
	6	.9988	.9487	.8610	.7217	.3743	.1189	.0203	.0014	.0000	
	7	.9998	.9837	.9431	.8593	.5634	.2403	.0576	.0061	.0002	
	8	1.0000	.9957	.9807	.9404	.7368	.4073	.1347	.0210	.0009	
	9		.9991	.9946	.9790	.8653	.5927	.2632	.0596	.0043	.0000
	10		.9998	.9988	.9939	.9424	.7597	.4366	.1407	.0163	.0002
	11		1.0000	.9998	.9986	.9797	.8811	.6257	.2783	.0513	.0012
	12			1.0000	.9997	.9942	.9519	.7912	.4656	.1329	.0064
	13				1.0000	.9987	.9846	.9058	.6673	.2836	.0282
	14					.9998	.9962	.9672	.8354	.4990	.0982
	15					1.0000	.9993	.9918	.9400	.7287	.2662
	16						.9999	.9987	.9858	.9009	.5497
	17						1.0000	.9999	.9984	.9820	.8499
	18							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.2 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Binom $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

		p									
n	r	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
19	0	.1351	.0144	.0042	.0011	.0001					
	1	.4203	.0829	.0310	.0104	.0008	.0000				
	2	.7054	.2369	.1113	.0462	.0055	.0004	.0000			
	3	.8850	.4551	.2631	.1332	.0230	.0022	.0001			
	4	.9648	.6733	.4654	.2822	.0696	.0096	.0006	.0000		
	5	.9914	.8369	.6678	.4739	.1629	.0318	.0031	.0001		
	6	.9983	.9324	.8251	.6655	.3081	.0835	.0116	.0006		
	7	.9997	.9767	.9225	.8180	.4878	.1796	.0352	.0028	.0000	
	8	1.0000	.9933	.9713	.9161	.6675	.3238	.0885	.0105	.0003	
	9		.9984	.9911	.9674	.8139	.5000	.1861	.0326	.0016	
	10		.9997	.9977	.9895	.9115	.6762	.3325	.0839	.0067	.0000
	11		.9999	.9995	.9972	.9648	.8204	.5122	.1820	.0233	.0003
	12		1.0000	.9999	.9994	.9884	.9165	.6919	.3345	.0676	.0017
	13			1.0000	.9999	.9969	.9682	.8371	.5261	.1631	.0086
	14				1.0000	.9994	.9904	.9304	.7178	.3267	.0352
	15					.9999	.9978	.9770	.8668	.5449	.1150
	16					1.0000	.9996	.9945	.9538	.7631	.2946
	17						1.0000	.9992	.9896	.9171	.5797
	18							.9999	.9989	.9856	.8649
	19							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.1216	.0115	.0032	.0008	.0000					
	1	.3917	.0692	.0243	.0076	.0005	.0000				
	2	.6769	.2061	.0913	.0355	.0036	.0002	.0000			
	3	.8670	.4114	.2252	.1071	.0160	.0013	.0001			
	4	.9568	.6296	.4148	.2375	.0510	.0059	.0003			
	5	.9887	.8042	.6172	.4164	.1256	.0207	.0016	.0000		
	6	.9976	.9133	.7858	.6080	.2500	.0577	.0065	.0003		
	7	.9996	.9679	.8982	.7723	.4159	.1316	.0210	.0013	.0000	
	8	.9999	.9900	.9591	.8867	.5956	.2517	.0565	.0051	.0001	
	9	1.0000	.9974	.9861	.9520	.7553	.4119	.1275	.0171	.0006	
	10		.9994	.9961	.9829	.8725	.5881	.2447	.0480	.0026	.0000
	11		.9999	.9991	.9949	.9435	7483	.4044	1133	.0100	.0001
	12		1.0000	.9998	.9987	.9790	8684	.5841	.2277	.0321	.0004
	13			1.0000	.9997	.9935	.9423	.7500	.3920	.0867	.0024
	14				1.0000	.9984	.9793	.8744	5836	.1958	.0113
	15					.9997	9941	9490	.7625	.3704	.0432
	16					1.0000	9987	9840	.8929	.5886	.1330
	17						9998	.9964	.9645	.7939	.3231
	18						1.0000	.9995	.9924	.9308	.6083
	19							1.0000	.9992	.9885	.8784
	20								1.0000	1.0000	1.0000

TABEL A.3*

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(x; \mu)$

r	μ 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

r	μ 1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

*Dari E. C. Molina, *Poisson's* Exponential Limit, copyright 1942, Van Nostrand Reinhold Company, New York, dengan izin penerbit.

TABEL A.3 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$

r	μ = 5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

TABEL A.3 *(lanjutan)*

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$

r	μ 10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3750
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718
27			0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827
28			1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897
29				1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941
30					0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967
31					1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982
32						1.0000	0.9999	0.9996	0.9990
33							0.9999	0.9998	0.9995
34							1.0000	0.9999	0.9998
35								1.0000	0.9999
36									0.9999
37									1.0000