GRUP PADA BEBERAPA IRISAN KERUCUT KHUSUSNYA PADA PARABOLA DAN HIPERBOLA

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Juliana Erni Mutiani

N I M : 941414003
NIRM : 940051120501120002

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1999

SKRIPSI

GRUP PADA BEBERAPA IRISAN KERUCUT KHUSUSNYA PADA PARABOLA DAN HIPERBOLA

Oleh:

Juliana Erni Mutiani

N I M : 941414003
NIRM : 940051120501120002

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjoyo, M.A.   Tanggal 5-8-1990

II Tawarikh 15 : 7

Kuatkanlah hatimu, jangan lemah semangatmu,

karena ada upah bagi usahamu.

Kupersembahkan skripsi ini, kepada:

Bapak, Ibu tercinta,

Mas Dwi tersayang,

Kakak-kakakku terkasih dan

almamaterku.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 21 Juni 1999

Penulis

Juliana Erni Mutiani

SKRIPSI

GRUP PADA BEBERAPA IRISAN KERUCUT KHUSUSNYA PADA PARABOLA DAN HIPERBOLA

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Juliana Erni Mutiani

NIM : 941414003
NIRM : 940051120501120002

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 9 Agustus 1999
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M.Pd.	....
Sekretaris	: Drs. St. Susento, M.Si.	....
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A.	....
Anggota	: Drs. B. Susanta	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....

Yogyakarta, ... 1999
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. Paul Suparna, S.J., M.S.T.

ABSTRAK

Grup pada beberapa Irisan Kerucut ini memperlihatkan hubungan antara Aljabar dan Geometri. Adapun materi dari Aljabarnya ialah Grup dan dari Geometrinya berupa Irisan Kerucut. Grup pada beberapa Irisan Kerucut ini adalah suatu grup dihedral dan Irisan Kerucutnya meliputi Parabola, Hiperbola dan Lingkaran.

Grup dihedral adalah grup yang dihasilkan oleh dua generator yaitu a dan b dengan hubungan $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba = a^{n-1}b$ atau $ba^{n-1} = ab$, dengan e adalah elemen identitas. Dalam grup pada parabola dan hiperbola, persamaan parabola dan hiperbolanya dinyatakan sebagai persamaan parameter. Generator-generator yang akan membentuk grup dihedral pada parabola dan hiperbola berupa suatu fungsi parameter dengan syarat bahwa fungsi-fungsi tersebut berperiode dua yaitu merupakan suatu involusi. Grup yang dihasilkan oleh dua elemen berperiode dua adalah suatu grup dihedral. Dalam grup pada lingkaran fungsi-fungsi tersebut disajikan sebagai pemetaan titik potong kedua suatu garis dengan lingkaran.

Dalam grup pada parabola dan hiperbola, fungsi-fungsi yang digunakan fungsi parameter t antara lain f(t) sama dengan $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, $-t$. Jika komposisi dari dua fungsi tersebut di atas mempunyai periode dua, maka pada parabola atau hiperbola dihasilkan grup dihedral D_2 demikian juga jika komposisi dari dua fungsi itu berperiode n maka pada parabola atau hiperbola dihasilkan grup dihedral D_n. Dan jika komposisi dari dua fungsi itu berperiode tak hingga maka dihasilkan grup dihedral D_∞.

Fungsi-fungsi parameter yang digunakan, masing-masing mempunyai keistimewaan. Misalnya fungsi $f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, keistimewaannya bahwa setiap titik pada parabola akan ditransformasikan ke titik lain pada parabola oleh fungsi tersebut dan garis penghubung kedua titik tersebut melalui fokus. Tetapi pada hiperbola fungsi tersebut mempunyai keistimewaan lain yaitu bahwa setiap titik pada hiperbola akan ditransformasikan ke titik lain pada hiperbola dan garis penghubung kedua titik tersebut mempunyai gradien 1.

Dalam grup pada lingkaran ditentukan fungsi-fungsi f dan g. Diberikan titik-titik F dan G, fungsi f memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari FA dengan lingkaran tersebut. Demikian juga fungsi g memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari GA dengan lingkaran tersebut. Titik-titik F dan G dapat berada di dalam maupun di luar lingkaran. Jika titik-titik F dan G di berhingga dan titik F terletak pada garis kutub titik G maka pada lingkaran akan terjadi grup dihedral D_2. Untuk titik F dan titik G yang berada di jauh tak hingga, grup dihedral yang terjadi tergantung dari besar sudut yang diapit oleh arah-arah yang ditentukan oleh F dan G. Grup dihedral D_n terjadi, jika arah-arah itu mengapit sudut $\frac{360°}{2n}$, misalnya terjadi D_3 jika arah-arah yang ditentukan oleh F dan G mengapit sudut sebesar 60°. Dan grup dihedral D_∞ pada lingkaran terjadi jika arah-arah yang ditentukan oleh F dan G mengapit sudut yang besarnya bukan pembagi bulat dari 360°.

ABSTRACT

Groups on conic sections show a relationship between Algebra and Geometry, groups is a topic in Algebra and conic sections is that of Geometry. The conic sections are parabolas, hyperbolas and circles and the groups on them are dihedral groups.

A dihedral group is a group generated by two elements a and b with defining relations $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba^{n-1} = ab$ or $ba = a^{n-1}b$ and e is the identity element. To get the groups on parabolas and hyperbolas, these conic sections are presented by parametric equations. The generators of the group are parametric functions of period two or involutions. A Group generated by two elements of period two is a dihedral group. The groups on circles are generated by functions defined by determining the second intersection of a line through a point and the circle.

The functions used to get the groups on parabolas and hyperbolas are parametric functions in t, for instance f(t) is equal to $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, or $-t$. If the composition of two of those functions is of periode two, than the dihedral group generated by those functions on the parabolas and hyperbolas is the dihedral group D_2. If the composition of two of those functions is of periode n it will give the dihedral group D_n. And naturally if the composition of two of those functions is of infinite period, the dihedral group will be D_∞ .

Each of the parametric functions used has its speciality. For example if $f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, then

a point Q on a parabola will be transformed to Q´, such that the line QQ´ passes through the focus. But a point S on a hyperbola will be transformed to S´, such that the gradient of the line SS´ is one.

Groups on circles are generated by two functions f and g. The function f(or g) transforms a point A on the circle to the second intersection of $\overleftrightarrow{FA}$ (or $\overleftrightarrow{GA}$) with the circle. The points F and G may lie inside or outside the circle or at infinity. For example if F lies on the polar line of G with respect to the circle, than the group on the circle will be D_2. If F and G are at infinity, then the group generated depends on the directions determined by F and G. If the measure of the angle between the directions determined by F and G is $\frac{360}{2n}$ then it will give the dihedral group D_n. For example if the measure of the angle determined by F and G is 60 it will give the dihedral group D_3 and if the measure of the angle is incommonsurate with 360, the group on the circle will be the infinite dihedral group D_∞ .

KATA PENGANTAR

Puji syukur dan terima kasih penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah dan senantiasa melimpahkan berkat-Nya sehingga skripsi yang berjudul **"Grup pada Beberapa Irisan Kerucut Khususnya pada Parabola dan Hiperbola"** ini dapat selesai dengan lancar.

Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk dapat mencapai gelar Sarjana S1 khususnya di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari kekurangan-kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya masukan yang berupa kritik dan saran dari berbagai pihak demi semakin baiknya penulisan ini. Selain itu penulis menghaturkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas segala bantuan dan petunjuk hingga selesainya skripsi ini kepada:

1. Bapak Drs. Susento, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
2. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang telah memberikan bimbingan, petunjuk dan nasihat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak dan Ibu dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis.
4. Semua pihak yang telah membantu penulis langsung maupun tidak langsung hingga selesainya penyusunan skripsi ini.

Semoga Tuhan Yang Maha Kasih berkenan memberi imbalan dan balasan yang setimpal atas jasa-jasa semua pihak yang telah tersebut di atas.

Akhir kata, penulis berharap semoga hasil tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, 21 Juni 1999

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL.................................... i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING.................... ii
HALAMAN PENGESAHAN................................ iii
HALAMAN PERSEMBAHAN............................... iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA......................... v
ABSTRAK... vi
ABSTRACT.. viii
KATA PENGANTAR.................................... x
DAFTAR ISI.. xii
DAFTAR GAMBAR..................................... xiv

BAB I. PENDAHULUAN
A. Latar Belakang Masalah......................... 1
B. Rumusan Masalah................................ 5
C. Tujuan Penelitian.............................. 5
D. Pembatasan Masalah............................. 6
E. Manfaat Penelitian............................. 6
F. Metode Penelitian.............................. 7

BAB II. LANDASAN TEORI
A. Irian Kerucut.................................. 8
1. Pengertian Kerucut............................. 8
2. Irisan Kerucut................................. 9
3. Ellips... 11
4. Hiperbola...................................... 23
5. Parabola....................................... 35

Halaman

B. Fungsi.................................... 42

1. Fungsi.................................... 42

2. Transformasi Titik-titik pada Bidang....... 46

C. Grup.................................... 53

1. Operasi Biner.............................. 53

2. Grup.................................... 55

3. Subgrup.................................... 60

4. Macam-macam Grup.......................... 63

a. Grup Permutasi......................... 63

b. Grup Siklik............................. 71

c. Grup Dihedral........................... 76

BAB III. GRUP PADA BEBERAPA IRISAN KERUCUT

A. Periode Suatu Fungsi........................ 86

B. Grup pada Parabola.......................... 90

C. Grup pada Hiperbola......................... 134

D. Grup pada Lingkaran......................... 161

BAB IV. KESIMPULAN, IMPLIKASI DAN SARAN

A. Kesimpulan................................. 173

B. Implikasi dan Saran......................... 175

DAFTAR PUSTAKA................................ 176

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. Kerucut 8
2. Kerucut lingkaran tegak 9
3. Ellips 10
4. Lingkaran 10
5. Parabola 10
6. Hiperbola 10
7. Ellips dengan pusat O(0, 0) dan fokus pada sumbu x 12
8. Ellips dengan pusat O(0, 0) dan fokus pada sumbu y 14
9. Ellips dengan garis singgung melalui titik T. 18
10. Ellips dengan garis arah $x = -\frac{a^2}{c}$ dan $x = \frac{a^2}{c}$ 20
11. Hiperbola dengan pusat O(0, 0) 25
12. Hiperbola dengan asimtut-asimtutnya $y = \pm \frac{b}{a} x$ 27
13. Hiperbola dengan garis arah $x = -\frac{a^2}{c}$ dan $x = \frac{a^2}{c}$ 28
14. Hiperbola orthogonal 34

Halaman

15. Parabola dengan puncak O(0, 0), fokus F(- ½p, 0) dan garis arah $x = -½p$............ 36
16. Parabola dengan garis singgung melalui T..... 40
17. Translasi dengan vektor translasi $\underline{a}$.......... 47
18. Translasi dengan vektor translasi $\underline{b}$.......... 48
19. Rotasi dengan pusat O dan sudut rotasi θ..... 49
20. Rotasi dengan pusat O dan sudut rotasi α..... 49
21. Refleksi terhadap cermin c.................. 49
22. Refleksi △ABC terhadap cermin c........... 49
23. Refleksi geser terhadap cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$.............................. 50
24. Refleksi △ ABC terhadap cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$.............................. 51
25. Dilatasi dengan pusat O dan faktor skala k... 52
26. Swastika................................... 78
27. Persegi panjang dengan sumbu-sumbu simetri c_1 dan c_2.................................. 78
28. Segitiga samasisi dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2 dan c_3........................... 79
29. Persegi dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3 dan c_4................................ 80
30. Segilima beraturan dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5...................... 81
31. Segienam beraturan dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 dan c_6.................. 83

Halaman

32. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ 96

33. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ untuk $t = 2$ 96

34. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ 98

35. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ untuk $t = ½$ 98

36. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ 100

37. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ untuk $t = 2$ 100

38. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ 102

39. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ untuk $t = 2$ 102

40. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ untuk $t = \frac{3}{2}$ 104

41. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ 105

42. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ untuk $t = 2$ 106

43. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ untuk $t = \frac{3}{2}$ 107

44. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ 109

Halaman

45. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ untuk $t = \frac{3}{2}$.......... 110

46. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$.................... 111

47. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$.................... 112

48. $f(t) = -\frac{1}{4t}$, $g(t) = \frac{1}{4t}$.................... 116

49. $f(t) = -\frac{1}{4t}$, $g(t) = -t$.................... 118

50. $f(t) = \frac{1}{4t}$, $g(t) = -t$.................... 119

51. $f(t) = -t$, $g(t) = \frac{1}{t}$.................... 121

52. $f(t) = -t$, $g(t) = -\frac{1}{t}$.................... 122

53. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$.................... 123

54. $f(t) = \frac{t}{t - 1}$, $g(t) = 1 - t$.................... 125

55. $f(t) = \frac{t}{t - 1}$, $g(t) = \frac{1}{t}$.................... 126

56. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$.................... 128

57. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$ untuk $t = 2$......... 129

Halaman

58. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$ untuk $t = \frac{3}{2}$.......... 130

59. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$.................... 132

60. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$.................... 133

61. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$...................... 139

62. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ untuk $t = 2$............ 141

63. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$...................... 143

64. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ untuk $t = 2$.......... 144

65. $f(t) = -t$, $g(t) = -\frac{1}{t}$....................... 145

66. $f(t) = -t$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ untuk $t = 2$.......... 146

67. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$.................... 148

68. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ untuk $t = 3$......... 150

69. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$..................... 152

70. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$ untuk $t = \frac{3}{2}$......... 153

Halaman

71. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$ 154

72. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$ untuk $t = \frac{3}{2}$ 155

73. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ 156

74. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$ 158

75. Grup dihedral D_∞ pada jalur tak berhingga.. 160

76. Grup siklik C_∞ pada jalur tak berhingga.... 160

77. Contoh suatu fungsi f dan g yang memetakan titik A, B an C pada lingkaran............... 161

78. Grup dihedral D_2 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di berhingga.................. 163

79. Grup dihedral D_3 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di berhingga.................. 165

80. Grup dihedral D_2 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga............ 166

81. Grup dihedral D_3 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga............ 166

82. Grup dihedral D_4 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga............ 167

83. Grup dihedral D_5 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga............ 168

84. Grup dihedral D_6 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga............ 168

Halaman

85. Grup dihedral D_∞ pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga....... 169

86. Lukisan ellips yang diperoleh dari lukisan lingkaran dengan transformasi affine......... 170

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG MASALAH

Geometri dan Aljabar merupakan bagian dari pelajaran Matematika di Sekolah Menengah yang sangat penting. Geometri dipelajari dengan dua cara yaitu secara sintetis dan secara analitis. Geometri yang dipelajari secara sintetis merupakan geometri yang sudah sering kita pelajari di Sekolah Menengah. Geometri yang dipelajari secara analitis yaitu Geometri Analitik.

Selain dipelajari secara sintetis dan analitis, geometri dapat dipelajari dengan menggunakan beberapa cara, di antaranya dengan menggunakan vektor dan transformasi. Untuk mempelajari geometri dapat digunakan vektor, karena vektor-vektor dapat dipakai untuk mencari persamaan vektor garis, dan luasan-luasan. Selain itu vektor mempunyai hubungan dengan koordinat-koordinat Cartesius.

Geometri yang dipelajari dengan menggunakan transformasi sering disebut Geometri Transformasi. Transformasi adalah kata lain untuk fungsi yang digunakan dalam geometri. Transformasi dalam geometri meliputi translasi, refleksi, rotasi, refleksi geser, dilatasi sentral, similaritas, refleksi dilatif, rotasi dilatif. Transformasi dalam geometri berbeda dengan

Geometri Transformasi. Dalam Geometri Transformasi dipelajari grup-grup transformasi.

Geometri mencakup materi yang banyak sekali di antaranya tentang Irisan Kerucut yang nanti akan kita uraikan. Irisan kerucut terbentuk dari hasil perpotongan suatu kerucut dan suatu bidang datar. Irisan Kerucut meliputi Parabola, Ellips, Lingkaran dan Hiperbola. Dalam kehidupan kita secara tidak sengaja kita sering mengetahui bentuk-bentuk yang menyerupai suatu Irisan Kerucut, salah satunya adalah suatu lintasan peluru yang ditembakkan yang berupa suatu parabola.

Geometri khususnya Geometri Analitik berkembang mulai tahun 1637, yang diperkenalkan oleh René Descartes. Dalam Geometri Analitik sudah ditunjukkan bahwa antara Aljabar dan Geometri ada kaitan, karena Geometri Analitik dipelajari dengan menggunakan sistem koordinat sehingga dengan demikian metode Aljabar dapat diterapkan untuk mempelajari Geometri.

Geometri Analitik mempunyai aplikasi yang bervariasi yaitu digunakan antara lain dalam bidang astronomi, ilmu alam, teknik, bisnis, pengobatan, ilmu sosial, psikologi, statistik dan ekonomi. Khusus untuk transformasi dalam geometri dijumpai dalam Archeologi. Transformasi geometri yang dijumpai dalam Archeologi di antaranya refleksi dan translasi. Hal itu tampak dalam dekorasi pot-pot atau jambangan-jambangan bunga.

Dekorasi itu akan simetris dan selalu berulang atau dengan kata lain menerapkan suatu refleksi dan translasi. Gambar yang digunakan dalam dekorasi itu dapat berupa segitiga, lingkaran atau bangun datar - bangun datar lainnya. Selain dapat dijumpai dalam Archeologi, transformasi geometri dapat juga digunakan untuk membuktikan sifat-sifat penting Aljabar yaitu dengan menggunakan bangun datar geometri.

Aljabar berkembang sudah lama sekali bahkan jauh sebelum Masehi. Aljabar yang berkembang itu sering disebut Aljabar Klasik. Hal itu untuk membedakan dengan Aljabar Modern yang baru berkembang pada abad 19. Aljabar Modern atau sering disebut Aljabar Abstrak mempelajari tentang struktur-struktur Aljabar. Dalam mempelajari Aljabar ada beberapa tingkatan yang sering kita kenal yaitu Aljabar Rendah, Aljabar Menengah, Aljabar Tinggi dan Aljabar Modern. Di sekolah menengah lebih banyak dipelajari Aljabar Rendah.

Tujuan utama Aljabar Klasik adalah menggunakan manipulasi Aljabar untuk menyelesaikan persamaan-persamaan polinomial. Aljabar Klasik juga telah menghasilkan suatu algoritma yang berguna untuk menyelesaikan semua persamaan polinomial satu variabel dengan derajat kurang dari atau sama dengan empat. Lebih kurang tahun 1802 - 1829 Niels Hendrik Abel menemukan metode Aljabar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial dengan derajat lima atau lebih.

Aljabar Modern yang berkembang pada abad 19 sampai sekarang, juga menggunakan metode aksiomatik atau metode postulat untuk mempelajarinya. Demikian juga Euclid (± 300 SM) mengumpulkan postulat-postulat, definisi-definisi dan dalil-dalil kemudian menyusunnya menjadi satu sistem deduktif. Meskipun demikian, sistem deduktif yang disusun Euclid mempunyai kekurangan-kekurangan dan disempurnakan antara lain oleh Hilbert.

Aljabar meliputi materi yang luas, Aljabar khususnya Struktur Aljabar meliputi materi-materi antara lain: grup,ring, field, daerah integral; yang akan kita uraikan selanjutnya adalah grup. Grup merupakan materi paling dasar dalam Struktur Aljabar. Grup adalah himpunan elemen-elemen yang dapat dikomposisikan oleh operasi biner seperti penjumlahan, perkalian. Grup dengan operasi biner penjumlahan disebut grup aditif, sedangkan grup dengan operasi biner perkalian disebut grup multiplikatif. Operasi biner pada grup tidak hanya penjumlahan dan perkalian saja tetapi dapat berupa operasi biner - operasi biner yang lain.

Ada bermacam-macam model dari grup, model dari grup ditentukan oleh elemen-elemen grup tersebut. Dalam Geometri ada model grup transformasi yang elemennya berupa suatu rotasi dengan satu titik pusat yang disebut grup rotasi, dan elemen yang lain adalah translasi yang disebut grup translasi. Model grup lain elemen-elemennya berupa bilangan misalnya himpunan semua bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan, model grup lain elemen-elemennya berupa permutasi.

Grup ada bermacam-macam di antaranya grup dihedral, grup siklik, grup simetri, grup permutasi. Dalam grup siklik model-model grup dapat berupa transformasi, dapat juga berupa bilangan misalnya himpunan bilangan bulat modulo lima kecuali nol dengan operasi biner perkalian bilangan bulat modulo lima. Dalam grup dihedral, elemen-elemen grup dapat berupa transformasi atau bilangan. Grup dihedral yang elemen-nya berupa transformasi dijumpai dalam grup dihedral pada segi-n beraturan. Dan grup dihedral yang elemennya berupa bilangan adalah grup dihedral bilangan prima yang kurang dari 12.

B. RUMUSAN MASALAH

Dalam tulisan ini akan kita selidiki:

1. Apakah yang dimaksud dengan Grup ?
2. Apakah yang dimaksud dengan Irisan Kerucut ?
3. Apakah elemen-elemen dari Grup pada Irisan Kerucut ?
4. Grup apakah yang terjadi pada Irisan Kerucut ?

C. TUJUAN PENELITIAN

Dengan memilih topik atau judul skripsi **"Grup pada Beberapa Irisan Kerucut khususnya pada Parabola dan Hiperbola"**, penulis mempunyai beberapa tujuan yaitu:

1. Untuk mendalami pengertian Grup
2. Untuk mendalami pengertian Irisan Kerucut
3. Untuk mendalami pengertian Grup pada Irisan Kerucut

D. PEMBATASAN MASALAH

Dalam topik skripsi ini akan diuraikan tentang grup yang termasuk materi dari Struktur Aljabar, kemudian tentang irisan kerucut yang meliputi ellips, lingkaran, parabola dan hiperbola. Dan juga akan dibahas tentang grup pada irisan kerucut khususnya grup pada parabola dan grup pada hiperbola serta sedikit pembahasan tentang grup pada lingkaran. Grup pada ellips tidak dibahas karena persamaan ellips dapat diturunkan dari persamaan lingkaran. Dalam grup pada parabola dan hiperbola, persamaan parabola yang digunakan adalah persamaan parabola yang sederhana (persamaan kanonik parabola) dan persamaan hiperbolanya adalah persamaan hiperbola orthogonal.

E. MANFAAT PENELITIAN

Adapun dengan tulisan ini penulis berharap semoga dapat berguna bagi kita supaya lebih memahami pengertian grup, lebih memahami pengertian irisan kerucut dan yang lebih penting supaya kita lebih memahami pengertian grup pada irisan kerucut. Khususnya bagi calon guru dengan mempelajari grup pada beberapa irisan kerucut dapat meningkatkan kemampuannya dalam mengajarkan Matematika khususnya tentang irisan kerucut. Selain itu, seorang guru dapat memperkenalkan pengertian grup dan penerapan-penerapannya kepada siswa sehingga siswa menjadi termotivasi untuk mempelajari Matematika.

F. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan untuk membahas topik-topik itu ialah metode studi pustaka. Metode studi pustaka ialah metode atau strategi pencarian sumber dengan mengumpulkan sumber pustaka di perpustakaan dan menggunakan pengetahuan selama mengikuti perkuliahan. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

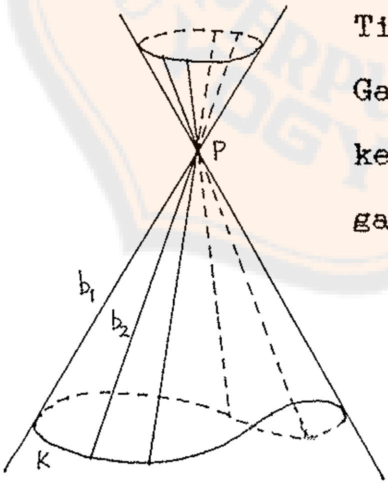
A. IRISAN KERUCUT

1. Pengertian Kerucut

Definisi II.A.1.1.

Suatu bidang kerucut atau dengan singkat suatu kerucut adalah tempat kedudukan titik-titik dari garis-garis yang melalui sebuah titik tertentu dan yang memotong atau menyinggung sebuah garis lengkung (tertutup) yang diketahui yang tidak sebidang dengan titik tersebut.

Titik itu disebut puncak kerucut, garis lengkungnya disebut garis arah kerucut dan garis-garis yang titiknya membentuk kerucut disebut garis pelukis kerucut. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat gambar berikut:

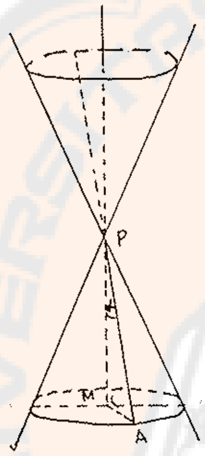


Titik P disebut puncak kerucut. Garis b_1, b_2 disebut garis pelukis kerucut. Garis lengkung K disebut garis arah kerucut.

Gambar 1 : Kerucut

Dalam uraian-uraian selanjutnya, kerucut yang dimaksud adalah kerucut lingkaran tegak. Disebut kerucut lingkaran tegak bila garis arah kerucut itu berupa lingkaran dan garis yang menghubungkan puncak kerucut dengan pusat lingkaran tegak lurus pada bidang lingkaran. Garis ini disebut sumbu kerucut.

Sudut yang dibentuk oleh sumbu kerucut dengan salah satu garis pelukis kerucut adalah setengah sudut puncak kerucut. Pada gambar berikut:



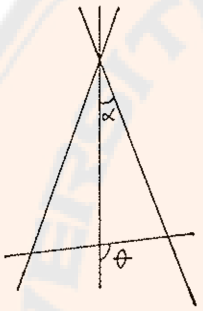
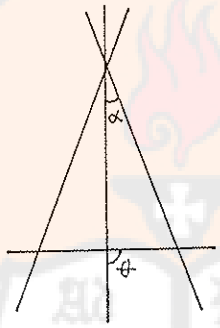
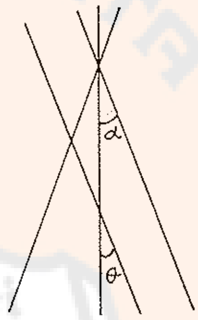
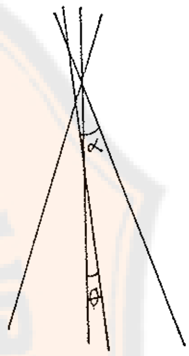
Gb.2. Kerucut lingkaran tegak

Titik P merupakan puncak kerucut lingkaran tegak, garis PA adalah garis pelukis dan lingkaran (M, $\overline{MA}$) adalah garis arah kerucut. Sumbu kerucut digambarkan oleh garis yang menghubungkan titik P dan M. Besar setengah sudut puncak dinyatakan dengan α ($\angle$ APM).

2. Irisan Kerucut

Suatu kurva yang diperoleh dari perpotongan antara suatu kerucut dengan suatu bidang datar disebut irisan kerucut. Bentuk-bentuk kurva yang terjadi itu tergantung dari letak bidang datar sebagai bidang pemotong terhadap kerucut.

Bentuk-bentuk irisan kerucut ada bermacam-macam bila bidang datar sebagai bidang pemotong tidak melalui puncak kerucut. Bentuk-bentuk irisan kerucut dapat ditunjukkan dengan mengamati besar sudut antara bidang datar dan sumbu kerucut (sudut θ) terhadap besar setengah sudut puncak kerucut (sudut α). Jika $\theta > \alpha$ irisan kerucut berupa ellips dan jika $\theta = 90°$ irisan kerucut akan berupa lingkaran. Kemudian untuk $\theta = \alpha$ irisan kerucut berupa parabola, sedangkan jika $\theta < \alpha$ irisan kerucut akan berupa hiperbola. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat gambar penampang berikut:

Gb.3. Ellips Gb.4. Lingkaran Gb.5. Parabola Gb.6. Hiperbola

Irisan kerucut yang berupa ellips (lingkaran), parabola dan hiperbola itu terbentuk karena bidang pemotong tidak melalui puncak kerucut. Jika bidang pemotong melalui puncak kerucut, maka irisan kerucut itu berturut-turut akan berupa titik, sebuah garis lurus, atau sepasang garis lurus yang saling berpotongan. Dan irisan kerucut yang terjadi disebut irisan kerucut yang tidak sebenarnya. Sedangkan ellips (lingkaran), parabola dan hiperbola disebut irisan kerucut yang sebenarnya. Selanjutnya akan dibahas tentang irisan kerucut yang sebenarnya yaitu ellips, hiperbola dan parabola.

3. Ellips

a. Persamaan Ellips

Sebelum mendefinisikan ellips, perlu diketahui dahulu pengertian tentang tempat kedudukan titik. Tempat kedudukan titik-titik adalah suatu himpunan titik yang memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a. Semua titik yang mempunyai suatu sifat yang ditentukan adalah anggota dari himpunan.

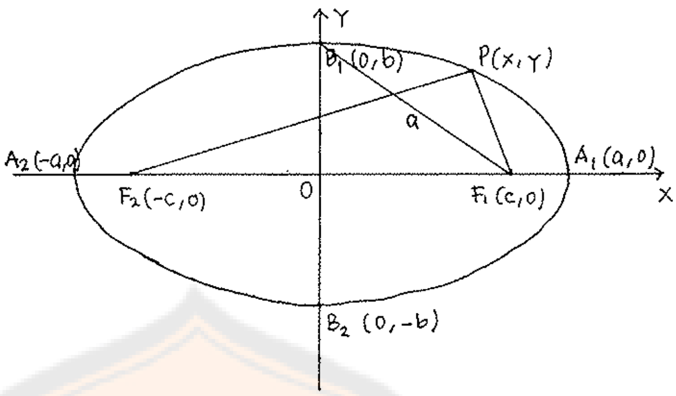
b. Semua titik anggota himpunan mempunyai satu sifat yang sama tersebut.

Definisi II.A.3.1.

Suatu ellips ialah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya.

Dengan definisi di atas, masih ada sedikit keterangan yaitu bahwa jumlah jarak harus lebih besar daripada d, jika d jarak kedua titik tetap tersebut. Kedua titik tertentu tersebut dinamakan fokus dari ellips.

Untuk mendapatkan persamaan suatu ellips diambil sebagai sumbu x garis yang melalui kedua titik tetap yaitu titik F_1 dan F_2. Sedangkan sebagai sumbu y diambil sumbu dari $\overline{F_1F_2}$. Jika $F_1F_2 = 2c$, maka F_1 $(c, 0)$ dan F_2 $(-c, 0)$.



Gb. 7. Ellips dengan pusat O (0, 0) dan fokus pada sumbu X

Misalkan titik P (x, y) adalah suatu titik sebarang pada ellips, dan jika jumlah jarak yang konstan itu adalah 2a, maka akan berlaku:

$$PF_1 + PF_2 = 2a, \text{ dengan } a > 0$$

Dengan definisi ellips di atas diperoleh:

$$\text{Ellips} = \{T \mid TF_1 + TF_2 = 2a\}$$

$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a\}$$

setelah diuraikan diperoleh

$$= \{(x, y) \mid (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\},$$

jika $a^2 - c^2 = b^2$

$$= \{(x, y) \mid b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\}$$

$$= \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

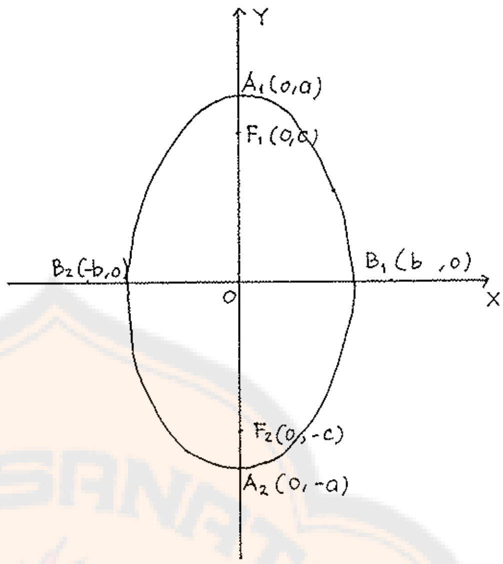
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots. (1)$$

Persamaan (1) disebut persamaan suatu ellips dengan titik pusat 0 (0, 0) dan fokusnya terletak pada sumbu x dengan F_1 (c, 0) dan F_2 (-c, 0). Jarak kedua fokus sama dengan 2c. Titik-titik A_1, A_2, B_1, B_2 merupakan titik puncak - titik puncak ellips. Dengan A_1A_2 =2a dan B_1B_2 = 2b. $\overline{A_1A_2}$ merupakan sumbu mayor ellips dan $\overline{B_1B_2}$ merupakan sumbu minor ellips. Perpotongan antara sumbu mayor dan sumbu minor merupakan titik pusat ellips. Garis yang melalui A_1 dan A_2 serta sumbu dari F_1 dan F_1 merupakan sumbu simetri ellips.

Jika sumbu x dan sumbu y kita tukarkan, maka dari persamaan ellips di atas akan diperoleh persamaan baru, yaitu:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0) \quad \ldots . (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan ellips dengan titik pusat 0 (0, 0) dan fokusnya pada sumbu y, yaitu F_1 (0, c) dan F_2 (0, -c). Dalam hal ini sumbu mayor ellips terletak pada sumbu y dan sumbu minor ellips pada sumbu x.



Gb. 8. Ellips dengan pusat O (0, 0) dan fokus pada sumbu Y

Bila dalam persamaan (1) ditemukan a = b maka diperoleh persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

atau $x^2 + y^2 = a^2$ dan disebut persamaan lingkaran dengan jari-jari a. Jadi lingkaran adalah keadaan istimewa dari ellips.

Untuk ellips yang titik pusatnya P (α, β) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, persamaannya dapat kita tentukan sebagai berikut:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

b. Garis Singgung pada Ellips

1) Garis Singgung pada Ellips dengan gradien m

Misalkan suatu garis dengan gradien m, yaitu $y = mx + n$ merupakan persamaan garis singgung pada ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Kita akan mencari titik potong garis singgung itu dengan ellips. Absis titik potongnya didapat dari:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + n)^2}{b^2} = 1,$$

setelah diuraikan diperoleh:

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Garis akan menyinggung ellips apabila titik-titik potongnya berimpit, atau persamaan kuadrat di atas mempunyai dua akar yang sama, terjadi jika diskriminannya sama dengan nol. Dan apabila diskriminannya sama dengan nol, diperoleh:

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Jadi ada dua garis singgung yang gradiennya m yaitu:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Jika persamaan ellipsnya:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

maka dengan menggunakan translasi susunan sumbu akan didapat persamaan garis singgung pada ellips dengan gradien m yaitu:

$$(y - k) = m\,(x - h) \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

2) Garis Singgung pada Ellips dengan Titik Singgung $T(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung yang melalui $T(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \quad \ldots . \; (1)$$

Persamaan ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots (2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x = x_1} = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1} \quad \ldots . \; (3)$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh:

$$y - y_1 = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)\;,$$

setelah diuraikan diperoleh:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Jadi persamaan garis singgung ellips dengan titik singgung $T(x_1, y_1)$ adalah:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Untuk ellips yang persamaannya:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

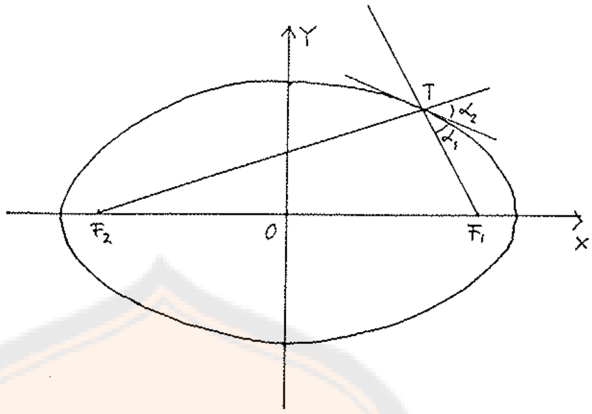
persamaan garis singgung dengan titik singgung $T\ (x_1, y_1)$ adalah:

$$\frac{(x_1 - h)\ (x - h)}{a^2} + \frac{(y_1 - k)\ (y - k)}{b^2} = 1$$

c. Sifat Utama Garis Singgung

Sifat utama garis singgung berbunyi:

Garis singgung di suatu titik pada ellips membagi dua sama besar sudut antara garis penghubung titik itu dengan titik api yang satu dan perpanjangan garis penghubung titik tersebut dengan titik api lainnya.



Gb. 9. Ellips dengan garis singgung melalui titik T

Bukti:

Persamaan garis singgung pada ellips di titik $T(x_1, y_1)$ adalah:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \text{ atau } y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

Persamaan garis penghubung T dan F_1 adalah:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x - c}{x_1 - c} \text{ atau } y = \frac{y_1}{x_1 - c}(x - c)$$

Jika α_1 adalah sudut antara garis singgung dan garis TF_1, maka:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\dfrac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} - \dfrac{y_1}{x_1 - c}}{1 + \dfrac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \dfrac{y_1}{x_1 - c}} = \frac{b^2 (cx_1 - a^2)}{cy_1 (cx_1 - a^2)} = \frac{b^2}{cy_1}$$

Jika sudut antara garis singgung dan garis TF_2 kita sebut α_2, dengan jalan yang sama seperti di atas, didapat:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{b^2}{cy_1}$$

Jadi $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, berarti $\alpha_1 = \alpha_2$ (terbukti)

d. Garis Arah atau Direktriks Ellips

Jika $T(x_1, y_1)$ sebarang titik pada ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

maka jarak T terhadap titik-titik api F_1 (c, 0) dan F_2 (−c, 0) dapat kita hitung sebagai berikut: TF_1 dan TF_2 kita sebut sebagai d_1 dan d_2

$$d_1^2 = (x_1 - c)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + y_1^2$$

$$d_2^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2 = x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + y_1^2$$

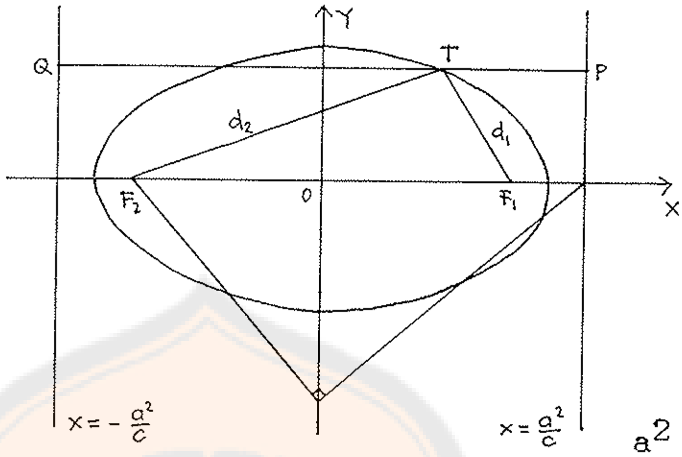
$$d_2^2 - d_1^2 = 4x_1c$$

$d_2 + d_1 = 2a$, jadi didapat:

$$d_2 - d_1 = \frac{4x_1c}{2a} = \frac{2x_1c}{a}$$

Dari persamaan-persamaan ini dapat dihasilkan:

$$d_1 = \frac{c}{a}\left[\frac{a^2}{c} - x_1\right] \text{ dan } d_2 = \frac{c}{a}\left[\frac{a^2}{c} + x_1\right]$$



Gb. 10. Ellips dengan garis arah $x = -\dfrac{a^2}{c}$ dan $x = \dfrac{a^2}{c}$

Jika sekarang kita lukis garis-garis

$x = \pm \dfrac{a^2}{c}$, maka tampak bahwa:

$$d_1 = \left[\frac{c}{a}\right] \times \left[\text{jarak T sampai garis} \quad x = \frac{a^2}{c}\right]$$

$$\text{dan } d_2 = \left[\frac{c}{a}\right] \times \left[\text{jarak T sampai garis} \quad x = \frac{-a^2}{c}\right]$$

Garis-garis $x = \dfrac{a^2}{c}$ dan $x = \dfrac{-a^2}{c}$

disebut garis-garis arah atau direktriks dari ellips. Ternyata garis arah - garis arah adalah garis kutub - garis kutub dari titik api - titik api F_1 (c, 0) dan F_2 (-c, 0)

Definisi II.A.3.2.:

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap suatu titik dan suatu garis tertentu tetap besarnya dan perbandingan ini lebih kecil dari 1

$$\left[e = \frac{c}{a} < 1 \right]$$

$\frac{c}{a}$ disebut eksentrisitas dan disingkat dengan e

e. Garis Tengah Sekawan

Pada suatu ellips kita tarik talibusur-talibusur yang sejajar dengan garis $y = mx + n$; kita akan mencari tempat kedudukan titik tengah - titik tengah talibusur-talibusur ini. Ini dapat kita cari sebagai berikut:

Kita mencari titik potong antara garis $y = mx + n$ dengan ellips kemudian kita mencari titik tengah-nya, dengan n suatu parameter.

$b^2x^2 + a^2 (mx + n)^2 = a^2b^2$

$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$

Absis-absis titik potongnya adalah akar-akar dari persamaan kuadrat di atas. Jika titik tengah talibusur-talibusur itu T, maka:

$$x_T = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{2a^2mn}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

$$= -\frac{a^2mn}{b^2 + a^2m^2} \quad \text{dan}$$

$$y_T = \frac{-a^2m^2n}{b^2 + a^2m^2} + n = \frac{b^2n}{b^2 + a^2m^2}$$

Tempat kedudukan yang kita cari didapat dengan mengeliminir n dan menjalankan koordinat-koordinat titik T.

$$\frac{y_T}{x_T} = -\frac{b^2}{a^2m}$$

Jadi persamaan tempat kedudukannya adalah:

$y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$ dan ini adalah persamaan suatu garis tengah dari ellips. Garis tengah - garis tengah $y = mx$ dan $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$ disebut garis tengah - garis tengah sekawan. Jika $m_1 = m$ dan $m_2 = -\dfrac{b^2}{a^2m}$ disebut arah-arah sekawan, maka

$$m_1.m_2 = -\frac{b^2}{a^2}, \quad m_1m_2 < 0 .$$

Jadi m_1 dan m_2 tandanya berlawanan. Yang berarti bahwa garis tengah - garis tengah sekawan ellips dipisahkan oleh sumbu-sumbu koordinat.

f. Persamaan Parameter Ellips

Persamaan parameter suatu ellips tidak tunggal. Jika diberikan persamaan suatu ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan berikut adalah persamaan parameter dari ellips:

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{cases} \text{, dengan } \alpha \text{ parameter}$$

Jika parameter α dihilangkan dan $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ maka akan diperoleh persamaan ellips seperti di atas.

4. Hiperbola

a. Persamaan Hiperbola

Definisi II.A.4.1.:

Suatu hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya atau

Definisi II.A.4.2.:

Suatu hiperbola adalah himpunan titik, yang titik-titiknya memenuhi syarat bahwa selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap.

Kedua titik tertentu tersebut disebut fokus dari hiperbola yaitu F_1 dan F_2.

Sekarang kita akan menentukan persamaan suatu hiperbola, tetapi sebelumnya kita membuat sumbu x yaitu melalui F_1 dan F_2 dan sebagai sumbu y adalah sumbu dari $\overline{F_1F_2}$. Jarak F_1 dan F_2 adalah 2c maka F_1 (c, 0) dan F_2 (-c, 0).

Sesuai dengan definisi di atas didapat:

Hiperbola:

$= \{T \mid TF_2 - TF_1 \mid = 2a\}$

$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a\}$,

setelah diuraikan diperoleh:

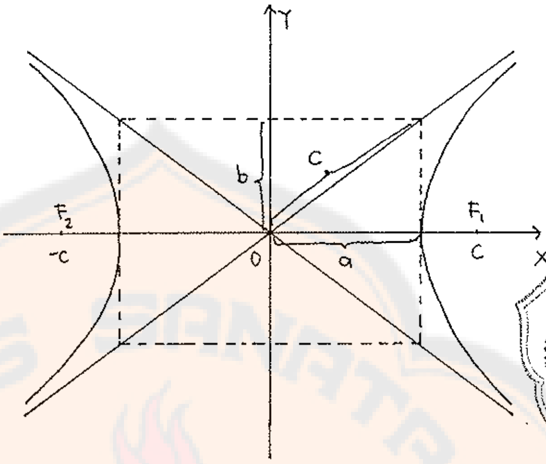
$= \{(x, y) \mid (c^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)\}$, jika $c^2 - a^2 = b^2$

$= \{(x, y) \mid b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2\}$

$= \left\{(x, y) \mid \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots . (1)$$

Persamaan (1) disebut persamaan kanonik hiperbola atau persamaan pusat hiperbola dengan pusat 0.



Gb. 11. Hiperbola dengan pusat 0 (0, 0)

Sumbu-sumbu simetrinya adalah sumbu x dan sumbu y. Sumbu x disebut juga sumbu nyata karena titik potong sumbu x dengan hiperbola nyata dan sumbu y disebut sumbu imaginair karena titik potong sumbu y dengan hiperbola imajinair. Titik pusat hiperbola adalah titik potong sumbu simetri - sumbu simetrinya. Titik puncak hiperbola adalah titik potong sumbu x dan hiperbola.

Pada persamaaan hiperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jika b = a maka persamaannya menjadi $x^2 - y^2 = a^2$ dan disebut persamaan hiperbola orthogonal.

b. Asimtut Hiperbola

Diberikan suatu persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

kemudian kita akan mencari titik potong hiperbola dengan garis $y = mx$.

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,

setelah diuraikan diperoleh:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad \text{dan} \quad y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

Apabila:

$b^2 - a^2m^2 > 0$ atau $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$

maka ada dua titik potong berlainan.

$b^2 - a^2m^2 < 0$ atau $m < -\frac{b}{a}$ atau $m > \frac{b}{a}$

maka tidak ada titik potong atau titik potongnya khayal.

$b^2 - a^2m^2 = 0$ atau $m = \pm \frac{b}{a}$

maka titik potongnya tidak dapat dicari.

Garis-garis $y = \pm \frac{b}{a} x$ disebut asimtut-asimtut hiperbola. Asimtut hiperbola adalah garis yang menyinggung hiperbola di jauh tak hingga.

Gambarannya sebagai berikut: Jika T_1 (x_1, y_1) suatu titik pada hiperbola dan T_2 (x_1, y_2) suatu titik pada asimtut hiperbola, dengan absis sama, maka:

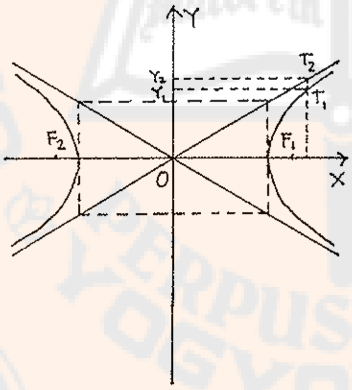
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ atau } y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

$$y_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$$

$$|y_1 - y_2| = \left| \frac{b}{a} \left(\sqrt{x_1^2 - a^2} - x_1 \right) \right|$$

$$\lim_{x_1 \to \infty} |y_1 - y_2| = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{b}{a} \left| \left(\sqrt{x_1^2 - a^2} - x_1 \right) \right|$$

$$= \lim_{x_1 \to \infty} \frac{ba}{\sqrt{x_1^2 - a^2} + x_1} = 0$$



Jadi titik-titik itu semakin jauh dari sumbu y akan semakin mendekati asimtut. Dan dari persamaan asimtut di atas, diperoleh persamaan susunan asimtutnya yaitu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Gb.12. Hiperbola dengan asimtut-asimtutnya

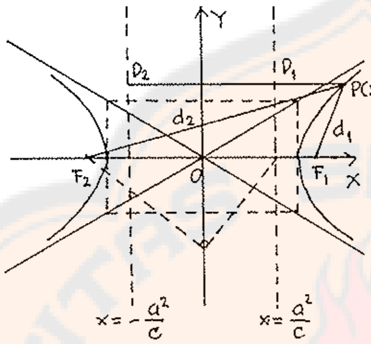
$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Jika $b = a$, maka asimtut-asimtut hiperbola saling tegak lurus.

c. Garis Arah atau Direktriks Hiperbola

Suatu titik P (x_1, y_1) terletak pada hiperbola dengan persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$PF_1^2 = d_1^2 = (x_1 - c)^2 + y_1^2$$
$$= x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + y_1^2$$
$$PF_2^2 = d_2^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2$$
$$= x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + y_1^2$$
$$d_2^2 - d_1^2 = 4cx_1,\ d_2 - d_1$$
$$= 2a$$

Gb.13. Hiperbola dengan garis arah $x = -\frac{a^2}{c}$ dan $x = \frac{a^2}{c}$

Jadi $d_2 + d_1 = \frac{2cx_1}{a}$

$$d_2 = \frac{c}{a}\left[x_1 + \frac{a^2}{c}\right]$$

$$d_1 = \frac{c}{a}\left[x_1 - \frac{a^2}{c}\right]$$

Garis $x = \pm\frac{a^2}{c}$ dapat digambar, tampak bahwa

$$d_2 = \frac{c}{a} . PD_2 \quad \text{dan} \quad d_1 = \frac{c}{a} . PD_1 .$$

Dan garis-garis $x = \pm\frac{a^2}{c}$ disebut garis arah - garis arah hiperbola. Sehingga diperoleh definisi baru dari hiperbola:

Definisi II.A.4.3.:

Suatu hiperbola ialah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap suatu titik dan suatu garis tertentu tetap besarnya dan perbandingan ini lebih besar dari 1

$$\left[e = \frac{c}{a} > 1\right]$$

Titik itu disebut fokus dan garisnya adalah direktriks.

Contoh:

1. Carilah persamaan hiperbola yang titik api - titik apinya terletak pada sumbu x, simetris terhadap 0, jarak antara kedua direktriksnya $\frac{8}{3}$ dan eksentrisitasnya $e = \frac{3}{2}$

   Jawab:

   Misal persamaan hiperbolanya:

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   Jarak antara kedua direktriksnya $\frac{8}{3}$ dan $e = \frac{3}{2}$, sehingga didapat a = 2 dan c = 3

   $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

Jadi persamaan hiperbolanya:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

2. Diketahui suatu hiperbola yang mempunyai titik api F (-2, -3) dan persamaan garis arah yang berpasangan dengan titik api ini adalah x + 1 = 0 dan titik A (-3, -5) terletak pada hiperbola tersebut. Carilah persamaan hiperbolanya !

   Jawab:

   Misalkan (x, y) sebarang titik pada hiperbola, maka berlaku:

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y + 3)^2} = e \mid x + 1 \mid$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = e^2 \ (x + 1)^2$$

   Karena titik A (-3, -5) terletak pada hiperbola, maka berlaku:

$$e^2 = \frac{5}{4}$$

   Jadi persamaan hiperbolanya:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{5}{4} \ (x + 1)^2 \text{ atau}$$

$$x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$$

d. Garis Singgung pada Hiperbola

Kalau kita perhatian persamaan ellips dan persamaan hiperbola berikut:

Persamaan ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan

Persamaan hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$$

Tampak bahwa perbedaan kedua persamaan di atas hanya pada tanda dari b^2, untuk ellips tandanya + dan untuk hiperbola tandanya −.

Untuk ellips dengan titik pusat (α, β) persamaannya:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

Maka untuk hiperbola dengan pusat (α, β), persamaannya:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

1) Garis Singgung pada Hiperbola dengan Gradien m

Persamaan garis singgung pada ellips:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

jadi persamaan garis singgung pada hiperbola:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \ldots. (1)$$

Persamaan (1) mungkin, jika $a^2m^2 - b^2 > 0$ berarti

$$m > \frac{b}{a} \quad \text{atau} \quad m < -\frac{b}{a}$$

Untuk hiperbola dengan pusat (α, β) maka persamaan garis singgungnya:

$$y - \beta = m(x - \alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

2) Garis Singgung pada Hiperbola dengan Titik Singgung $T(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung ellips dengan titik singgung (x_1, y_1):

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Jadi persamaan garis singgung hiperbola dengan titik singgung (x_1, y_1):

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Jika persamaan hiperbolanya

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 ,$$

maka persamaan garis singgungnya:

$$\frac{(x_1 - \alpha)(x - \alpha)}{a^2} - \frac{(y_1 - \beta)(y - \beta)}{b^2} = 1$$

e. Persamaan Parameter Hiperbola

Berikut ini kita akan membicarakan persamaan parameter suatu hiperbola. Seperti pada ellips, persamaan parameter suatu hiperbola juga tidak tunggal. Persamaan parameter berikut ini adalah persamaan parameter hiperbola:

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

dengan $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^t)$ dan $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^t)$. Pada persamaan parameter di atas, jika parameter t dihilangkan diperoleh persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Karena $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

Persamaan parameter hiperbola yang lain:

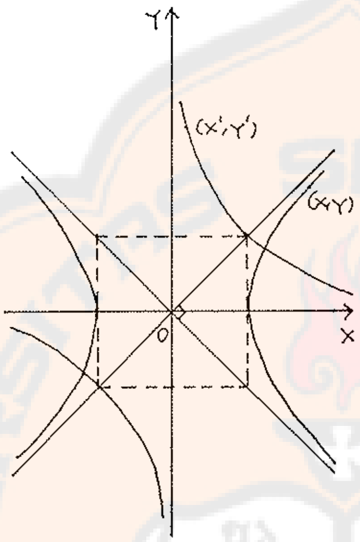
$$\begin{cases} x = a \sec \mu \\ y = b \operatorname{tg} \mu \ , \ \mu \text{ parameter} \end{cases}$$

Pada persamaan parameter tersebut, jika parameter μ dihilangkan maka diperoleh persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ karena } \sec^2\mu - \operatorname{tg}^2\mu = 1$$

Sekarang kita akan membicarakan persamaan hiperbola orthogonal. Pada gambar berikut, persamaan hiperbola itu terhadap susunan sumbu XOY adalah:

$$x^2 - y^2 = a^2$$



Gb.14. Hiperbola orthogonal

Jika grafik hiperbola tersebut dirotasikan dengan sudut rotasi 45°.

$R(0,45°) : (x, y) \longrightarrow (x', y')$

$x' = x \cos 45° - y \sin 45°$

$y' = x \sin 45° + y \cos 45°$

atau

$x' = \frac{1}{2} x \sqrt{2} - \frac{1}{2} y \sqrt{2}$

$y' = \frac{1}{2} x \sqrt{2} + \frac{1}{2} y \sqrt{2}$

atau

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh persamaan : $x'y' = \frac{1}{2} a^2$. Dan karena susunan sumbunya adalah XOY maka persamaan tersebut dapat menjadi $xy = \frac{1}{2} a^2$. Persamaan $xy = \frac{1}{2} a^2$ adalah persamaan hiperbola orthogonal dengan asimtut-asimtut sumbu-sumbu koordinat.

Persamaan parameter hiperbola orthogonal $xy = \frac{1}{2} a^2$, antara lain:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} at \\ y = \dfrac{a}{t}, \; t \text{ parameter } t \neq 0 \end{cases}$$

Pada persamaan parameter tersebut, jika parameter t dihilangkan maka diperoleh persamaan hiperbola orthogonal $xy = \frac{1}{2}a^2$.

Persamaan parameter hiperbola orthogonal $xy = \frac{1}{2}a^2$ yang lain adalah:

$$\begin{cases} x = 2at \\ y = \dfrac{a}{4t}, \; t \text{ parameter } t \neq 0 \end{cases}$$

5. Parabola

a. Persamaan Parabola

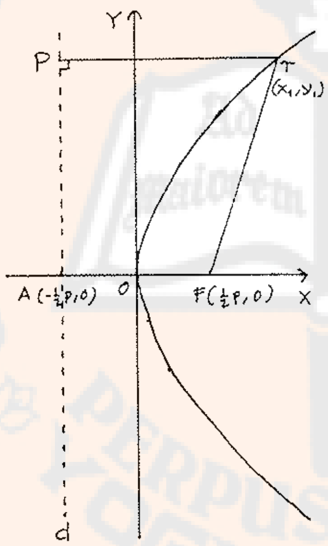
Definisi II.A.5.1.

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik dan suatu garis tertentu yang diketahui.

Titik tertentu tersebut dinamakan titik api atau fokus dan garisnya dinamakan garis arah atau direktriks.

Sumbu utama parabola adalah garis yang melalui fokus dan tegak lurus direktriks parabola. Puncak parabola adalah titik perpotongan antara parabola dan sumbu utama parabola.

Untuk mendapatkan persamaan parabola, pertama kita membuat sumbu X garis yang melalui titik tertentu yaitu titik F dan tegak lurus garis yang ditentukan tadi yaitu garis d. Misal titik potong antara garis yang telah ditentukan atau garis d dengan sumbu X adalah A, maka sebagai sumbu Y diambil sumbu dari $\overline{AF}$. Jika AF = p, maka F (½p, 0) dan persamaan garisnya x = -½p.



Gb.15. Parabola dengan puncak O (0, 0), fokus F (-½ p, 0) dan garis arah x = -½ p

Menurut definisi parabola, diperoleh:

Parabola = {T | TP = TF}

TP = Jarak T sampai garis x = -½p, sehingga:

$$\text{Parabola} = \{(x, y) \mid \sqrt{(x + \tfrac{1}{2}p)^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p - x)^2 + y^2}\,\}$$

$$= \{(x, y) \mid y^2 = 2px\}$$

$$y^2 = 2px \; .... \; (1)$$

Persamaan (1) disebut persamaan puncak atau persamaan kanonik parabola. F disebut fokus dan O disebut puncak parabola. Garis x = -½p disebut garis arah atau direktriks dan sumbu X adalah sumbu simetri parabola, p adalah parameter parabola.

Seperti pada ellips dan hiperbola, karena perbandingan antara jarak setiap titik pada parabola ke fokus sama dengan jarak setiap titik pada parabola ke direktriks, maka eksentrisitas numeriknya yaitu $e = 1$.

Jika diketahui suatu parabola dengan puncak (α, β) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu X maka dengan menggunakan translasi susunan sumbu dapat dijabarkan dan diperoleh persamaan parabolanya: $(y - \beta)^2 = 2p\,(x - \alpha)$.

b. Garis Singgung pada Parabola

1) Persamaan Garis Singgung pada Parabola dengan Gradien m

Misalkan persamaan parabola $y^2 = 2px$ dan persamaan garis singgung pada parabola tersebut $y = mx + n$. Kemudian dicari koordinat-koordinat titik potong garis singgung dengan parabola, dan diperoleh: $m^2x^2 + (2mn - 2p)x + n^2 = 0$. Jika garis menyinggung parabola maka kedua titik potongnya berimpit yaitu absis kedua titik potongnya sama. Sehingga haruslah diskriminannya sama dengan nol dan terdapat

$$n = \frac{p}{2m}$$

Jadi persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ dengan gradien m adalah

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

Jika persamaan parabolanya $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$ maka persamaan garis singgung pada parabola tersebut dengan gradien m adalah

$$y - \beta = m(x - \alpha) + \frac{p}{2m}$$

2) Persamaan Garis Singgung pada Parabola $y^2 = 2px$ dengan Titik Singgung $T(x_1, y_1)$

Persamaan garis yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots.(1)$$

Persamaan parabolanya:

$$y^2 = 2px$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

$$m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x = x_1} = \frac{p}{y_1} \quad \ldots. (2)$$

Setelah diuraikan diperoleh:

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

Jadi persamaan garis singgung parabola $y^2 = 2px$ dengan titik singgung $T(x_1, y_1)$ adalah $y_1 y = p(x + x_1)$. Apabila diketahui parabola puncaknya di (α, β) dengan persamaan: $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$, maka persamaan garis singgungnya di titik $T(x_1, y_1)$ adalah: $(y_1 - \beta)(y - \beta) = p(x + x_1 - 2\alpha)$.

3) Persamaan Garis Singgung pada Parabola yang ditarik dari suatu titik $T(x_1, y_1)$ di luar Parabola

Misalkan titik singgung dari suatu garis singgung pada parabola adalah $P(x', y')$, persamaan garis singgungnya adalah $y'y = p(x + x')$. Garis singgung ini melalui titik $T(x_1, y_1)$ di luar parabola, maka diperoleh:

(i) $y'y_1 = p(x_1 + x')$

(ii) $(y')^2 = 2px'$

Dari kedua persamaan ini x' dan y' dapat dicari dan persamaan garis singgungnya dapat diperoleh.

c. Sifat Utama Garis Singgung pada Parabola

Salah satu sifat garis singgung pada parabola ialah:

Garis singgung di suatu titik pada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung dengan fokus dan garis yang melalui titik singgung sejajar sumbu simetri.

Bukti:

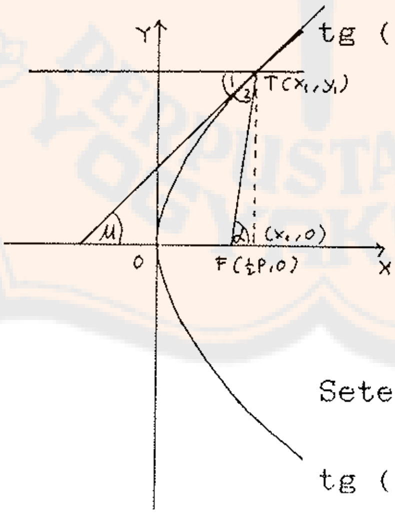
Misalkan titik singgung pada parabola $T(x_1, y_1)$. Maka persamaan garis singgungnya di titik T adalah:

$y_1 y = p\,(x + x_1)$ dengan

$$\text{gradien } m = tg\,\mu = \frac{p}{y_1}$$

$$tg\mu = \frac{p}{y_1},\quad m\angle T_1 = \mu,\quad m\angle T_2 = \alpha - \mu,\quad m\angle T = \alpha$$

$$tg\alpha = \frac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p}$$



$$tg\,(\alpha - \mu) = \frac{tg\alpha - tg\mu}{1 + tg\alpha\; tg\mu}$$

$$= \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p} - \dfrac{p}{y_1}}{1 + \dfrac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p} \cdot \dfrac{p}{y_1}}$$

Setelah diuraikan diperoleh:

$$tg\,(\alpha - \mu) = \frac{p}{y_1} = tg\mu,$$

Gb.16. Parabola dengan garis singgung melalui T sehingga

$\alpha - \mu = \mu$

$\alpha = 2\mu$

terbukti $m\angle T_1 = m\angle T_2 = \mu$

Jadi terbukti bahwa garis singgung di suatu titik pada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung dengan fokus dan garis yang melalui titik singgung sejajar sumbu X.

d. Persamaan Parameter Parabola

Suatu persamaan parameter parabola tidak tunggal, berikut ini salah satu persamaan parameter dari parabola yaitu:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}pt^2 \\ y = pt, \text{ dengan } t \text{ sebagai parameter} \end{cases}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan parameter parabola karena jika parameter t dihilangkan, diperoleh persamaan parabola $y^2 = 2px$.

Persamaan parameter parabola yang lain:

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt, \text{ dengan } t \text{ sebagai parameter} \end{cases}$$

Jika parameter t dihilangkan, akan diperoleh persamaan parabola $y^2 = 2px$.

B. FUNGSI

1. Fungsi/Pemetaan

Pemetaan (fungsi) dari suatu himpunan ke himpunan yang lain merupakan suatu relasi yang khusus, artinya pemetaan adalah suatu relasi tetapi suatu relasi belum tentu suatu pemetaan. Relasi adalah suatu hubungan di antara dua obyek, dalam hal ini suatu hubungan antara dua himpunan. Hubungan itu sifatnya umum dan dalam relasi itu tidak ada aturan atau ketentuan tentang perkawanan itu, berbeda dengan pemetaan.

Definisi II.B.1.1.

Diberikan himpunan A dan himpunan B. Hasilkali kartesius dari A dan B adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ dan suatu pasangan terurut (a_1, b_1) sama dengan pasangan terurut (a_2, b_2) jika dan hanya jika $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$.

Notasi: A x B

Definisi II.B.1.2.

Diberikan himpunan A dan himpunan B. Suatu relasi R terdefinisi dari himpunan A ke himpunan B dengan singkat didefinisikan aRb yang artinya bahwa pasangan terurut (a, b) adalah suatu anggota dari R dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Suatu relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah subset dari A x B. Jika R relasi pada himpunan A maka R himpunan bagian dari A x A. Suatu relasi R pada A dapat dituliskan dengan a_1Ra_2 yang artinya pasangan terurut (a_1, a_2) anggota dari R.

Definisi II.B.1.3.

Jika S dan T himpunan-himpunan yang tidak kosong, maka suatu pemetaan M dari S ke T adalah suatu himpunan bagian dari SxT sedemikian hingga untuk setiap $s \in S$ ada dengan tunggal $t \in T$ sedemikian hingga pasangan terurut (s, t) dalam M.

Jika α pemetaan dari himpunan S ke himpunan T, dituliskan dengan: $\alpha : S \longrightarrow T$, maka untuk setiap $s \in S$, $\alpha(s) = t$, untuk $t \in T$.

Dari definisi tampak perbedaan antara relasi dan pemetaan. Suatu pemetaan α dari himpunan A ke himpunan B mensyaratkan bahwa setiap anggota dari himpunan A harus mempunyai kawan yang tunggal di himpunan B. Sedangkan suatu relasi tidak mensyarat-kan bahwa setiap anggota himpunan pertama harus mempunyai kawan dan kawannya pun di himpunan kedua tidak harus tunggal.

Fungsi atau pemetaan itu sama, hanya saja fungsi sering merupakan pemetaan dari R (himpunan semua bilangan real) ke R.

Definisi II.B.1.4.

Pemetaan α disebut pemetaan injektif dari A ke B jika $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$ dengan $\alpha(a_1), \alpha(a_2) \in B$ maka $a_1 = a_2$ dengan $a_1, a_2 \in A$.

Definisi II.B.1.5.

Pemetaan α disebut pemetaan surjektif dari A ke B jika untuk setiap $b \in B$ pasti ada suatu $a \in A$ sedemikian hingga $b = \alpha(a)$.

Jika $\alpha : A \longrightarrow B$ adalah pemetaan injektif dan surjektif maka α disebut pemetaan bijektif dari A ke B atau α adalah korespondensi satu-satu dari A ke B.

Suatu pemetaan tidak harus dari himpunan A ke himpunan B atau dari himpunan-himpunan yang berlainan, tetapi suatu pemetaan dapat dari himpunan A ke himpunan A sendiri. Suatu pemetaan identitas pada himpunan A adalah suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan A dengan setiap anggota himpunan A itu mempunyai bayangan dirinya sendiri. Dinotasikan dengan $i_A(a) = a$ untuk setiap $a \in A$. Jika $\alpha : A \longrightarrow B$ suatu pemetaan bijektif maka $\alpha^{-1} : B \longrightarrow A$ juga pemetaan bijektif, karena setiap $a \in A$ oleh α dibawa ke $\alpha(a)$ sehingga $\alpha(a) \in B$. Oleh pemetaan α^{-1}, $\alpha(a)$ dibawa ke a atau $\alpha^{-1}(\alpha(a)) = i_A(a) = a$, $a \in A$.

Definisi II.B.1.6.

Dua pemetaan σ dan β dari S ke T disebut sama jika $\sigma(s) = \beta(s)$ untuk setiap $s \in S$.

Definisi II.B.1.7.

Jika $\sigma : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$ maka komposisi dari β dan σ (hasilkali dari β dan σ) adalah pemetaan $\beta \circ \sigma : S \longrightarrow U$ yang didefinisikan dengan $(\beta \circ \sigma)(s) = \beta(\sigma(s))$ untuk setiap $s \in S$.

Lemma II.B.1.1.

Jika $\sigma : S \longrightarrow T$, $\beta : T \longrightarrow U$ dan $\mu : U \longrightarrow V$ maka $(\mu \circ \beta) \circ \sigma = \mu \circ (\beta \circ \sigma)$.

Bukti:

Pemetaan $\beta \circ \sigma$ adalah suatu pemetaan dari S ke U, kemudian $\mu \circ (\beta \circ \sigma)$ pemetaan dari S ke V. Demikian juga pemetaan $(\mu \circ \beta)$ adalah pemetaan dari T ke V dan pemetaan $(\mu \circ \beta) \circ \sigma$ pemetaan dari S ke V. Kemudian akan ditunjukkan bahwa kedua pemetaan itu sama yaitu untuk sebarang $s \in S$, akan ditunjukkan bahwa:

$((\mu \circ \beta) \circ \sigma)(s) = (\mu \circ (\beta \circ \sigma))(s)$

$((\mu \circ \beta) \circ \sigma)(s) = (\mu \circ \beta)\ (\sigma(s)) = \mu(\beta(\sigma(s)))$

$(\mu \circ (\beta \circ \sigma))(s) = \mu((\beta \circ \sigma)(s)) = \mu(\beta(\sigma(s)))$

Dari uraian di atas diperoleh $((\mu \circ \beta) \circ \sigma)(s)$ dan $(\mu \circ (\beta \circ \sigma))(s)$ sama atau pada komposisi pemetaan dipenuhi sifat assosiatif. Jadi terbukti $(\mu \circ \beta) \circ \sigma = \mu \circ (\beta \circ \sigma)$.

Lemma II.B.1.2.

Diberikan $\sigma : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$ maka:

(1) $\beta \circ \sigma$ adalah surjektif jika masing-masing dari σ dan β surjektif.

(2) $\beta \circ \sigma$ adalah injektif jika masing-masing dari σ dan β injektif.

Bukti:

(1) Diambil sebarang $u \in U$, karena β pemetaan surjektif maka pasti ada suatu $t \in T$ sedemikian hingga $\beta(t) = u$, $t \in T$ dan karena σ pemetaan surjektif maka pasti ada suatu $s \in S$ sedemikian hingga $\sigma(s) = t$.

$u = \beta(t) = \beta(\sigma(s)) = (\beta \circ \sigma)(s)$

Jadi untuk sebarang $u \in U$, pasti ada $s \in S$ sedemikian hingga $u = (\beta \circ \sigma)(s)$.

Jadi terbukti $\beta \circ \sigma$ pemetaan surjektif.

(2) Diambil sebarang $s_1, s_2 \in S$ dan $s_1 \neq s_2$. Karena σ pemetaan injektif maka $\sigma(s_1)) \neq \sigma(s_2)$ dengan $\sigma(s_1), \sigma(s_2) \in T$. Dan karena β pemetaan injektif maka $\beta(\sigma(s_1)) \neq \beta(\sigma(s_2))$ yang artinya $(\beta \circ \sigma)(s_1) \neq (\beta \circ \sigma)(s_2)$.

Jadi terbukti $\beta \circ \sigma$ pemetaan injektif.

2. Transformasi Titik-titik pada Bidang

Pengertian fungsi tidak hanya terbatas pada fungsi dari R ke R, dalam Geometri pun kita mengenal pengertian fungsi yaitu pada transformasi. Transformasi adalah pemetaan satu-satu titik-titik pada suatu bidang onto titik-titik pada bidang itu sendiri.

Transformasi yang akan kita bicarakan adalah transformasi yang tidak mengubah jarak dan transformasi yang mengubah jarak. Transformasi yang tidak mengubah jarak disebut isometri atau transformasi kongruensi. Sehingga jika (T, T´) dan (Q, Q´) dua pasang titik yang berkorespondensi, maka $TQ = T'Q'$ atau $TQ \cong T'Q'$.

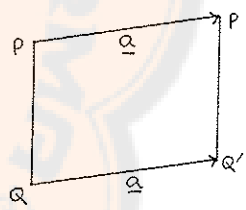
Berikut ini adalah transformasi yang tidak mengubah jarak:

a. Translasi

Suatu translasi ditunjukkan oleh vektor translasinya. Diberikan suatu translasi dengan vektor translasi $\underline{a}$ dinyatakan dengan $T\underline{a}$ dan dan didefinisikan sebagai berikut:

$T\underline{a}$: $P \longrightarrow P'$, $\overrightarrow{PP'}$ wakil dari $\underline{a}$

$Q \longrightarrow Q'$, $\overrightarrow{QQ'}$ wakil dari $\underline{a}$



Dari uraian di atas diperoleh:

$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

Gb.17. Translasi dengan vektor translasi $\underline{a}$

Dan $PP' = QQ'$

$\overline{PP'}$ // $\overline{QQ'}$

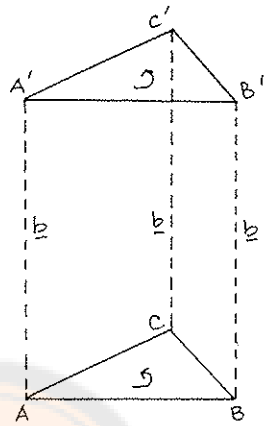
Jadi PQQ´P´ jajaran genjang sehingga PQ // P´Q´ dan PQ = P´Q´

Diberikan suatu translasi dengan vektor translasi $\underline{b}$, dengan ketentuan sebagai berikut:

$T\underline{b}$: $\triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$

Maka $\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$; $\overline{B'C'}$ // $\overline{BC}$; $\overline{C'A'}$ // $\overline{CA}$

Dari contoh-contoh di atas menunjukkan bahwa suatu translasi adalah suatu isometri yang tidak mempunyai titik invariant (titik tetap). Jika $\underline{v}$ = $\underline{0}$ maka translasi itu merupakan suatu transformasi identitas.



Gb.18. Translasi dengan vektor translasi $\underline{b}$

Titik invariant adalah suatu titik yang bayangannya oleh suatu transformasi adalah titik itu sendiri. Sehingga dalam translasi setiap titiknya berpasangan dengan titik lain.

Suatu translasi juga tidak mengubah arah artinya bahwa jika diberikan suatu $\triangle ABC$ maka oleh suatu translasi $\triangle ABC$ akan ditransformasikan ke $\triangle A'B'C'$ sedemikian, hingga urutan A-B-C dan A'-B'-C' berarah sama.

b. Rotasi

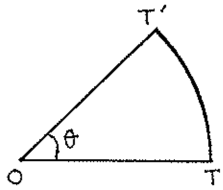
Suatu rotasi dengan 0 titik tertentu dan θ sudut dengan ukuran tertentu, dinyatakan dengan R(0, θ). Sudut dengan ukuran θ positif jika arah berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. Jika θ = k.360° maka rotasi itu berupa transformasi identitas. R(0, θ) didefinisikan sebagai berikut:

$R(O, \theta) : O \longrightarrow O$

$T \longrightarrow T'$

$m\angle TOT' = \theta, \ OT = OT'$

O adalah titik invariant

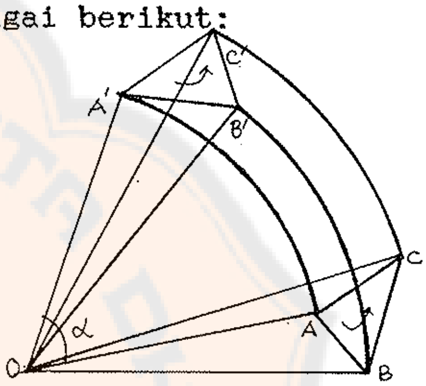


Gb.19. Rotasi dengan pusat O dan sudut rotasi θ

Diberikan suatu rotasi sebagai berikut:

$R(O, \alpha) : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$

Dapat dibuktikan bahwa suatu rotasi adalah suatu isometri dengan satu titik invariant O dan suatu rotasi juga tidak mengubah arah.



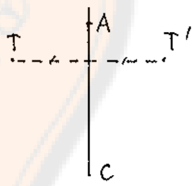
Gb.20. Rotasi dengan pusat O dan sudut rotasi α

c. Refleksi

Suatu refleksi dengan cermin c dinyatakan dengan Mc, dan didefinisikan sebagai berikut:

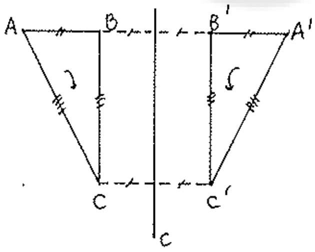
$Mc : A \longrightarrow A$, jika A pada cermin

$T \longrightarrow T'$, dengan c adalah sumbu $\overline{TT'}$



Gb.21. Refleksi terhadap cermin c

Diberikan suatu refleksi berikut:



$Mc : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$

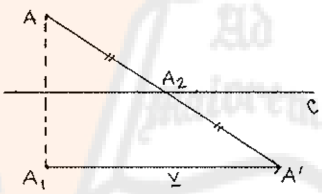
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'} \end{array}\right] \ \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Gb.22. Refleksi $\triangle ABC$ terhadap cermin c

Dari gambar diperoleh bahwa suatu refleksi mengubah arah. Suatu refleksi adalah suatu isometri yang titik-titik invariantnya adalah titik-titik suatu garis lurus yaitu titik pada cermin.

d. Refleksi Geser

Refleksi geser adalah hasilkali refleksi dan translasi sejajar cermin. Refleksi geser ditulis dengan G. Suatu refleksi geser dengan cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$ dan $\underline{v} \neq \underline{0}$, dinyatakan dengan $G_{c,\underline{v}}$, maka transformasinya disajikan sebagai berikut:



$G_{c,\underline{v}} : A \longrightarrow A'$

Ternyata titik tengah $\overline{AA'}$ terletak pada cermin.

Gb.23. Refleksi geser terhadap cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$

Diberikan refleksi geser dengan cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$ sebagai berikut:

$M_c \quad : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A_2B_2C_2$

$T_{\underline{v}} \quad : \triangle A_2B_2C_2 \longrightarrow \triangle A'B'C'$

$T_{\underline{v}}M_c \quad : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$, atau

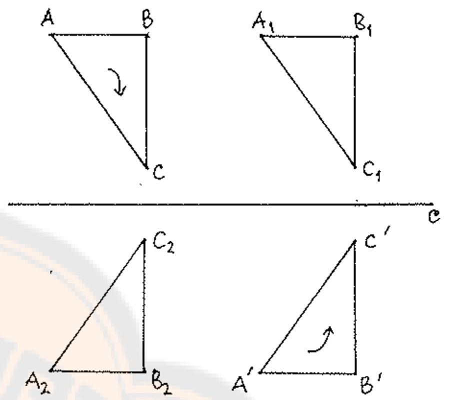
$T_{\underline{v}} \quad : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_1$

$M_c \quad : \triangle A_1B_1C_1 \longrightarrow \triangle A'B'C'$

$M_cT_{\underline{v}} \quad : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$

Jadi didapat bahwa:

$G_{c,\ \underline{v}} = T_{\underline{v}}M_c = M_cT_{\underline{v}}$



Gb.24. Refleksi geser $\triangle$ ABC terhadap cermin c dan vektor translasi $\underline{v}$

Dari contoh di atas menunjukkan bahwa suatu refleksi geser mengubah arah dan pada refleksi geser tidak ada titik invariant.

Contoh-contoh transformasi yang mengubah jarak:

1) Dilatasi

Definisi II.B.2.1.

Dilatasi adalah transformasi yang memetakan garis ke garis yang sejajar dengan garis semula.

Dilatasi meliputi translasi dan dilatasi sentral. Dilatasi yang akan dibicarakan adalah dilatasi sentral. Suatu dilatasi sentral dengan titik pusat O dan faktor skala k dinyatakan dengan [O, k].

[O, k] : O ——> O, O titik invariant

A ——> A´, OA´ = kOA

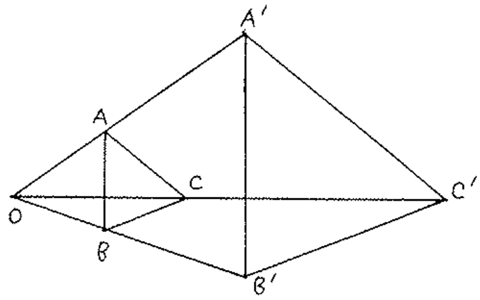
$(\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA})$, $k \neq 0$

$AB \longrightarrow A'B'$: $OA' = kOA$

$OB' = kOB$

$\overline{A'B'} \mathbin{//} \overline{AB}$

$A'B' = kAB$



Gb.25. Dilatasi dengan pusat O dan faktor skala k

Dari contoh dan gambar di atas menunjukkan bahwa suatu dilatasi sentral mempunyai satu titik invariant dan tidak mengubah arah. Jika $|k| = 1$ maka dilatasi sentral itu suatu isometri karena untuk $k = 1$ merupakan transformasi identitas dan untuk $k = -1$ merupakan setengah putaran.

2) Similaritas

Definisi II.B.2.2.

Similaritas adalah suatu transformasi yang mentransformasikan setiap segmen AB ke segmen A'B' sedemikian, hingga panjangnya ditentukan oleh

$$\frac{A'B'}{AB} = \mu ,$$

dengan μ suatu bilangan positif konstan yang disebut faktor perbanyakan.

Similaritas dapat berupa suatu dilatasi $[O, \mu]$ atau suatu hasilkali dilatasi dan isometri.

Similaritas ada dua macam yaitu:

a) Similaritas langsung

Definisi II.B.2.3.

Similaritas langsung adalah suatu similaritas yang tidak mengubah arah.

Yang termasuk similaritas langsung, antara lain: dilatasi, rotasi, translasi, transformasi identitas, dan rotasi dilatif (similaritas spiral) yang merupakan hasil-kali suatu rotasi dan dilatasi sentral dengan titik pusat yang sama.

b) Similaritas berlawanan

Definisi II.B.2.4.

Similaritas berlawanan adalah similaritas yang mengubah arah.

Yang termasuk similaritas berlawanan, antara lain: refleksi, refleksi geser, dan refleksi dilatif yang merupakan hasilkali suatu refleksi dan suatu dilatasi sentral yang titik pusatnya terletak pada cermin.

C. GRUP

1. Operasi Biner

Sebelum membicarakan Grup dan Subgrup, terlebih dahulu kita akan menguraikan sedikit tentang operasi biner, definisi operasi biner.

Definisi II.C.1.1.

Diberikan suatu himpunan A. Suatu operasi biner "$\bullet$" pada himpunan A adalah suatu aturan yang mengawankan setiap a, b $\in$ A dengan tunggal anggota $a \bullet b = c$ dengan $c \in A$.

Karena definisi operasi biner dalam suatu himpunan mensyaratkan hasil operasinya juga berada dalam himpunan yang sama, maka kalau suatu himpunan dilengkapi dengan operasi biner, dengan sendirinya himpunan itu tertutup terhadap operasi yang bersangkutan.

Contoh:

1. Diketahui Z adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi penjumlahan dan perkalian bersifat tertutup dalam Z, artinya setiap kali kita mengambil dua anggota sebarang dalam Z maka hasil penjumlahan dan perkalian dua bilangan itu berada dalam Z.
2. Diketahui N_g adalah himpunan semua bilangan asli ganjil. Operasi perkalian bersifat tertutup dalam N_g yaitu perkalian dua anggota sebarang dalam N_g berada dalam N_g. Tetapi operasi penjumlahan tidak bersifat tertutup dalam N_g, artinya setiap dua anggota sebarang N_g hasil penjumlahannya tidak berada dalam N_g.

Untuk operasi penjumlahan dan perkalian, kita dapat menggunakan notasi yang umum yaitu $a + b$ dan $a \bullet b$ ($a \bullet b$ dapat disederhanakan menjadi ab).

Definisi II.C.1.2.

Diberikan suatu operasi biner "$\bullet$" pada himpunan A, maka:

(i) Operasi "$\bullet$" dikatakan bersifat komutatif jika dan hanya jika $a \bullet b = b \bullet a$ untuk semua $a, b \in A$.

(ii) Operasi "$\bullet$" dikatakan bersifat assosiatif jika dan hanya jika $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk semua $a, b, c \in A$.

(iii) Suatu anggota e dari A dikatakan elemen identitas terhadap operasi "$\bullet$" jika dan hanya jika $a \bullet e = e \bullet a = a$ untuk setiap $a \in A$.

2. Grup

Definisi II.C.2.1.

Suatu himpunan G yang tidak kosong, dan pada G telah didefinisikan operasi biner "$\bullet$". Maka $(G, \bullet)$ disebut grup jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) Jika $a, b, c \in G$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (sifat assosiatif).

(ii) Ada tepat suatu $e \in G$ sedemikian hingga $e \bullet a = a \bullet e = a$ untuk setiap anggota a dari G (keberadaan elemen identitas).

(iii) Jika $a \in G$, ada tepat suatu $x \in G$ sedemikian hingga $a \bullet x = x \bullet a = e$ (keberadaan elemen invers).

Untuk sifat (iii), x disebut invers dari a dan dinotasikan $x = a^{-1}$.

Teorema II.C.2.1.

Jika (G, •) grup maka berlaku bahwa, elemen identitas dari grup G adalah tunggal.

Bukti:

Andaikan elemen identitas dari G tidak tunggal.

Berarti ada e dan f anggota G dan $e \neq f$.

Karena e elemen identitas dari G dan f anggota G, maka:

$$f \bullet e = e \bullet f = f \quad \ldots \text{(i)}$$

Karena f elemen identitas dari G dan e anggota G, maka:

$$e \bullet f = f \bullet e = e \quad \ldots \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) didapat:

$$f \bullet e = e \bullet f = f$$

$$f \bullet e = e \bullet f = e$$

Karena G grup maka G tertutup terhadap operasi "•". Jadi $f = e$, kontradiksi dengan yang diketahui. Maka pengandaian harus diingkar. Jadi elemen identitas dari G adalah tunggal.

Teorema II.C.2.2.

Jika (G, •) grup maka berlaku bahwa invers dari tiap anggota dalam G adalah tunggal.

Bukti:

Andaikan invers dari suatu anggota dalam G tidak tunggal. Misalkan b dan d invers dari sebarang a anggota G dan $b \neq d$. Karena b invers dari a, maka:

$$a \bullet b = b \bullet a = e$$

Dan karena d invers dari a, maka:

$$a \bullet d = d \bullet a = e$$

Maka $b = b \bullet e$ (e elemen identitas dari G)

$= b \bullet (a \bullet d)$ (d invers dari a)

$= (b \bullet a) \bullet d$ (berlaku sifat assosiatif)

$= e \bullet d$ (dari definisi $b \bullet a = e$)

$= d$

Ternyata didapat $b = d$, kontradiksi dengan yang diketahui. Maka pengandaian harus diingkar. Jadi invers dari tiap anggota dalam G adalah tunggal.

Teorema II.C.2.3.

Dalam $(G, \bullet)$ suatu grup, berlaku: jika a, b, c $\in$ G sedemikian hingga $a \bullet b = a \bullet c$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri).

Bukti:

Ambil sebarang a, b, c $\in$ G sedemikian hingga $a \bullet b = a \bullet c$. Karena $a \in G$ dan $(G, \bullet)$ suatu grup maka $a^{-1} \in G$, sehingga:

$$a \bullet b = a \bullet c$$

$$a^{-1} \bullet (a \bullet b) = a^{-1} \bullet (a \bullet c)$$

$(a^{-1} \bullet a) \bullet b = (a^{-1} \bullet a) \bullet c$ (berlaku sifat assosiatif)

$$e \bullet b = e \bullet c$$

$$b = c$$

Jadi terbukti bahwa jika a, b, c $\in$ G dan $a \bullet b = a \bullet c$ maka $b = c$.

Teorema II.C.2.4.

$(G, \bullet)$ suatu grup, maka berlaku: jika a, b, c $\in$ G sedemikian hingga $b \bullet a = c \bullet a$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan).

Bukti:

Ambil sebarang a, b, c $\in$ G sedemikian hingga $b \bullet a = c \bullet a$. Karena $a \in G$ dan $(G, \bullet)$ grup maka $a^{-1} \in G$, sehingga:

$$b \bullet a = c \bullet a$$
$$(b \bullet a) \bullet a^{-1} = (c \bullet a) \bullet a^{-1}$$
$$b \bullet (a \bullet a^{-1}) = c \bullet (a \bullet a^{-1}).$$ (berlaku sifat assosiatif)
$$b \bullet e = c \bullet e$$
$$b = c$$

Jadi terbukti bahwa jika a, b, c $\in$ G dan $b \bullet a = c \bullet a$ maka $b = c$.

Teorema II.C.2.5.

$(G, \bullet)$ suatu grup, maka berlaku: jika a, b $\in$ G, ada tepat anggota tunggal x dari G sedemikian hingga $a \bullet x = b$ dan suatu anggota tunggal y dari G sedemikian hingga $y \bullet a = b$. Dalam kenyataannya, $x = a^{-1} \bullet b$ dan $y = b \bullet a^{-1}$.

Bukti:

(i) Ambil sebarang a, b $\in$ G. Karena a $\in$ G maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga:

$$a^{-1} \bullet a = e$$
$$a \bullet x = b$$
$$a^{-1} \bullet (a \bullet x) = a^{-1} \bullet b$$

$(a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b$ (berlaku sifat assosiatif)

$e \cdot x = a^{-1} \cdot b$

$x = a^{-1} \cdot b$

(ii) Ambil sebarang a, b $\in$ G. Maka terdapat $a^{-1} \in G$, sehingga:

$y \cdot a = b$

$(y \cdot a) \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$

$y \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$ (berlaku sifat assosiatif)

$y \cdot e = b \cdot a^{-1}$

$y = b \cdot a^{-1}$

Jadi dari (i) dan (ii) karena a^{-1} anggota tunggal di G dan hasil operasinya tunggal maka $x = a^{-1} \cdot b$ dan $y = b \cdot a^{-1}$ anggota tunggal di G dan merupakan penyelesaian tunggal dari $a \cdot x = b$ dan $y \cdot a = b$.

Teorema II.C.2.6.

(G, •) suatu grup, maka berlaku: jika a, b $\in$ G maka $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Bukti:

Ambil sebarang a, b $\in$ G maka a^{-1}, $b^{-1} \in$ G karena G grup.

$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}$

(berlaku sifat assosiatif)

$= a \cdot e \cdot a^{-1}$

$= a \cdot a^{-1}$

$= e$

Karena b^{-1}, $a^{-1} \in$ G maka $b^{-1} \cdot a^{-1} \in$ G dan $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = e$. Jadi untuk a, b $\in$ G maka $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ (menurut hukum kanselasi kiri).

Teorema II.C.2.7.

(G, $\bullet$) suatu grup. maka berlaku: jika $a \in G$ maka $(a^{-1})^{-1} = a$.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$.

$a \bullet a^{-1} = e$ ... (i)

Karena $a^{-1} \in G$ maka $(a^{-1})^{-1} \in G$

$(a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1} = e$ ...(ii)

Dari (i) dan (ii) didapat: $a \bullet a^{-1} = (a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

(hukum kanselasi kanan)

Jadi, jika $a \in G$ maka $(a^{-1})^{-1} = a$

Definisi II.C.2.2.

Jika dalam grup G dengan operasi "$\bullet$", $a \bullet b = b \bullet a$ untuk semua $a, b \in G$, G disebut Grup Abelian (atau grup komutatif).

3. **Subgrup**

Definisi II.C.3.1.

Jika (G, $\bullet$) merupakan grup, dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$. Maka (H, $\bullet$) disebut subgrup dari grup (G, $\bullet$) jika (H, $\bullet$) juga merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada G.

Notasi: H subgrup dari G ditulis $H \leq G$.

Teorema II.C.3.1.

a. K suatu himpunan bagian yang tidak kosong dari grup (G, $\bullet$). K adalah subgrup dari G jika dan hanya jika:

(i) $a, b \in K$, maka $a \bullet b \in K$

(ii) $a \in K$, maka $a^{-1} \in K$.

b. Jika K mempunyai anggota-anggota yang berhingga, maka (ii) implikasi dari (i).

Bukti:

a. (1) Diketahui bahwa K subgrup dari G maka menurut definisi, K merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada G sehingga keadaan (i) dan (ii) jelas dipenuhi.

(2) Diketahui keadaan (i) dan (ii), akan dibuktikan bahwa K subgrup dari G.

(i) Operasi biner "$\bullet$" bersifat tertutup terhadap K, dipenuhi oleh (i) yaitu jika $a, b \in K$ maka $a \bullet b \in K$.

(ii) Operasi biner "$\bullet$" bersifat assosiatif dalam K. Karena $a, b, c \in K$ dan $K \subseteq G$ maka $a, b, c \in G$. $(G, \bullet)$ grup maka berlaku sifat assosiatif sehingga dalam K juga berlaku sifat assosiatif.

(iii) K mempunyai elemen identitas yaitu e karena jika $a \in K$ maka menurut (ii) $a^{-1} \in K$ dan menurut (i) $a \bullet a^{-1} = e \in K$.

(iv) Setiap anggota dari K mempunyai invers, dipenuhi oleh (ii).

Dari (i) sampai (iv) diperoleh bahwa K subgrup dari G.

b. Untuk membuktikan b ini, kita membuktikan bahwa jika a, $b \in K$ dan $a \bullet b \in K$ maka $a^{-1} \in K$ untuk semua $a \in K$.

Diketahui K berhingga dan jika a, $b \in K$ maka $a \bullet b \in K$. Diambil sebarang $a \in K$ maka $a \bullet a = a^2 \in K$, karena $a^2 \in K$ maka $a^2 \bullet a = a^3 \in K$ dan seterusnya sehingga a, a^2, a^3, ... merupakan anggota-anggota K . $e = a^0 \in K$ sebab K subgrup. Karena K berhingga maka terdapat r, $s \in Z^+$. Sedemikian hingga $a^r = a^s$. Misalkan $0 < r < s$ maka $a^{r-r} = a^{s-r}$. Jadi $a^{s-r} = e$. Karena r, $s \in Z^+$ dan $s-r > 0$ maka $s-r-1 \geq 0$ sehingga $a^{s-r-1} \in K$.

$$a \bullet a^{s-r-1} = a^{1+s-r-1} = a^{s-r} = e$$

$$a^{s-r-1} \bullet a = a^{s-r-1+1} = a^{s-r} = e$$

Jadi $a^{s-r-1} = a^{-1} \in K$. Jadi terbukti bahwa untuk setiap $a \in K$ maka $a^{-1} \in K$.

Dalam suatu grup G, banyaknya anggota dalam grup G disebut order dari grup G. Jika banyaknya anggota berhingga atau ordernya berhingga, maka G disebut grup berhingga atau "finite group" dan jika banyaknya anggota tak hingga, maka G disebut grup tak hingga atau "infinite group". Dalam suatu grup G, dengan a anggota G, maka a dikatakan memiliki periode n bila dan hanya bila n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$ dengan e elemen identitas dari G.

4. Macam-macam Grup

Dalam bab ini akan diuraikan tentang grup permutasi, grup siklik dan grup dihedral. Pembicaraan pertama tentang Grup Permutasi yang meliputi permutasi, sikel-sikel dan teorema-teorema pada grup permutasi. Selanjutnya tentang Grup Siklik yang meliputi teorema-teorema penting tentang grup siklik. Uraian terakhir dalam subbab ini tentang Grup Dihedral yang meliputi Grup Simetri, dan teorema-teorema penting tentang Grup Dihedral.

a. Grup Permutasi

Definisi II.C.4.1.

Permutasi pada himpunan S adalah suatu pemetaan satu-satu dari himpunan S onto himpunan S (atau permutasi pada himpunan S adalah suatu pemetaan bijektif dari himpunan S ke himpunan S itu sendiri).

Contoh:

Diketahui himpunan $S = \{1, 2, 3\}$. Permutasi-permutasi pada himpunan S adalah

$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, artinya $\alpha(1) = 1$; $\alpha(2) = 2$; $\alpha(3) = 3$. $\alpha = i$, dengan i elemen identitas dalam A(S).

$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, artinya $\beta(1) = 2$; $\beta(2) = 1$; $\beta(3) = 3$.

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi ada 6 permutasi pada himpunan S. Kemudian untuk komposisi permutasi, untuk contoh di atas dapat disajikan sebagai berikut:

$$\beta \circ \theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ artinya}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\beta \circ \theta\ (1) = \beta\ (\theta\ (1))$

$= \beta\ (3)$

$= 3$, demikian seterusnya.

Teorema II.C.4.1.

A(S) adalah himpunan semua permutasi pada S, maka oleh suatu komposisi permutasi (hasil kali permutasi) A(S) merupakan grup.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa komposisi dua permutasi merupakan suatu permutasi, sudah terbukti bahwa komposisi dua pemetaan yang bijektif pasti pemetaan bijektif. Jadi diperoleh bahwa

komposisi dua permutasi merupakan suatu permutasi.

2. Sifat assosiatif sudah terbukti
3. Elemen identitas dari A(S) adalah pemetaan i : S —> S dengan i (x) = x, karena untuk semua x $\in$ S dan untuk semua $\beta \in$ A(S) maka $(\beta \circ i)$ (x) = $(i \circ \beta)$ (x) = β(x).
4. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\beta \in$ A(S) maka β mempunyai invers. Jika $\beta \in$ A(S) maka β suatu pemetaan bijektif dari S ke S. Karena setiap pemetaan bijektif pasti mempunyai invers dan andaikan β^{-1} suatu invers dari pemetaan β. Maka $\beta \circ \beta^{-1}$ = i dan $\beta^{-1} \circ \beta$ = i, dengan i elemen identitas dalam A(S).

   Jadi β^{-1} merupakan invers dari β.

Jadi terbukti bahwa (A(S), $\circ$) suatu grup dan dinyatakan dengan A(S) yang disebut grup simetrik pada S.

Definisi II.C.4.2.

Diberikan n suatu bilangan bulat positif. Grup dari semua permutasi pada suatu himpunan dengan n anggota disebut grup simetrik pada n lambang, dinotasikan dengan Sn.

Grup simetrik tersebut disebut juga grup permutasi penuh.

Contoh:

Diketahui S = {1,2, 3}, maka

$$A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Diperoleh bahwa o(A(S)) = 3! = 3.2.1 = 6.

Jika S = {1, 2, ..., n} dengan o(S) = n maka o(A(S)) = n • (n−1) • (n−2) ... 1 = n!

o(S) disebut orde (banyaknya anggota) dari S dan o(A(S)) disebut orde (banyaknya anggota) dari A(S).

Untuk suatu himpunan S = {1} maka P_1 = 1 yang merupakan permutasi dari 1 anggota (P_1). Jika S = {1, 2} maka $P_2 = 2P_1 = 2$ yang merupakan dua kali permutasi dari 1 anggota. Jika S = {1, 2, 3} seperti contoh di atas, maka $P_3 = 3P_2 = 6$ yang merupakan tiga kali permutasi 2 anggota (P_2). Demikian seterusnya sehingga untuk S = {1, 2, ..., n} maka P_n adalah n kali permutasi n − 1 anggota. Dari uraian di atas diperoleh:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \ldots P_n = 1 \cdot 2 \cdot P_1 \cdot 3 \cdot P_2 \ldots n \cdot P_{n-1}$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-2)(n-1) \cdot n$$

Jadi diperoleh bahwa jika S = {1, 2, 3, ..., n} maka o(A(S)) = n!

Sebelum membicarakan orbit dan sikel, akan lebih baik kalau kita membahas dahulu tentang relasi ekuivalensi berikut. Diberikan himpunan S dan grup permutasi A(S). Jika $\sigma \in A(S)$, a, b $\in$ S kemudian didefinisikan relasi " $\backsim$ " pada himpunan S sebagai berikut: $a \backsim b \Longleftrightarrow b = \sigma^n(a)$ untuk suatu $n \in Z$ dan $\sigma \in A(S)$. Akan ditunjukkan bahwa relasi " $\backsim$ " merupakan relasi ekuivalensi.

1. Refleksif

   Untuk semua $a \in S$, $a \backsim a$, karena $a = i\,(a)$

   $= \sigma^o(a)$

2. Simetrik

   Jika $a \backsim b$ maka $b = \sigma^n(a)$ untuk suatu $n \in Z$ dan $\sigma \in A(S)$. $b = \sigma^n(a)$ maka $a = \sigma^{-n}(b)$ dengan $-n \in Z$. Jadi $b \backsim a$.

3. Transitif

   $a \backsim b \Longrightarrow b = \sigma^n(a)$, $n \in Z$

   $b \backsim c \Longrightarrow c = \sigma^m(b)$, $m \in Z$

   Sehingga $c = \sigma^m(\sigma^n(a))$

   $= \sigma^{m+n}(a)$, $m + n \in Z$

   Jadi $a \backsim c$.

Jadi $\backsim$ merupakan relasi ekuivalensi sehingga dalam himpunan S ada partisi atau himpunan S terbagi atas kelas-kelas ekuivalensi.

Jika σ permutasi pada himpunan S, kelas-kelas ekuivalensi yang ditentukan oleh σ disebut orbit dari anggota-anggota S oleh σ. Semua anggota S pasti mempunyai orbit. Orbit dari suatu $s \in S$ oleh permutasi σ terdiri dari semua anggota $\sigma^i(s)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Jika S suatu himpunan berhingga dan σ suatu permutasi pada himpunan S, maka ada bilangan bulat positif terkecil l sedemikian hingga $\sigma^l(s) = s$. Jadi orbit dari $s \in S$ oleh σ terdiri dari anggota-anggota $s, \sigma(s), \sigma^2(s), \ldots, \sigma^{l-1}(s)$.

Seperti di atas, jika σ suatu permutasi pada himpunan S dan $s \in S$ maka suatu sikel adalah suatu himpunan terurut $(s, \sigma(s), \sigma^2(s), \ldots, \sigma^{l-1}(s))$. Pada suatu sikel urutan dari anggota-anggota dalam sikel diperhatikan. Panjang suatu sikel adalah banyaknya anggota dari sikel tersebut.

Contoh:

1. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dan permutasi

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Orbit dari 1: $\sigma(1) = 2$

$\sigma^2(1) = \sigma(2) = 1$

Orbit dari 1 sama dengan orbit dari 2 yaitu $\{1, 2\}$.

Orbit dari 3: $\sigma(3) = 4$

$\sigma^2(3) = \sigma(4) = 3$

Orbit dari 3 sama dengan orbit dari 4 yaitu $\{3, 4\}$.

Sikel-sikel dari σ adalah $(1, 2)$ dan $(3, 4)$.

Panjang sikel $(1, 2)$ sama dengan panjang sikel $(3, 4)$ yaitu 2.

2. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan

permutasi $\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Orbit dari 1 : $\theta(1) = 3$, $\theta^2(1) = \theta(3) = 6$,

$\theta^3(1) = \theta(6) = 1$

Orbit dari 1 = orbit dari 3 = orbit dari 6 yaitu $\{1, 3, 6\}$.

Orbit dari 2 : $\theta(2) = 8$, $\theta^2(2) = \theta(8) = 2$

Orbit dari 2 = orbit dari 8 yaitu $\{2, 8\}$

Orbit dari 4 : $\theta(4) = 7$, $\theta^2(4) = \theta(7) = 5$,

$\theta^3(4) = \theta(5) = 4$

Orbit dari 4 = orbit dari 5 = orbit dari 7 yaitu $\{4, 7, 5\}$.

Sehingga sikel-sikel dari θ adalah $(1, 3, 6)$, $(2, 8)$, $(4, 7, 5)$. Panjang sikel $(1, 3, 6)$ = panjang sikel $(4, 7, 5)$ yaitu 3. Panjang sikel $(2, 8)$ adalah 2.

3. Diberikan α : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$,

dapat dituliskan dalam bentuk sikel-sikel yaitu $\alpha = (1\ 4\ 6)\ (2\ 5\ 3\ 7)\ (8)$.

Bukti:

Suatu sikel (1 4 6) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Sikel (2 5 3 7) dapat dituliskan dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

Sikel (8) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Sehingga perkalian dari sikel-sikel tersebut dapat dituliskan dengan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa α = (1 4 6) (2 5 3 7) (8)

Teorema II.C.4.2.

Setiap permutasi adalah hasilkali dari sikel-sikelnya.

Bukti:

Diberikan θ adalah suatu permutasi. Sikel-sikel dari θ berbentuk $(s, \theta(s), \ldots, \theta^{1-1}(s))$ dengan s sebarang anggota dalam S. Dengan menggunakan hasilkali sikel-sikel yang telah didefinisikan di atas dan karena sikel-sikel dari θ saling asing, maka bayangan dari $s' \in S$ oleh θ adalah $\theta(s')$ yang sama dengan bayangan dari s' oleh hasilkali sikel-sikel dari θ misal β. Jadi θ dan β mempunyai pengaruh yang sama pada setiap anggota dari S, sehingga $\theta = \beta$. Jadi terbukti bahwa setiap permutasi adalah hasilkali dari sikel-sikelnya.

Dari contoh 3 di atas dapat ditunjukkan kebenaran teorema II.C.4.2. tersebut yaitu misal diambil anggotanya 2, maka $\alpha(2) = 5$ dan $\beta(2) = 5$ dengan β adalah hasilkali dari sikel-sikelnya yaitu $\beta = (1\ 4\ 6)\ (2\ 5\ 3\ 7)\ (8)$.

b. Grup Siklik

Dalam bagian ini kita akan menguraikan Grup Siklik, tetapi definisi grup siklik diawali oleh pengertian-pengertian sebagai berikut: jika G suatu himpunan dan terdiri dari lambang-lambang a^i dengan $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ dan ditentukan bahwa $a^o = a^n = e$, $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$ jika $i + j \leq n$ dan $a^i \cdot a^j = a^{i+j-n}$ jika $i + j > n$. Himpunan G dapat dituliskan sebagai berikut: $G = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n\}$. G tersebut membentuk suatu grup karena memenuhi sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas yaitu $a^o = a^n = e$ dan setiap anggota dari G mempunyai invers dalam G. G tersebut disebut grup siklik dengan order n.

Grup Siklik G yang dihasilkan oleh a dapat dituliskan sebagai $G = \langle a \rangle$.

Contoh:

1. Grup Siklik C_3 dengan generator a dapat dituliskan $C_3 = \{a, a^2, e\}$ dengan $a^3 = e$.

   Grup Siklik C_5 dengan generator b dapat $C_5 = \{b, b^2, b^3, b^4, e\}$ dengan $b^5 = e$.

   Jadi secara umum Grup Siklik C_n dengan generator d dapat dituliskan $C_n = \{d, d^2, d^3, \ldots, d^{n-1}, e\}$ dengan $d^n = e$ dan n disebut periode dari d.

2. Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 3 kecuali bilangan $\bar{0}$ $(Z_3 - \{0\})$. $(Z_3 - \{0\})$ suatu grup terhadap operasi perkalian bilangan bulat modulo 3. $(Z_3 - \{0\}) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Karena $(Z_3 - \{0\})$ berhingga maka perkalian bilangan bulat modulo 3 dapat disajikan dalam bentuk diagram Cayley berikut:

$\otimes_3$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

   Generator dari $(Z_3 - \{0\}, \otimes_3)$ adalah $\bar{2}$, karena

   $\bar{2}^1 = \bar{2}$

   $\bar{2}^2 = \bar{1}$

   Jadi $(Z_3 - \{0\}, \otimes_3) = \langle\bar{2}\rangle$

3. Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 4 kecuali $\bar{0}$, akan diselidiki apakah himpunan

bilangan bulat modulo 4 terhadap operasi bilangan bulat modulo 4 berupa suatu grup.

$\otimes_4$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Ternyata $(Z_4 - \{0\}, \otimes_4)$ bukan grup karena sifat tertutup tidak dipenuhi.

4. Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 5 kecuali $\overline{0}$, akan diselidiki apakah himpunan bilangan bulat modulo 5 terhadap operasi perkalian bilangan bulat modulo 5 berupa suatu grup. Ternyata tampak dari diagram Cayley berikut bahwa $(Z_5 - \{0\}, \otimes_5)$ suatu grup.

$\otimes_5$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Generator dari $(Z_5 - \{0\}, \otimes_5)$ adalah $\overline{2}$ atau $\overline{3}$, karena:

$\overline{2}^1 = \overline{2}$ $\qquad$ $\overline{3}^1 = \overline{3}$

$\overline{2}^2 = \overline{4}$ $\qquad$ $\overline{3}^2 = \overline{4}$

$\overline{2}^3 = \overline{3}$ $\qquad$ $\overline{3}^3 = \overline{2}$

$\overline{2}^4 = \overline{1}$ $\qquad$ $\overline{3}^4 = \overline{1}$

Jadi $(Z_5 - \{0\}, \otimes_5) = \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{3}\rangle$. Dari contoh 4 ini tampak bahwa generator dari suatu grup siklik tidak tunggal.

Dari beberapa contoh di atas menunjukkan bahwa hanya himpunan bilangan bulat modulo bilangan prima saja yang dapat membentuk suatu grup terhadap operasi perkalian modulo bilangan itu.

Jika operasinya penjumlahan, maka grup G dapat dinyatakan sebagai $G = \{ka \mid k \in Z\}$. Berikut ini adalah beberapa teorema penting tentang Grup Siklik.

Teorema II.C.4.3.

Setiap Grup Siklik pasti Grup Abelian.

Bukti:

Misalkan $(G, \bullet)$ grup siklik dengan generator a, maka $G = \{a^n \mid n \in Z\}$. Ambil sebarang $x, y \in G$ maka ada $n, m \in Z$ sedemikian hingga $x = a^n$, $y = a^m$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } x \bullet y &= a^n \bullet a^m \\ &= a^{n+m} \\ &= a^{m+n} \\ &= a^m \bullet a^n \\ &= y \bullet x \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(G, \bullet)$ Grup Abelian sebab untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x \bullet y = y \bullet x$.

Teorema II.C.4.4.

Subgrup dari grup siklik pasti siklik.

Bukti:

Misal $(G, \bullet)$ grup siklik dengan generator a dan H subgrup dari G. Ada dua kemungkinan anggota dari himpunan H.

Kemungkinan:

1. Jika $H = \{e\}$ maka $(H, \bullet)$ Grup Siklik dengan generator e yaitu $H = \langle e \rangle$. Grup yang hanya mempunyai satu anggota disebut "singleton group".

2. Jika $H \neq \{e\}$, maka ada $a^n \in H$ untuk suatu $n \in Z$. Andaikan m adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^m \in H$. Akan ditunjukkan bahwa $H = \langle a^m \rangle$.

   Diambil sebarang $x \in H$, maka $x \in G$. Sehingga terdapat $k \in Z$ sedemikian hingga $x = a^k$. $k \in Z$ dan $m \in Z$ maka terdapat $r, s \in Z$.

   $k = mr + s$, $0 \le s < m$

   $x = a^k = a^{mr+s} = a^{mr} \bullet a^s$

   $x = (a^m)^r \bullet a^s$

   $a^k = (a^m)^r \bullet a^s$ maka $a^s = (a^{-mr}) \bullet a^k$

   $a^s = (a^{-mr}) \bullet a^k$

   $= (a^m)^{-r} \bullet a^k$

   $(a^m)^{-r}$, $a^k \in H$ jadi $a^s \in H$, padahal $s < m$, terjadi kontradiksi dengan pengandaian jadi $s = 0$.

   Sehingga $x = a^{mr} \bullet a^0$

   $= a^{mr}$

   $= (a^m)^r$

   Jadi $x = (a^m)^r$, $r \in Z$.

Jadi terbukti bahwa H adalah subgrup siklik dengan generator a^m atau $H = \langle a^m \rangle$.

c. Grup Dihedral

Sebelum membicarakan grup dihedral, terlebih dahulu akan diuraikan tentang operasi simetri dan grup simetri.

Definisi II.C.4.3.

Operasi simetri suatu bangun adalah isometri yang memetakan bangun itu ke dirinya sendiri sedemikian, hingga bangun itu tidak berubah dan hanya terjadi permutasi dari bagian-bagiannya.

Yang akan kita bicarakan selanjutnya adalah operasi simetri pada suatu bangun dan pada suatu segi-n beraturan. Suatu segi-n beraturan mempunyai beberapa operasi simetri.

Himpunan operasi simetri - operasi simetri segi-n beraturan membentuk suatu grup dan disebut grup simetri atau grup operasi simetri suatu segi-n beraturan.

Definisi II.C.4.4.

Suatu grup dihedral D_n adalah grup yang dihasilkan oleh dua generator yaitu a dan b dengan hubungan $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba = a^{n-1}b$ atau $ba^{n-1} = ab$, dengan e adalah elemen identitas.

Banyaknya anggota dari grup dihedral D_n adalah 2n yaitu $D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$.

Teorema II.C.4.5.

Suatu grup yang dihasilkan oleh dua generator yaitu a dan b yang masing-masing mempunyai periode dua adalah dihedral.

Jika ab mempunyai periode n, maka grup dihedral yang terjadi adalah D_n; jika ab mempunyai periode tak hingga, maka grup dihedral yang terjadi adalah D_∞.

Bukti:

Diketahui $a^2 = e$ dan $b^2 = e$. Dimisalkan bahwa ab mempunyai periode n, akan ditunjukkan bahwa grup dihedral yang terjadi adalah D_n.

Misalkan $(ab)^n = e$

$ab\ (ab)^{n-1} = e$

$a.ab\ (ab)^{n-1} = a.e$

$a^2.b\ (ab)^{n-1} = a$

$e.b\ (ab)^{n-1} = a$

$b\ (ab)^{n-1} = a.e$

$b\ (ab)^{n-1} = a.b^2$

$b\ (ab)^{n-1} = (ab).b$

Misalkan $(ab) = r$

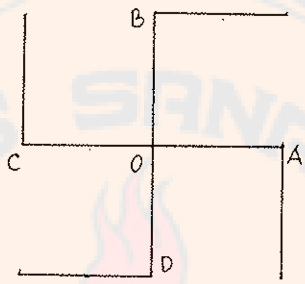
Maka $b\ (ab)^{n-1} = (ab)\bullet b$

$b\bullet r^{n-1} = r\bullet b$ dengan $b^2 = e$ dan $r^n = e$

Jadi terbukti bahwa grup dihedral yang terjadi adalah D_n.

Untuk memperjelas pengertian di atas, akan diberikan beberapa bangun dan segi-n beraturan berikut:

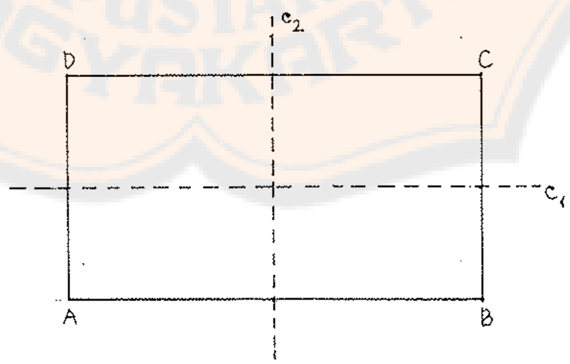
1.



Gb.26. Swastika

Suatu swastika mempunyai simetri putar. Himpunan operasi simetri dari swastika G = {I, R, R^2, R^3} dengan R = R (0, 90°) dan disebut grup simetri swastika. Grup simetri swastika disebut grup siklik dengan generator R.

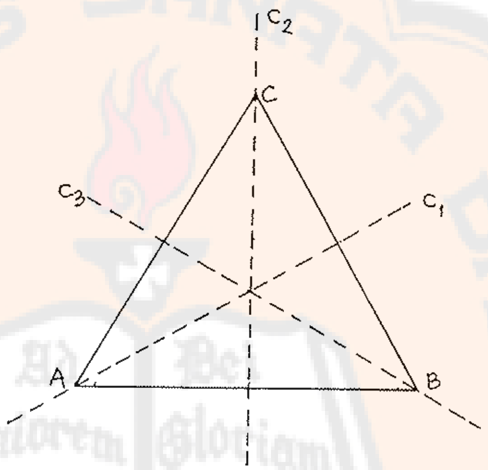
2.



Gb.27. Persegi panjang dengan sumbu-sumbu simetri c_1 dan c_2

Suatu persegi panjang mempunyai dua cermin. Himpunan operasi simetri dari persegi panjang $G = \{I, M_{c1}, M_{c2}, H_o = R\ (0, 180°)\}$ dan disebut grup simetri persegi panjang. Grup simetri persegi panjang disebut grup dihedral D_2 pada persegi panjang.

3.

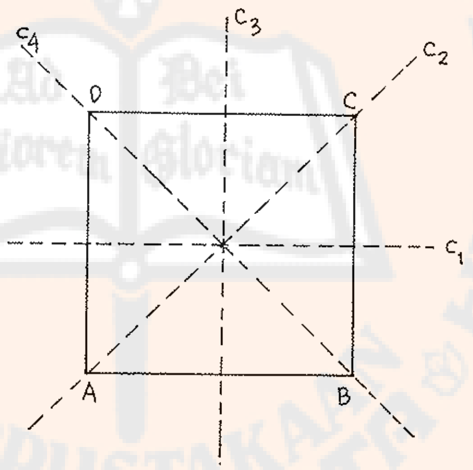


Gb.28. Segitiga samasisi dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2 dan c_3

Suatu segitiga samasisi mempunyai tiga cermin. Sudut antara dua cermin berurutan adalah $\frac{180°}{3}$. Himpunan operasi simetri dari segitiga samasisi $G = \{I, R, R^2, M_{c1}, M_{c2}, M_{c3}\}$ dengan $R = R\left[0, \frac{360°}{3}\right]$. Kemudian setelah

dijabarkan diperoleh: $M_{c1}R = M_{c3} = R^2M_{c1}$ dan $M_{c1}R^2 = M_{c2} = RM_{c1}$. Himpunan operasi simetri dari segitiga samasisi tersebut membentuk grup dihedral, karena memenuhi sifat-sifat grup dihedral yaitu $R^3 = I$, ${M_{c1}}^2 = I$ dan $M_{c1}R = R^2M_{c1}$ atau $M_{c1}R^2 = RM_{c1}$. Grup dihedral yang terjadi pada segitiga samasisi tersebut adalah D_3 karena ada 3 cermin pada segitiga samasisi dan banyaknya anggota dari D_3 ada 6. D_3 dapat dinyatakan juga sebagai $D_3 = \{I, R, R^2, M_{c1}, RM_{c1}, R^2M_{c1}\}$. D_3 mempunyai subgrup siklik $C_3 = \{I, R, R^2\}$ dengan banyaknya anggota 3.

4.



Gb.29. Persegi dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3 dan c_4

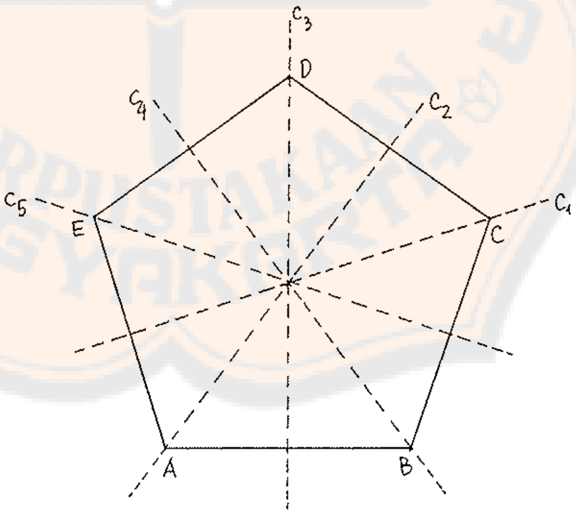
Suatu persegi mempunyai empat cermin. Sudut antara dua cermin berurutan $\dfrac{180°}{4}$.

Himpunan operasi simetri dari persegi

$G = \{I, R, R^2, R^3, M_{c1}, M_{c2}, M_{c3}, M_{c4}\}$ dengan

$R = R\left[0, \dfrac{360°}{4}\right]$. Setelah dijabarkan diperoleh $M_{c1}R^3 = M_{c2} = RM_{c1}$, $M_{c1}R^2 = M_{c3} = R^2M_{c1}$, dan $M_{c1}R = M_{c4} = R^3M_{c1}$. Himpunan operasi simetri dari persegi membentuk grup dihedral, karena memenuhi sifat-sifat grup dihedral yaitu $R^4 = I$, ${M_{c1}}^2 = I$ dan $M_{c1}R^3 = RM_{c1}$, atau $M_{c1}R = R^3M_{c1}$. Grup dihedral pada persegi adalah D_4 karena ada empat cermin pada persegi tersebut dan banyaknya anggota dari D_4 adalah 8. D_4 dapat juga dinyatakan dengan $D_4 = \{I, R, R^2, R^3, M_{c1}, RM_{c1}, R^2M_{c1}, R^3M_{c1}\}$. D_4 mempunyai subgrup siklik $C_4 = (I, R, R^2, R^3)$ dan banyaknya anggota dari C_4 adalah 4.

5.

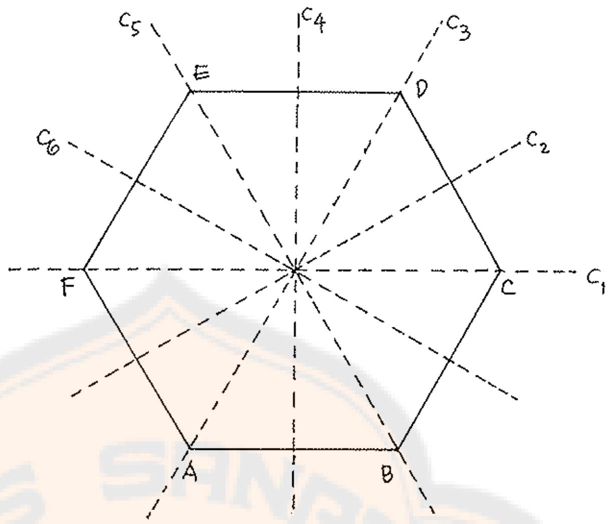


Gb.30. Segilima beraturan dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5

Pada segilima beraturan ada 5 cermin. Sudut antara dua cermin berurutan $\frac{180°}{5}$.

Himpunan operasi simetrinya G = {I, R, R^2, R^3, R^4, M_{c1}, M_{c2}, M_{c3}, M_{c4}, M_{c5}} dengan $R = R\left[0, \frac{360°}{5}\right]$. Dari penjabaran diperoleh

bahwa: $M_{c1}R^4 = M_{c2} = RM_{c1}$, $M_{c1}R^3 = M_{c3} = R^2M_{c1}$, $M_{c1}R^2 = M_{c4} = R^3M_{c1}$, $M_{c1}R = M_{c5} = R^4M_{c1}$. Himpunan operasi simetri dari segilima beraturan membentuk grup dihedral, karena memenuhi sifat-sifat grup dihedral yaitu $R^5 = I$, ${M_{c1}}^2 = I$ dan $M_{c1}R^4 = RM_{c1}$, atau $M_{c1}R = R^4M_{c1}$. Grup dihedral pada segilima beraturan adalah D_5 karena ada lima cermin pada segilima beraturan dan banyaknya anggota dari D_5 ada 10. D_5 dapat juga dinyatakan dengan D_5 = {I, R, R^2, R^3, R^4, M_{c1}, RM_{c1}, R^2M_{c1}, R^3M_{c1}, R^4M_{c1}}. Subgrup siklik dari D_5 adalah C_5 = {I, R, R^2, R^3, R^4) dengan banyaknya anggota 5.

6. 

Gb.31. Segienam beraturan dengan sumbu-sumbu simetri c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 dan c_6

Pada segienam beraturan ada 6 cermin. Sudut antara dua cermin berurutan $\dfrac{180°}{6}$. Himpunan operasi simetrinya $G = \{I, R, R^2, R^3, R^4, R^5, M_{c1}, M_{c2}, M_{c3}, M_{c4}, M_{c5}, M_{c6}\}$ dengan $R = R\left[0, \dfrac{360°}{6}\right]$. Dari penjabaran diperoleh:

$M_{c1}R^5 = M_{c2} = RM_{c1}$, $M_{c1}R^4 = M_{c3} = R^2M_{c1}$, $M_{c1}R^3 = M_{c4} = R^3M_{c1}$, $M_{c1}R^2 = M_{c5} = R^4M_{c1}$, $M_{c1}R = M_{c6} = R^5M_{c1}$. Himpunan operasi simetri dari segienam beraturan membentuk grup dihedral, karena memenuhi sifat-sifat grup dihedral yaitu $R^6 = I$, ${M_{c1}}^2 = I$ dan $M_{c1}R^5 = RM_{c1}$, atau $M_{c1}R = R^5M_{c1}$. Grup dihedral pada segienam beraturan adalah D_6 karena ada 6 cermin pada segienam beraturan dan banyaknya anggota dari

D_6 ada 12. D_6 dapat juga dinyatakan dengan $D_6 = \{I, R, R^2, R^3, R^4, R^5, M_{c1}, RM_{c1}, R^2M_{c1}, R^3M_{c1}, R^4M_{c1}, R^5M_{c1}\}$. Subgrup siklik dari D_6 adalah $C_6 = \{I, R, R^2, R^3, R^4, R^5\}$ dengan banyaknya anggota 6.

Suatu segi-n beraturan mempunyai n cermin, sudut antara dua cermin berurutan $\dfrac{180°}{n}$.

Himpunan operasi simetri segi-n beraturan $G = \{I, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, M_{c1}, M_{c2}, \ldots, M_{cn}\}$ dengan $R = R\left[0, \dfrac{360°}{n}\right]$. Himpunan operasi simetri pada segi-n beraturan membentuk grup dihedral karena memenuhi sifat-sifat grup dihedral yaitu $R^n = I$, ${M_{c1}}^2 = I$, $M_{c1}R = R^{n-1}M_{c1}$ atau $M_{c1}R^{n-1} = RM_{c1}$ dengan I transformasi identitas. Grup dihedral yang terjadi pada segi-n beraturan adalah D_n karena ada n cermin pada segi-n beraturan. Banyaknya anggota dari D_n adalah 2n dan dapat dinyatakan juga sebagai $D_n = \{I, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, M_{c1}, RM_{c1}, R^2M_{c1}, \ldots, R^{n-1}M_{c1}\}$. D_n mempunyai subgrup siklik $C_n = \{I, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\}$. Banyaknya anggota dari C_n adalah n.

Dari uraian di atas telah kita peroleh grup pada bangun-bangun yaitu grup simetri swastika, grup simetri persegi panjang dan grup dihedral pada segi-n beraturan. Selanjutnya akan kita selidiki grup pada irisan kerucut.

BAB III

GRUP PADA BEBERAPA IRISAN KERUCUT

A. PERIODE SUATU FUNGSI

Kita akan mengawali pembicaraan grup pada beberapa irisan kerucut ini dengan terlebih dahulu mengulang definisi periode.

Definisi III.A.1.

Diberikan suatu grup G dan a anggota dari G. Maka a dikatakan memiliki periode n bila dan hanya bila n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$ dengan e adalah elemen identitas dari grup G.

Yang sudah sering kita bicarakan adalah suatu grup dengan anggota berupa bilangan, permutasi, rotasi dengan titik pusat yang sama, translasi. Seandainya anggota dari grup berupa fungsi-fungsi (transformasi-transformasi), berikut ini merupakan definisi dari periode suatu fungsi.

Definisi III.A.2.

Diberikan suatu grup G dengan anggota-anggotanya berupa fungsi-fungsi dari t. Fungsi f(t) anggota G dikatakan mempunyai periode n bila dan hanya bila n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $f^n (t) = t$.

Contoh:

1. Diberikan suatu fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$. Kita akan mencari periode dari fungsi f(t).

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

$$f^2(t) = f\,(f(t))$$

$$= f\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{t}}$$

$$= t$$

Jadi fungsi f(t) mempunyai periode 2.

2. Diberikan suatu fungsi $g(t) = 1-t$. Kita akan mencari periode dari fungsi g(t).

$$g(t) = 1 - t$$

$$g^2(t) = g\,(g(t))$$

$$= g\,(1-t)$$

$$= 1 - (1-t)$$

$$= t$$

Jadi periode dari fungsi g(t) adalah 2.

3. Diberikan fungsi $h(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$. Kita akan mencari periode dari fungsi h(t).

$$h(t) = -\frac{1}{t}$$

$$h^2(t) = h\,(h(t))$$

$$= h\left[-\frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{-1}{\frac{-1}{t}}$$

$$= t$$

Jadi periode fungsi h(t) adalah 2.

4. Diberikan fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = 1 - t$.

Kita akan mencari periode dari fungsi fg(t).

$$fg(t) = f\,(g(t))$$

$$= f\,(1-t)$$

$$= \frac{1}{1-t}$$

$$(fg)^2(t) = fg\,(fg(t))$$

$$= fg\left[\frac{1}{1-t}\right]$$, setelah diuraikan diperoleh

$$(fg)^2(t) = \frac{1-t}{-t}$$

$$(fg)^3(t) = fg\,((fg)^2(t))$$

$$= fg\left[\frac{1-t}{-t}\right]$$, setelah diuraikan diperoleh

$$(fg)^3(t) = t\ .$$

Jadi periode dari fungsi fg(t) adalah 3.

5. Diberikan fungsi $h(t) = \dfrac{-1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan fungsi $g(t) =$ $1-t$. Kita akan mencari periode dari fungsi $hg(t)$.

$$\begin{aligned} hg(t) &= h\,(g(t)) \\ &= h\,(1-t) \\ &= \frac{-1}{1-t} \end{aligned}$$

$$(hg)^2(t) = hg\,(hg(t))$$

$$= hg\left[\frac{-1}{1-t}\right]$$, setelah diuraikan diperoleh

$$(hg)^2(t) = \frac{-1+t}{2-t}, \quad (hg)^3(t) = \frac{-2+t}{3-2t},$$

$$(hg)^4(t) = \frac{-3+2t}{5-3t}, \quad (hg)^5\,(t) = \frac{-5+3t}{8-5t}$$

Setelah dijabarkan diperoleh bahwa periode dari fungsi $hg(t)$ adalah tak hingga.

Dari contoh-contoh di atas tampak bahwa ada suatu fungsi yang mempunyai periode berhingga dan ada suatu fungsi yang mempunyai periode tak hingga. Pengertian periode suatu fungsi di atas serta contoh-contoh tersebut, akan banyak digunakan dalam pembicaraan tentang grup pada parabola dan hiperbola.

B. GRUP PADA PARABOLA

Sekarang kita akan membicarakan tentang grup pada parabola. Pembicaraan kita tentang grup pada parabola ini tidak lepas dari pengertian-pengertian sebelumnya khususnya tentang periode suatu fungsi, grup dihedral dan teorema pada grup dihedral.

Dalam grup pada parabola ini kita menggunakan persamaan parameter dari parabola. Langkah-langkah menentukan grup pada parabola ini sebagai berikut: diberikan suatu persamaan parabola dengan persamaan parameternya tertentu dan diberikan fungsi-fungsi dari t misalnya fungsi f(t) dan g(t). Jika periode dari fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah n maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_n dengan banyaknya anggota 2n yaitu $D_n = \{I, f, g, fg, (fg)^2, \ldots, (fg)^{n-1}, g(fg), g(fg)^2, \ldots, g(fg)^{n-2}\}$. Anggota-anggota dari grup dihedral D_n tidak harus berbentuk fungsi-fungsi seperti di atas, tetapi dapat berupa fungsi yang lain tetapi ekuivalen dengan fungsi-fungsi itu. Jika periode dari fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah tak hingga maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terbentuk grup dihedral D_∞ .

Fungsi-fungsi f(t) yang digunakan dalam grup pada parabola ini adalah $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, $-t$.

Fungsi-fungsi tersebut semuanya berperiode 2. Dalam contoh-contoh selanjutnya fungsi-fungsi tersebut dapat sebagai fungsi f(t) maupun fungsi g(t).

Dengan mengetahui keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik ke titik lain pada parabola, kita dapat mengetahui bentuk dari grup dihedral D_n dan D_∞ pada parabola. Untuk dapat memberikan gambaran konkrit, sebelum diberikan contoh akan diberikan persamaan umum parabola berikut: Diberikan suatu persamaan parabola $y^2 = 4ax$ dengan fokus F(a, 0), persamaan parameter parabolanya:

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at, \text{ dengan } t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan dua titik yaitu $T(at^2, 2at)$ dan $T'(at'^2, 2at')$ dengan $f(t) : T(at^2, 2at) \longrightarrow T'(at'^2, 2at')$ dan $f(t) = t'$. Persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut adalah:

$$\frac{y - 2at'}{2at-2at'} = \frac{x - at'^2}{at^2 - at'^2}$$, setelah diuraikan diperoleh persamaan:

$$2x - (t + t')\, y + 2att' = 0 \quad \ldots (1)$$

Dari persamaan (1), kita dapat menentukan t' yang merupakan fungsi dari t supaya persamaan (1) mempunyai keistimewaan-keistimewaan tertentu. Keistimewaan-keistimewaan itu antara lain:

1. Jika $t' = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1) akan menjadi :

$$2x - \left[t - \frac{1}{t} \right] y + 2a.t \left[-\frac{1}{t} \right] = 0$$

$$2x - \left[\frac{t^2 - 1}{t} \right] y - 2a = 0; \text{ untuk setiap}$$

t, jika $y = 0$ maka $x = a$.

Jadi jika $t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (1) akan melalui fokus $(a, 0)$.

2. Jika $t' = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1) akan menjadi :

$$2x - \left[t + \frac{1}{t} \right] y + 2at \left[\frac{1}{t} \right] = 0$$

$$2x - \left[\frac{t^2 + 1}{t} \right] y + 2a = 0 \text{ ; untuk setiap}$$

t, jika $y = 0$ maka $x = -a$.

Jadi jika $t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (1) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik $(-a, 0)$.

3. Jika $t' = \frac{1}{at - 1}$ $(at - 1 \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1) akan menjadi:

$$2x - \left[t + \frac{t}{at - 1} \right] y + 2at \cdot \frac{t}{at - 1} = 0$$

$$2x - \left[\frac{at^2}{at - 1} \right] y + \frac{2\ at^2}{at - 1} = 0;$$ untuk setiap

t, jika $x = 0$ maka $y = 2$.

Jadi jika $t' = \dfrac{t}{at - 1}$ maka garis dengan persamaan (1) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

4. Jika $t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (1) menjadi:

   $$2x - (t + 1 - t)\ y + 2at \cdot (1-t) = 0$$

   $2x - y + 2a\ (t - t^2) = 0$; untuk setiap t, garis ini mempunyai gradien 2.

   Jadi jika $t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (1) akan mempunyai gradien 2.

5. Jika $t' = -t$ maka garis dengan persamaan (1) menjadi:

   $$2x - (t - t)\ y + 2at \cdot (-t) = 0$$

   $$2x - 2\ at^2 = 0$$

   $x - at^2 = 0$; untuk setiap t, garis ini sejajar sumbu y.

   Jadi jika $t' = -t$ maka garis dengan persamaan (1) akan sejajar sumbu y.

Untuk keistimewaan nomor 3 dan 4 di atas, kita dapat juga menentukan titik potong (1) dengan sumbu y selain titik (0, 2) dan kita dapat juga menentukan gradien (1) selain 2.

Dengan beberapa contoh berikut, keistimewaan-keistimewaan di atas akan tampak jelas.

Contoh:

1. Diberikan suatu persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2 adalah $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -t$

Akan kita selidiki grup dihedral yang terjadi pada parabola tersebut, sehingga kita mencari periode fungsi $fg(t)$.

$fg(t) = f(g(t))$.

$$= f(-t) = \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t} = gf(t)$$

Dalam contoh 3 halaman 88 telah diperoleh bahwa periode $fg(t)$ adalah 2. Karena periode fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah 2 dan periode fungsi $fg(t)$ juga 2 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_2. Anggota-anggota dari D_2 adalah $D_2 = \{I, f, g, fg\}$. Kemudian akan kita selidiki keistimewaan fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik ke titik lain pada parabola kecuali titik puncak parabola karena $t \neq 0$. Demikian juga untuk contoh-contoh selanjutnya dengan fungsi seperti di atas pada parabola.

Dalam persamaan parabola dan persamaan parameter parabola di atas diperoleh a = 1. Sehingga jika diberikan 2 titik yaitu $T(t^2, 2t)$ dan $T'(t'^2, 2t')$, dari persamaan (1) diperoleh persamaan garis yang melalui kedua titik itu adalah:

$$2x - (t + t')\,y + 2tt' = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka menurut keterangan di atas diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0).

Jika $g(t) : T(t^2, 2t) \longrightarrow T'(t'^2, 2t')$ dan $g(t) = t' = -t$ maka persamaan (2) menjadi:

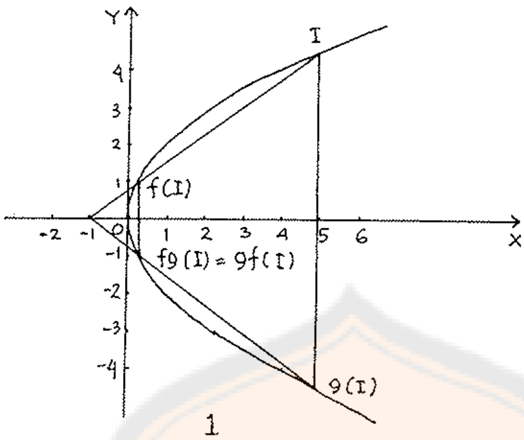
$$2x - (t - t)\,y - 2.t.t = 0$$

$$2\,(x - t^2) = 0$$

$$x - t^2 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Artinya untuk sebarang nilai t, oleh fungsi g(t) setiap titik akan ditransformasikan ke titik lain pada parabola dan garis penghubung kedua titik tersebut sejajar dengan sumbu y.

Untuk sebarang nilai t dan dengan keterangan-keterangan di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.32. $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = -t$

Contoh:

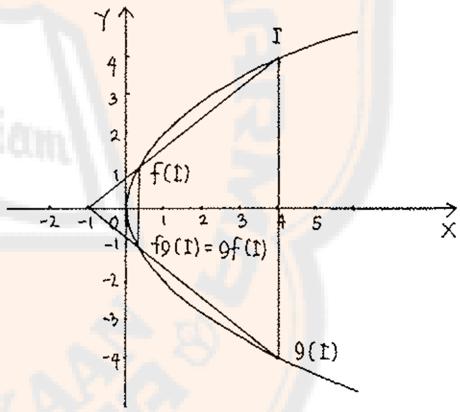
Diberikan nilai t tertentu $t = 2$, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_2 adalah:

$(4, 4) \xrightarrow{I} (4, 4)$

$(4, 4) \xrightarrow{f} \left[\dfrac{1}{4} , 1 \right]$

$(4, 4) \xrightarrow{g} (4, -4)$

$(4, 4) \xrightarrow{fg} \left[\dfrac{1}{4} , -1 \right]$



Gb.33. $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = -t$
untuk $t = 2$

2. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2 adalah

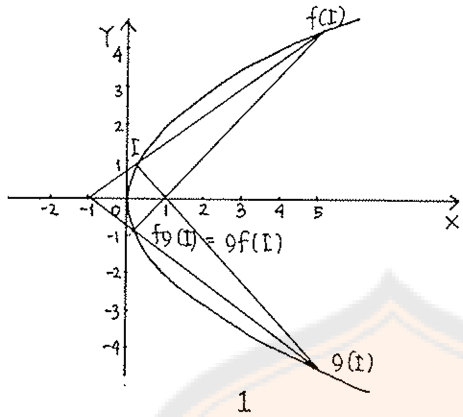
$$f(t) = \frac{1}{t} \; (t \neq 0), \text{ dan } g(t) = -\frac{1}{t} \; (t \neq 0)$$

$$fg(t) = \frac{1}{-\frac{1}{t}} = -t = gf(t)$$

Dalam contoh 1 di atas diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah 2. Karena periode fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 2 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_2. Anggota-anggota $D_2 = \{I, f, g, fg\}$. Kemudian akan kita selidiki keistimewaan-keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik ke titik lain pada parabola.

Jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka menurut keterangan di atas diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0). Jika $g(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka menurut keterangan di atas diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui fokus (1, 0).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.34. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$

Contoh:

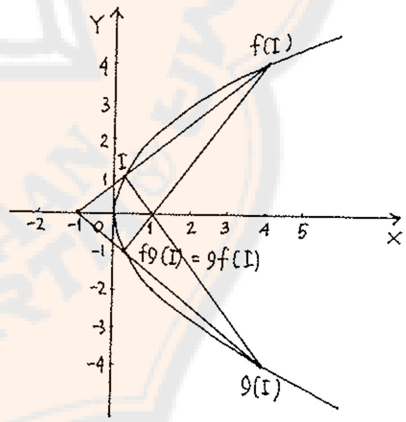
Diberikan nilai t tertentu $t = \frac{1}{2}$ maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_2 untuk $t = \frac{1}{2}$ adalah:

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] \xrightarrow{I} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] \xrightarrow{f} (4, 4)$$

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] \xrightarrow{g} (4, -4)$$

$$\left[\frac{1}{4}, 4\right] \xrightarrow{fg} \left[\frac{1}{4}, -1\right]$$



Gb.35. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ untuk $t = ½$

3. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \text{ t parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

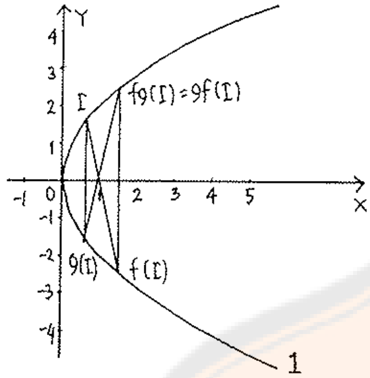
$f(t) = -\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -t$

$$fg(t) = \frac{1}{t} = gf(t)$$

Dalam contoh 1 di atas juga telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah 2. Karena periode fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 2 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_2. Anggota-anggota $D_2 = \{I, f, g, fg\}$. Kemudian akan kita selidiki fungsi-fungsi f(t) dan g(t).

Jika $f(t) = t' = -\dfrac{1}{t}$ maka menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui fokus (1, 0). Jika $g(t) = t' = -t$ maka menurut contoh 1 diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan sejajar dengan sumbu y.

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.36. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = -t$

Contoh:

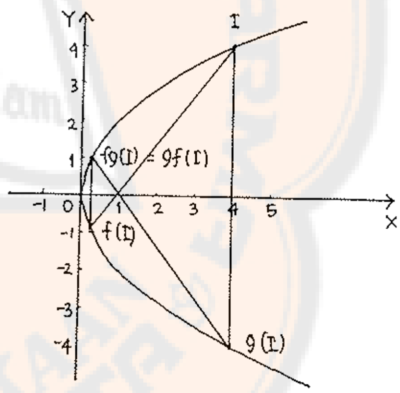
Diberikan nilai t tertentu $t = 2$, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_2 untuk $t = 2$ adalah:

$(4, 4) \xrightarrow{I} (4, 4)$

$(4, 4) \xrightarrow{f} \left[\frac{1}{4}, -1\right]$

$(4, 4) \xrightarrow{g} (4, -4)$

$(4, 4) \xrightarrow{fg} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$



Gb.37. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = -t$, untuk $t = 2$

4. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \text{ t parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, dan $g(t) = 1 - t$.

$$fg(t) = \frac{1}{1 - t} \quad \text{sehingga}$$

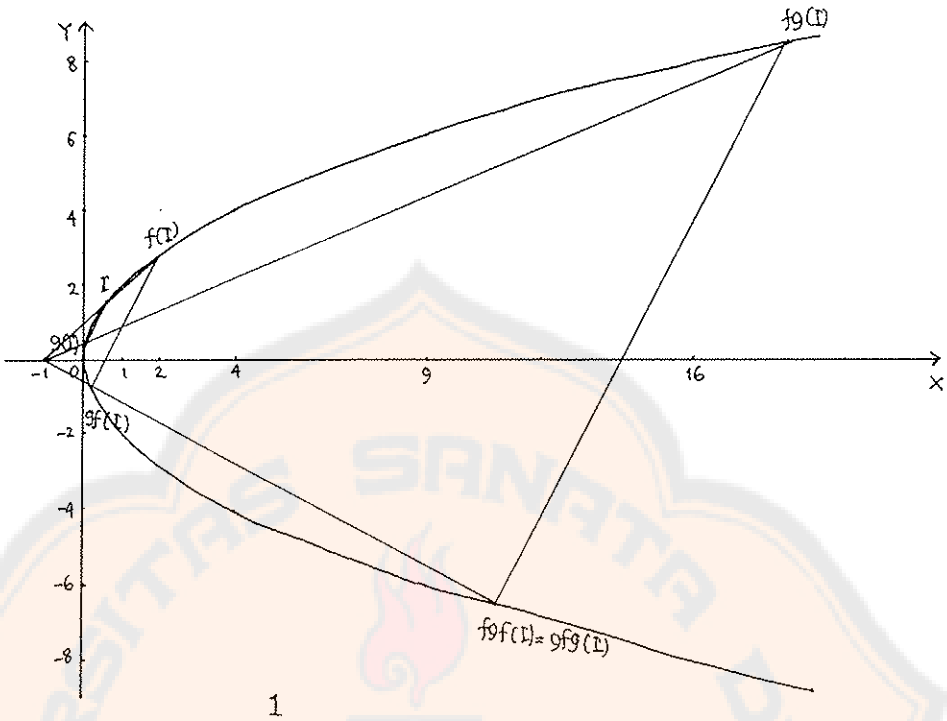
$$fgf(t) = \frac{t}{t - 1} = gfg(t)$$

$$(fg)^2\,(t) = \frac{1 - t}{-t} = gf(t)$$

$$(fg)^3\,(t) = t$$

Karena periode fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah 2 dan periode fungsi $fg(t)$ adalah 3 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, f(gf)\}$. Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0). Dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan mempunyai gradien 2.

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.38. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

Contoh:

Diberikan nilai t tertentu $t = 2$, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$(4, 4) \xrightarrow{I} (4, 4)$

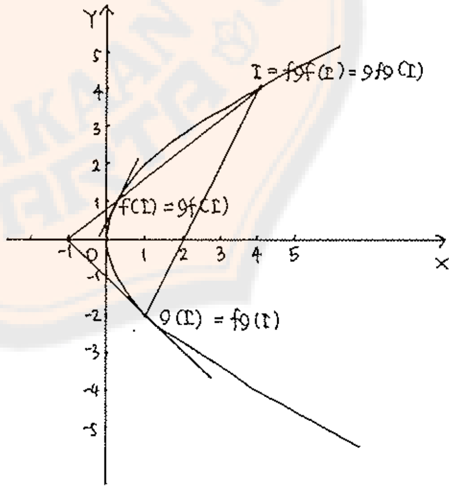
$(4, 4) \xrightarrow{f} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

$(4, 4) \xrightarrow{g} (1, -2)$

$(4, 4) \xrightarrow{fg} (1, -2)$

$(4, 4) \xrightarrow{gf} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

$(4, 4) \xrightarrow{fgf} (4, 4)$



Gb.39. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$
untuk $t = 2$

Contoh di atas merupakan contoh khusus karena pada parabola tersebut seharusnya ada 6 titik oleh grup dihedral D_3, tetapi hanya ada 3 titik karena 3 titik yang lain berimpit dengan 3 titik itu. Titik

$\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ merupakan titik singgung pada parabola

dengan gradien sama dengan gradien garis dalam persamaan keterangan 4 (hal. 93). Persamaan garis singgung pada parabola di titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ adalah

$y = 2x + \frac{1}{2}$.

Demikian juga untuk titik (1, -2), persamaan garis singgung parabola di titik itu adalah $y = -x - 1$ yang sama dengan persamaan garis yang melalui titik (-1, 0) dan titik (1, -2). Jadi titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ oleh g(t) ditransformasikan ke titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ dan titik (1, -2) oleh f(t) ditransformasikan ke titik (1, -2).

Untuk nilai t yang lain yaitu $t = \frac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{I} \left[\frac{9}{4}, 3\right]$$

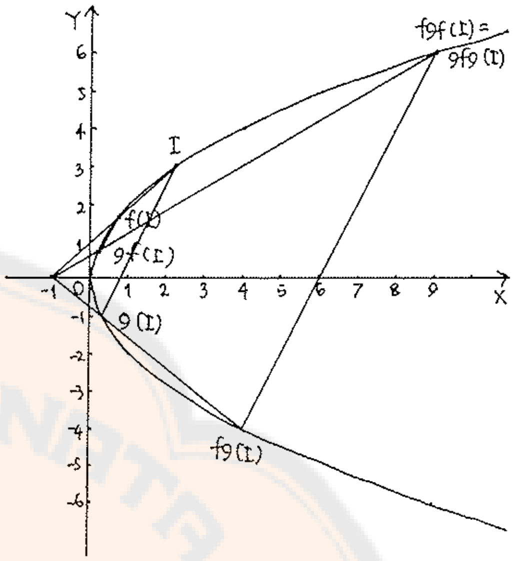
$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{g} \left[\frac{1}{4}, -1\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fg} \left[4, -4\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{gf} \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fgf} \left[9, 6\right]$$



Gb.40. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

untuk $t = \frac{3}{2}$

5. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = 1 - t$ dan $g(t) = \frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$.

$$fg(t) = \frac{-1}{t-1}, \text{ dan } fgf(t) = \frac{1}{t} = gfg(t)$$

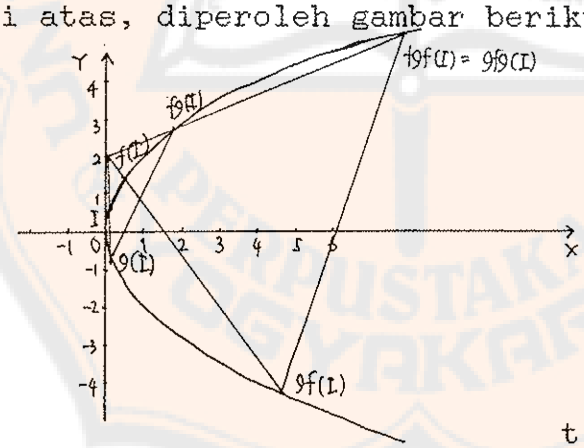
$$(fg)^2\ (t) = \frac{1-t}{-t} = gf(t)$$

$$(fg)^3\ (t) = t$$

Karena periode fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 3 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, f(gf)\}$.

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan mempunyai gradien 2. Jika $g(t) = t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.41. $f(t) = 1 - t,\ g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

Contoh:

Diberikan nilai t tertentu t = 2, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$(4, 4) \xrightarrow{I} (4, 4)$

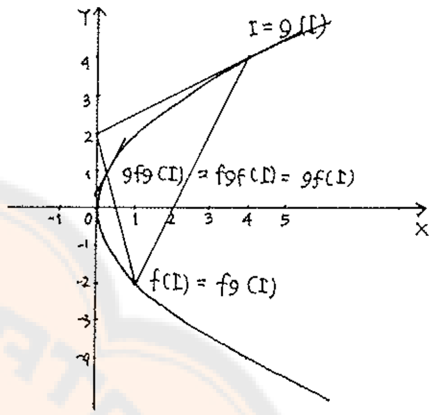
$(4, 4) \xrightarrow{f} (1, -2)$

$(4, 4) \xrightarrow{g} (4, 4)$

$(4, 4) \xrightarrow{fg} (1, -2)$

$(4, 4) \xrightarrow{gf} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

$(4, 4) \xrightarrow{fgf} \left[\frac{1}{4}, 1\right]$



Gb.42. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

untuk $t = 2$

Contoh di atas seperti contoh 4 (b). Titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ merupakan titik singgung parabola dengan persamaan garis singgungnya $y = 2x + \frac{1}{2}$. Gradien persamaan garis singgung tersebut sama dengan gradien garis pada persamaan keterangan 4 (hal. 93). Persamaan garis singgung parabola di titik (4, 4) adalah $y = \frac{1}{2}x + 2$ yang sama dengan persamaan garis yang menghubungkan titik (0, 2) dan titik (4, 4).

Sehingga untuk titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ oleh fungsi $g(t)$

ditransformasikan ke titik $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ lagi, demikian juga titik (4, 4) oleh fungsi g(t) ditransformasikan ke titik (4, 4) lagi.

Contoh:

Diberikan nilai t yang lain yaitu $t = \frac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $(t^2, 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{I} \left[\frac{9}{4}, 3\right]$$

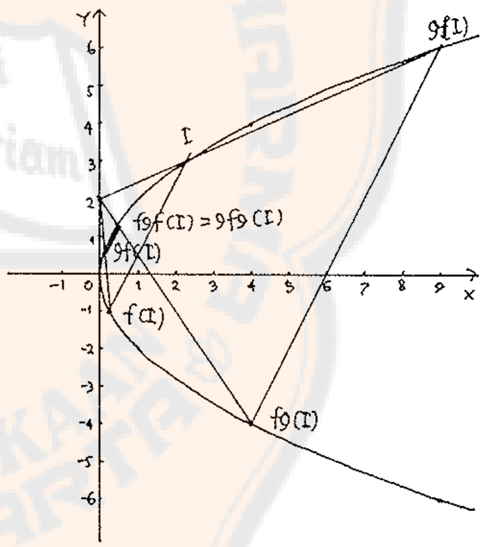
$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{1}{4}, -1\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{g} (9, 6)$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fg} (4, -4)$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{gf} \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fgf} \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right]$$



Gb.43. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

untuk $t = \frac{3}{2}$

6. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2 , $f(t) = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$

$$fg(t) = \frac{t - 1}{t}, \text{ dan } fgf(t) = 1 - t = gfg(t)$$

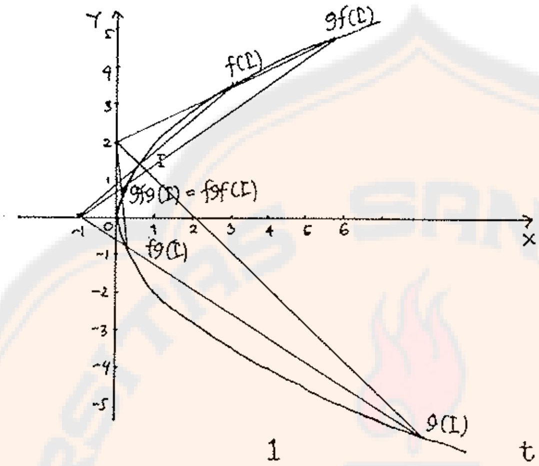
$$(fg)^2\ (t) = \frac{-1}{t - 1} = gf(t)$$

$$(fg)^3\ (t) = t$$

Karena periode fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah 2 dan periode fungsi $fg(t)$ adalah 3 maka menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut akan terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, f(gf)\}$.

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh keistimewaan dari fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ sebagai berikut: jika $f(t) = t' = \dfrac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0) dan jika $g(t) = t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.44. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$

Contoh:

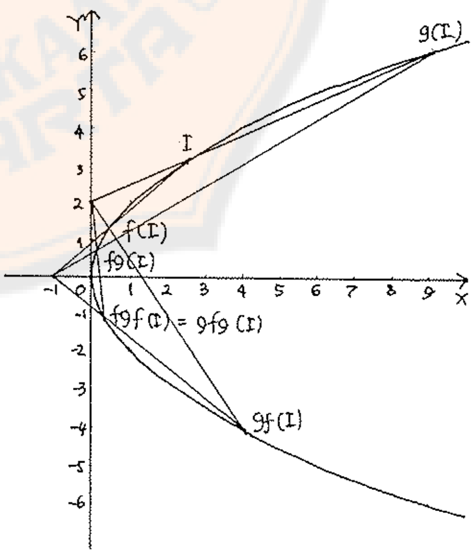
Diberikan nilai t tertentu $t = \frac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $(t^2,\ 2t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{I} \left[\frac{9}{4}, 3\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right]$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{g} (9,\ 6)$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fg} \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right]$$



$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{gf} (4, -4)$$

$$\left[\frac{9}{4}, 3\right] \xrightarrow{fgf} \left[\frac{1}{4}, -1\right]$$

Gb.45. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$

untuk $t = \frac{3}{2}$

7. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

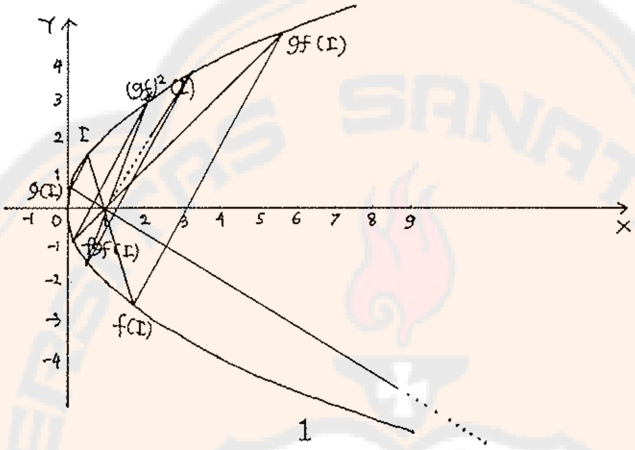
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2 , $f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = 1 - t$.

Dalam contoh 5 halaman 89 pada periode suatu fungsi telah diperoleh periode fungsi $fg(t)$ adalah tak hingga. Sehingga menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola itu akan terjadi grup dihedral D_∞ dengan banyaknya anggota tak hingga.

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh keistimewaan-keistimewaan fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ sebagai berikut: jika $f(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui fokus (1, 0) dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan mempunyai gradien 2.

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.46. $f(t) = -\dfrac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

8. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = -\dfrac{1}{t}$

$(t \neq 0)$ dan $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$

$$fg(t) = \frac{1 - t}{t}$$

$$(fg)^2\,(t) = \frac{2t - 1}{1 - t}$$

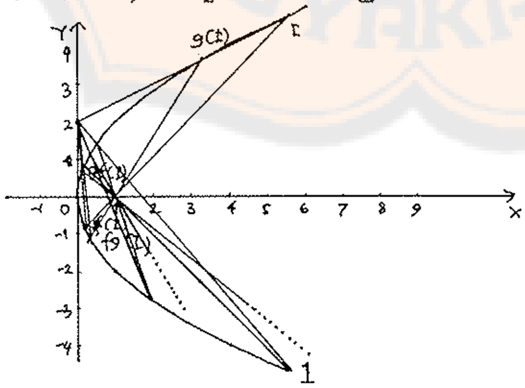
$$(fg)^3\,(t) = \frac{2 - 3t}{2t - 1}$$

$$(fg)^4\,(t) = \frac{5t - 3}{2 - 3t}$$

Setelah dijabarkan diperoleh periode fungsi fg(t) tak hingga. Karena periode fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah tak hingga, maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola akan terjadi grup dihedral D_∞ .

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) sebagai berikut: jika $f(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan melalui fokus (1, 0) dan jika $g(t) = t' = \frac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (2) (hal. 95) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan dari fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.47. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$

Contoh-contoh berikut ini adalah contoh-contoh grup dihedral pada parabola $y^2 = 4x$ dengan persamaan parameter yang berbeda dari contoh-contoh sebelumnya.

Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$ dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan 2 titik yaitu T $(4t^2, 4t)$ dan T´ $(4t'^2, 4t')$, persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut adalah:

$$\frac{y - 4t'}{4t - 4t'} = \frac{x - 4t'^2}{4t^2 - 4t'^2} \text{ , setelah diuraikan}$$

diperoleh: $x - (t + t')\,y + 4tt' = 0$ ... (4)

Dalam contoh-contoh selanjutnya, fungsi-fungsi $f(t)$ yang digunakan $-\dfrac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$, $\dfrac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$, $\dfrac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$. Fungsi-fungsi tersebut adalah fungsi-fungsi yang berperiode 2.

Dengan persamaan parameter yang berbeda, kita dapat menentukan t´ yang merupakan fungsi dari t supaya persamaan (4) mempunyai keistimewaan-keistimewaan tertentu, dengan keistimewaan-keistimewaan tersebut antara lain sebagai berikut:

1. Jika $t' = -\frac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (4) akan menjadi:

$$x - \left[t - \frac{1}{4t} \right] y + 4.t \left[-\frac{1}{4t} \right] = 0$$

$$x - \left[\frac{4t^2 - 1}{4t} \right] y - 1 = 0 \text{ ; untuk setiap } t,$$

jika $y = 0$ maka $x = 1$.

Jadi jika $t' = -\frac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) akan melalui fokus (1, 0).

2. Jika $t' = \frac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (4) akan menjadi:

$$x - \left[t + \frac{1}{4t} \right] y + 4.t \ . \ \frac{1}{4t} = 0$$

$$x - \left[\frac{4t^2 + 1}{4t} \right] y + 1 = 0 \text{ ; untuk setiap } t,$$

jika $y = 0$ maka $x = -1$.

Jadi jika $t' = \frac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0).

3. Jika $t' = \frac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (4) akan menjadi:

$$x - \left[t + \frac{t}{t - 1} \right] y + 4t \cdot \frac{t}{t - 1} = 0$$

$$x - \left[\frac{t^2}{t - 1} \right] y + \frac{4t^2}{t - 1} = 0 \text{ ; untuk}$$

setiap t, jika $x = 0$ maka $y = 4$.

Jadi jika $t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (4) akan memotong sumbu y di titik (0,4).

4. Jika $t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (4) akan menjadi:

$$x - (t + 1 - t) y + 4t (1 - t) = 0$$

$x - y + 4 (t - t^2) = 0$; untuk setiap t, persamaan garis tersebut akan mempunyai gradien 1.

Contoh:

9. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \text{ t parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsinya berperiode 2 yang diberikan adalah

$$f(t) = -\frac{1}{4t} \; (t \neq 0) \text{ dan } g(t) = \frac{1}{4t} \; (t \neq 0)$$

Karena $t \neq 0$ maka tidak berlaku untuk titik puncak parabola. Demikian juga untuk contoh selanjutnya dengan fungsi-fungsi seperti di atas.

$$fg(t) = -t = gf(t)$$

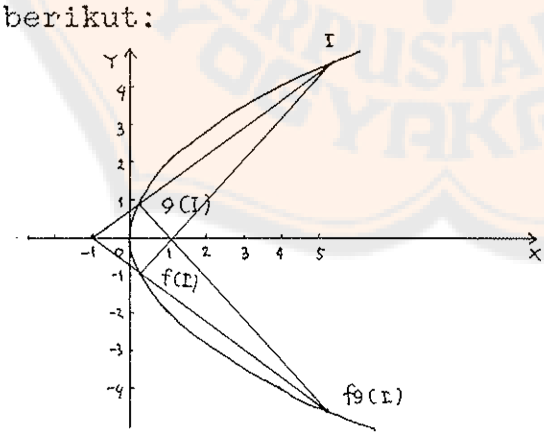
$$(fg)^2(t) = t$$

Karena periode fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 2 maka menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_2. Anggota dari D_2 adalah D_2 = {I, f, g, fg}. Kemudian akan kita selidiki keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan titik pada parabola ke titik lain pada parabola.

Menurut keterangan di atas diperoleh bahwa

jika $f(t) = t' = -\dfrac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui fokus (1, 0) dan jika $g(t) = t' = \dfrac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.48. $f(t) = -\dfrac{1}{4t}$, $g(t) = \dfrac{1}{4t}$

10. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya.

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \text{ t parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsinya berperiode 2 yang diberikan adalah

$f(t) = -\dfrac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -t$.

$fg(t) = \dfrac{1}{4t}$, menurut contoh 9 di atas periode fungsi $fg(t)$ adalah 2.

Karena periode fungsi $f(t)$, $g(t)$ adalah 2 dan periode fungsi $fg(t)$ adalah 2 maka menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola terjadi grup dihedral D_2. Anggota D_2 adalah D_2 = {I, f, g, fg}.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = -\dfrac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui fokus (1, 0).

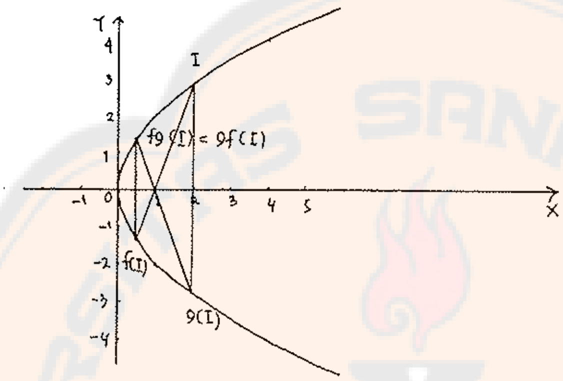
Jika $g(t)$: $T\ (4t^2,\ 4t) \longrightarrow T'\ (4t'^2,\ 4t')$ dan $g(t) = t' = -t$, maka persamaan (4) (hal. 113) menjadi:

$$x - (t - t)\ y - 4.t.t = 0$$

$$x - 4t^2 = 0\ \ldots.\ (5)$$

Artinya untuk sebarang nilai t, oleh fungsi $g(t)$ setiap titik pada parabola ditransformasikan ke titik lain pada parabola dan garis penghubung kedua titik itu sejajar sumbu y.

Dengan keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas dan untuk sebarang nilai t, diperoleh gambar berikut:



Gb.49. $f(t) = -\dfrac{1}{4t}$, $g(t) = -t$

11. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya.

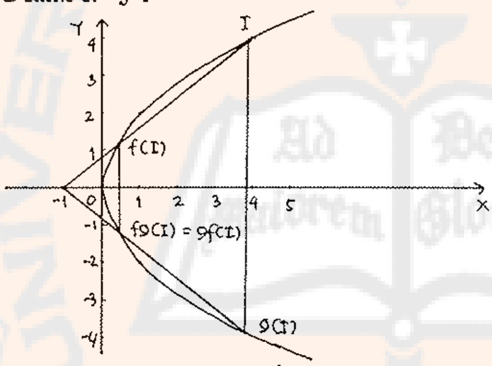
$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = \dfrac{1}{4t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -t$.

$fg(t) = -\dfrac{1}{4t} = gf(t)$, menurut contoh 9 di atas periode fungsi fg(t) adalah 2.

Karena periode fungsi f(t), g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 2 maka menurut teorema pada grup dihedral, pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_2. Anggota D_2 adalah $D_2 = \{I, f, g, fg\}$.

Menurut keterangan sebelumnya dan contoh 10 diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \dfrac{1}{4t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik potong direktriks dan sumbu x yaitu titik (-1, 0) dan jika $g(t) = t' = -t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan sejajar dengan sumbu y.



Gb.50. $f(t) = \dfrac{1}{4t}$, $g(t) = -t$

12. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya.

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = -t$ dan $g(t) = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$.

Dari contoh 1 di atas telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah 2 sehingga menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_2. Anggota dari D_2 adalah $D_2 = \{I, f, g, fg\}$.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = -t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan sejajar dengan sumbu y.

Jika $g(t) : T\ (4t^2, 4t) \longrightarrow T'\ (4t'^2, 4t')$ dan

$g(t) = t' = \dfrac{1}{t}$, maka persamaan (4) (hal. 113)

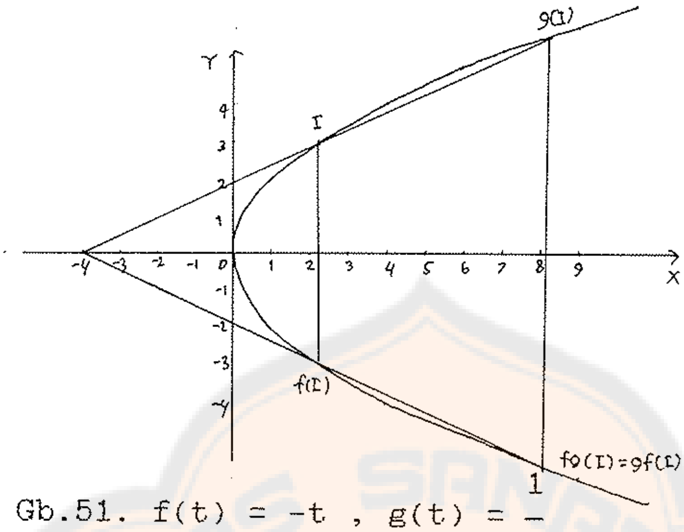
menjadi:

$$x - \left[t + \frac{1}{t} \right] y + 4.t.\frac{1}{t} = 0$$

$$x - \left[\frac{t^2 + 1}{t} \right] y + 4 = 0 \quad \ldots (6)$$

Artinya untuk sebarang nilai t, oleh fungsi g(t) setiap titik pada parabola ditransformasikan ke titik lain pada parabola dan garis penghubung kedua titik itu melalui (-4, 0).

Dengan keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas dan untuk sebarang nilai t, diperoleh gambar berikut:



Gb.51. $f(t) = -t$, $g(t) = \frac{1}{t}$

13. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya.

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = -t$ dan

$g(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$.

Dari contoh 3 di atas telah diperoleh bahwa periode fungsi $fg(t)$ adalah 2 sehingga menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_2. Anggota D_2 adalah $D_2 = \{I, f, g, fg\}$.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = -t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan sejajar dengan sumbu y.

Jika $g(t) : T\ (4t^2, 4t) \longrightarrow T'\ (4t'^2, 4t')$ dan

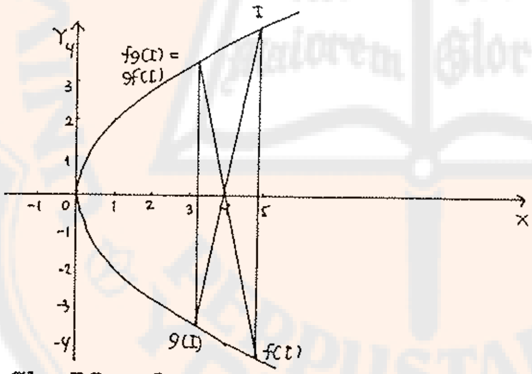
$g(t) = t' = -\frac{1}{t}$, maka persamaan (4) (hal. 113) menjadi:

$$x - \left[t - \frac{1}{t}\right] y - 4.t.\frac{1}{t} = 0$$

$$x - \left[\frac{t^2 - 1}{t}\right] y - 4 = 0 \quad \ldots (7)$$

Artinya untuk sebarang nilai t, oleh fungsi g(t) setiap titik pada parabola ditransformasikan ke titik lain pada parabola dan garis penghubung kedua titik itu melalui titik (4, 0).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.52. $f(t) = -t$, $g(t) = -\dfrac{1}{t}$

14. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

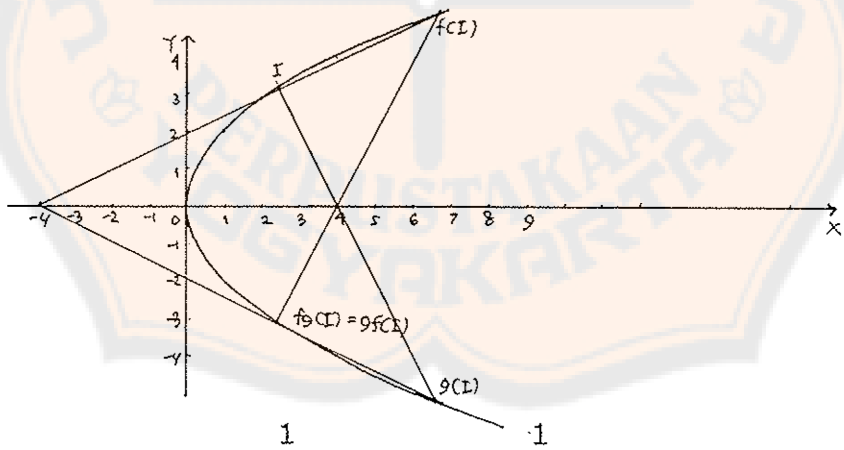
Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$$f(t) = \frac{1}{t} \ (t \neq 0) \quad \text{dan} \quad g(t) = -\frac{1}{t} \ (t \neq 0)$$

Dalam contoh 2 telah diperoleh periode fungsi fg(t) adalah 2 sehingga menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_2. Anggota D_2 adalah D_2 = {I, f, g, fg}.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (-4, 0) dan jika $g(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (4, 0).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.53. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$

15. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$$f(t) = \frac{t}{t - 1} \ (t - 1 \neq 0) \text{ dan } g(t) = 1 - t$$

Dalam contoh 5 di atas telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) sama dengan periode fungsi gf(t) yaitu 3, sehingga menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, f(gf)\}$.

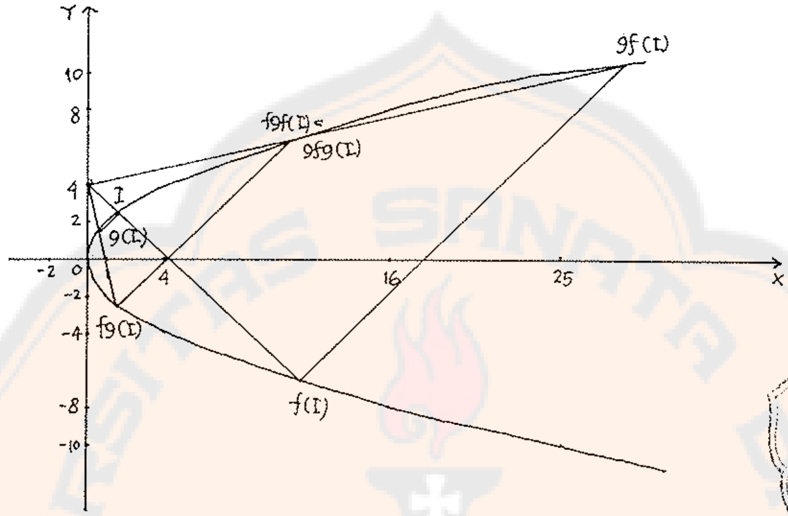
$$fg(t) = \frac{1 - t}{-t}$$

$$(fg)^2(t) = \frac{-1}{1 - t} = gf(t)$$

$$fgf(t) = \frac{1}{t} = gfg(t)$$

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan memotong sumbu y di titik (0, 4) dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan mempunyai gradien 1.

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan-keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas diperoleh gambar berikut:



Gb.54. $f(t) = \dfrac{t}{t-1}$, $g(t) = 1 - t$

16. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \text{ t parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$$f(t) = \frac{t}{t-1} \quad (t - 1 \neq 0) \quad \text{dan } g(t) = \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

Dalam contoh 8 di atas telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) sama dengan periode fungsi gf(t) yaitu 3. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_3. Anggota D_3 adalah D_3 = {I, f, g, fg, gf, f(gf)}.

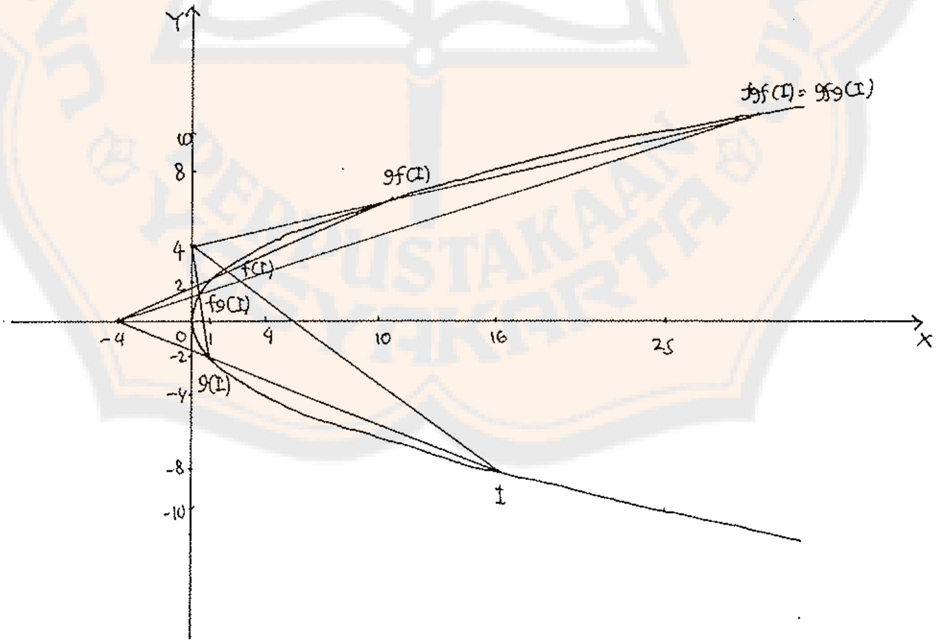
$$fg(t) = \frac{1}{1 - t}$$

$$(fg)^2(t) = \frac{1 - t}{-t} = gf(t)$$

$$fgf(t) = 1 - t = gfg(t)$$

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan memotong sumbu y di titik (0, 4) dan jika $g(t) = t' = \dfrac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (-4, 0).

Dengan keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas dan untuk sebarang nilai t, diperoleh gambar berikut:



Gb.55. $f(t) = \dfrac{t}{t - 1}$, $g(t) = \dfrac{1}{t}$

17. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$f(t) = 1 - t$ dan $g(t) = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$

Dalam contoh 4 telah diperoleh bahwa periode fungsi $fg(t)$ sama dengan periode fungsi $gf(t)$ yaitu 3. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_3. Anggota D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, f(gf)\}$.

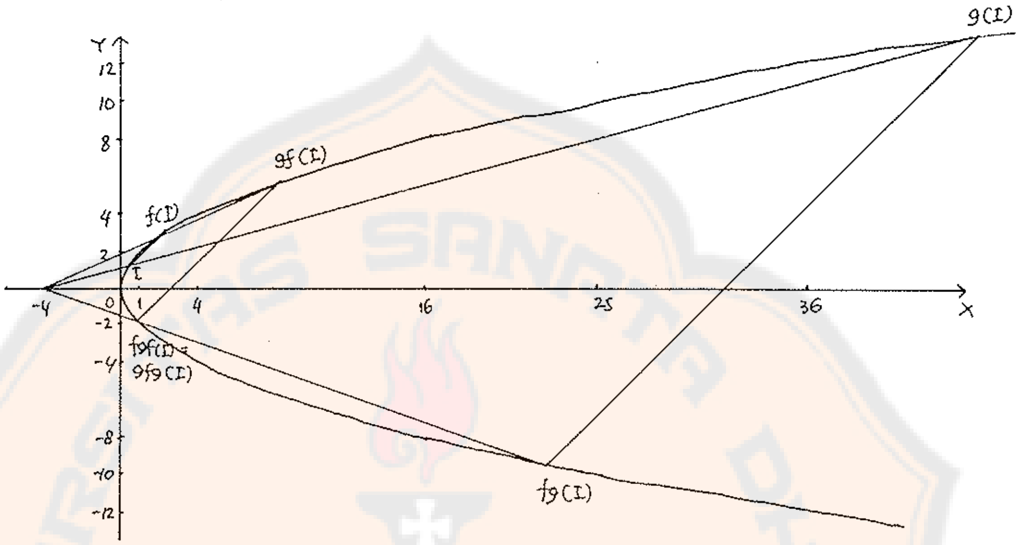
$$fg(t) = 1 - \frac{1}{t}$$

$$(fg)^2(t) = \frac{-1}{t - 1} = gf(t)$$

$$fgf(t) = \frac{-t}{1 - t} = gfg(t)$$

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan mempunyai gradien 1 dan jika $g(t) = t' = \dfrac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (-4, 0).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.56. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$

Contoh:

Diberikan nilai t tertentu yaitu t = 2, maka hasil transformasi titik $(4t^2, 4t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$(16, 8) \xrightarrow{I} (16, 8)$

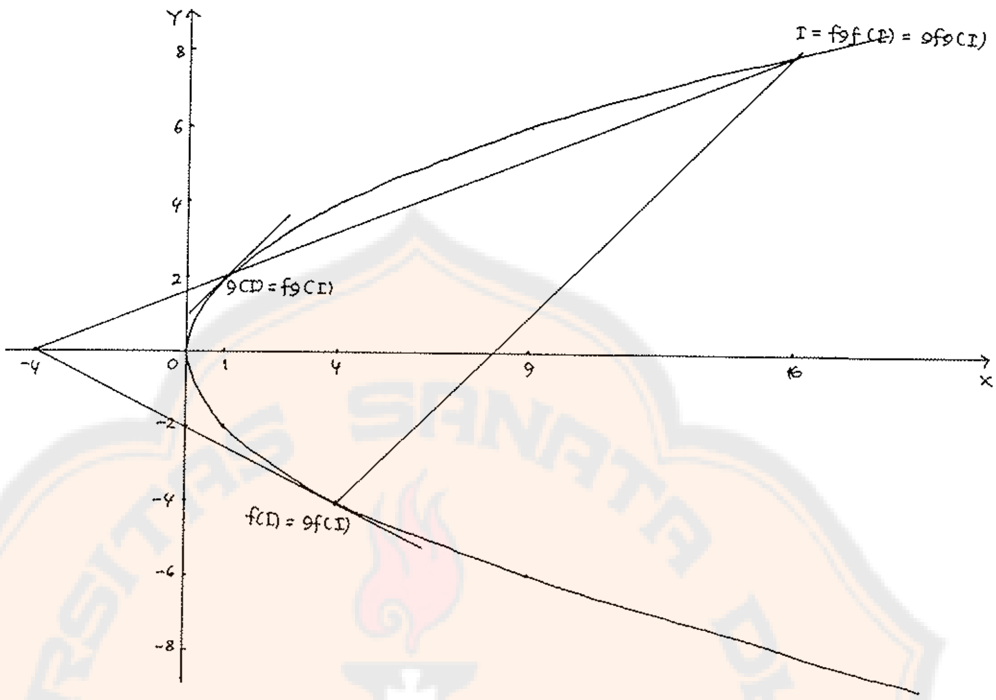
$(16, 8) \xrightarrow{fg} (1, 2)$

$(16, 8) \xrightarrow{gf} (4, -4)$

$(16, 8) \xrightarrow{f} (4, -4)$

$(16, 8) \xrightarrow{g} (1, 2)$

$(16, 8) \xrightarrow{fgf} (16, 8)$



Gb.57. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$ untuk $t = 2$

Contoh 17 untuk nilai t = 2 ini seperti contoh 4 dan 5 di atas. Titik (1, 2) dan titik (4, -4) selain merupakan titik hasil transformasi, juga merupakan titik singgung pada parabola yang gradiennya sama dengan gradien garis persamaan keterangan 4 (hal. 113) dan garis penghubung titik (-4, 0) dan (4, -4).

Persamaan garis singgung di titik (1, 2) adalah $y = x + 1$. Gradien garis singgung parabola tersebut 1 yang sama dengan gradien garis pada persamaan keterangan 4 (hal. 113). Sehingga titik (1, 2) ditransformasikan oleh fungsi f(t) tetap di titik (1, 2). Persamaan garis singgung di titik

(4, -4) adalah $y = -\frac{1}{2}x - 2$ yang sama dengan persamaan garis yang melalui titik (-4, 0) dan (4, -4). Sehingga titik (4, -4) oleh fungsi g(t) ditransformasikan ke titik (4, -4) lagi.

Contoh:

Diberikan nilai t yang lain yaitu $t = \frac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $(4t^2, 4t)$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$(9, 6) \xrightarrow{I} (9, 6)$

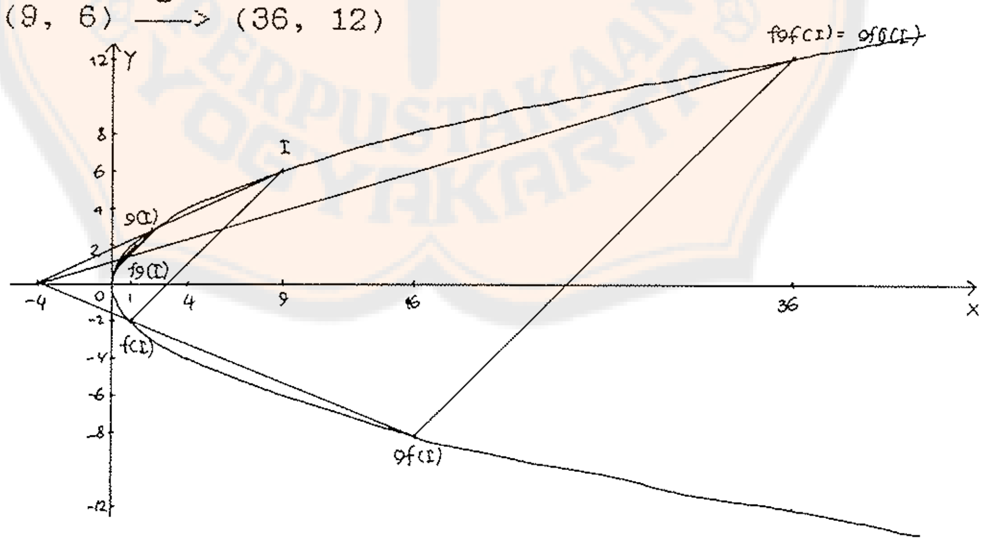
$(9, 6) \xrightarrow{f} (1, -2)$

$(9, 6) \xrightarrow{g} \left[\frac{16}{9}, \frac{8}{3}\right]$

$(9, 6) \xrightarrow{fg} \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right]$

$(9, 6) \xrightarrow{gf} (16, -8)$

$(9, 6) \xrightarrow{fgf} (36, 12)$



Gb.58. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \frac{1}{t}$ untuk $t = \frac{3}{2}$

18. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

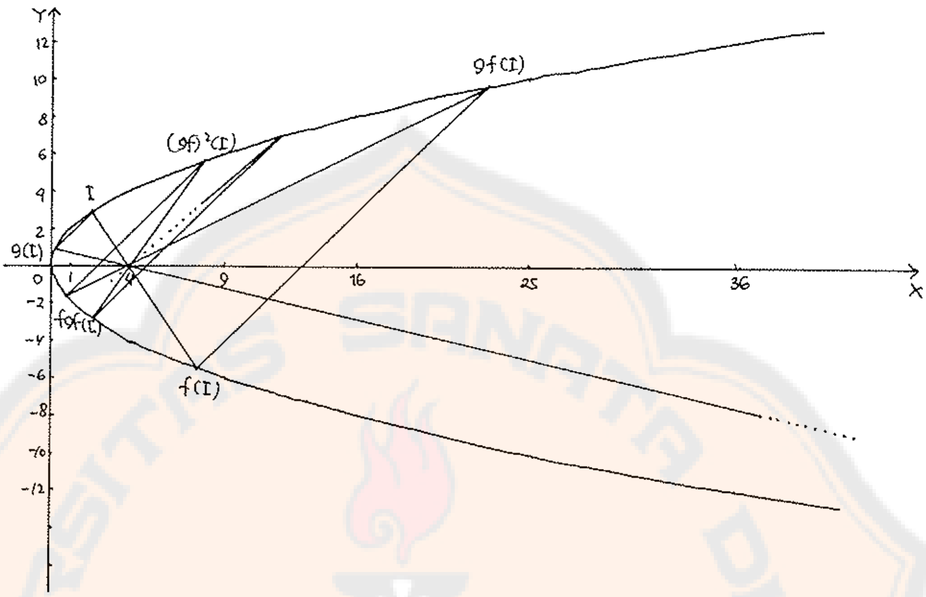
Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = 1 - t$.

Dalam contoh 7 di atas telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) tak hingga. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_∞ .

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) sebagai berikut: jika $f(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (4, 0) dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan mempunyai gradien 1.

Dari keterangan-keterangan di atas dan untuk sebarang nilai t, diperoleh gambar grup dihedral D_∞ pada parabola sebagai berikut:



Gb.59. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

19. Diberikan persamaan parabola $y^2 = 4x$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t, \ t \text{ parameter} \end{cases}$$

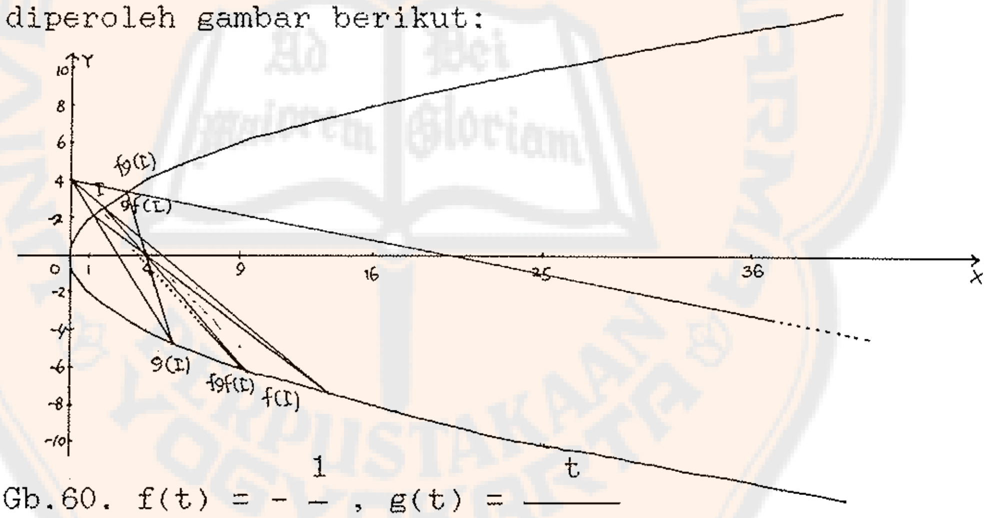
Fungsi-fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah

$$f(t) = -\frac{1}{t} \quad (t \neq 0) \quad \text{dan } g(t) = \frac{t}{t-1} \ (t - 1 \neq 0)$$

Dalam contoh 8 telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah tak hingga. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada parabola tersebut terjadi grup dihedral D_∞ .

Menurut keterangan-keterangan sebelumnya diperoleh keistimewaan-keistimewaan fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ sebagai berikut: jika $f(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan melalui titik (4, 0) dan jika $g(t) = t' = \frac{t}{t-1}$ maka garis dengan persamaan (4) (hal. 113) akan memotong sumbu y di titik (0, 4).

Untuk sebarang nilai t dan dengan keistimewaan fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.60. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t-1}$

C. GRUP PADA HIPERBOLA

Seperti pada pembicaraan tentang grup pada parabola, dalam grup pada hiperbola ini kita juga akan banyak membicarakan tentang periode suatu fungsi. Grup pada hiperbola ini merupakan grup dihedral, sehingga kita akan menggunakan teorema pada grup dihedral itu untuk menentukan grup dihedral yang akan terjadi pada hiperbola.

Dalam grup pada hiperbola ini, kita menggunakan persamaan hiperbola orthogonal dan langkah-langkah untuk menentukan grup dihedral pada hiperbola ini sama dengan langkah-langkah pada waktu menentukan grup dihedral pada parabola.

Diberikan suatu persamaan hiperbola orthogonal dengan persamaan parameter tertentu dan diberikan juga fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$, jika periode fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah 2 dan periode fungsi $fg(t)$ adalah n maka menurut teorema pada grup dihedral terjadi grup dihedral D_n pada hiperbola tersebut. Dan jika periode fungsi $fg(t)$ adalah tak hingga maka pada hiperbola tersebut terjadi grup dihedral D_∞. Seperti dalam grup pada parabola, dalam grup pada hiperbola ini fungsi berperiode 2 yang diberikan adalah $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $-t$, $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $1 - t$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$

Gambaran dari grup dihedral D_n yang terjadi pada hiperbola dapat kita tentukan dengan menerapkan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada hiperbola ke titik lain pada hiperbola juga. Sebelum diberikan contoh akan diberikan persamaan umum hiperbola berikut:

Diberikan suatu persamaan umum hiperbola orthogonal $xy = c^2$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t}, \quad t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan 2 titik yaitu $T\left[ct, \dfrac{c}{t}\right]$ dan $T'\left[ct', \dfrac{c}{t'}\right]$, persamaan garis yang melalui kedua titik itu adalah:

$$\frac{y - \dfrac{c}{t'}}{\dfrac{c}{t} - \dfrac{c}{t'}} = \frac{x - ct'}{ct - ct'}$$, setelah diuraikan diperoleh:

$$x + tt'y - c(t' + t) = 0 \quad .... \quad (1^*)$$

Dari persamaan (1^*), kita dapat menentukan t' yang merupakan fungsi dari t supaya persamaan (1^*) mempunyai keistimewaan-keistimewaan tertentu. Keistimewaan-keistimewaan itu antara lain:

1. Jika $t' = \dfrac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan menjadi:

$$x + t \cdot \frac{t}{t-1} \cdot y - c \left[\frac{t}{t-1} + t \right] = 0$$

$$x + \frac{t^2}{t-1} \cdot y - c \left[\frac{t^2}{t-1} \right] = 0$$

Tampak bahwa titik potong garis tersebut dengan sumbu y untuk sebarang harga t ialah (0, c).

Jadi jika $t' = \dfrac{t}{t-1}$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan memotong sumbu y dititik (0, c).

2. Jika $t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan menjadi:

$$x + t\,(1 - t)\,y - c\,(1 - t + t) = 0$$

$$x + (t - t^2)\,y - c = 0$$

Titik potong garis tersebut dengan sumbu x untuk sebarang harga t ialah (c, 0).

Jadi jika $t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan memotong sumbu x dititik (c, 0).

3. Jika $t' = -\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan menjadi:

$$x + t \left[-\frac{1}{t} \right] y - c \left[-\frac{1}{t} + t \right] = 0$$

$$x - y - c \left[\frac{t^2 - 1}{t} \right] = 0$$, dan gradien untuk

sebarang harga t sama dengan 1.

Jadi jika $t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan mempunyai gradien 1.

4. Jika $t' = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan menjadi:

$$x + t \cdot \frac{1}{t} y - c \left[\frac{1}{t} + t \right] = 0$$

$$x + y - c \left[\frac{1 + t^2}{t} \right] = 0$$; dan gradien garis ini untuk sebarang harga t sama dengan -1.

Jadi jika $t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan mempunyai gradien -1.

5. Jika $t' = -t$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan menjadi:

$$x + t\,(-t) \cdot y - c\,(-t + t) = 0$$

$x - t^2 y = 0$; dan untuk sebarang harga t persamaan garis ini akan melalui titik O (0, 0).

Jadi jika $t' = -t$ maka garis dengan persamaan (1^*) akan melalui O (0, 0).

Contoh:

1. Diberikan suatu persamaan hiperbola orthogonal xy = 4, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \quad t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -t$.

Akan kita selidiki grup dihedral yang terjadi pada hiperbola tersebut oleh fungsi-fungsi itu. Dari contoh-contoh sebelumnya telah diperoleh bahwa periode dari fungsi-fungsi f(t) dan g(t) adalah 2 dan periode fungsi fg(t) adalah 2. Menurut teorema dalam grup dihedral didapat grup dihedral pada hiperbola xy = 4 adalah D_2. Banyaknya anggota D_2 adalah 4 yaitu $D_2 = \{I, f, g, fg\}$.

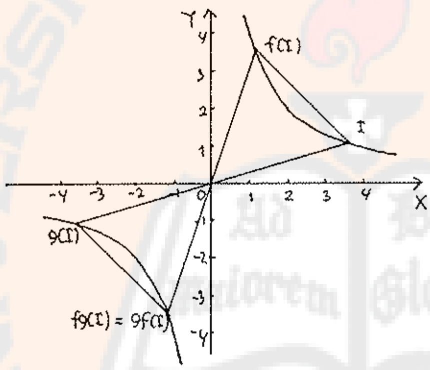
Akan kita selidiki keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada hiperbola ke titik lain pada hiperbola sehingga kita dapat menentukan gambaran dari grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi $f(t) = \dfrac{1}{t}$ dan $g(t) = -t$.

Diberikan dua titik yaitu $T\left[2t, \dfrac{2}{t}\right]$ dan $T'\left[2t', \dfrac{2}{t}\right]$, persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut adalah:

$$x + tt'y - 2(t + t') = 0 \quad \ldots. \quad (2^*)$$

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2*) akan mempunyai gradien -1 dan jika $g(t) = t' = -t$ maka garis dengan persamaan (2*) akan melalui titik O(0, 0).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) tersebut, kita dapat menentukan gambaran grup dihedral D_2 pada hiperbola untuk sebarang nilai t.



Gb.61. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$

$$\begin{aligned} fg(t) &= f(g(t)) \\ &= f(-t) \\ &= \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t} = gf(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gfg(t) &= g(fg(t)) \\ &= g\left[-\frac{1}{t}\right] \\ &= -\left[-\frac{1}{t}\right] = \frac{1}{t} = f(t) \end{aligned}$$

$$fgf(t) = f(gf(t)) = f\left[-\frac{1}{t}\right] = \frac{1}{-\frac{1}{t}} = -t = g(t)$$

Jadi grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ dan $g(t) = -t$ dapat digambarkan seperti di atas. Tampak bahwa titik I oleh fungsi $f(t)$ ditransformasikan ke titik $f(I)$ dengan gradien garis penghubung kedua titik itu adalah -1 dan titik $f(I)$ oleh fungsi $g(t)$ ditransformasikan ke titik $gf(I)$ dengan garis penghubung titik $f(I)$ dan $gf(I)$ melalui titik (0, 0), demikian seterusnya.

Kita dapat menentukan contoh grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ untuk nilai t tertentu dengan mentransformasikan titik $\left[2t, \frac{2}{t}\right]$ oleh fungsi-fungsi anggota D_2.

Misal untuk nilai t = 2, diperoleh:

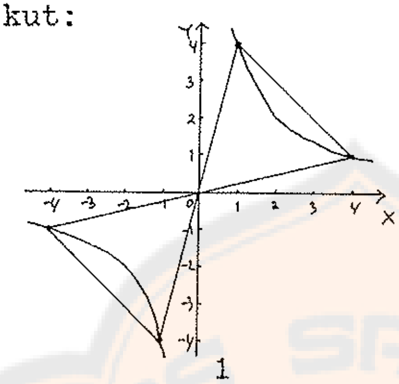
$$(4,\ 1) \xrightarrow{I} (4,\ 1)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{f} (1,\ 4)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{g} (-4,\ -1)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{fg} (-1,\ -4)$$

Dari uraian di atas, diperoleh gambar sebagai berikut:



Gb.62. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -t$ untuk $t = 2$

Tampak bahwa:

$(4, 1) \xrightarrow{f} (1, 4) \xrightarrow{g} (-1, -4) \xrightarrow{f} (-4, -1)$ $\xrightarrow{g} (4, 1)$.

Gradien garis yang melalui titik (4, 1) dan (1, 4), titik (-1, -4) dan (-4, -1) adalah -1, kemudian garis penghubung titik (1, 4) dan (-1, -4), titik (-4, -1) dan (4, 1) melalui titik (0, 0).

2. Diberikan persamaan hiperbola orthogonal $xy = 4$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{2}{t}, \quad t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2 adalah $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$.

Dari contoh 2 dalam grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah 2. Karena periode fungsi f(t), g(t) dan fg(t) adalah 2, maka grup dihedral yang terjadi pada hiperbola oleh fungsi-fungsi tersebut adalah D_2 yaitu $D_2 = \{I, f, g, fg\}$.

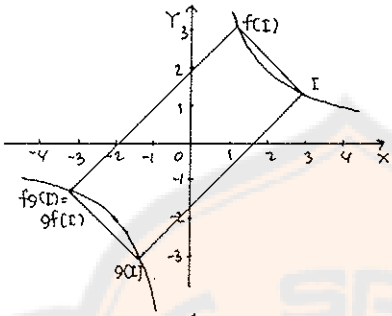
Akan kita selidiki keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada hiperbola ke titik lain pada hiperbola.

Diberikan dua titik yaitu $T\left[2t, \frac{2}{t}\right]$ dan $T'\left[2t', \frac{2}{t'}\right]$, seperti pada contoh 1 maka persamaan garis yang melalui kedua titik itu adalah:

$$t + tt'y - 2\,(t + t') = 0 \quad \ldots \ (2^*)$$

Jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2^*) akan mempunyai gradien -1 dan jika $g(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka menurut keterangan sebelumnya juga diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2^*) akan mempunyai gradien 1.

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) tersebut, kita dapat memperoleh gambar grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi tersebut untuk sebarang nilai t.



Gb.63. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$

$$gfg(t) = g(-t)$$

$$= \frac{1}{t} = f(t)$$

$$fgf(t) = f(gf(t))$$

$$= f(-t)$$

$$= \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t} = g(t)$$

Akan kita tentukan contoh grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi f(t) dan g(t) tersebut untuk nilai t tertentu dengan mentransformasikan titik $\left[2t, \frac{2}{t} \right]$ oleh fungsi anggota D_2. Untuk nilai t = 2, diperoleh:

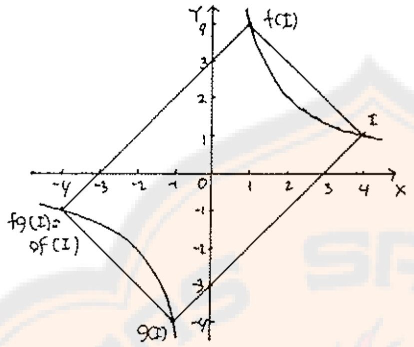
$$(4,\ 1) \xrightarrow{I} (4,\ 1)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{f} (1,\ 4)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{g} (-1,\ -4)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{fg} (-4,\ -1)$$

Sehingga didapat gambar berikut:



Gb.64. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = -\frac{1}{t}$ untuk $t = 2$

3. Diberikan persamaan hiperbola orthogonal $xy = 4$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{2}{t}, \text{ t parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = -t$ dan $g(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$.

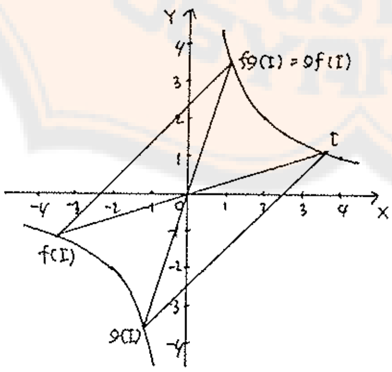
Dalam contoh 3 hal. 99 telah diperoleh bahwa periode fungsi $fg(t)$ sama dengan periode fungsi $gf(t)$ yaitu 2. Dan karena periode fungsi $f(t)$, $g(t)$ dan $fg(t)$ adalah 2, maka grup dihedral pada hiperbola oleh fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ tersebut adalah D_2 yang mempunyai anggota sebanyak 4 yaitu $D_2 = \{I,\ f,\ g,\ fg\}$. Kemudian akan kita selidiki keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada hiperbola ke titik lain pada hiperbola.

Diberikan dua titik yaitu $T\left[2t, \frac{2}{t}\right]$ dan $T'\left[2t', \frac{2}{t'}\right]$, maka persamaan garis yang melalui kedua titik itu adalah:

$$x + tt'y - 2(t + t') = 0 \quad \ldots \quad (2^*)$$

Jika $f(t) = t' = -t$ maka menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa garis dengan persamaan (2^*) akan melalui $O(0, 0)$ dan jika $g(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2^*) akan mempunyai gradien 1.

Dari uraian di atas yaitu setelah diperoleh keistimewaan fungsi f(t) dan g(t), kita dapat menentukan gambar grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi-fungsi tersebut untuk sebarang nilai t.



Gb.65. $f(t) = -t$, $g(t) = -\frac{1}{t}$

$$
\begin{aligned}
gfg(t) &= g(fg(t)) \\
&= g\left[\frac{1}{t}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{\frac{1}{t}}\right] = -t = f(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fgf(t) &= f(gf(t)) \\
&= f\left[\frac{1}{t}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{t}\right] = -\frac{1}{t} = g(t)
\end{aligned}
$$

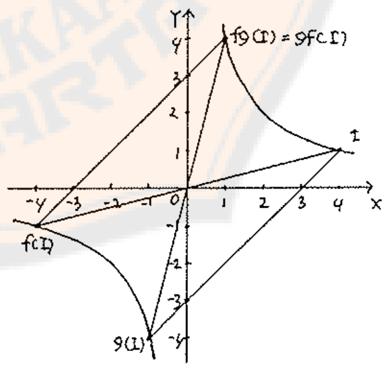
Berikut ini contoh grup dihedral D_2 pada hiperbola oleh fungsi f(t) dan g(t) tersebut untuk nilai t tertentu yang diperoleh dengan mentrans-formasikan titik $\left[2t, \frac{2}{t}\right]$ oleh fungsi-fungsi anggota D_2. Untuk nilai t = 2, diperoleh:

$$(4,\ 1) \xrightarrow{I} (4,\ 1)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{f} (-4,\ -1)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{g} (-1,\ -4)$$

$$(4,\ 1) \xrightarrow{fg} (1,\ 4)$$



Gb.66. $f(t) = -t$, $g(t) = -\frac{1}{t}$
untuk t = 2

Contoh 1 sampai dengan contoh 3 di atas merupakan contoh grup dihedral D_2 pada hiperbola. Dalam setiap grup dihedral D_2, untuk sebarang fungsi f(t) dan g(t) yang diberikan maka akan dipenuhi sifat-sifat berikut:

1. fg(t) = gf(t)
2. fgf(t) = g(t)
3. gfg(t) = f(t)

Contoh:

4. Diberikan persamaan hiperbola orthogonal xy = 4, dengan persamaan parameternya:

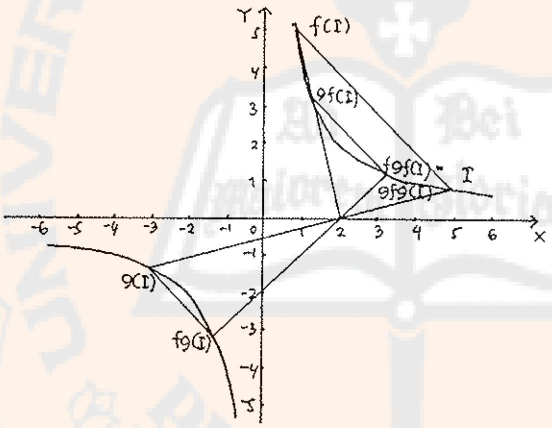
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \ t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = 1 - t$.

Dari contoh 4 dalam subbab grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode dari fungsi fg(t) adalah 3, sehingga grup dihedral yang terjadi pada hiperbola oleh fungsi-fungsi tersebut adalah D_3 dengan anggota-anggotanya sebanyak 6 yaitu {I, f, g, fg, gf, fgf}. Kemudian akan kita selidiki keistimewaan fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada hiperbola ke titik lain pada hiperbola.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan mempunyai gradien -1 dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan memotong sumbu x di titik (2, 0).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas, kita dapat menentukan gambar grup dihedral D_3 pada hiperbola oleh fungsi-fungsi tersebut untuk sebarang nilai t.



Gb.67. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

$$fg(t) = f(g(t))$$
$$= f\,(1 - t)$$
$$= \frac{1}{1-t} = (gf)^2(t)$$

$$gf(t) = g(f(t))$$
$$= g\left[\frac{1}{t}\right] = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t - 1}{t}$$

$$= (fg)^2(t)$$

$$fgf(t) = f(gf(t))$$

$$= f\left[\frac{t-1}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{t-1}{t}} = \frac{t}{t-1} = gfg(t)$$

Dari gambar tampak bahwa titik I oleh f(t) ditransformasikan ke titik f(I) dengan gradien garis yang melalui titik I dan f(I) adalah -1, kemudian titik f(I) oleh fungsi g(t) ditransformasikan ke titik gf(I) dan garis penghubung titik f(I) dan gf(I) melalui titik (2, 0), demikian seterusnya.

Berikut ini contoh grup dihedral D_3 pada hiperbola oleh fungsi f(t) dan g(t) tersebut untuk nilai t tertentu yang diperoleh dengan mentrans-formasikan titik $\left[2t, \frac{2}{t}\right]$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3. Untuk nilai t = 3, diperoleh:

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{I} \left[6, \frac{2}{3}\right]$$

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{2}{3}, 6\right]$$

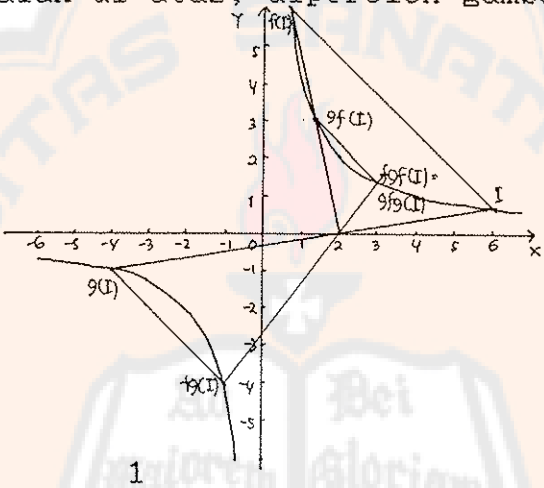
$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{g} (-4, -1)$$

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{fg} (-1, -4)$$

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{gf} \left[\frac{4}{3}, 3\right]$$

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{fgf} \left[3, \frac{4}{3}\right]$$

Dari uraian di atas, diperoleh gambar berikut:



Gb.68. $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$ untuk $t = 3$

Tampak bahwa:

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{2}{3}, 6\right] \xrightarrow{g} \left[\frac{4}{3}, 3\right] \xrightarrow{f}$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{g} (-1, -4) \xrightarrow{f} (-4, -1) \xrightarrow{g}$$

$$\left[6, \frac{2}{3}\right] .$$

Gradien garis yang melalui titik $\left[6, \frac{2}{3}\right]$ dan $\left[\frac{2}{3}, 6\right]$, titik $\left[\frac{4}{3}, 3\right]$ dan $\left[3, \frac{4}{3}\right]$, titik (-1, -4) dan (-4, -1) adalah -1 dan garis penghubung titik $\left[\frac{2}{3}, 6\right]$ dan $\left[\frac{4}{3}, 3\right]$, titik $\left[3, \frac{4}{3}\right]$ dan (-1, -4), titik (-4, -1) dan $\left[6, \frac{2}{3}\right]$ melalui titik (2, 0).

5. Diberikan suatu persamaan hiperbola orthogonal xy = 4, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \ t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

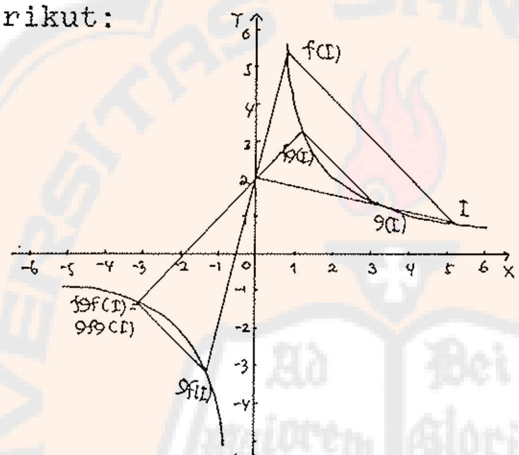
Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = \frac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$.

Dari contoh 6 dalam grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah 3. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada hiperbola tersebut terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota D_3 adalah D_3 = {I, f, g, fg, gf, fgf} dengan fungsi-fungsi fg(t), gf(t) dan fgf(t) seperti pada contoh 6.

Menurut keterangan sebelumnya telah diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = \frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan

(2*) (hal. 139) akan mempunyai gradien -1 dan jika $g(t) = t' = \dfrac{t}{t-1}$ maka garis dengan persamaan (2*) (hal. 139) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas dan untuk sebarang nilai t dapat diperoleh grup dihedral D_3 pada hiperbola sebagai berikut:



Gb.69. $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = \dfrac{t}{t-1}$

Contoh:

Diberikan nilai t tertentu yaitu $t = \dfrac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $\left[2t, \dfrac{2}{t} \right]$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$$\left[3, \frac{4}{3} \right] \xrightarrow{I} \left[3, \frac{4}{3} \right]$$

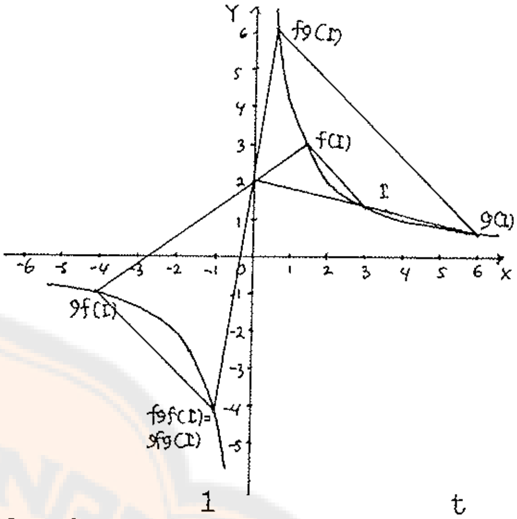
$$\left[3, \frac{4}{3} \right] \xrightarrow{f} \left[\frac{4}{3}, 3 \right]$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{g} \left[6, \frac{2}{3}\right]$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{fg} \left[\frac{2}{3}, 6\right]$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{gf} (-4, -1)$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{fgf} (-1, -4)$$



Gb.70. $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{t}{t - 1}$

untuk $t = \frac{3}{2}$

6. Diberikan suatu persamaan hiperbola orthogonal $xy = 4$, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \text{ t parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

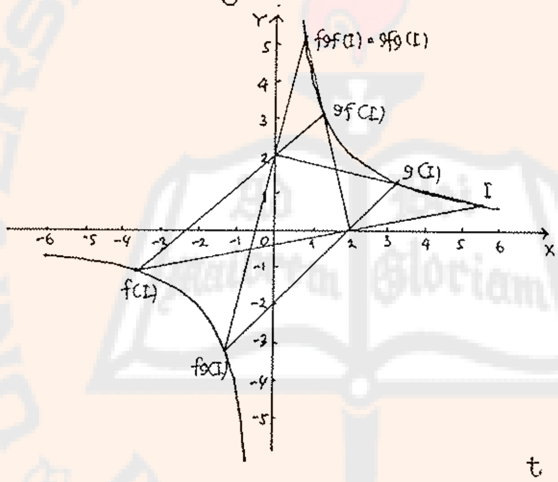
Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = 1 - t$

dan $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$ $(t - 1 \neq 0)$.

Dari contoh 5 dalam grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode fungsi $fg(t)$ adalah 3. Sehingga menurut teorema dalam grup dihedral diperoleh bahwa pada hiperbola tersebut terjadi grup dihedral D_3. Anggota-anggota dari D_3 adalah $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, fgf\}$ dengan fungsi-fungsi $fg(t)$, $gf(t)$ dan $fgf(t)$ seperti pada contoh 5.

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan memotong sumbu x di titik (2, 0) dan jika $g(t) = t' = \dfrac{t}{t - 1}$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas untuk sebarang nilai t, dapat diperoleh grup dihedral D_3 pada hiperbola sebagai berikut:



Gb.71. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

Contoh:

Diberikan nilai $t = \dfrac{3}{2}$, maka hasil transformasi titik $\left[2t, \dfrac{2}{t} \right]$ oleh fungsi-fungsi anggota D_3 adalah:

$$\left[3, \frac{4}{3} \right] \xrightarrow{I} \left[3, \frac{4}{3} \right]$$

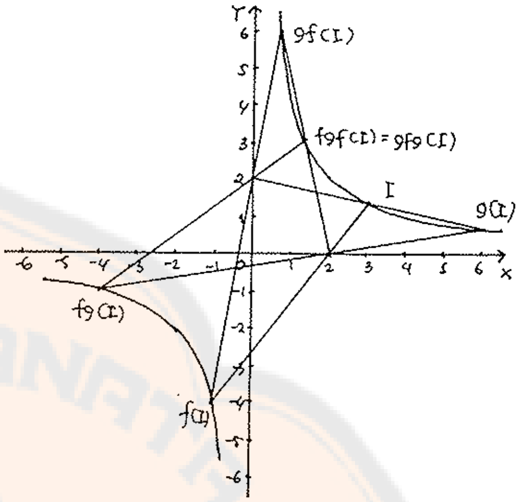
$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{f} (-1, -4)$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{g} \left[6, \frac{2}{3}\right]$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{fg} (-4, -1)$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{gf} \left[\frac{2}{3}, 6\right]$$

$$\left[3, \frac{4}{3}\right] \xrightarrow{fgf} \left[\frac{4}{3}, 3\right]$$



Gb.72. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

untuk $t = \dfrac{3}{2}$

Contoh 4, 5 dan 6 di atas merupakan contoh grup dihedral D_3 pada hiperbola. Dalam setiap grup dihedral D_3, untuk sebarang fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ yang diberikan maka akan dipenuhi sifat berikut:

- $fgf(t) = gfg(t)$

7. Diberikan suatu persamaan hiperbola orthogonal $xy = 4$, dengan persamaan parameternya:

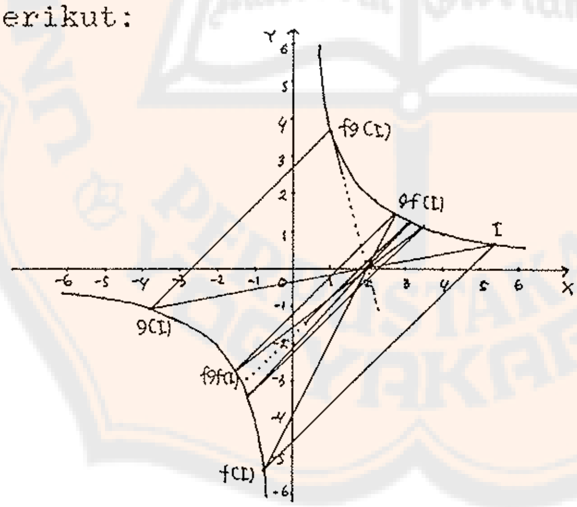
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \ t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

Diberikan fungsi-fungsi berperiode 2, $f(t) = -\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ dan $g(t) = 1 - t$.

Dari contoh 7 dalam grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode fungsi fg(t) adalah tak hingga. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada hiperbola tersebut terjadi grup dihedral yaitu D_{∞} .

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = -\frac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan mempunyai gradien 1 dan jika $g(t) = t' = 1 - t$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan memotong sumbu x di titik (2, 0).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi f(t) dan g(t) di atas dan untuk sebarang nilai t dapat diperoleh grup dihedral D_{∞} pada hiperbola sebagai berikut:



Gb.73. $f(t) = -\frac{1}{t}$, $g(t) = 1 - t$

8. Diberikan persamaan hiperbola orthogonal xy = 4, dengan persamaan parameternya:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t}, \quad t \text{ parameter dan } t \neq 0 \end{cases}$$

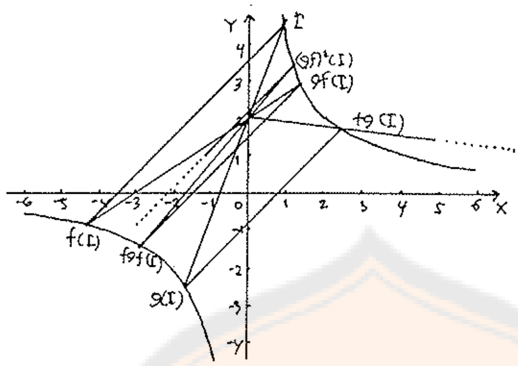
Diberikan fungsi-fungsi $f(t) = -\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$

dan $g(t) = \dfrac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$.

Dari contoh 8 dalam grup pada parabola telah diperoleh bahwa periode fungsi $fg(t)$ adalah tak hingga. Menurut teorema pada grup dihedral diperoleh bahwa pada hiperbola tersebut terjadi grup dihedral D_∞ .

Menurut keterangan sebelumnya diperoleh bahwa jika $f(t) = t' = -\dfrac{1}{t}$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan mempunyai gradien 1 dan jika $g(t) = t' = \dfrac{t}{t-1}$ maka garis dengan persamaan (2^*) (hal. 138) akan memotong sumbu y di titik (0, 2).

Dengan keistimewaan fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ di atas dan untuk sebarang nilai t, dapat diperoleh grup dihedral D_∞ pada hiperbola sebagai berikut:



Gb.74. $f(t) = -\dfrac{1}{t}$, $g(t) = \dfrac{t}{t-1}$

Definisi III.C.1.

Suatu transformasi yang inversnya adalah transformasi itu sendiri atau suatu transformasi yang berperiode 2 dinamakan suatu involusi.

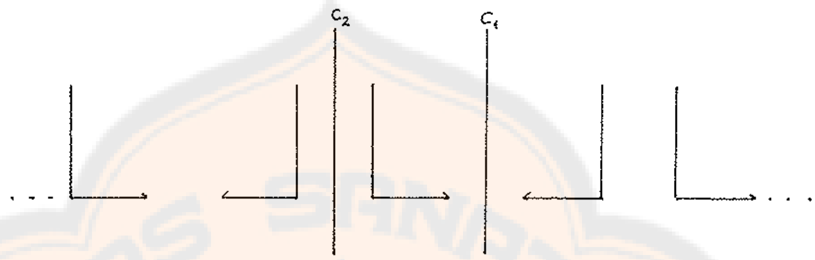
Transformasi α adalah suatu involusi jika $\alpha^2 = i$, tetapi $\alpha \neq i$, dengan i transformasi identitas. Dalam grup pada parabola dan hiperbola di atas, fungsi-fungsi f(t) dan g(t) sebagai suatu transformasi yang mentransformasikan suatu titik pada parabola atau hiperbola ke titik lain pada parabola atau hiperbola merupakan suatu involusi, karena $f^2(t) = g^2(t) = t$ dengan $f(t) \neq t$ dan $g(t) \neq t$. Atau dengan kata lain f(t) dan g(t) merupakan suatu involusi karena f(t) dan g(t) mempunyai periode 2. Dengan demikian untuk fungsi fg(t) yang mempunyai periode 2 juga merupakan suatu involusi, fungsi-fungsi tersebut kita jumpai dalam grup dihedral D_2 pada parabola maupun pada hiperbola.

Hasil kali dua involusi disebut suatu homografi. Dalam grup pada parabola dan hiperobola di atas fungsi fg(t) merupakan suatu homografi. Periode dari homografi itu dapat 2, 3 atau tak hingga.

Dalam bab sebelumnya kita telah membicarakan tentang grup siklik. Suatu grup dihedral D_n pada suatu segi-n beraturan mempunyai subgrup siklik C_n dengan banyaknya anggota n. Dalam grup dihedral D_n pada parabola maupun hiperbola ini pun kita juga akan menemukan subgrup siklik C_n. Untuk grup dihedral D_2 pada parabola maupun hiperbola dengan $D_2 = \{I, f, g, fg\}$, subgrup siklik dari D_2 tersebut adalah $C_2 = \{I, fg\}$ generator dari C_2 adalah fg. Demikian juga untuk grup dihedral D_3 pada parabola maupun hiperbola dengan $D_3 = \{I, f, g, fg, (fg)^2, fgf\}$, subgrup siklik dari D_3 tersebut adalah $C_3 = \{I, fg, (fg)^2\}$ dengan generator fg. Sehingga akan diperoleh bahwa untuk setiap grup dihedral D_n pada parabola atau hiperbola dengan $D_n = \{I, f, g, fg, (fg)^2, \ldots, (fg)^{n-1}, g(fg), g(fg)^2, \ldots, g(fg)^{n-2}\}$ maka akan kita peroleh subgrup siklik dari D_n tersebut adalah $C_n = \{I, fg, (fg)^2, \ldots, (fg)^{n-1}\}$ dengan generator dari C_n tersebut adalah fg. Dan untuk grup dihedral D_∞ pada parabola atau hiperbola dengan $D_\infty = \{I, f, g, fg, (fg)^2, (fg)^3, \ldots, g(fg), g(fg)^2, g(fg)^3, \ldots\}$ maka subgrup siklik dari D_∞

adalah $C_\infty = \{I, fg, (fg)^2, (fg)^3, \ldots\}$ dengan generator dari C_∞ adalah fg.

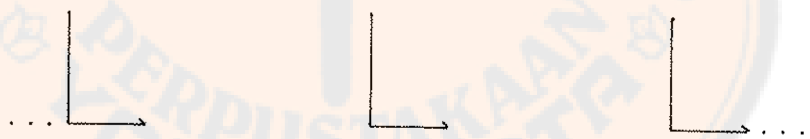
Contoh grup dihedral D_∞ pada suatu jalur tak berhingga, yaitu:



Gb.75. Grup dihedral D_∞ pada jalur tak berhingga

$D_\infty = \{\ldots, M_2M_1M_2, M_2M_1, M_2, I, M_1, M_1M_2, M_1M_2M_1, \ldots\}$ dengan M_1 dan M_2 adalah refleksi terhadap cermin c_1 dan c_2.

Contoh grup siklik C_∞ pada suatu jalur tak berhingga yang merupakan subgrup dari D_∞ pada jalur tak berhingga, yaitu:



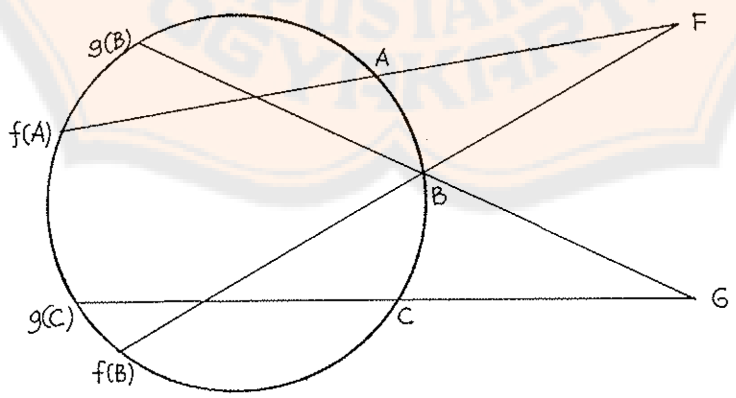
Gb.76. Grup siklik C_∞ pada jalur tak berhingga

$C_\infty = \{\ldots, T^{-2}, T^{-1}, I, T, T^2, \ldots\}$ dengan T adalah suatu translasi dan $T = M_1M_2$ atau $T^{-1} = M_2M_1$.

D. GRUP PADA LINGKARAN

Grup pada lingkaran ini sedikit berbeda dengan grup pada parabola dan grup pada hiperbola. Perbedaan itu terletak dalam cara menentukan grup dihedral yang terjadi pada lingkaran. Dalam grup pada lingkaran ini kita akan lebih banyak menggunakan gambar meskipun tetap diberikan fungsi-fungsi seperti dalam grup pada parabola dan hiperbola.

Grup pada lingkaran ini adalah grup dihedral. Seperti dalam grup dihedral pada parabola dan hiperbola, grup dihedral pada lingkaran ditentukan juga oleh fungsi-fungsi f dan g. Diberikan F dan G suatu titik, fungsi f memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari FA dengan lingkaran tersebut demikian juga fungsi g memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari GA dengan lingkaran tersebut. Fungsi-fungsi f dan g merupakan suatu involusi atau $f^2 = i$ dan $g^2 = i$ dengan i transformasi identitas.



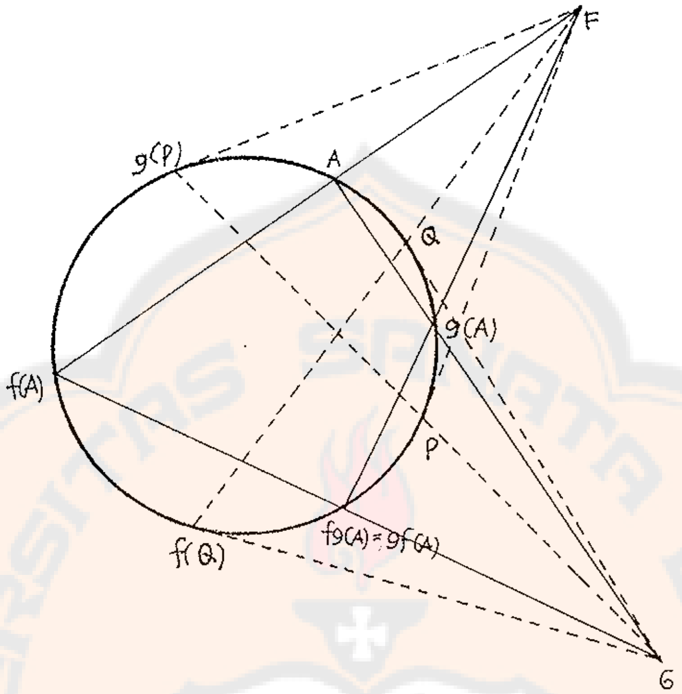
Gb.77. Contoh suatu fungsi f dan g yang memetakan titik A, B dan C pada lingkaran

Dari gambar tampak bahwa: jika diberikan titik F dan titik perpotongan pertama lingkaran dengan garis yang melalui titik F dan memotong lingkaran adalah titik A, maka titik perpotongan keduanya adalah f(A). Demikian juga jika diberikan titik G dan titik perpotongan pertama lingkaran dengan garis yang melalui titik G dan memotong lingkaran adalah titik C, maka titik perpotongan keduanya adalah g(C).

Letak titik F dan G dapat di berhingga, dapat juga di jauh tak hingga. Kedua letak titik-titik F dan G tersebut akan menentukan grup dihedral yang terjadi pada lingkaran. Jika letak titik F dan G di jauh tak hingga, maka grup dihedral pada lingkarannya akan ditentukan oleh arah-arah dari F dan G. Jika letak F dan G tidak di jauh tak hingga kita akan memperoleh di antaranya grup dihedral D_2 dan D_3 pada lingkaran. Suatu grup dihedral D_2 pada lingkaran diperoleh jika letak titik F pada garis kutub titik G dan titik G juga terletak pada garis kutub titik F. Menurut sifat garis kutub: jika titik Q terletak pada garis kutub p dari titik P maka garis kutub q dari titik Q melalui P.

Contoh:

1.



Gb.78. Grup dihedral D_2 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di berhingga

Dalam grup dihedral D_2 pada lingkaran di atas diperoleh fg = gf dan karena F dan G tidak di tak hingga maka F terletak pada garis kutub G demikian juga sebaliknya.

2. Jika letak titik F dan G tidak di jauh tak hingga, kita dapat menentukan salah satu cara untuk mendapatkan grup dihedral D_3 pada lingkaran sedemikian hingga fg mempunyai periode 3 dan fgf = gfg. Pertama kita menentukan letak titik F sebarang, dari titik F dibuat garis singgung pada lingkaran. Karena suatu garis singgung, maka titik potong

pertama I dan titik potong kedua $f(I)$ garis yang melalui F menyinggung lingkaran hanya satu yaitu titik singgungnya sehingga $I = f(I)$. Kemudian kita menentukan titik G secara sebarang di luar lingkaran sedemikian hingga G terletak pada garis yang menghubungkan titik I dan titik $g(I)$ dengan $g(I) = gf(I)$. Setelah diperoleh titik $gf(I)$, kita juga akan mendapatkan titik $fgf(I) = fg(I)$. Sehingga titik G merupakan titik potong garis singgung lingkaran di titik $fgf(I)$ dan garis penghubung titik I dan titik $g(I)$. Grup dihedral D_3 pada lingkaran dengan keadaan seperti di atas merupakan suatu contoh khusus, karena kita dapat menentukan grup dihedral D_3 yang lain pada lingkaran setelah titik F dan G tertentu letaknya seperti di atas. Dan dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Anggota-anggota dari grup dihedral D_3 pada lingkaran yaitu $D_3 = \{I, f, g, fg, gf, fgf\}$. Dalam grup dihedral D_3 ini akan diperoleh:

$$fgf = gfg = h$$

$$(fgf)\ (fgf)\ (A) = A$$

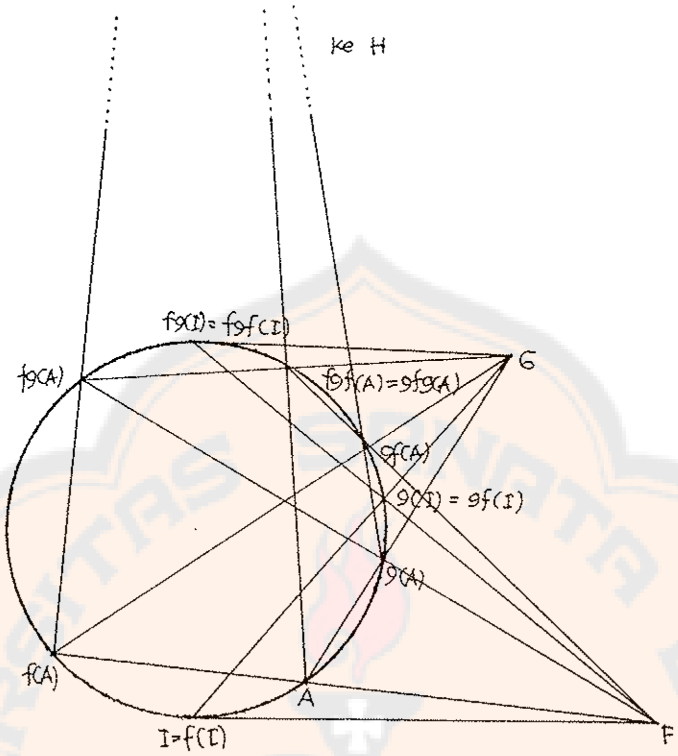
$$h^2\ (A) = A$$

$$(fgf)(f(A)) = fg\ (f^2(A)) = fg(A)$$

$$(fgf)(g(A)) = (gfg)(g(A))$$

$$= gf(g^2(A)) = gf(A)$$

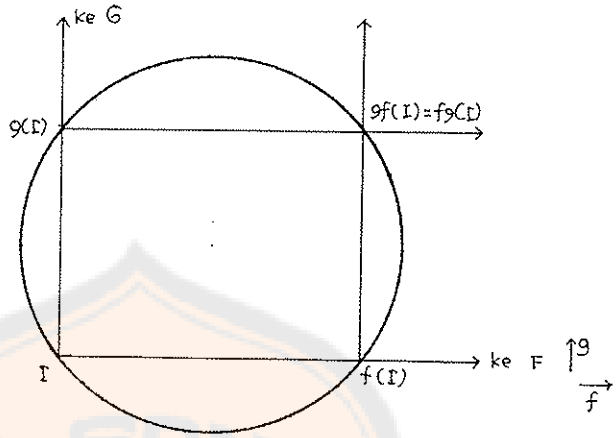
Karena $h^2\ (A) = A$, maka h juga suatu involusi.



Gb.79. Grup dihedral D_3 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di berhingga

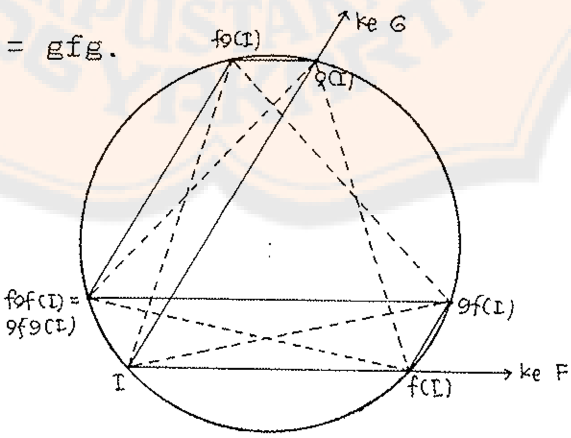
Jika letak titik F dan G di jauh tak hingga dan arah-arah dari F dan G mengapit sudut-sudut tertentu maka akan terjadi grup dihedral - grup dihedral tertentu pula.

3. Jika titik-titik F dan G terletak di jauh tak hingga dan arah-arah dari F dan G tegak lurus atau arah-arah dari F dan G mengapit sudut 90° maka pada lingkaran tersebut akan terjadi grup dihedral D_2. Anggota-anggota dari D_2 ada 4 yaitu D_2 = {I, f, g, fg}. Subgrup siklik dari D_2 adalah C_2 = {I, fg} dengan generator fg dan banyaknya anggota 2.



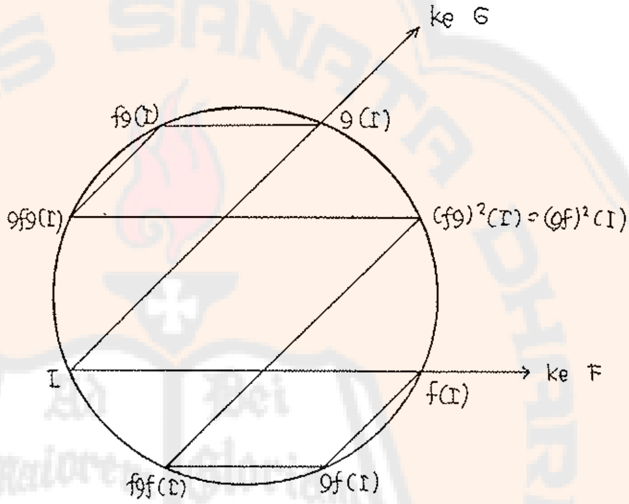
Gb.80. Grup dihedral D_2 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

4. Jika titik-titik F dan G terletak di jauh tak hingga dan fg mempunyai periode 3 dengan kata lain arah-arah dari F dan G di jauh tak hingga mengapit sudut 60° maka pada lingkaran tersebut akan terjadi grup dihedral D_3. Banyaknya anggota dari D_3 ada 6 yaitu D_3 = {I, f, g, fg, gf, fgf}. Subgrup siklik dari D_3 adalah C_3 = {I, fg, gf} dengan gf = $(fg)^2$ dan generator dari C_3 adalah fg. Jika kita perhatikan pada gambar 81, maka akan tampak bahwa C_3 membentuk suatu segitiga sama sisi demikian juga dengan {f, g, h), h = fgf = gfg.



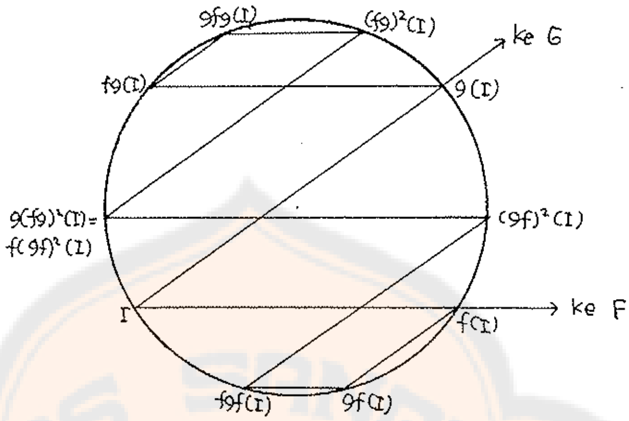
Gb.81. Grup dihedral D_3 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

5. Jika titik-titik F dan G terletak di jauh tak hingga dan arah-arah dari F dan G atau sudut di antara arah F dan G 45°, maka pada lingkaran tersebut akan terjadi grup dihedral D_4. Banyaknya anggota dari D_4 ada 8 yaitu $D_4 = \{I, f, g, fg, gf, fgf, gfg, (fg)^2\}$. Subgrup siklik dari D_4 yaitu $C_4 = \{I, fg, (fg)^2, (fg)^3\}$ dengan generator fg.



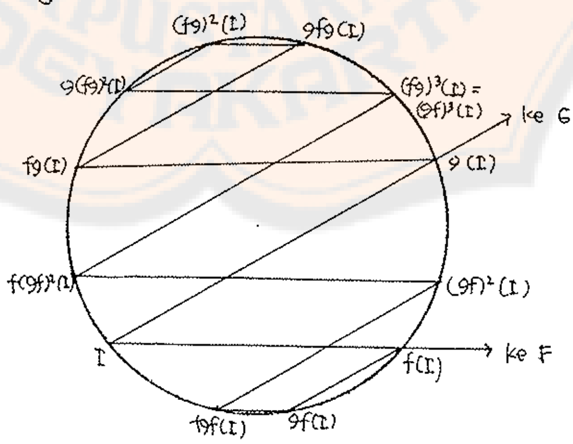
Gb.82. Grup dihedral D_4 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

6. Jika titik-titik F dan G terletak di jauh tak hingga dan arah-arah dari F dan G atau sudut di antara arah F dan G adalah 36°, maka pada lingkaran tersebut akan terjadi grup dihedral D_5. Banyaknya anggota dari D_5 ada 10 yaitu $D_5 = \{I, f, g, fg, gf, fgf, gfg, (fg)^2, (gf)^2, g(fg)^2\}$. Subgrup siklik dari D_5 yaitu $C_5 = \{I, fg, (fg)^2, (fg)^3, (fg)^4\}$ dengan generator fg dan banyaknya anggota 5.



Gb.83. Grup dihedral D_5 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

7. Jika titik-titik F dan G terletak di jauh tak hingga dan arah-arah dari F dan G atau sudut di antara arah F dan G adalah 30°, maka pada lingkaran tersebut akan terjadi grup dihedral D_6. Banyaknya anggota dari D_6 ada 12 yaitu D_6 = {I, f, g, fg, gf, fgf, gfg, $(fg)^2$, $(gf)^2$, $f(gf)^2$, $g(fg)^2$, $(fg)^3$}. Subgrup siklik dari D_6 yaitu C_6 = {I, fg, $(fg)^2$, $(fg)^3$, $(fg)^4$, $(fg)^5$} dengan generator fg dan banyaknya anggota dari C_6 ada 6.

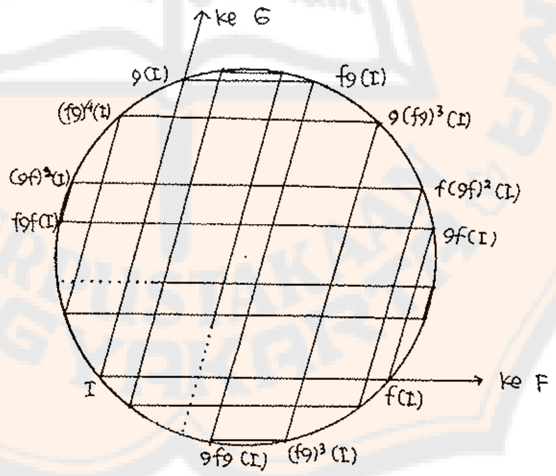


Gb.84. Grup dihedral D_6 pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

Selain grup dihedral D_2, D_3, D_4, D_5 dan D_6 pada lingkaran seperti di atas, kita dapat juga menentukan grup dihedral pada lingkaran yang lain dengan ketentuan bahwa suatu grup dihedral pada lingkaran disebut D_n untuk F dan G yang terletak di jauh tak hingga dengan sudut di antara arah-arah F dan G misal $\alpha°$ dengan

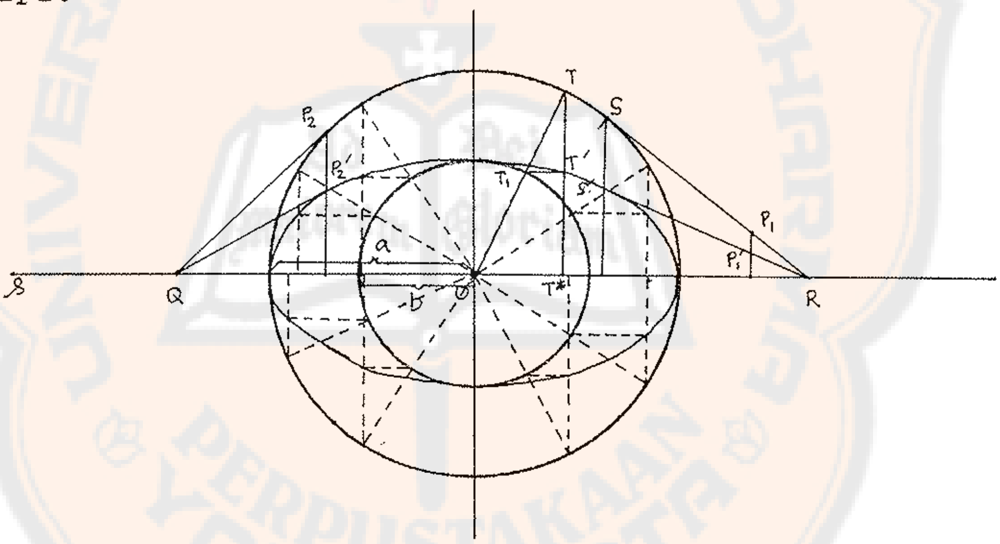
$$\alpha° = \frac{360°}{2n} .$$

Seperti pada parabola dan hiperbola, dalam lingkaran pun ada grup dihedral D_n dan ada juga grup dihedral D_∞ . Jika titik-titik F dan G di jauh tak hingga dan sudut θ yaitu sudut di antara arah-arah f dan g bukan pembagi dari 360°, kita akan mendapatkan grup dihedral D_∞ pada lingkaran.



Gb.85. Grup dihedral D_∞ pada lingkaran dengan titik-titik F dan G di jauh tak hingga

Dalam grup pada irisan kerucut ini grup pada ellips tidak dibahas. Kejadian khusus dari ellips adalah lingkaran. Dengan menggunakan transformasi affine, dari suatu lingkaran akan diperoleh suatu ellips. Sebagai contoh diberikan suatu transformasi affine $\phi\left[s,\ 90°,\ \frac{b}{a}\right]$ dengan s adalah sumbu affinitas, 90° adalah sudut affinitas dan $\frac{b}{a}$ adalah faktor skala dari affinitas. Suatu transformasi $\phi\left[s,\ 90°,\ \frac{b}{a}\right]$ tersebut mentransformasikan lingkaran menjadi suatu ellips.



Gb.86. Lukisan ellips yang diperoleh dari lukisan lingkaran dengan transformasi affine

Dalam transformasi $\phi\left[s,\ 90°,\ \frac{b}{a}\right]$ tersebut, untuk sebarang titik T pada lingkaran (0, a) dan titik T_1, pada lingkaran (0, b) maka titik T tersebut akan ditransformasikan terhadap sumbu affinitas diperoleh titik T^*. Titik potong garis yang melalui T_1 sejajar sumbu affinitas dan garis yang melalui T dan T^* adalah T´ . T´ adalah titik pada ellips. Sehingga akan diperoleh $\frac{T'T^*}{TT^*} = \frac{b}{a}$ dan untuk setiap titik pada lingkaran (0, a) maka kita dapat memperoleh titik pada ellips. Jika titik-titik tersebut dihubungkan akan diperoleh suatu lukisan ellips. Demikian juga kita dapat melukis suatu lingkaran jika sudah diketahui suatu lukisan ellips. Cara mendapatkan suatu lukisan lingkaran merupakan kebalikan dari cara memperoleh lukisan ellips, jika diketahui suatu lukisan lingkarannya.

Jika kita mempunyai garis singgung lingkaran yang ditarik dari suatu titik tertentu maka kita dapat menentukan garis singgung ellips di titik tertentu pula. Diberikan suatu titik P_1 di luar lingkaran (0, a). Dengan titik P_1 di luar lingkaran tersebut dapat dilukis garis singgung pada lingkaran (0, a). Garis singgung lingkaran yang ditarik dari titik P_1 memotong sumbu affinitas di titik R dan menyinggung lingkaran di titik S. Kemudian akan dilukis garis singgung ellipsnya. Dari titik S pada lingkaran ditarik garis tegak lurus sumbu affinitas, diperoleh titik S´ pada ellips. Sehingga diperoleh garis singgung ellips melalui titik R dan S´, dengan S´ titik singgung pada ellips.

Diberikan suatu titik P_2 pada lingkaran (0, a), dapat dilukis garis singgung pada lingkaran (0, a) dengan titik singgung P_2 dan memotong sumbu affinitas di titik Q. Kemudian akan dilukis garis singgung ellipsnya. Dari titik P_2 pada lingkaran (0, a), ditarik garis tegak lurus sumbu affinitas dan diperoleh titik P_2' pada ellips. Sehingga garis singgung ellips melalui titik Q dan titik P_2' dengan titik P_2' titik singgung ellips.

BAB IV

KESIMPULAN, IMPLIKASI DAN SARAN

A. KESIMPULAN

Grup pada beberapa Irisan Kerucut yang telah dibicarakan hanya meliputi grup pada parabola, grup pada hiperbola dan grup pada lingkaran. Grup pada ellips tidak dibicarakan karena ellips dapat diperoleh dari suatu lingkaran.

Dalam grup pada parabola dan grup pada hiperbola, persamaan parabola dan hiperbolanya dinyatakan sebagai persamaan parameter. Grup pada Irisan Kerucut ini merupakan suatu grup dihedral. Grup dihedral adalah grup yang dihasilkan oleh dua generator yaitu a dan b dengan hubungan $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba = a^{n-1}b$ atau $ba^{n-1} = ab$, dengan e adalah elemen identitas. Grup pada Irisan Kerucut tersebut dihasilkan oleh dua elemen. Elemen-elemen dalam grup pada Irisan Kerucut berupa suatu fungsi dari parameter dengan syarat bahwa fungsi-fungsi tersebut berperiode dua atau dengan kata lain fungsi-fungsi tersebut merupakan suatu involusi. Hasilkali dari dua involusi disebut suatu homografi. Berbeda dengan grup pada parabola dan hiperbola, dalam grup pada lingkaran fungsi-fungsi tersebut tidak disajikan sebagai fungsi dari parameter tetapi disajikan sebagai suatu pemetaan-pemetaan pada lingkaran.

Dalam grup pada parabola dan hiperbola, fungsi-fungsi yang digunakan fungsi parameter t antara lain f(t) sama dengan: $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, $-t$. Jika komposisi dari dua fungsi tersebut mempunyai periode dua, maka pada parabola atau hiperbola itu dihasilkan grup dihedral D_2. Jika komposisi dari dua fungsi tersebut mempunyai periode tiga, maka pada parabola atau hiperbola itu dihasilkan grup dihedral D_3. Dan jika komposisi dari dua fungsi tersebut mempunyai periode tak hingga maka pada parabola atau hiperbola itu dihasilkan grup dihedral D_∞. Karena fungsi-fungsi dari parameter yang digunakan di atas adalah suatu involusi, maka komposisi dari fungsi-fungsi tersebut merupakan suatu homografi. Sehingga periode dari homografi-homografi tersebut adalah 2,3 dan tak hingga.

Untuk setiap fungsi-fungsi dari parameter yang digunakan, masing-masing mempunyai keistimewaan-keistimewaan sendiri pada parabola atau hiperbola. Fungsi $f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ pada parabola mempunyai keistimewaan yaitu bahwa setiap titik pada parabola akan ditransformasikan ke titik lain pada parabola oleh fungsi tersebut dan garis penghubung kedua titik tersebut melalui fokus. Fungsi $f(t) = -t$ pada parabola mempunyai keistimewaan yaitu bahwa setiap titik pada parabola akan ditransformasikan ke titik lain pada parabola oleh fungsi tersebut dan garis penghubung kedua titik tersebut akan sejajar dengan sumbu y.

Fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ pada hiperbola akan mempunyai keistimewaan lain yaitu bahwa setiap titik pada hiperbola akan ditransformasikan ke titik lain pada hiperbola dan garis penghubung kedua titik itu mempunyai gradien -1. Fungsi $f(t) = -t$ pada hiperbola mempunyai keistimewaan yang berbeda dengan fungsi tersebut pada parabola yaitu bahwa setiap titik pada hiperbola akan ditransformasikan ke titik lain pada hiperbola dan garis penghubung kedua titik itu akan melalui O (0, 0).

B. IMPLIKASI DAN SARAN

Dengan mempelajari Grup pada beberapa Irisan Kerucut, maka akan lebih mendalami materi grup dan Irisan Kerucut. Selain itu juga akan lebih mendalami materi fungsi.

DAFTAR PUSTAKA

Budden, F.J. (1972). *The Fascination of Groups*. Cambridge: Cambridge University Press.

Durbin, J.R. (1985). *Modern Algebra*. New York: John Wiley and Sons.

Fraleigh, J.B. (1989). *A First Course in Abstract Algebra*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company.

Hadiwidjojo, Moeharti. (1974). *Ilmu Ukur Analit Bidang bagian 2*. FPMIPA - IKIP Yogyakarta.

Hadiwidjojo, Moeharti. (1986). *Sistem-sistem Geometri*. Jakarta: Universitas Terbuka, Karunika.

Herstein, I.N. (1965). *Topics in Algebra*. New York: Blaisdell Publishing Company and Sons.

Neal, H. Mc. Coy. (1984). *Introduction to Modern Algebra*. Allyn and Bacon, Inc.

Rawuh. (1992). *Geometri Transformasi*. Depdikbud Dirjen Dikti, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi.

Soehakso, R.M.J.T. (1980). *Pengantar Teori Grup*. Yogyakarta: FMIPA - UGM.