TRANSFORMASI PROYEKTIF

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

MARGARITA JUNI WIDIANTI

NIM : 94 1414 018
NIRM : 940051120501120014

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2002

S K R I P S I

T R A N S F O R M A S I   P R O Y E K T I F

Oleh :

MARGARITA JUNI WIDIANTI

NIM : 94 1414 018

NIRM : 940051120501120014

Telah disetujui oleh :

Dosen Pembimbing

Prof. Dra. Moeharti Hw, M. A. tanggal : 7 Januari 2002

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 21 Desember 2001

Penulis

Margarita Juni Widianti

SKRIPSI

TRANSFORMASI PROYEKTIF

Yang Disusun dan Dipersiapkan Oleh :

MARGARITA JUNI WIDIANTI

NIM : 94 1414 018

NIRM : 940051120501120014

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 20 April 2002

SUSUNAN PANITIA

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A Atmadi, M.Si	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T	....
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw, M.A	....
	Dr. St. Suwarsono	....
	M. Andi Rudhito, S.Pd	....

Yogyakarta, 20 April 2002

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd

Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan dibukakan bagimu. Karena setiap orang yang meminta, menerima dan setiap orang yang mencari, mendapat dan setiap orang yang mengetok, baginya pintu dibukakan.

(Matius 7 : 7 – 8)

Kupersembahkan skripsi ini untuk

Ibunda dan almarhum ayahanda tercinta,

yang terkasih Mas Prm, Mas Kris, Mbak Tri, Mas Heri , Dik Yanto, serta

Mas Sis tersayang

ABSTRAK

Macam-macam transformasi yang sudah dikenal antara lain isometri, similaritas, transformasi affin. Setiap himpunan transformasi itu membentuk grup. Menurut pandangan Felix Klein grup isometri merupakan subgrup dari grup similaritas, grup similaritas merupakan subgrup dari grup transformasi affin dan grup transformasi affin merupakan subgrup dari grup transformasi proyektif. Oleh karena itu, transformasi proyektif dibicarakan berikut ini.

Transformasi proyektif dalam bidang Euclides adalah transformasi yang mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3} \qquad dengan \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Seperti halnya isometri dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa refleksi, transformasi proyektif dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa proyeksi dengan paling banyak satu proyeksi yang mempunyai anggota yang hilang.

Persamaan umum untuk transformasi lain yang sudah dikenal antara lain :

persamaan umum transformasi affin : $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$, dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

persamaan umum similaritas : $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n, \end{cases}$ dengan $a^2 + b^2 \neq 0$,

persamaan umum isometri : $\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + D, \end{cases}$ dengan $A^2 + B^2 = 1$,

untuk similaritas dan isometri,tanda "+" untuk transformasi searah sedangkan tanda "-" untuk transformasi mengubah arah.

Jika pada persamaan transformasi proyektif $c_1 = c_2 = 0$ maka persamaan tersebut akan menjadi persamaan untuk transformasi affin yaitu

$$a = \frac{a_1}{c_3}, b = \frac{a_2}{c_3}, c = \frac{b_1}{c_3}, d = \frac{b_2}{c_3}, m = \frac{a_3}{c_3}, n = \frac{b_3}{c_3} \text{ dengan } \begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_3} & \frac{a_2}{c_3} \\ \frac{b_1}{c_3} & \frac{b_2}{c_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_3^2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Selanjutnya persamaan similaritas adalah persamaan transformasi affin dengan $c=-b$ yaitu $\frac{b_1}{c_3} = -\frac{a_2}{c_3}$ dan $a=d$ yaitu $\frac{a_1}{c_3} = \frac{b_2}{c_3}$ dengan $a^2 + b^2 = \left(\frac{a_1}{c_3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{c_3}\right)^2 \neq 0$.

Jika $a^2 + b^2 = 1$ yaitu $\left(\frac{a_1}{c_3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{c_3}\right)^2 = 1$ maka persamaan similaritas tersebut akan menjadi persamaan isometri dengan $A=a$ dan $B=b$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan kasih-Nya sehingga skripsi yang berjudul Transformasi Proyektif ini dapat terselesaikan. Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana Pendidikan Matematika, Program Studi Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Banyak hambatan dan rintangan yang penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Namun atas keterlibatan dan bantuan berbagai pihak, penulis akhirnya dapat mengatasi dengan baik. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini dengan tulus penulis mengucapkan terima kasih atas segala bantuan, dukungan dan perhatian kepada semua pihak, antara lain :

1. Prof. Dra. Moeharti Hw, M. A selaku dosen Pembimbing yang dengan teliti, penuh perhatian dan kesabaran membimbing dan memberikan dorongan selama proses penyusunan skripsi.
2. Drs. A Atmadi, M. Si selaku ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Unuiversitas Sanata Dharma.
3. Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku ketua Program Studi Pendidikan Matemtika Universitas Sanata Dharma yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.
4. Drs. St. Susento, M.Si yang telah memberikan dorongan moril dan semangat dalam penyusunan skripsi ini.

5. Bapak Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
6. Staf Sekretariat PMIPA yang telah banyak membantu selama kuliah dan menyelesaikan skripsi ini.
7. Orang tuaku yang telah dengan setia memberikan dorongan, semangat serta doa.
8. Rekan-rekan rumpun MIPA angkatan 1994 yang telah memberikan dukungan semangat dan doa.
9. Semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam skripsi ini, karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Harapan penulis semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

Yogyakarta,7 Desember 2001

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$\overline{AB}$	:	ruas garis / segmen AB
AB	:	panjang ruas garis / segmen AB
$\overleftrightarrow{AB}$	:	garis yang melalui titik A dan B
$\Delta\ ABC$	:	segitiga ABC
$\overrightarrow{AB}$	:	ruas garis berarah yang berpangkal di A ke B
g	:	garis g
$T_{\overrightarrow{AB}}$	:	translasi dengan ruas garis berarah AB
M_c	:	refleksi dengan sumbu *c*
$R_{(A,\alpha)}$	:	rotasi dengan pusat A dan sudut rotasi α
$\angle ABC$	:	sudut ABC
$m\angle ABC$	:	besar sudut ABC
G	:	refleksi geser
$O(k)$	:	dilatasi sentral dengan titik pusat O dan faktor pengali *k*
S	:	similaritas
(AB,CD)	:	perbandingan rangkap / perbandingan silang untuk A,B,C,D
$\cong$	:	kongruen
//	:	sejajar
$\perp$	:	tegak lurus
~	:	sebangun

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

·Garis, titik

Kita ketahui bahwa pengertian fungsi adalah salah satu pengertian yang sangat penting dalam semua cabang matematika. Di sekolah menengah, pengertian fungsi baru diperkenalkan dalam pelajaran aljabar dan kalkulus. Konsep fungsi juga sangat penting dalam kajian bidang geometri untuk memperkenalkan pengertian transformasi.

Fungsi yang daerah asal dan daerah kawannya sama disebut transformasi. Dalam geometri, transformasi dalam suatu bidang adalah suatu pemetaan bijektif yang daerah asal dan daerah kawannya merupakan suatu himpunan semua titik pada bidang itu sendiri. Transformasi seperti itu dinamakan transformasi geometri, Transformasi juga dapat digunakan untuk menjelaskan berbagai konsep dalam geometri murni, seperti kongruensi bangun-bangun dan simetri.

Felix Klein (1849-1925) dari Jerman mempunyai pandangan tentang geometri, sebagai berikut : "Suatu geometri didefinisikan oleh suatu grup G dari transformasi-transformasi, apabila definisi dan teorema-teorema dalam geometri itu yang menyangkut sifat bangun-bangun , invarian oleh transformasi dalam grup G, tetapi tidak invarian oleh transformasi yang mana pun dalam grup lain yang memuat G."

Kita telah mengenal macam-macam transformasi, antara lain: translasi, rotasi, refleksi, transformasi identitas, refleksi geser dan dilatasi yang semuanya itu anggota dari grup transformasi geometri Euclides, yang disebut juga transformasi kesebangunan. Masih banyak transformasi-transformasi yang lain , diantaranya transformasi affin dan transformasi proyektif, yang bukan merupakan anggota himpunan transformasi geometri Euclides.

Menurut gambaran Felix Klein, grup transformasi geometri Euclides termuat dalam grup transformasi affin. Demikian pula grup transformasi geometri affin , grup transformasi geometri hiperbolik dan grup transformasi geometri eliptik masing-masing adalah subgrup dari grup transformasi geometri proyektif, sedangkan grup transformasi geometri proyektif merupakan suatu subgrup dari grup transformasi topologi.

Berdasarkan hal-hal tersebut di atas, penulis menjadi tertarik untuk mempelajari transformasi proyektif di bidang Euclides. Selain itu dengan mempelajari transformasi proyektif di bidang Euclides penulis dapat memperluas wawasan mengenai hubungan grup transformasi geometri proyektif dengan grup transformasi geometri Euclides yang sudah dikenal di sekolah menengah.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dirumuskan sebagai berikut :

- apakah yang dimaksud dengan transformasi proyektif di bidang Euclides ?

- bagaimana sifat-sifat transformasi proyektif ?
- bagaimana hubungan grup transformasi geometri proyektif dengan grup transformasi geometri Euclides ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan ini adalah untuk :

- memahami pengertian transformasi proyektif di bidang Euclidaes,
- mengerti sifat-sifat transformasi proyektif,
- dan mengerti hubungan grup transformasi geometri proyektif dengan grup transformasi geometri Euclides.

D. Pembatasan Masalah

Pada pembahasan tentang taransformasi proyektif ini, ada beberapa hal yang tidak dibicarakan. Masalah-masalah tersebut antara lain: aksioma-aksioma dan teorema-teorema dalam geometri proyektif yang tidak berhubungan dengan transformasi proyektif, geometri affin yang merupakan keadaan khusus dari geometri proyektif, bidang proyektif, grup transformasi hiperbolik, grup transformasi eliptik yang masing-masing adalah suatu subgrup dari grup transformasi proyektif, dan grup transformasi topologi yang mencakup grup transformasi proyektif sebagai subgrup dari grup transformasi topologi.

E. Metode Penulisan

Metode yang penulis gunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka dari buku-buku acuan yang digunakan, yang tercantum pada daftar pustaka, sehingga dalam penulisan ini tidak ditemukan hal-hal yang baru.

F. Sistematika Pembahasan

BAB I PENDAHULUAN

BAB II LANDASAN TEORI

A. Fungsi atau Pemetaan

B. Transformasi dalam Geometri

C. Grup

D. Geometri Proyektif

BAB III TRANSFORMASI DALAM GEOMETRI EUCLIDES

A. Transformasi Kongruensi (Isometri)

1. Contoh-contoh transformasi kongruensi (Isometri)

2. Komposisi pada refleksi

B. Transformasi Kesebangunan (Similaritas)

C. Persamaan Umum Isometri dan Similaritas

D. Affinitas Perspektif

BAB IV TRANSFORMASI PROYEKTIF DALAM BIDANG EUCLIDES

A. Transformasi Affin sebagai Hasil Kali Perspektivitas

B. Proyeksi

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Fungsi atau Pemetaan

Telah diketahui bahwa transformasi dalam geometri tidak lepas dari pengertian fungsi atau pemetaan. Dalam geometri, transformasi dalam suatu bidang adalah suatu pemetaan bijektif yang daerah asal dan daerah kawannya berupa himpunan semua titik pada bidang itu sendiri. Oleh karena itu pada bagian ini akan dibahas mengenai fungsi atau pemetaan untuk mempermudah dalam penulisan dan pembahasan di bagian selanjutnya. Pada bagian ini akan disajikan beberapa definisi, teorema maupun lema mengenai fungsi atau pemetaan beserta contoh-contohnya.

Definisi 2.A.1 :

Fungsi f dari A ke B (ditulis f : A $\rightarrow$ B) ialah suatu relasi dari A ke B yang memenuhi sifat : $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(y = f(x))$.

Contoh 2.1

a. Andaikan A={p,q,r} dan B={6,9,10}, f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai f(p)=6, f(q)=10, dan f(r)=9 adalah suatu fungsi dari A ke B.

b. Fungsi lainnya yaitu g: U$\rightarrow$V, dengan U={ p,q,r}, V={6,9,10} dan g(p)=9, g(q)=10, g(r)=9.

c. Pemetaan dari U→V dengan U={p,q,r},V={6,9,10}.

Pemetaan h didefinisikan sebagai h(q)=6, h(q)=10, h(r)=9. Pemetaan di atas bukan merupakan fungsi karena kawan dari q∈U tidak tunggal dan ada p∈U yang tidak mempunyai kawan di V.

Definisi 2.A.2 :

Fungsi f: A→B disebut fungsi injektif (fungsi 1-1) bila dipenuhi : $(\forall x_1, x_2 \in A)$ $(f(x_1)= f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Contoh 2.2:

Fungsi f pada contoh 2.1.a merupakan fungsi injektif, sedangkan fungsi g pada contoh 2.1.b bukan fungsi injektif, karena g(p) = g(r) tetapi p ≠ r.

Definisi 2.A.3 :

Fungsi f : A→B disebut funsi surjektif (onto) bila dipenuhi $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y= f(x))$

Contoh 2.3:

Fungsi f pada contoh 2.1.a. merupakan fungsi surjektif, sedangkan fungsi g pada contoh 2.1.b. bukan fungsi surjektif karena ada 6∈V yang tidak mempunyai kawan di U.

Definisi 2.A.4:

Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif bila fungsi itu fungsi injektif dan fungsi surjektif.

Contoh 2.4:

Fungsi f : A $\rightarrow$ B pada contoh 2.1.a merupakan fungsi bijektif.

Misalkan suatu fungsi memetakan himpunan ke dirinya sendiri yaitu f: A $\rightarrow$ A yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, yaitu, misalkan f memetakan tiap-tiap elemen dalam A ke elemen yang bersangkutan itu sendiri. Maka f disebut fungsi identitas pada A.

Definisi 2.A.5:

Jika f suatu fungsi injektif dari A ke B, maka untuk $x \in$ A dan $y \in$ B, f^{-1} didefinisikan oleh $x = f^{-1}(y)$ jika dan hanya jika $y = f(x)$, f^{-1} dinamakan invers f.

Daerah asal f^{-1} adalah daerah nilai f, dan daerah nilai f^{-1} adalah daerah asal f.

Misalkan f suatu fungsi injektif dari A ke B, ada kemungkinan bahwa $f^{-1}(b)$ untuk $b \in$B dapat terdiri dari {} dan dapat terdiri dari satu elemen di A.

- Untuk kemungkinan pertama, jika terdapat $b \in$ B, $f^{-1}(b)$ tidak mempunyai kawan di A, maka f^{-1} dari B ke A bukan merupakan fungsi. Karena ada elemen di B yang tidak mempunyai kawan di A berarti f : A $\rightarrow$ B bukan merupakan fungsi surjektif.
- Kemungkinan kedua, untuk setiap b$\in$B, $f^{-1}(b)$ mempunyai kawan tepat satu elemen di A, ini berarti untuk b_1, $b_2 \in$ B, $f^{-1}(b_1)= f^{-1}(b_2)$ maka $b_1 = b_2$, yang artinya f^{-1} merupakan fungsi injektif dari B ke A.

Karena setiap $b \in$B mempunyai kawan $(a \in$A) $\ni$($b = f(a)$) maka f : A $\rightarrow$B merupakan fungsi surjektif. Berarti pula bahwa f : A $\rightarrow$B adalah fungsi bijektif. Dalam keadaan ini, bila f : A $\rightarrow$B bijektif, maka kita menyebut f^{-1} fungsi invers f.

Jadi dari pernyataan-pernyataan di atas umumnya untuk suatu fungsi f dari A ke B, f^{-1} belum tentu merupakan suatu fungsi.

Definisi 2.A.6 :

Misalkan f : S$\rightarrow$T dan g : T$\rightarrow$U, maka komposisi dari f dan g adalah suatu fungsi $g \circ f$: S$\rightarrow$U yang didefinisikan sebagai suatu fungsi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in$ S.

Penulisan $g \circ f$ dapat juga dinyatakan sebagai gf, yang dapat dibaca sebagai hasil kali f dan g. jika $g = f$, maka hasil kalinya adalah f^2.

Contoh 2.6 :

Untuk tiap-tiap bilangan real, misalkan f menetapkan kuadratnya, yaitu $f(x) = x^2$.

Untuk tiap-tiap bialngan real, misalkan g menetapkan bilangan yang bersangkutan ditambah 3, yang berarti $g(x) = x + 3$, maka

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 25$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = \ \ 7$$

kita perhatikan bahwa hasil kali fungsi $f \circ g$ dan $g \circ f$ bukanlah fungsi yang sama.

Dapat dicari suatu pernyataan umum untuk hasil kali fungsi ini.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

Teorema 2.A.1 :

Misalkan f: S→T dan g : T→U

a. Jika f dan g injektif, maka $g \circ f$ injektif.

b. Jika $g \circ f$ injektif, maka f injektif.

c. Jika f dan g surjektif, maka $g \circ f$ surjektif.

d. Jika $g \circ f$ surjektif, maka g surjektif.

Bukti :

a. Diketahui f dan g keduanya fungsi - fungsi injektif. Untuk membuktikan bahwa $g \circ f$ adalah fungsi injektif harus ditunjukkan bahwa jika $x_1, x_2 \in$ S dan $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, maka $x_1 = x_2$. Diambil sebarang $x_1, x_2 \in$ S sedemikian hinga $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, akan ditunjukkan $x_1 = x_2$.

$(g \circ f)(x_1)$	$=$	$(g \circ f)(x_2)$	diperoleh
$g(f(x_1))$	$=$	$g(f(x_2))$	berdasarkan definisi komposisi fungsi
$f(x_1)$	$=$	$f(x_2)$	karena g fungsi injektif
x_1	$=$	x_2	karena f fungsi injektif

terbukti bahwa $g \circ f$ injektif.

b. Diketahui $g \circ f$ injektif, akan dibuktikan f injektif.

Untuk membuktikannya, harus ditunjukkan bahwa untuk sebarang $x_1, x_2 \in$S, jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Diambil sebarang x_1 , $x_2 \in$ S sedemikian hingga $f(x_1) = f(x_2)$, maka $g(f(x_1)) =$

$g(f(x_2)$ berdasarkan definisi komposisi fungsi diperoleh $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, karena $g \circ f$ injektif maka $x_1 = x_2$.

Terbukti bahwa f injektif.

c. Diketahui f dan g keduanya fungsi surjektif. Untuk membuktikan $g \circ f$ fungsi surjektif harus ditunjukkan bahwa jika $z \in$U, maka ada sebuah elemen $x \in$S sedemikian hingga $(g \circ f)(x) = z$. Misalkan $z \in$U, karena g surjektif, maka ada $y \in$T sedemikian hingga $g(y) = z$. Karena f juga surjektif, maka ada $x \in$S sedemikian hingga $f(x) = y$, sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

   Jadi $g \circ f$ adalah surjektif.

d. Diketahui $g \circ f$ surjektif, akan ditunjukkan g surjektif.

   Diambil sebarang $z \in$U, karena $g \circ f$ surjektif maka ada $x \in$S sedemikian hingga $(g \circ f)(x) = z$. Sedangkan $(g \circ f)(\text{x}) = g(f(x))$ dengan $f(x) \in$T dan $g(f(x)) = z$. Jadi untuk sebarang $z \in$ U ada $f(x) \in$T sedemikian hingga $g(f(x)) = z$.

   Terbukti bahwa g surjektif.

Definisi 2.A.7 :

Diberikan sebarang himpunan S $\neq \phi$. Operasi biner pada S adalah fungsi dari S $\times$ S $\rightarrow$ S.

Dari definisi 2.A.7 di atas dapat dikatakan bahwa operasi biner bersifat tertutup pada S. Operasi "*" pada S dapat dinyatakan sebagai $*$: S$\times$S $\rightarrow$ S, dengan a*b =c bila dan hanya bila $*(a,b) = c$ untuk sebarang $a,b,c \in$ S.

Contoh 2.7 :

Misalkan **Z** adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi jumlahan pada **Z** dapat didefinisikan sebagai f: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dengan $f(m,n) = m + n$ untuk setiap $m,n \in \mathbf{Z}$.

Lemma 2.A.1 :

Jika $f: S \to T$, $g: T \to U$ dan $h: U \to V$, maka $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Bukti :

Bukti dari lemma 2.A.1 di atas menggunakan definisi 2.A.6 mengenai komposisi fungsi sebagai dasarnya,

$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$ menurut definisi 2.A.6 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= h(g(f(x)))$

$= h((g \circ f)(x))$ menurut definisi 2.A.6, $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$= (h \circ (g \circ f))(x)$ Untuk sebarang $x \in S$

Jadi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Lemma di atas menunjukkan berlakunya sifat assosiatif pada perkalian fungsi.

Teorema 2.A.2 :

Misalkan fungsi f : A→ B adalah bijektif yang berarti f^{-1}: B → A merupakan fungsi. Maka hasil kali fungsi $(f^{-1} \circ f): A \to A$ adalah fungsi identitas pada A, dan hasil kali fungsi $(f \circ f^{-1}): B \to B$ adalah fungsi identitas pada B.

Bukti :

Diketahui bahwa f: A→ B bijektif maka f pastilah injektif sehingga dapat dibentuk f^{-1}: B → A untuk $x_A \in A$, $x_B \in B$ sehingga $x_A = f^{-1}(x_B)$ kemungkinan yang terjadi adalah untuk setiap $x_B \in B$, $f^{-1}(x_B)$ terdiri atas paling banyak satu elemen dari A. Dan karena f : A→B bijektif , sudah tentu f juga surjektif sehingga $(\forall x_B \in B)(\exists x_A \in A) \ni f(x_A) = x_B$. Karenanya $(\forall x_B \in B)(\exists! x_A \in A) \ni f^{-1}(x_B) = x_A$. Jadi untuk setiap $x_B \in B$, $f^{-1}(x_B)$ terdiri atas tepat satu elemen dari A.

Jadi $\forall x_A \in A, (f^{-1} \circ f)(x_A) = f^{-1}(f(x_A))$ komposisi fungsi definisi 2.A.6

$= f^{-1}(x_B)$ definisi fungsi invers 2.A.5

$= x_A$

Jadi $(f^{-1} \circ f)(x_A) = x_A$

$(f \circ f^{-1}): A \to A$ fungsi identitas pada A, dan

$$(\forall x_B \in B)(f \circ f^{-1})(x_B) = f(f^{-1}(x_B)) \quad \text{definisi komposisi fungsi 2.A.6}$$

$$= f(x_A) \quad \text{definisi fungsi invers}$$

$$= x_B$$

Jadi $(f \circ f^{-1})(x_B) = x_B$

$(f \circ f^{-1}): B \to B$ adalah fungsi identitas pada B.

Teorema 2.A.3 :

Fungsi f : S→T adalah fungsi bijektif bila dan hanya bila ada suatu fungsi g : T→S sedemikian hingga $g \circ f$ dan $f \circ g$ berturut-turut adalah fungsi identitas pada S dan T.

Bukti :

a. Diketahui fungsi f : S→T fungsi bijektif. Akan dibuktikan ada suatu fungsi g: T→S sedemikian hingga $g \circ f$ dan $f \circ g$ berturut-turut adalah fungsi identitas pada S dan T. Diambil sebarang $t \in$T, karena f surjektif pasti ada $s \in$S sedemikian hingga $f(s)=t$. Karena f injektif, maka s tersebut pasti tunggal. Didefinisikan fungsi g : T→S dengan $g(t) = s$ bila dan hanya bila $f(s) = t$. Fungsi g disebut fungsi invers dari f. Diambil sebarang $s \in$S, misalkan $f(s) = t$. Dari definisi diperoleh $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(t) = s$. Tampak bahwa $g \circ f$ adalah fungsi identitas dari S. Demikian juga untuk setiap $t \in T$. $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(s) = t$, yaitu $f \circ g$ adalah fungsi identitasi dari T.

b. Jika f : $S \rightarrow T$ adalah suatu fungsi sedemikian hingga ada suatu fungsi g : $T \rightarrow S$ dengan sifat $g \circ f$ dan $f \circ g$ berturut-turut adalah fungsi-fungsi identitas pada S dan T, maka akan ditunjukkan bahwa f : $S \rightarrow T$ adalah fungsi bijektif.

1. Ditunjukkan bahwa f : $S \rightarrow T$ adalah fungsi surjektif. Diambil sebarang $t \in T$, karena $f \circ g$ adalah fungsi identitas pada T maka $t = (f \circ g)(t) = f(g(t))$. Karena g :$T \rightarrow S$ adalah fungsi, maka untuk sebarang $t \in T$ ada $s \in S$ sedemikian hingga $g(t) = s$. Oleh karena itu diperoleh $f(g(t)) = f(s) = t$. Jadi untuk setiap $t \in T$ ada $s \in S$ sedemikian hingga $f(s) = t$. Jadi f adalah fungsi surjektif.

2. Ditunjukkan bahwa f : $S \rightarrow T$ adalah fungsi injektif. Dimisalkan $f(s_1) = f(s_2)$ untuk sebarang s_1 , $s_2 \in S$. Dengan menggunakan sifat bahwa $g \circ f$ adalah fungsi identitas pada S diperoleh : $s_1 = (g \circ f)(s_1) = g(f(s_1))$, karena $f(s_1) = f(s_2)$ maka diperoleh $g(f(s_1)) = g(f(s_2)) = (g \circ f)(s_2) = s_2$. Jadi $s_1 = s_2$. Terbukti bahwa f adalah fungsi injektif.

Karena f : $S \rightarrow T$ merupakan fungsi surjektif dan juga fungsi injektif maka terbukti bahwa f merupakan fungsi bijektif. Terbukti.

B. Transformasi dalam Geometri

Dalam bagian ini akan dibicarakan mengenai transformasi dalam geometri secara umum yang akan sangat membantu kita. Transformasi dalam geometri ini berkaitan erat dengan pengertian fungsi yang telah kita bicarakan. Adapun definisi dari transformasi geometri adalah sebagai berikut:

Definisi 2.B.1 :

Transformasi geometri adalah suatu fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada suatu bidang ke himpunan semua titik pada bidang itu sendiri.

Dengan kata lain, jika diberikan suatu transformasi α berrlaku bahwa untuk setiap titik $\mathbf{P}$ terdapat dengan tunggal titik $\mathbf{P}'$ sedemikian hingga $\alpha(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$dan sebaliknya untuk setiap titik $\mathbf{Q}'$ terdapat dengan tunggal titik $\mathbf{Q}$ sedemikian hingga $\mathbf{Q}' = \alpha(\mathbf{Q})$. Transformasi yang kita bicarakan adalah transformasi dari himpunan titik-titik dalam bidang Euclides.

Seperti halnya pada fungsi, pada transformasi dikenal juga hasil kali atau komposisi dua transformasi.

Definisi 2.B.2 :

Misalkan α dan β dua transformasi dengan

$\alpha : V \rightarrow V$

$\beta : V \rightarrow V$

maka hasil kali atau komposisi dari α dan βyang ditulis sebagai $\alpha \circ \beta$ didefinisikan sebagai $(\alpha \circ \beta)(p) = \alpha[\beta(p)], \forall p \in V$.

Pada definisi 2.b.1 dinyatakan bahwa transformasi merupakan fungsi yang bijektif, dengan demikian sifat-sifat fungsi bijektif merupakan sifat-sifat transformasi.

Ada pun beberapa sifat fungsi yang merupakan sifat transformasi adalah sebagai berikut :

i) Transformasi merupakan fungsi yang bijektif, yaitu fungsi yang surjektif dan injektif. Maka menurut teorema 2.a.1 (a) dan (c), komposisi dua fungsi yang bijektif adalah fungsi yang bijektif pula. Dengan demikian transformasi memenuhi sifat tertutup terhadap komposisi.

ii) Lemma 2.a.1 menyatakan bahwa pada komposisi fungsi berlaku sifat assosiatif, ini berarti sifat assosiatif berlaku juga pada komposisi transformasi.

iii) Seperti identitas pada fungsi yang sering disebut sebagai fungsi identitas, yaitu suatu fungsi yang memetakan suatu anggota himpunan pada dirinya sendiri, maka transformasi juga mempunyai transformasi identitas yang mentransformasikan sebarang titik pada suatu bidang ke titik itu sendiri.

iv) Pada fungsi bijektif terdapat invers fungsi untuk sebarang fungsi sehingga komposisi dari fungsi itu dengan inversnya adalah fungsi identitas. Demikian juga pada transformasi, setiap transformasi mempunyai inversnya sehingga komposisi transformasi itu dengan inversnya menghasilkan transformasi identitas.

Menurut sifat-sifat di atas himpunan transformasi membentuk grup transformasi terhadap komposisi transformasi. Untuk lebih jelasnya mengenai grup, selanjutnya akan dibahas mengenai grup dan beberapa sifat yang dimilikinya.

C. Grup

Dalam penulisan ini pengertian grup diperlukan karena permasalahan mengenai transformasi proyektif ini mencakup suatu grup. Oleh karena itu, pada bagian ini akan dibicarakan mengenai definisi-definisi penting tentang grup serta teorema-teorema yang dibuktikan berikut ini.

Definisi 2.C.1 :

Suatu himpunan G yang tidak kosong disebut grup bila dalam G didefinisikan suatu operasi biner "*" sedemikian hingga memenuhi aksima-aksioma berikut :

(1) Operasi * bersifat assosiatif, yaitu : $a * (b * c) = (a*b)*c$, $\forall a,b,c \in G$.

(2) Ada elemen identias $i \in G$ sedemikian hinga berlaku $i * a = a * i = a$, $\forall a \in G$.

(3) Setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers yang juga dalam G yaitu terdapat $x \in G$ sedemikian hingga $a*x = x*a = i$. Invers dari a dilambangkan dengan a^{-1}.

Definisi 2.C.2 :

Bila dipenuhi juga $a*b = b*a$ untuk sebarang $a,b \in G$, maka G disebut grup komutatif (grup abelian).

Berikut ini kita ulang kembali beberapa teorema mengenai grup tanpa bukti.

Teorema 2.C.1 :

Bila G grup, maka elemen identitas dlaam G adalah tunggal.

Teorema 2.C.2 :

Bila G grup, maka masing-masing elemen dalam G mempunyai invers yang tunggal dalam G.

Definisi 2.C.3 :

Suatu himpunan bagian $H \neq \{\}$ dari suatu grup G disebut subgrup dari G, bila H membentuk grup terhadap operasi pada G.

Lemma 2.C.1 :

Misalkan (G, $*$) grup dan H subgrup dari G

a) Jika f elemen identitas dari H dan i elemen identitas dari G, maka $f = i$.

b) Jika $a \in H$, maka invers dari a di H sama dengan invers dari a di G.

Teorema 2.C.3 :

Misalkan G grup dengan operasi $*$ dan H himpunan bagian G, H subgrup dari grup G bila dan hanya bila:

a) $H \neq \{\}$,

b) Jika $a, b \in H$, maka $a * b \in H$,

c) Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui H subgrup dari grup G maka $H \neq \phi$ sebab $e \in H$.

sifat b) dan c) dipenuhi di H sebab terhadap operasi "$*$", H merupakan grup.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$ sehingga $a * a^{-1} = e \in H$. Jadi ada elemen identitas di H. Sifat assosiatif jelas dipenuhi di H sebab $H \subset G$ dan diketahui $(G, *)$ grup.

D. Geometri Proyektif

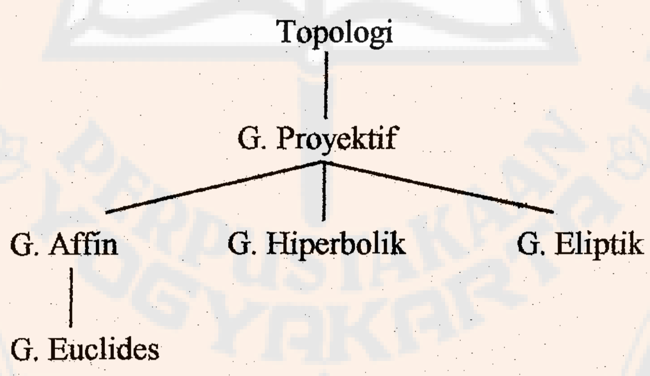
Geometri proyektif dibedakan menjadi dua yaitu geometri proyektif sintetik dan geometri proyektif analitik. Geometri proyektif sintetik merupakan geometri proyektif yang pembahasannya menggunakan sistem aksiomatis, sedangkan geometri proyektif analitik merupakan geometri proyektif yang dibahas secara aljabar.

Dalam hal ini geometri proyektif yang dibicarakan bukan geometri proyektif sintetik, melainkan geometri proyektif di sini dibicarakan secara analitik. Ada pun definisi geometri yang digunakan di sini sebagai dasar adalah definisi geometri menurut Felix Klein (1849 - 1925) dari Jerman. Dalam program Erlangernya yang disampaikan di Erlangen pada tahun 1872, Felix Klein mendefinisikan geometri berdasarkan grup transformasinya.

Definisi 2.D.1 :

Suatu geometri didefinisikan oleh suatu grup G dari transformasi - transformasi, apabila definisi dan teorema-teorema dalam geometri itu yang menyangkut sifat bangun-bangun, invarian oleh transformasi dalam grup G, tetapi tidak invarian oleh transformasi yang mana pun dalam grup lain yang memuat G.

Dari pandangan Felix Klein tentang geometri, maka dapat digambarkan ikhtisar geometri sebagai berikut :



Ikhtisar geometri di atas menyatakan bahwa grup transformasi geometri Euclides termuat dalam grup transformasi geometri affin. Demikian pula grup transformasi geometri affin, grup transformasi geometri hiperbolik dan grup transformasi geometri eliptik masing - masing termuat dalam grup transformasi geometri proyektif. Grup transformasi geometri proyektif ini termuat dalam grup transformasi topologi yang merupakan cabang geometri yang paling umum, yang termuda dan masih terus berkembang.

BAB III

TRANSFORMASI DALAM GEOMETRI EUDLIDES

Sampai pada abad XVII, geometri Euclides hanya dipelajari dan dikembangkan dalam bidang-bidang non-aljabar saja. Sifat-sifat metrik adalah sifat-sifat yang berkaitan dengan pengukuran, seperti jarak dua titik, panjang sebuah ruas garis, ukuran sudut dan ukuran luas. Pada perkembangan selanjutnya digunakan metode aljabar yang berhubungan dengan sistem koordinat, juga sifat-sifat non-metrik dari bangun-bangun geometri. Pembicaraan mengenai sifat-sifat non-metrik dilakukan antara lain melalui pembahasan tentang grup transformasi.

Grup transformasi geometri Euclides disusun oleh transformasi kongruensi (isometri) dan transformasi kesebangunan (similaritas).

A. Transformasi Kongruensi (Isometri)

Untuk membahas transformasi kongruensi (isometri) terlebih dahulu dibahas hal-hal mendasar yang mendukung pembahasan isometri. Dalam membahas transformasi perlu dipelajari unsur-unsur yang invarian (bertahan/tetap) terhadap transformasi tersebut. Suatu titik yang invarian terhadap transformasi α disebut titik invarian dan suatu garis yang invarian terhadap transformasi α disebut suatu garis invarian.

Suatu keadaan khusus untuk transformasi, yaitu transformasi identitas, yang membiarkan semua titik invarian. Transformasi identitas $\mathbf{i}$ adalah transformasi yang memenuhi $\mathbf{i}(P) = P$ untuk setiap titik P. Tampak bahwa transformasi **i** mengawetkan semua titik pada bidang. Jadi semua titik pada bidang adalah titik invarian oleh **i**.

Definisi 3.A.1 :

Suatu transformasi disebut suatu kolineasi bila hasil transformasi sebuah garis akan berupa garis lagi, bila g garis maka transformasi α adalah suatu kolineasi bila $\alpha(g)$ berupa garis lagi yang tak lain adalah himpunan titik $P' = \alpha(P)$ dengan P terletak pada garis g.

Definisi 3.A.2 :

Suatu transformasi γ merupakan suatu involusi bila $\gamma \neq \mathbf{i}$ dan $\gamma^2 = \mathbf{i}$, ini berarti $\gamma = \gamma^{-1}$.

Definisi 3.A.3 :

Transformasi α merupakan suatu isometri bila dan hanya bila untuk setiap pasang titik P dan Q dipenuhi $P'Q' = PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$.

Dengan perkataan lain definisi di atas menyatakan bahwa isometri mengawetkan jarak, sifat-sifat lain dari isometri tercakup dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.A.1 :

Isometri adalah suatu kolineasi.

Bukti :

Misalkan α suatu isometri, A dan B dua titik yang berlainan sehingga dapat ditarik garis $\overleftrightarrow{AB}$.

Misalkan $\alpha(A) = A'$ dan $\alpha(B) = B'$. Jika C suatu titik pada garis $\overleftrightarrow{AB}$ akan ditunjukkan bahwa C' pada garis $\overleftrightarrow{A'B'}$. Salah satu dari ketiga titik itu, misalkan B di antara A dan C sehingga

(1) $AB + BC = AC$.

Misalkan $\alpha(C) = C'$. Karena α suatu isometri maka $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Sehingga diperoleh

(2) $A'B' + B'C' = A'C'$.

Jika C' tidak pada garis $\overleftrightarrow{A'B'}$, A',B',C' merupakan titik sudut-titik sudut segitiga, maka persamaan (2) tidak dipenuhi. Karena pastilah $A'B' + B'C' > A'C'$.

Dengan demikian C' ada pada garis $\overleftrightarrow{A'B'}$. Dengan cara serupa dapat dibuktikan jika C di antara A dan B serta A di antara B dan C.

Terbukti bahwa isometri merupakan kolineasi.

Teorema 3.A.2 :

Himpunan semua isometri membentuk grup $(G, \circ)$.

Bukti :

Karena himpunan isometri merupakan himpunan bagian dari transformasi, maka menurut teorema 2.C.3 halaman 20 cukup dibuktikan bahwa $G \neq \{\}$, G tertutup terhadap operasi "$\circ$" dan setiap elemen dalam G mempunyai invers dalam G.

(a) G pasti memuat paling sedikit satu isometri, yaitu transformasi identitas i ,

jadi $G \neq \{\}$.

(b) Dimisalkan sebarang isometri α, β dalam G akan ditunjukkan $\beta \circ \alpha$ suatu

isometri dalam G. Misalkan A, B sebarang titik berlainan pada bidang.

Jika $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$

$\beta(A') = A''$, dan $\beta(B') = B''$, maka

$(\beta \circ \alpha)(A) = \beta(\alpha(A)) = \beta(A') = A''$ dan

$(\beta \circ \alpha)(B) = \beta(\alpha(B)) = \beta(B') = B''$.

Karena α isometri, maka $AB = A'B'$ dan karena β isometri, maka $A'B' = A''B''$. Jadi $\beta \circ \alpha$ adalah isometri. Jadi G tertutup terhadap operasi " $\circ$ ".

(c) Misal α sebarang isometri dalamG, dan A′, B′ sebarang titik pada bidang.

Karena α adalah transformasi, pastilah terdapat titik A dan B sedemikian hingga $\alpha(A) = A'$ dan $\alpha(B) = B'$. Karena transformasi α isometri maka $A'B' = AB$.

$\alpha^{-1}(A') = \alpha^{-1}(\alpha(A)) = \alpha^{-1} \circ \alpha(A) = i\,(A) = A$

$\alpha^{-1}(B') = \alpha^{-1}(\alpha(B)) = \alpha^{-1} \circ \alpha\,(B) = i\,(B) = B$ dan

memenuhi $AB = A'B'$. Jadi α^{-1} adalah suatu isometri.

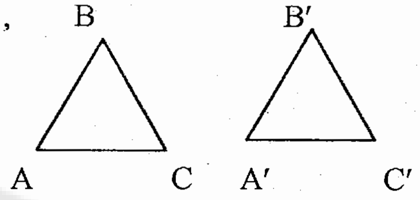
Terbukti bahwa himpunan isometri membentuk suatu grup.

Teorema 3.A.3 :

Suatu isometri mentransformasikan suatu segitiga ke segitiga yang kongruen dengan segitiga semula.

Bukti :

Misalkan diketahui suatu segitiga ABC. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{BC}$ sisi-sisi Δ ABC. A, B, C titik sudut – titik sudut Δ ABC, dengan $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$, $\alpha(C) = C'$ sedemikian hingga A′, B′, C′ titik sudut-titik sudut Δ A′B′C′.



gambar 3.a.1

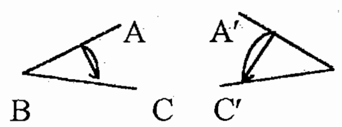
Karena transforamsi α isometri maka $AB = A'B'$, $AC = A'C$ dan $BC = B'C'$. Berturut-turut sisi kedua segitiga itu sama panjang. Menurut teorema geometri dasar $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Terbukti.

Dengan sendirinya teorema 3.A.3 di atas menyatakan bahwa isometri tidak mengubah besar sudut antara dua garis. sebagai akibat lain juga tidak mengubah kesejajaran.

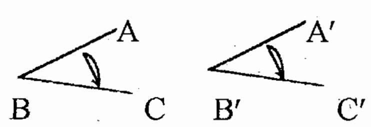
Sebelum membicarakan contoh-contoh isometri, perlu diketahui definisi mengenai transformasi searah dan transformasi mengubah arah.

Definisi 3.A.4 :

Transformasi yang mempertahankan arah setiap sudut disebut searah (langsung), sedangkan yang tidak mempertahankan arah setiap sudut disebut transformasi mengubah arah.



gambar 3.a.2a



gambar 3.a.2b

Gambar 3.a.2a menunjukkan transformasi mengubah arah, sedangkan gambar 3.a.2b menunjukkan transformasi searah (tidak mengubah arah).

1. Beberapa contoh isometri

a. Translasi

Definisi 3.A.5 :

Suatu translasi adalah suatu pemetaan yang mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ dengan vektor translasi (a,b).

Notasi : $T_{\overrightarrow{AB}}$

Himpunan semua ruas garis berarah yang menunjukkan satu translasi disebut vektor, yaitu vector translasi. Setiap ruas garis berarah menentukan sebuah translasi, jika $\overrightarrow{AB}$ suatu ruas garis berarah maka dengan notasi $T_{\overrightarrow{AB}}$ maksudnya adalah suatu translasi (geseran) yang sesuai dengan $\overrightarrow{AB}$. Berikut ini diberikan teorema-teorema mengenai sifat-sifat translasi dan ada beberapa teorema diberikan tanpa bukti.

Teorema 3.A.4 :

$T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ bila dan hanya bila $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Suatu translasi $T_{\overrightarrow{AB}}$ akan menjadi identitas I bila A = B, yaitu AB = 0 (nol).

Teorema 3.A.5 :

Bila A, B, C tiga titik tak segaris maka $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ bila dan hanya bila CABD merupakan jajaran genjang.

gambar 3.a.3

Teorema 3.A.6 :

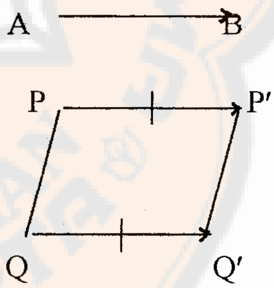
Translasi adalah suatu isometri.

Bukti :

Misalkan $T_{\overrightarrow{AB}}$ memetakan P ke P′ yaitu $T_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$ dan Q ke Q′, yaitu $T_{\overrightarrow{AB}}(Q) = Q'$ yang memenuhi $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{AB}$, akan dibuktikan P′Q′ =PQ

Bila P,P′,Q′ tidak segaris maka QPP′Q′ jajar genjang (menurut teorema 3.A.5), sehingga PQ =P′Q′ dan $\overline{PQ} \overset{//}{=} \overline{P'Q'}$.

Jadi P′Q′ = PQ. Terbukti.



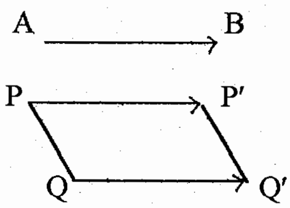
gambar 3.a.4

Karena setiap isometri adalah kolineasi maka dengan bukti di atas dapat disimpulkan bahwa translasi suatu kolineasi.

Teorema 3.A.7 :

Translasi mempertahankan kesejajaran.

Bukti :



gambar 3.a.5

Misalkan $T_{\overrightarrow{AB}}$ sebarang translasi yang memetakan P ke P′ dan Q ke Q′, berarti $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{AB}$. Apabila P,P′, Q titik–titik tak segaris (non-kolinear), maka menurut teorema 3.A.5, QPP′Q′ merupakan jajar genjang, sehingga $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$. Jadi $\overline{PQ} // \overline{P'Q'}$. Terbukti.

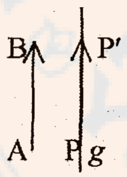
Teorema 3.A.8 :

Terhadap $T_{\overrightarrow{AB}} \neq I$ tidak terdapat titik tetap. Semua garis yang sejajar $\overrightarrow{AB}$ akan menjadi garis tetap (invarian)

Bukti :

Untuk titik tetap (invarian) sudah cukup jelas.

Untuk garis invariant, misalkan g garis yang sejajar $\overrightarrow{AB}$ diambil sebarang titik P



gambar 3.A.6

pada *g*, maka $T_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$ dan memenuhi $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$. Berarti $\overrightarrow{PP'} // \overrightarrow{AB}$. Karena *g* sejajar $\overrightarrow{AB}$, P pada *g* dan $\overrightarrow{PP'} // \overrightarrow{AB}$, maka pastilah P′ pada *g*, dan ini berlaku untuk setiap titik pada *g*. Jadi $T_{\overrightarrow{AB}}(g) = g$.

Terbukti bahwa garis g garis invariant (garis tetap).

Teorema 3.A.9 :

Hasil kali dua translasi $T_{\overrightarrow{AB}}$ dengan $T_{\overrightarrow{CD}}$ akan berupa translasi lagi yaitu $T_{\overrightarrow{PQ}}$ dengan $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Bukti :

Untuk sebarang titik Q dalam bidang α, berlaku $T_{\overrightarrow{AB}}(Q) = Q'$ dengan $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{AB}$.

$T_{\overrightarrow{CD}}(Q') = Q''$ dengan $\overrightarrow{Q'Q''} = \overrightarrow{CD}$, maka $T_{\overrightarrow{CD}} T_{\overrightarrow{AB}}(Q) = T_{\overrightarrow{CD}}(T_{\overrightarrow{AB}}(Q)) = T_{\overrightarrow{CD}}(Q') = Q''$

dengan $\overrightarrow{QQ''} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'Q''} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ}$. Jadi $T_{\overrightarrow{CD}} T_{\overrightarrow{AB}}$ meupakan translasi lagi dengan vektor tanslasi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Teorema 3.A.10 :

Himpunan semua translasi merupakan grup abelian $(G, \circ)$.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa :

a) $G \neq \{\}$

G pasti memuat paling sedikit satu transformasi, yaitu trasnformasi identitas *i*.

Jadi $G \neq \{\}$.

b) G tertutup terhadap operasi "$\circ$".

Sudah dibuktikan pada teorema 3.A.9.

c) Setiap elemen dalam G mempunyai invers dalam G.

Diambil sebarang elemen $T_{\overrightarrow{AB}} \in G$.

Misalkan invers dari $T_{\overrightarrow{AB}}$ adalah $T_{\overrightarrow{CD}}$ sedemikian sehingga

$$T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} = i = T_{\overrightarrow{AA}}$$

$$T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{AA}}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AA}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

Jadi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ sehingga $T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{BA}}$.

Jadi $T_{\overrightarrow{AB}}$ mempunyai invers yaitu $T_{\overrightarrow{AB}}^{-1} = T_{\overrightarrow{BA}} \in G$. Terbukti.

d) Pada G berlaku sifat assosiatif terhadap operasi "$\circ$".

Diambil sebarang $T_{\overrightarrow{AB}}, T_{\overrightarrow{CD}}, T_{\overrightarrow{EF}} \in G$ ditunjukkan bahwa

$$\left(T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}}\right) \circ T_{\overrightarrow{EF}} = T_{\overrightarrow{AB}} \circ \left(T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{EF}}\right)$$

$$\left(T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}}\right) \circ T_{\overrightarrow{EF}} = \left(T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}\right) \circ T_{\overrightarrow{EF}}$$

$$= T_{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}}$$

$$= T_{\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)}$$ Pada penjumlahan vektor berlaku sifat assosiatif

$$= T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)}$$

$$= T_{\overrightarrow{AB}} \circ \left(T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{EF}}\right)$$

Terbukti pada G berlaku sifat assosiatif terhadap operasi "$\circ$".

e) Pada G berlaku sifat komutatif terhadap operasi "$\circ$".

Misalkan $T_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$ dan $T_{\overrightarrow{CD}}(P') = P''$ untuk sebarang titik P pada bidang.

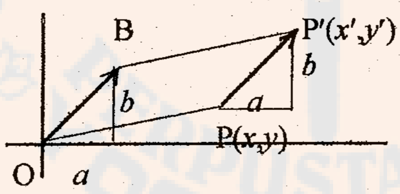
Maka $\left(T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}\right)(P) = T_{\overrightarrow{CD}}\left(T_{\overrightarrow{AB}}(P)\right) = T_{\overrightarrow{CD}}(P') = P''$ dengan $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Karena jumlahan dua vektor bersifat komutatif, maka berlaku $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. Sehingga $T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}}$. Terbutki pada G berlaku sifat komutatif terhadap operasi "$\circ$".

Dari a), b), c), d), e), terbukti bahwa himpunan translasi membentuk grup abelian.

Persamaan Translasi

Misalkan ditentukan B(a, b) pada bidang XOY. Bila suatu titik P(x,y) pada bidang XOY maka $T_{\overrightarrow{OB}}(P) = P'$ yang sama dengan $T_{\overrightarrow{OB}}((x,y)) = (x+a, y+b)$, $T_{\overrightarrow{OB}}$ yang memetakan P(x,y) ke P'(x',y') di atas dapat dirumuskan sebagai berikut



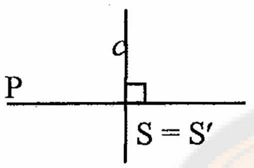
gambar 3.A.7

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad \text{atau} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

b. Refleksi

Definisi 3.A.6:

Refleksi pada garis c adalah pemetaan yang didefinisikan oleh



$$Mc(P) = \begin{cases} P, & \text{jika titik P pada } c \\ P', & \text{jika P di luar } c, \end{cases}$$

gambar 3.a.8 dengan c sumbu dari $\overline{PP'}$

c disebut sebagai sumbu refleksi atau sering disebut juga cermin.

Dari definisi di atas dapat dilihat bahwa melalui refleksi Mc, P akan tetap jika P pada c oleh refleksi Mc. Dengan kata lain refleksi Mc mempunyai garis tetap titik pertitik yaitu sumbu c. Titik-titik pada sumbu c ini disebut titik-titik invarian dari refleksi Mc. Pada refleksi Mc, setiap garis yang tegak lurus c merupakan garis tetap tetapi tidak titik pertitik, maksudnya garisnya tetap tetapi titik-titik pada garis tidak tetap.

Teorema 3.A.11 :

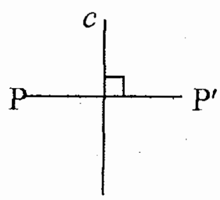
Refleksi Mc merupakan suatu involusi.

Bukti :

$Mc \neq i$, diambil sebarang titik P pada bidang, dengan $Mc(P) = P'$. Akan ditunjukkan $Mc^2 = i$. c sebagai sumbu $\overline{PP'}$

$Mc(P) = P'$ ...(1), karena c sumbu $\overline{PP'}$ maka

$Mc(P') = P$ ...(2)



gambar 3.a.9

dengan mensubstitusikan (1) ke (2) diperoleh

$Mc(P') = Mc(Mc(P)) = Mc^2\ (P) = P$

Untuk $Mc \neq i$, $Mc^2(P) = P$

Terbukti bahwa Mc suatu involusi.

Teorema 3.A.12 :

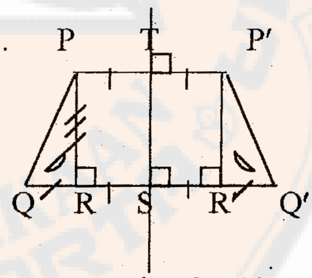
Refleksi merupakan suatu isometri.

Bukti :

Untuk menunjukkan refleksi merupakan suatu isometri, diambil sebarang refleksi Mc dengan cermin c, dan sebarang titik P dan Q yang berlainan.

$P' = Mc(P)$ dan $Q' = Mc(Q)$ harus ditunjukkan bahwa $PQ = P'Q'$.

c sumbu dari $\overline{PP'}$ dan $\overline{QQ'}$ sehingga $\overline{PP'} // \overline{QQ'}$. $\overline{PP'}$ melalui T pada c dan $\overline{QQ'}$ melalui S pada c sehingga $\overline{PT} \cong \overline{TP'}$ dan $\overline{QS} \cong \overline{SQ'}$ ditarik garis $\overline{PR} \perp \overline{QQ'}$ sehingga $\overline{PR}$ $//c$ dengan R pada $\overline{QQ'}$ dan $R' = Mc(R)$. c sumbu $\overline{RR'}$. Jadi $\overline{RR'}$ pada $\overline{QQ'}$ sehingga $\overline{RS} \cong \overline{SR'}$.



Sekarang kita lihat $\overline{QR}$ dan $\overline{R'Q'}$

$QR = QS - RS = SQ' - SR' = R'Q'$

Jadi $\overline{QR} \cong \overline{R'Q'}$ ...(1)

gambar 3.a.10

Sekarang kita lihat $\overline{PP'} // \overline{QQ'}$ maka $\overline{PT} // \overline{RS}$.

$\overline{PT} // \overline{RS}$ dan $\overline{PR} // \overline{TS}$ sehingga $\overline{PT} \cong \overline{RS}$ dan $\overline{PR} \cong \overline{TS}$, telah diperoleh $\overline{PT} \cong \overline{TP'}, \overline{RS} \cong \overline{SR'}$ maka $\overline{TP'} \cong \overline{SR'}$

$\therefore\ \overline{PP'} \cong \overline{RR'}$ dan $\overline{PP'} // \overline{RR'}$

akibatnya $\overline{PR} // \overline{P'R'}$ dan $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$ ...(2)

karena $\overline{PR} \perp \overline{QQ'}$ maka $\overline{P'R'} \perp \overline{QQ'}$ sehingga $m\angle PRQ = 90° = m\angle P'R'Q'$

diperoleh $\overline{QR} \cong \overline{R'Q'}, \angle PRQ \cong \angle P'R'Q', \overline{PR} \cong \overline{P'R'}$

$\therefore \Delta PRQ \cong \Delta P'R'Q'$

$\therefore \overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$

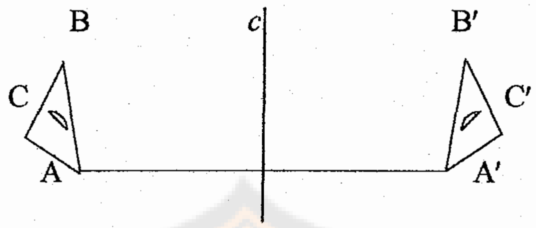
terbukti bahwa $PQ = P'Q'$, jadi refleksi adalah isometri.

Gambar 3.a.10 pada bukti teorema 3.A.12, memperlihatkan bahwa refleksi memetakan ΔPRQ ke $\Delta P'R'Q'$. Arah sudut $\angle PRQ$ pada ΔPRQ berlawanan dengan arah sudut $\angle P'R'Q'$ pada $\Delta P'R'Q'$. Arah sudut $\angle PRQ$ searah dengan perputaran jarum jam, sedangkan hasil refleksinya $\angle P'R'Q'$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam.

Definisi 3.A.7 :

Transformasi yang mempertahankan arah setiap sudut disebut transformasi searah, transformasi yang tidak mempertahankan arah setiap sudut disebut transformasi mengubah arah.

Refleksi merupakan isomeri yang mengubah arah. Berikut ini gambar yang menunjukkan refleksi merupakan isometri yang mengubah arah.

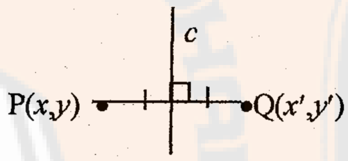


gambar 3.a.11

Hasil kali dua refleksi merupakan isometri yang tidak mengubah arah, dan itu bukan suatu refleksi. Pernyataan itu menunjukkan bahwa refleksi tidak memenuhi sifat tertutup terhadap perkalian. Jadi refleksi tidak membentuk suatu grup.

Persamaan umum refleksi akan kita peroleh sebagai berikut, misalkan Mc dengan persamaan sumbu c

c : $\quad ax + by + c = 0 \quad$ ...(1)



gambar 3.a.12

misalkan suatu titik P = (x, y) dan

Mc(P) = (x', y') = Q. Untuk P di luar garis / sumbu c maka PQ$\perp c$, sehingga diperoleh persamaan

$$b(x' - x) = a(y' - y)$$

sedemikian hingga $bx' - ay' = bx - ay$ ...(2)

Misalkan titik potong $\overline{PQ}$ dengan c adalah R, karena R tepat di tengah $\overline{PQ}$, maka diperoleh R$\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ ...(3)

R adalah titik tengah $\overline{PQ}$ dan terletak pada c, maka didapat

$a\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) + b\left(\dfrac{y+y'}{2}\right) + c = 0$ dengan mensubstitusikan (3) ke (1) sedemikian hingga $ax + ax' + by + by' = -2c$

dan diperoleh $\quad ax' + by' = -2c - ax - by \qquad ...(4)$

Dengan mengeliminir y' dari (2) dan (4) diperoleh

$$b^2x' + a^2x' = b^2x - a^2x - aby - aby - 2ac$$

dengan sedikit perhitungan diperoleh

$$(b^2 + a^2)\, x' = b^2x + a^2x - 2a^2x - 2aby - 2ac \text{ sehingga}$$

$$x' = \frac{(b^2 + a^2)x - 2a(ax + by + c)}{b^2 + a^2}$$

$$= x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \qquad ...(5)$$

Dengan mengeliminir x' dari persamaan (2) dan (4), diperoleh y' sebagai berikut :

$$y' = \frac{b(-2c - ax - by) - a(bx - ay)}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{-2bc - abx - b^2y - abx + a^2y}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2y + b^2y - 2bc - 2abx - 2b^2y}{a^2 + b^2}$$

$$y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \qquad ...(6)$$

sehingga diperoleh persamaan umum refleksi adalah

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y - \dfrac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

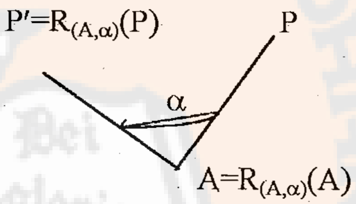
c. Rotasi

Definisi 3.A.8 :

Misalkan A suatu ttik dan α suatu sudut. Pemetaan yang memetakan A pada dirinya sendiri dan titik yang lain P pada bidang ke titik P′ sedemikian hingga $\overline{AP} = \overline{AP'}$ dan $m\angle PAP' = \alpha$, disebut suatu rotasi.

A disebut sebagai pusat rotasi, sedangkan α adalah sudut putar. Rotasi tersebut dinotasikan sebagai $R_{(A,\alpha)}$. Definisi diatas menyatakan bahwa

$$\begin{cases} R_{(A,\alpha)}(A) = A \\ R_{(A,\alpha)}(P) = P', \text{ dengan } m\angle PAP' = \alpha. \end{cases}$$



Sudut α positif bila α berlawanan arah dengan arah jarum jam, sudut α negatif bila α searah dengan arah jarum jam. Rotasi dengan α=0 adalah $R_{(A,0)} = I$, untuk kelipatan 2π, R juga suatu identitas. Jika $R_{(A,\alpha)} \neq I$ maka titik tetapnya/titik invariannya hanya A yaitu titik pusatnya.

gambar 3.a.13

Teorema 3.A.13 :

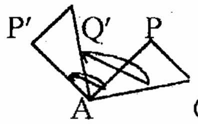
Suatu rotasi adalah suatu isometri.

Bukti :

Dimisalkan $R_{(A,\alpha)}(P) = P'$ dan $R_{(A,\alpha)}(Q) = Q'$ sedemikian sehingga A,P,Q dan A,P′,Q′ merupakan titik sudut - titik sudut segitiga.

Ditunjukkan $\Delta APQ \cong \Delta AP'Q'$.

$\overline{AP} \cong \overline{AP'}, \overline{AQ} \cong \overline{AQ'}$



Karena $R_{(A,\alpha)}(P) = P'$,

sedemikian sehingga $m\angle PAP' = \alpha$

gambar 3.a.14

dan $R_{(A,\alpha)}(Q) = Q'$, sedemikian sehingga $m\angle QAQ' = \alpha$

maka $m\angle PAQ = m\angle P'AQ - m\angle P'AP = m\angle P'AQ - \alpha$

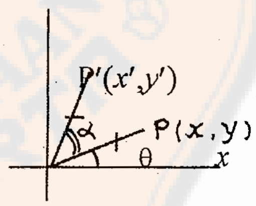
$= m\angle P'AQ - m\angle Q'AQ = m\angle P'AQ'$

$\therefore \angle PAQ \cong \angle P'AQ'$.

Menurut postulat (s.sd.s) $\Delta APQ \cong \Delta AP'Q'$. Jadi $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ terbukti bahwa rotasi suatu isometri.

Untuk mencari persamaan rotasi pertama kita perhatikan rotasi dengan pusat O(0,0) dengan sudut rotasi α pada sistem koordinat kartesius, dan misalkan $P(x,y)$ dan $P'(x',y')$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad ...(1\ )$$



gambar 3.a.15

$x' = r\cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha)$

$= r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha)$

$= x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$y' = r\sin(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha)$

$= r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha$

$= x\sin\theta + y\cos\alpha$

Jadi rotasi dengan pusat O(0,0) dan sudut rotasi α mempunyai persamaan

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \quad ...(2) \text{ atau } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kita tahu bahwa suatu transformasi linear adalah suatu transformasi yang mempunyai bentuk :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = cx + dy + n, \quad \text{dengan } a,b,c,d,m,n \in \mathrm{R} \text{ dan } ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

Dengan demikian persamaan rotasi dengan pusat O(0,0) di atas mewakili suatu transformasi linear yang determinan matriksnya Δ adalah $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Persamaan (2) dapat ditulis dalam x, y, sebagai berikut :

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Teorema 3.A.14 :

Himpunan semua rotasi $(\mathrm{R}, \circ)$dengan titik pusat yang sama adalah grup komutatif.

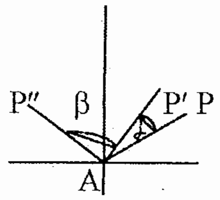
Bukti :

Karena rotasi merupakan himpunan bagian dari isometri, dan isometri merupakan suatu grup terhadap operasi "$\circ$", maka cukup dibuktikan bahwa R tidak kosong, R tertutup terhadap operasi "$\circ$", setiap elemen R mempunyai invers dalam R dan operasi "$\circ$" memenuhi sifat komutatif.

(i) R tidak kosong, karena memuat paling sedikit satu rotasi yaitu transformasi identitas $R_{(A,\alpha)}(A) = A$.

(ii) R tertutup terhadap operasi "$\circ$".

Misalkan $R_{(A,\alpha)}$ dan $R_{(A,\beta)}$ sebarang rotasi dan P sebarang titik pada bidang.



gambar 3.a.16

$R_{(A,\alpha)}(P) = P'$ sedemikian hingga

$m\angle PAP' = \alpha$,

$R_{(A,\beta)}(P')=P''$ sedemikian hingga $m\angle P'AP'' = \beta$, $R_{(A,\beta)} \circ R_{(A,\alpha)}(P)=P''$ sehingga $m\angle PAP'' = \alpha+\beta$, jadi $R_{(A,\beta)} \circ R_{(A,\alpha)}(P) = R_{(A,\alpha+\beta)}(P)$.

Terbukti bahwa R tertutup terhadap operasi "$\circ$".

(iii) R memenuhi sifat komutatif terhadap "$\circ$".

Misalkan $R_{(A,\alpha)}$ dan $R_{(A,\beta)}$ sebarang rotasi dan sebarang titik P pada bidang maka $R_{(A,\beta)} \circ R_{(A,\alpha)} = R_{(A,\alpha+\beta)} = R_{(A,\beta+\alpha)} = R_{(A,\alpha)} \circ R_{(A,\beta)}$.

Terbukti bahwa R memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "$\circ$".

(iv) Ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen R ada inversnya dalam R.

Diambil sebarang rotasi $R_{(A,\alpha)}$ dengan sebarang titik P pada bidang. Misalkan $R_{(A,\beta)}$ invers dari $R_{(A,\alpha)}$, sedemikian hingga $R_{(A,\beta)} \circ R_{(A,\alpha)}(P)=P$, $R_{(A,\alpha+\beta)}(P) = P$ maka $\alpha+\beta = 0$ sehingga $\beta = -\alpha$.

$\therefore$ invers dari $R_{(A,\alpha)}$ adalah $R_{(A,-\alpha)} \in R$.

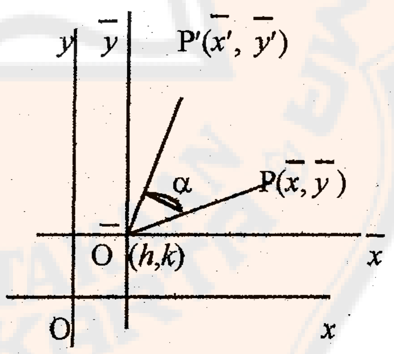
Terbukti bahwa untuk sebarang $R_{(A,\alpha)} \in R$, $\exists$ $R_{(A,\alpha}{}^{-1}{}_{)} = R_{(A,-\alpha)} \in R$, sehingga $R_{(A,-\alpha)} \circ R_{(A,\alpha)} = I$.

Dari (i), (ii), (iii), (iv) terbukti bahwa $(R,\circ)$ subgrup dari grup isometri, subgrup yang komutatif. Jadi $(R,\circ)$ merupakan grup komutatif.

Rotasi dengan titik pusat O(0,0) telah dibahas sebelumnya, untuk pusat sebarang titik (h,k) persamaannya dapat dicari dengan dasar persamaan ...(2) pada halaman 41. Untuk lebih mudahnya digunakan translasi susunan sumbu dari XOY ke $\overline{\text{X}}\text{O}\overline{\text{Y}}$. Jika koordinat untuk P dan P′ dalam $\overline{\text{X}}\text{O}\overline{\text{Y}}$ adalah $(\bar{x},\bar{y})$ dan $(\overline{x'},\overline{y'})$ maka menurut ...(2), persamaan rotasi dengan pusat O(0,0) pada XOY, terhadap susunan sumbu $\overline{\text{X}}\text{O}\overline{\text{Y}}$ diperoleh $R_{(\bar{O},\alpha)}$ adalah : $\begin{cases}\overline{x'} = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ \overline{y'} = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha\end{cases}$

dengan rumus - rumus translasi $\begin{cases}\bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k\end{cases}$ maka $\begin{cases}x = \bar{x} + h \\ y = \bar{y} + k\end{cases}$

sehingga $\begin{cases}x' = \overline{x'} + h \\ y' = \overline{y'} + k.\end{cases}$



gambar 3.a.17

Terhadap susunan sumbu XOY

$x' - h = (x - h)\cos\alpha - (y - k)\sin\alpha$

$y' - k = (x - h)\sin\alpha + (y - k)\cos\alpha$

Jika dijabarkan diperoleh :

$$\begin{cases}x' - h = x\cos\alpha - h\cos\alpha - y\sin\alpha + k\sin\alpha \\ \equiv x' - h = x\cos\alpha - y\sin\alpha - h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ y' - k = x\sin\alpha - h\sin\alpha + y\cos\alpha - k\cos\alpha \\ \equiv y' - k = x\sin\alpha + y\cos\alpha - h\sin\alpha - k\cos\alpha\end{cases}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + h - h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + k - h\sin\alpha - k\cos\alpha \end{cases}$$ atau

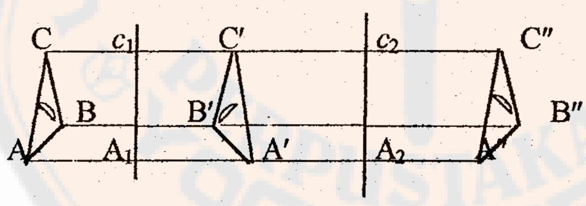
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a & \textit{dengan} \quad a = h - h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b & \textit{dengan} \quad b = k - h\sin\alpha - k\cos\alpha \end{cases}$$

Jadi persamaan umum untuk rotasi $R_{(A,\alpha)}$ adalah

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

2 Komposisi Refleksi

Perkalian dua refleksi akan menghasilkan transformasi identitas, translasi atau rotasi. Akan menghasilkan transformasi identitas jika kedua cermin berhimpit, dan akan menghasilkan translasi jika kedua cerminnya sejajar. Misalkan jarak kedua cermin itu adalah $d = |\vec{d}|$



gambar 3.a.18

$Mc_1(A) = A'$

$Mc_2(A') = A''$

$Mc_2Mc_1(A) = A''$

$$\left.\begin{aligned} AA_1 &= A_1A' \\ A'A_2 &= A_2A'' \end{aligned}\right\} AA'' = 2A_1A' + 2A'A_2$$

$= 2(A_1A' + A'A_2) = 2d$

$Mc_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$

$Mc_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$

$Mc_1Mc_2(\Delta ABC) = \Delta A''B''C''$ dan ΔABC mempunyai arah yang sama (searah) dengan $\Delta A''B''C''$.

Jadi perkalian dua refleksi dengan cermin sejajar dan jarak kedua cermin itu d, menghasilkan suatu translasi dengan besar vektor translasinya dua kali jarak kedua cermin itu.

$Mc_2Mc_1 = T_{2d}$

Perkalian dua refleksi itu menghasilkan suatu rotasi jika dua cermin itu saling berpotongan. Misalkan kedua cermin itu mengapit sudut sebesar α maka akan diperoleh rotasi dengan besar sudut 2α yang berpusat pada titik potong kedua sumbunya.

$Mc_1(\Delta PAB) = \Delta PA'B$

$Mc_2(\Delta PA'B) = \Delta PA''B'$

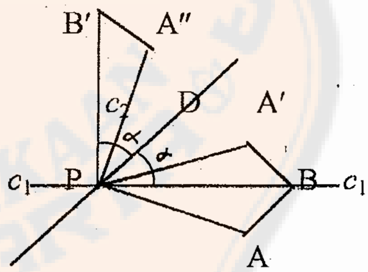
$m\angle APB\angle = m\angle A'PB,\ m\angle A'PD = m\angle A''PD$

$m\angle APA'' = m\angle APA' + \angle A'PA''$

$= 2m\angle A'PB + 2m\angle A'PD$

$= 2(m\angle A'PB + m\angle A'PD)$

$= 2\alpha$



gambar 3.a.19

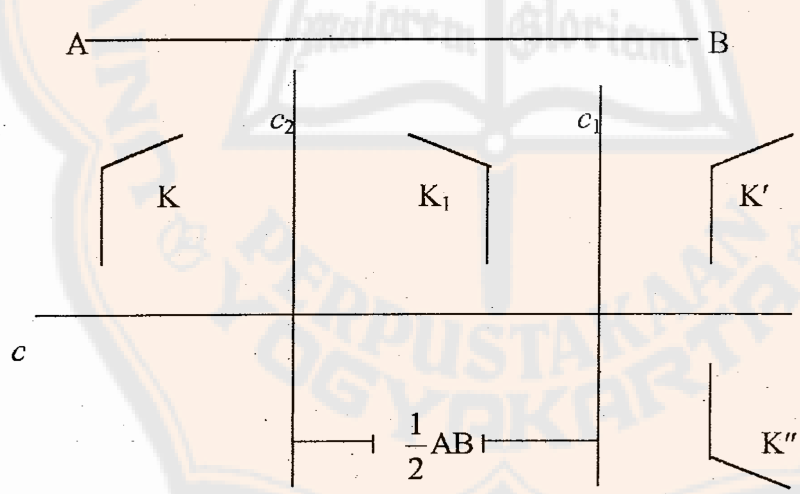
$m\angle BPD = m\angle B'PD$ sehingga $m\angle BPB' = 2m\angle BPD = 2\alpha$. Tampak bahwa $Mc_2Mc_1 = R_{(P,\,2\alpha)}$.

Secara khusus, jika kedua cermin berpotongan tegak lurus, komposisinya adalah setengah putaran. Setengah putaran sering dinotasikan sebagai H. Hal tersebut di atas menunjukan bahwa refleksi merupakan dasar dari transformasi identitas, translasi maupun rotasi.

Sebelum dibahas mengenai komposisi antara refleksi dengan translasi juga refleksi dengan rotasi , kita lihat dulu definisi refleksi geser (G).

Definisi 3.A.9

Refleksi geser adalah hasil kali suatu refleksi dengan suatu translasi yang sejajar cermin.



gambar 3.A.20

Refleksi geser sering dinotasikan sebagai G. Gambar 3.A.20 menyatakan $G = Mc \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ yang memetakan bangun K ke bangun K″. $T_{\overrightarrow{AB}} = Mc_2 \circ Mc_1$, dengan jarak $c_1c_2 = \frac{1}{2}$AB, $c_1//c_2$ dan keduanya tegak lurus AB, sehingga

$T_{\overrightarrow{AB}}(K) = Mc_2 \circ Mc_1(K) = Mc_2(K_1) = K'$

Dengan demikian G = Mc $\circ$ ($Mc_2 \circ Mc_1$). Jadi refleksi geser dapat dinyatakan pula sebagai hasil kali tiga refleksi.

Untuk sebarang ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ dan garis c tidak tegak lurus $\overrightarrow{AB}$, pada teorema berikut akan dibuktikan bahwa $T_{\overrightarrow{AB}} \circ Mc = G$.

Teorema 3.A.14 :

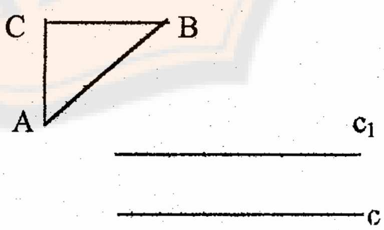
Untuk sebarang $\overrightarrow{AB}$ dan garis c tidak tegak lurus $\overrightarrow{AB}$, terdapat G sehingga $T_{\overrightarrow{AB}} \circ Mc = G$.

Bukti:

Ditentukan titik C sedemikian hingga $\overrightarrow{AC} \perp c$ dan $\overrightarrow{CB} // c$ maka menurut teorema 3.A.9 (halaman 31) $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AC}} \circ T_{\overrightarrow{CB}} = T_{\overrightarrow{CB}} \circ T_{\overrightarrow{AC}}$.

Selanjutnya dibuat $c_1//c$ dan jarak c_1 dengan c adalah $\frac{1}{2}$ AC, sehingga

$$
\begin{aligned}
T_{\overrightarrow{AB}} \circ Mc &= \left(T_{\overrightarrow{CB}} \circ T_{\overrightarrow{AC}}\right) \circ Mc \\
&= T_{\overrightarrow{CB}} \circ (Mc_1 \circ Mc) \circ Mc \\
&= T_{\overrightarrow{CB}} \circ Mc_1 \circ I \\
&= T_{\overrightarrow{CB}} \circ Mc_1
\end{aligned}
$$



gambar 3.A.21

$= G$, karena $\overrightarrow{CB} // c_1$

Terbukti bahwa $T_{\overrightarrow{CB}} \circ Mc$ suatu refleksi geser.

Kita tahu refleksi dan refleksi geser merupakan isometri mengubah arah. Transformasi identitas, rotasi dan translasi merupakan isometri searah. Ketiganya dapat dinyatakan sebagai komposisi dua refleksi.

Komposisi refleksi adalah isometri. Jika banyaknya refleksi genap, menghasilkan isometri yang tidak mengubah arah (isometri searah). Jika banyaknya refleksi ganjil, komposisinya menghasilkan isometri yang mengubah arah. Refleksi mempunyai titik-titik invariant berupa garis. Rotasi mempunyai titik invariant yaitu titik pusatnya. Sedangkan translasi dan refleksi geser tidak mempunyai titik invariant.

B. Transformasi Kesebangunan (Similaritas)

Isometri adalah transformasi yang mempertahankan / tidak mengubah jarak. Selanjutnya, berikut ini akan dibicarakan transformasi yang lebih luas dari isometri, yang mencakup isometri di dalamnya. Transformasi ini mempertahankan besar sudut, yang selalu membawa segitiga ke segitiga lain yag ssebangun. Transformasi tersebut adalah transformasi kesebangunan atau similaritas.

Ada pun bentuk khusus dari transformasi kesebangunan / similaritas, yaitu dilatasi. Berikut ini dibahas sedikit mengenai dilatasi.

Definisi 3.B.1 :

Dilatasi adalah suatu transformsi yang tidak mengubah arah yang mentransformasikan setiap garis ke garis yang sejajar dengan garis semula.

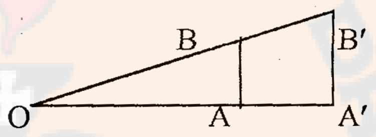
Dilatasi yang tidak mengubah jarak adalah translasi. Dilatasi lain selain translasi adalah dilatasi yang mempunyai titik pusat sebagai titik invariant dan suatu bilangan nyata k sebagai faktor pengali.

Suatu dilatasi dengan titik pusat O dan faktor pengali k merupakan dilatasi sentral yang dinyatakan dengan O(k) sehingga berlaku

$O(k)\,(A) = A'$ dengan $OA' = k \cdot OA$

$O(k)\,(B) = B'$ dengan $OB' = k \cdot OB$

$O(k)\,(O) = O$,



gambar 3.b.1

sehingga AB//A′B′.

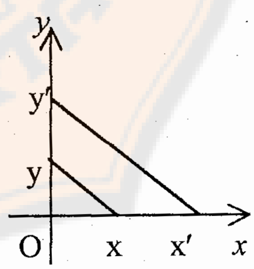
Jika dilatasi sentral itu berpusat pada pusat koordinat kartesius, yaitu O dengan faktor pengali k, maka diperoleh persmaan dilatasi $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky, k \neq 0 \end{cases}$

Untuk $k > 0$, x dan x' pada pihak yang sama terhadap O,

$k < 0$, x dan x' pada pihak yang berlainan terhadap O,

$k = 1$, maka O(1) adalah transformasi identitas,

$k = -1$, maka O(-1) adalah setengah putaran.



gambar 3.b.2

Dilatasi yang juga isometri terdapat jika $k = \pm 1$, yaitu identitas, rotasi atau translasi.

Ada pun definisi transformasi kesebangunan / similaritas adalah sebagai berikut :

Definisi 3.B.2 :

Suatu similaritas (**S**) adalah suatu transformasi **S** yang menggandakan setiap jarak dengan bilangan positif k yang sama sedemikian sehingga untuk setiap pasangan titik A dan B dipenuhi $\mathbf{S}(A) = A'$ dan $\mathbf{S}(B) = B'$ dengan $A'B' = k \cdot AB$.

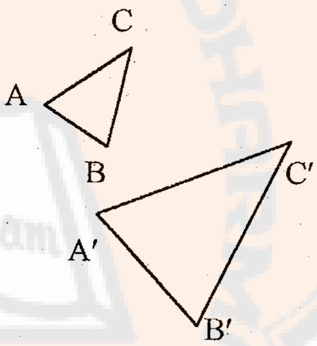
k disebut sebagai rasio dari transformasi kesebangunan / similaritas.

Similaritas yang juga merupakan isometri terdapat jika $k = 1$.

Teorema 3.B.1 :

Similaritas mentransformasikan suatu segitiga pada segitiga yang sebangun.

Bukti :



Dimisalkan diberikan sebarang ΔABC serta similaritas **S** dengan bilangan positif k, sehingga $\mathbf{S}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan sisi – sisi segitiga $A'B'C'$ berturut–turut $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $C'A' = k \cdot CA$,

gambar 3.b.3

maka menurut sifat kesebangunan segitiga terbukti bahwa $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, dengan $\Delta A'B'C' = k \cdot \Delta ABC$.

Terbukti.

Sebagai akibat similaritas mempertahankan besar sudut.

Teorema 3.B.2 :

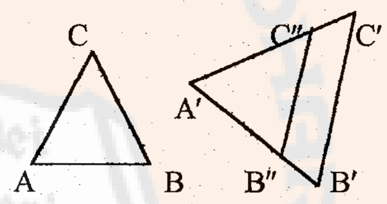
Hasil kali suatu isometri dan dilatasi adalah suatu transformasi similaritas.

Sebaliknya, diberikan transformasi similaritas sebagai hasil kali dari suatu isometri dan dilatasi.

Bukti :

(i) Suatu isometri akan mentransformasikan suatu bangun ke bangun yang kongruen dengan bangun semula. Selanjutnya bangun yang kongruen itu ditransformasikan oleh dilatasi dengan mengalikan jaraknya menjadi k kali. Jadi hasilnya merupakan transformasi similaritas dengan rasio k.

(ii) Sebaliknya, misalkan diberikan suatu similaritas **S** dengan rasio k dan sebarang $\Delta A'B'C'$. Karena **S** transformasi kesebangunan, maka ada ΔABC sedemikian hingga **S**$(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$,



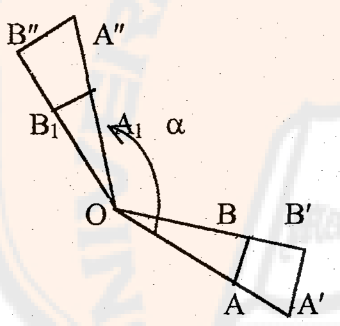
gambar 3.b.4

$A'C' = k \cdot AC$, sehingga $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Selanjutnya dibuat titik B″ pada $\overline{A'B'}$ dan titik C″ pada $\overline{A'C'}$ sedemikian hingga $AB = A'B''$, $AC = A'C''$. Isometri memetakan ΔABC pada $\Delta A'B''C''$. Jadi $\Delta ABC \cong \Delta A'B''C''$. Jika A′ adalah pusat dari dilatasi yang mempunyai faktor pengali k sama seperti **S**, maka $A'(k)\ (\Delta A'B''C'') = \Delta A'B'C'$. Jadi hasil kal dilatasi dengan faktor pengali k dan isometri adalah similaritas dengan rasio k. Dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa hasil kali isometri dan dilatasi juga suatu similaritas.

Terbukti.

Karena dilatasi adalah transformasi yang tidak mengubah arah (transformasi searah), **S** akan searah jika isometrinya adalah isometri searah, sebaliknya **S** akan mengubah arah jika isometri yang diberikan adalah isometri yang mengubah arah. Yang termasuk similaritas searah adalah transformasi identitas, translasi, rotasi dan similaritas spiral (rotasi dilatasi). Sedangkan yang termasuk similaritas mengubah arah adalah refleksi geser, refleksi dan refleksi dilatif.

Yang disebut rotasi dilatif adalah hasil kali dilatasi dan rotasi dengan titik pusat yang sama.



$$O(k)\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'}, \qquad R_{(o,\alpha)}\left(\overline{AB}\right) = \overline{A_1B_1}$$

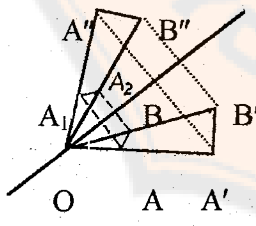
$$R_{(o,\alpha)}\left(\overline{A'B'}\right) = \overline{A''B''}, \qquad O(k)\left(\overline{A_1B_1}\right) = \overline{A''B''}$$

$$R_{(o,\alpha)} \circ O(k)\left(\overline{AB}\right) = \overline{A''B''}, \qquad O(k) \circ R_{(6,\alpha)}\left(\overline{AB}\right) = \overline{A''B''}$$

$$R_{(o,\alpha)} \circ O(k)\left(\overline{AB}\right) = O(k) \circ R_{(o,\alpha)}\left(\overline{AB}\right)$$

gambar 3.b.5

Refleksi dilatif adalah hasil kali refleksi dengan dilatasi



$$O(k)\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'} \qquad Mc\left(\overline{AB}\right) = \overline{A_1B_2}$$

$$Mc\left(\overline{A'B'}\right) = \overline{A''B''} \qquad O(k)\left(\overline{A_2B_2}\right) = \overline{A''B''}$$

$$Mc \circ O(k)\left(\overline{AB}\right) = \overline{A''B''} \qquad O(k) \circ Mc\left(\overline{AB}\right) = \overline{A''B''}$$

gambar 3.b.6

$$Mc \circ O(k)\left(\overline{AB}\right) = O(k) \circ Mc\left(\overline{AB}\right) = \overline{A''B''}$$

Himpunan isometri merupakan himpunan bagian dari himpunan similaritas. Himpunan isometri membentuk grup terhadap operasi "∘". Akan ditunjukkan himpunan isometri merupakan subgrup dari himpunan similaritas dengan menunjukkan bahwa himpunan similaritas membentuk grup terhadap operasi "$\circ$".

Teorema 3.B.3 :

Himpunan similaritas $(\mathbf{S}, \circ)$ membentuk suatu grup komutatif.

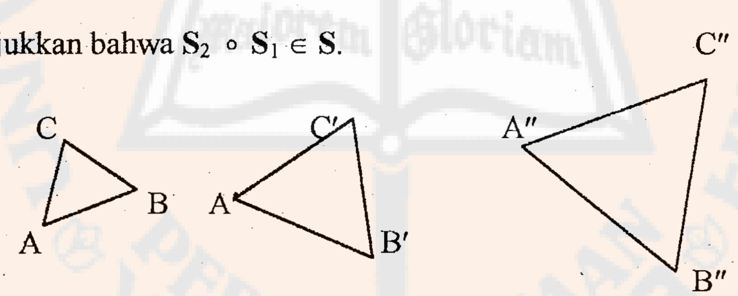
Bukti :

(i) Untuk sebarang ΔABC serta $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathbf{S}$ dengan rasio k_1 dan k_2 sedemikian sehingga

$S_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dan $\dfrac{A'B'}{AB} = k_1$

$S_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$ dengan $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ dan $\dfrac{A''B''}{AB} = k_2$,

ditunjukkan bahwa $\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1 \in \mathbf{S}$.



gambar 3.b.7

$S_2 \circ S_1(\Delta ABC) = S_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$

Karena $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A'B'C'$ dan $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ maka $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ dengan $A''B'' = k_2 \cdot A'B' = k_2 \cdot (k_1 \cdot AB) = (k_2 \cdot k_1)AB = (k_1 \cdot k_2)AB$, atau

$\dfrac{A''B''}{AB} = (k_2 \cdot k_1)AB = (k_1 \cdot k_2)AB.$

$\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 \in \mathbf{S}.$

Jadi **S** memenuhi sifat tertutup terhadap operasi "$\circ$" sekaligus sifat komutatif terhadap operasi "$\circ$".

(ii) Sifat assosiatif terhadap operasi "$\circ$" dengan sendirinya terpenuhi karena similaritas merupakan transformasi.

(iii) Ditunjukkan terdapat elemen identitas dalam S.

Similaritas merupakan hasil kali isometri dan dilatasi. Isometri adalah transformasi yang mempertahankan jarak, jadi k = 1. Dilatasi akan merupakan transformasi identitas jika k = 1, sehingga hasil kali isometri dan dilatasi dengan k = 1 adalah similaritas dengan k = 1. Jadi **S** tidak kosong karena ada transformasi identitas dalam **S.**

Terbukti **S** memuat elemen identitas.

(iv) Untuk sebarang ΔABC dan $\mathbf{S}_1 \in \mathbf{S}$ dengan rasio k_1 sehingga $\mathbf{S}_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dan $A'B' = k_1 \cdot AB$, akan ditunjukkan terdapat $\mathbf{S}_1^{-1} \in \mathbf{S}$ dengan rasio k_2 sehingga $\mathbf{S}_1^{-1} \circ \mathbf{S}_1(\Delta ABC) = \Delta ABC$.

$$\mathbf{S}_1^{-1} \circ \mathbf{S}_1(\Delta ABC) = \mathbf{S}_1^{-1}(\mathbf{S}_1(\Delta ABC))$$

$$= \mathbf{S}_1^{-1}(\Delta A'B'C')$$

$$= \Delta A''B''C'' \text{ dengan } \Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC \text{ dan}$$

$$A''B'' = k_2 \cdot (A'B') = (k_2 \cdot k_1)AB \qquad \ldots(1)$$

sehingga $A''B'' = AB$.

Diperoleh $(k_2 \cdot k_1)AB = AB$, dari (1), maka $k_2 \cdot k_1 = 1$ sehingga $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$ ...(2)

Persamaan (2) disubstitusikan ke dalam persamaan (1) diperoleh $A''B'' =$

$\left(\frac{1}{k_1}\cdot k_1\right)$AB = AB. Karena ΔA″B″C″ ~ ΔABC dan A″B″ = AB maka ΔA″B″C″ $\cong$ ΔABC.

Terbukti untuk sebarang $\mathbf{S}_1 \in \mathbf{S}$ dengan rasio k, terdapat $\mathbf{S}_1^{-1} \in \mathbf{S}$ dengan rasio $\frac{1}{k}$ sehingga $\mathbf{S}_1^{-1} \circ \mathbf{S}_1 = \mathrm{I}$.

Dari (i), (ii), (iii), (iv) terbukti bahwa himpunan similaritas ($\mathbf{S}$, $\circ$) membentuk suatu grup komutatif.

C. Persamaan Umum Isometri dan Similaritas

1. Persamaan umum isometri

Persamaan – persamaan transformasi yang merupakan isometri adalah sebagai berikut :

Translasi dengan vektor translasi $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} x' = x + 0y + a \\ y' = 0x + y + b \end{cases}$$

Refleksi terhadap cermin c : $ax + by + c$

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2} \\ y' = y - \dfrac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2} \end{cases} \quad \textit{atau} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{(b^2-a^2)}{a^2+b^2}x + \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}y + d,\ d = \dfrac{-2ac}{a^2+b^2} \\ y' = \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}x - \dfrac{(b^2-a^2)}{a^2+b^2}y + e,\ e = \dfrac{-2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Rotasi dengan pusat sebarang titik (h, k) dan arah rotasi α :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, & a = h - h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, & b = k - h\sin\alpha - k\cos\alpha \end{cases}$$

Refleksi geser :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}y + (a + d) \\ y' = \dfrac{-2ab}{a^2 + b^2}x - \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}y + (b + e) \end{cases}$$

Persamaan – persamaan di atas, untuk translasi dan rotasi mempunyai bentuk

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = -Bx + Ay + D, \end{cases} \quad \text{dengan } A^2 + B^2 = 1, \qquad \ldots(1)$$

dan untuk refleksi dan refleksi geser, isometri yang mengubah arah, mempunyai

$$\text{bentuk} \begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = Bx - Ay + D \end{cases}, \quad A^2 + B^2 = 1 \quad \text{dan} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix} = -1 \qquad \ldots(2)$$

Dari bentuk (1) dan (2) dipeoleh bentuk umum untuk persamaan isometri yaitu :

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + D, \quad A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

dengan tanda "+" untuk isometri searah dan tanda "-" untuk isometri mengubah arah.

2. Persamaan umum similaritas

Teorema 3.B.3 yang menyatakan similaritas sebagai hasil dari isometri dan dilatasi, menggambarkan bahwa persamaan similaritas dapat diperoleh dengan mengkomposisikan persamaan isometri dengan persamaan dilatasi.

Similaritas searah merupakan hasil dari isometri searah dengan dilatasi. Persamaan isometri searah :

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = -By + Ay + D, \qquad A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \quad \ldots(1)$$

dan persamaan dilatasi :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky, \qquad k > 0 \end{cases} \quad \ldots(2)$$

sehingga dari (1) dan (2) diperoleh

$$\begin{cases} x' = k(Ax + By + C) = kA \cdot x + kB \cdot y + kC, \qquad A^2 + B^2 = 1 \\ y' = k(-Bx + Ay + D) = -kB \cdot x + kA \cdot y + kD, \qquad k > 0 \end{cases} \quad \ldots(3)$$

Jika dimisalkan

$kA = a,\ \ kB = b,\ \ kC = m,\ kD = n$ $\ldots(4)$, maka persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = -bx + ay + n \end{cases} \quad \ldots(5)$$

dengan $a^2 + b^2 = (kA)^2 + (kB)^2 = k^2A^2 + k^2B^2 = k^2(A^2+B^2) = k^2 \cdot 1 = k^2$.

Similaritas mengubah arah dapat diperoleh dari hasil isometri mengubah arah dengan dilatasi. Persamaannya dapat diperoleh dengan cara seperti di atas. Persamaan isometri mengubah arah :

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = Bx - Ay + D, \qquad A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \quad \ldots(6)$$

Sehingga dari (2) dan (6) diperoleh :

$$\begin{cases} x' = k(Ax + By + C), & A^2 + B^2 = 1 \\ y' = k(Bx - Ay + D), & k > 0 \end{cases} \qquad \ldots(7)$$

dengan memisalkan seperti (4) maka diperoleh

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n, \end{cases} \quad \text{dengan} \quad a^2 + b^2 \neq 0 \qquad \ldots(8)$$

Dari (5) dan (8) dapat disimpulkan bahwa similaritas dengan rasio k mempunyai persamaan umum

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n, \end{cases} \quad \text{dengan} \quad a^2 + b^2 \neq 0 \qquad \ldots(9)$$

tanda "+" untuk similaritas searah sedangkan tanda "-" untuk similaritas mengubah arah.

D. Affinitas Perspektif

Dipilih sebarang garis s dalam bidang (Euclides) dan sebuah arah yang ditunjukkan oleh sudut α yang diapitnya dengan s. Dipilih pula suatu bilangan nyata $\mu \neq 0$.

Didefinisikan suatu pemetaan dengan hukum korespondensi sebagai berikut :

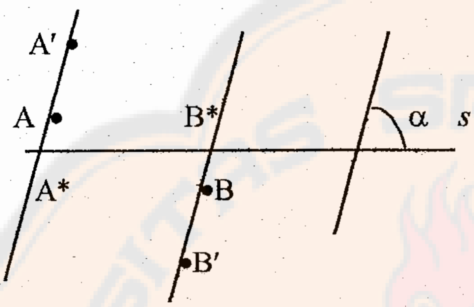
a. Garis – garis yang menghubungkan pasangan dua titik P dan P′ yang berkorespondensi sejajar dengan arah yang diketahui.

b. Untuk setiap pasang titik P dan P′ didapat

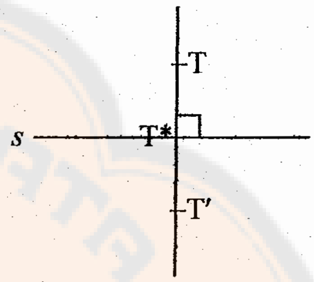
$\dfrac{P'P^*}{PP^*} = \mu$, dengan P* titik potong PP′ dengan s.

Transformasi ini disebut affinitas perspektif, dengan s sebagai sumbu affinitas, μ adalah faktor skala affinitas dan α adalah sudut affinitas. Transformasi ini dinyatakan sebagai $\phi\ (s, \alpha, \mu)$.

Contoh 3.D.1 : $\phi\ (s, \alpha, 2)$



gambar 3.d.1



gambar 3.d.2

Suatu refleksi terhadap garis s yaitu $M_s = \phi\ (s,\ 90°, -1)$. Jika $\alpha = 90°$ maka affinitas itu disebut affinitas normal (gambar 3.d.2).

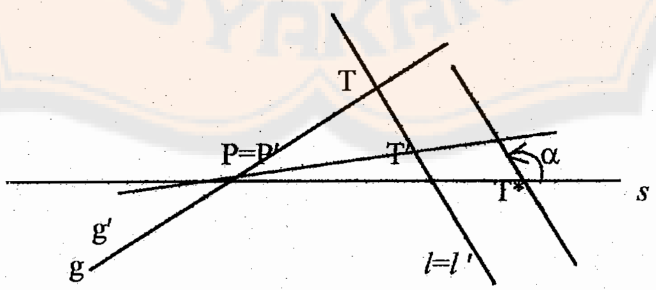
Berikut ini kita ulang kembali sifat – sifat affinitas perspektif tanpa bukti, yaitu :

1. Suatu affinitas perspektif adalah suatu transformasi yang tidak mengubah garis. Garis-garis yang berkorespondensi berpotongan pada sumbu affinitas. Setiap titik pada sumbu affinitas adalah titik invariant dan setiap titik pada garis yang sejajar dengan arah affinitas berubah tetapi garisnya tetap.

   $T \to T'$

   $g \to g'$

   $l \to l'$

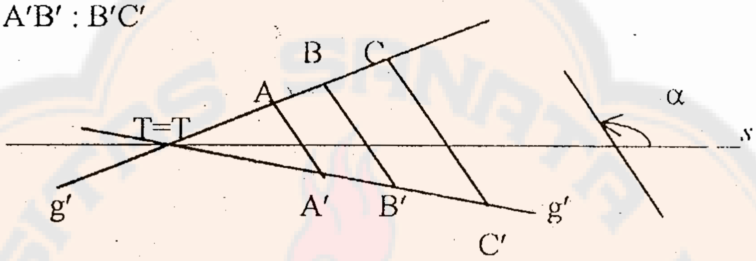


gambar 3.d.3

2. Suatu affinitas perspektif memetakan garis – garis sejajar onto garis – garis sejajar.

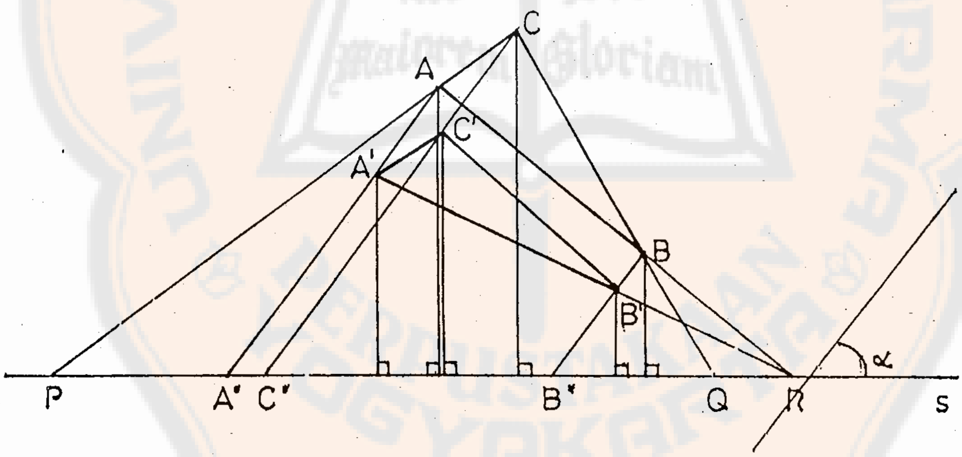
3. Transformasi tidak mengubah perbandingan dalam pembagian. Perbandingan dari jarak – jarak tiga buah titik pada sebuah garis g sama dengan perbandingan jarak titik – titik bayangan pada garis g′.

AB : BC = A′B′ : B′C′



gambar 3.d.4

4. Perbandingan luas poligon dengan luas bayangannya oleh affinitas perspektif sama dengan 1: μ.



gambar 3.d.5

Luas poligon dapat dipandang sebagai jumlahan luas segitiga – segitiga. Jadi perbandingan luas poligon dapat ditunjukkan dengan perbandingan luas segitiga dengan luas bayangannya oleh affinitas perspektif.

5. Suatu affinitas perspektif adalah suatu pemetaan yang 1-1 :

Affinitas inversnya mempunyai sumbu yang sama dan arah yang sama, tetapi mempunyai faktor skala $\mu' = \dfrac{1}{\mu}$

$\phi_1(s, \alpha, \mu) : A \rightarrow A'$

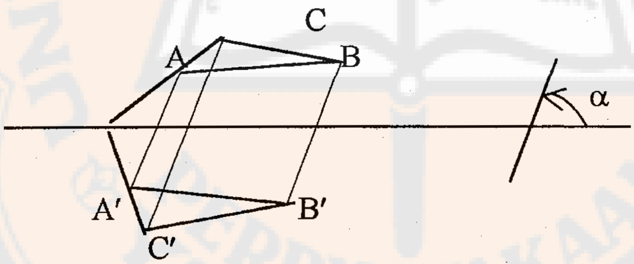
$\phi_2(s, \alpha, \dfrac{1}{\mu}) : A' \rightarrow A$

jadi $\phi_2\phi_1$=I (transformasi identitas)

6. Setiap affinitas perspektif yang bukan refleksi mempunyai hanya satu pasang garis tegak lurus sesamanya yang invariant . Dengan sifat ini refleksi dipandang sebagai hal yang istimewa, yaitu oleh refleksi setiap pasang garis tegak lurus sesamanya adalah invarian ketegaklurusannya.

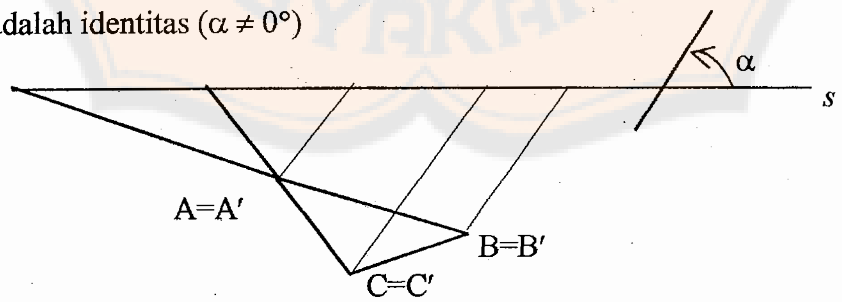
Jika suatu affinitas perspektif tidak mengubah luas, maka $\mu = \pm 1$ atau μ=-1. Jika μ = -1 terdapat refleksi miring.

$\phi\ (s, \alpha, -1)$



gambar 3.d.6

$\phi(s, \alpha, 1)$ adalah identitas ($\alpha \neq 0°$)



gambar 3.d.7

Identitas termasuk dalam affinitas perspektif jika $\mu = 1$.

Jika $\mu = 1$ dan $\alpha = 0°$, maka terdapat suatu pelingsiran dengan sumbu *s*. Transformasi ini merupakan suatu affinitas perspektif yang tidak sebenarnya.

Kita pandang affinitas perspektif $\phi(s, \alpha, \mu)$ dan dibuat susunan sumbu siku – siku sedemikian hingga sumbu *x* berhimpit dengan sumbu affinitas *s*. Selanjutnya dapat ditentukan rumus affinitas perspektif dengan sudut α, tetapi pelingsiran belum dapat dinyatakan dengan rumus itu.

Affinitas perspektif dengan sudut α tersebut yaitu ϕ (s, α, μ), dapat dinyatakan dengan rumus transformasi

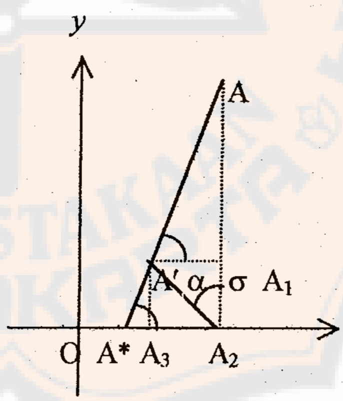
$$\phi : \begin{cases} x' = x + (\mu - 1) y \operatorname{cotg} \alpha \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Agar pelingsiran dapat dinyatakan dengan rumus affinitas tersebut, dicari parameter lain, yaitu suatu sudut σ. Sudut σ adalah sudut antara AA_2 dan A_2A' (pada gambar 3.d.8)

$\phi : A(x, y) \rightarrow A'(x', y')$

$$\mu = \frac{A'A^*}{AA^*}$$

$$OA_3 = OA_2 - A'A_1$$
$$= OA_2 - A_1A_2 \operatorname{tg} \sigma$$
$$= OA_2 - A'A_3 \operatorname{tg} \sigma$$



gambar 3.d.8

$x' = x - \mu y \operatorname{tg} \sigma$

sehingga diperoleh rumus transformasi $\phi : \begin{cases} x' = x - \mu y \operatorname{tg} \sigma \\ y' = \mu y \end{cases}$

Determinan dari rumus transformasi tersebut adalah μ.

Hubungan antara α dan σ dapat dilihat sebagai berikut :

$(\mu - 1)\, ctg\, \alpha = -\, \mu\, tg\sigma$, diperoleh $tg\sigma = \dfrac{1-\mu}{\mu}\, ctg\, \alpha$

Definisi 3.D.1 :

Setiap hasil kali yang berhingga dari affinitas perspektif disebut transformasi affin umum atau dengan singkat suatu affinitas.

Menurut definisi 3.D.1 maka affinitas adalah transformasi yang tidak mengubah garis, kesejajaran dan perbandingan dalam pembagian.

BAB IV

TRANSFORMASI PROYEKTIF

DALAM BIDANG EUCLIDES

A. TRANSFORMASI AFFIN

Seperti telah diketahui bahwa semua similaritas diperoleh dari suatu transformasi khusus yaitu dilatasi sentral, maka dapat dipahami bahwa semua transformasi affin berasal dari suatu transformasi khusus yang sederhana, yang disebut transformasi primitif.

Persamaan untuk transformasi primitif yang dinotasikan dengan T adalah :

(1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = cx + dy, d \neq 0 \end{cases}$ atau $\begin{cases} x' = ax + by, a \neq 0 \\ y' = y, \end{cases}$

dalam x dan y persamaan (1) menjadi

(2) $\begin{cases} x = x' \\ y = (-cx' + y')/d \end{cases}$ atau $\begin{cases} x = (x' - by')/a \\ y = y' \end{cases}$

dalam pembahasan ini kita menggunakan persamaan yang pertama.

Transformasi T mempunyai nilai determinan d, dan transformasi T bukan suatu similaritas, kecuali kalau d = ± 1 dan c = 0. Jika d = 1, T suatu transformasi identitas dan jika d=-1 maka transformasi T suatu refleksi terhadap sumbu x.

Transformasi primitif mempunyai beberapa sifat, yaitu dalam suatu transformasi primitif, bayangan untuk setiap garis adalah suatu garis, garis-garis yang berlainan bayangannya berupa garis-garis yang berlainan pula, dan terdapat suatu korespondensi 1-1 antara garis-garis pada bidang. Garis-garis berpotongan dipetakan ke garis-garis berpotongan dan garis-garis sejajar ke garis-garis sejajar, dengan demikian titik sudut - titik sudut suatu jajar genjang tetap titik sudut -titik sudut jajar genjang.

Dimisalkan g merupakan suatu garis. Jika garis tersebut tegak lurus pada sumbu-x, transformasi T membawa setiap titik pada g ke suatu titik pada g′ karena x′= x. Sebaliknya, setiap titik pada g merupakan bayangan untuk suatu titik pada g. Dengan demikian suatu garis tegak lurus bayangannya adalah garis itu sendiri.

Jika g tidak tegak lurus , denga persamaan

(3) $$y = Ax + B$$

dengan menggunakan (2) diperoleh bahwa transformasi T mentransformasikan (3) ke

(4) $$y' = (Ad + c)x' + Bd$$

yang mewakili suatu garis g′ yang tidak tegak lurus, karena itu setiap titik pada g dipetakan ke suatu titik pada g′. Sebaliknya, setiap titik pada g′ adalah bayangan untuk suatu titik pada g. Dengan demikian bayangan untuk setiap garis yang tidak tegak lurus adalah suatu garis yang tidak tegak lurus.

Dalam bidang Euclides transformasi affin didefinisikan sebagai trnsformasi yang mempunyai persamaan yang merupakan persamaan transformasi linear, yaitu:

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n, \end{cases} \qquad \text{dengan} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

jika -b = c dan a = d dengan $a^2 + b^2 \neq 0$, transformasi tersebut merupakan transformasi similaritas, dan akan berupa isometri jika $a^2 + b^2 = 1$.

Sekarang kita lihat bahwa transformasi primitif merupakan kunci untuk semua transformasi affin. Setiap transformasi affin tersebut dapat dipecahkan sebagai transformasi-transformasi primitif dan suatu translasi, berturutan.

Suatu transformasi affin

(1) $$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

merupakan hasil kali transformasi-transformasi

(2) $$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x'' = x' + m \\ y'' = y' + n \end{cases}$$

berurutan. Yang kedua adalah suatu translasi dengan vektor translasi $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$. Persamaan yang pertama dapat dipecahkan menjadi hasil kali transformasi-transformasi primitif jika $a \neq 0$, yaitu :

(3) $$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = y \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -\dfrac{c}{a}x' + \dfrac{ad - bc}{a}y' \end{cases}$$

dan jika a = 0 dengan keadaan $b \neq 0$, persamaan pertama pada (2) dapat dipecahkan menjadi hasil kali transformasi-transformasi primitif sebagai berikut :

(4)
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = x' + y', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''' = -x'' + y'' \\ y''' = y'', \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{iv} = bx''' \\ y^{iv} = y''', \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{v} = x^{iv} \\ y^{v} = \dfrac{d}{b}x^{iv} + cy^{iv} \end{cases}$$

Dengan demikian setiap transformasi affin dapat dipecahkan sebagai hasil kali transformasi-transformasi primitif dengan translasi.

Telah dibicarakan bahwa hasil kali berhingga dari affinitas perspektif adalah transformasi affin, dan kita tahu bahwa affinitas prespektif juga merupakan transformasi sederhana. Dengan demikian affinitas perspektif pun dapat dipecahkan sebagai hasil kali transformasi primitif, yaitu :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \mu\, y \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x'' = x' - y'\, tg\sigma \\ y'' = y' \end{cases}$$

Karena setiap transformasi affin adalah hasil kali transformasi primitif dan suatu translasi, maka dapat dinyatakan bahwa semua transformasi affin mempertahankan sifat-sifat trasnformasi primitif.

Teorema 4.A.1 :

Himpunan transformasi affin membentuk suatu grup.

Bukti :

(i) Untuk sebarang dua transformasi affin yang berbeda, hasil kalinya adalah transformasi affin.

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + m \\ y' = c_1x + d_1y + n \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x'' = a_2x' + b_2y' + h \\ y'' = c_2x' + d_2y' + k \end{cases}$$

hasil kali mereka adalah

$$\begin{cases} x'' = (a_1a_2 + c_1b_2)x + (b_1a_2 + d_1b_2)y + (ma_2 + nb_2 + h) \\ y'' = (a_1c_2 + c_1d_2)x + (b_1c_2 + d_1d_2)y + (mc_2 + nd_2 + k) \end{cases}$$

dengan

$$\begin{vmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & b_1a_2 + d_1b_2 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix},$$

karena

$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0$ dan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0$ maka hasil kali keduanya $\neq 0$.

Terbukti bahwa himpunan transformasi affin memenuhi sifat tertutup terhadap perkalian.

(ii) Himpunan transformasi affin tidak kosong, karena sekurang-kurangnya memuat elemen identitas $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan b = c = m = n = 0 dan a = d = 1, yaitu transformasi identitas $\begin{cases} x' = x \\ y' = y, ad - bc = 1 - 0 = 1 \end{cases}$

(iii) Dengan sendirinya sifat assosiatif terhadap perkalian dipenuhi dalam himpunan transformasi affin.

(iv) Untuk sebarang transformasi affin $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + m \\ y' = c_1x + d_1y + n, a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0 \end{cases}$ dengan transformasi affin $\begin{cases} x'' = a_2x' + b_2y' + h \\ y'' = c_2y' + d_2y' + k, a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0 \end{cases}$, sebagai invers dari transformasi yang pertama. Sedemikian hingga hasil kali kedua transformasi itu adalah identitas dengan determinan = 1. Hasil kali mereka adalah

$$\begin{cases} x'' = (a_1a_2 + c_1b_2)x + (b_1a_2 + d_1b_2)y + (ma_2 + nb_2 + h) \\ y'' = (a_1c_2 + c_1d_2)x + (b_1c_2 + d_1d_2)y + (mc_2 + nd_2 + k), \end{cases}$$

$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y, \end{cases}$ sehingga

$$a_1a_2 + c_1b_2 = 1 = b_1c_2 + d_1d_2$$
$$a_1c_2 + c_1d_2 = b_1a_2 + d_1b_2 = ma_2 + nb_2 + h = mc_2 + nd_2 + k = 0.$$

Dapat menggunakan perkalian matriks, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & b_1a_2 + d_1b_2 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya penjabarannya pada perkalian matriks dengan menggunakan determinan matriks, dan diperoleh

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{d_1}{a_1d_1 - b_1c_1}x' - \dfrac{b_1}{a_1d_1 - b_1c_1}y' + \dfrac{(-md_1 + nb_1)}{a_1d_1 - b_1c_1} \\ y'' = \dfrac{-c_1}{a_1d_1 - b_1c_1}x' + \dfrac{a_1}{a_1d_1 - b_1c_1}y' + \dfrac{(mc_1 - na_1)}{a_1d_1 - b_1c_1} \end{cases},$$

dengan $\dfrac{d_1a_1 - (-b_1 \cdot (-c_1))}{(a_1d_1 - b_1c_1)^2} \neq 0$ (karena $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$).

Terbukti bahwa untuk sebarang transformasi affin

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + m \\ y' = c_1x + d_1y + n, a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0; \end{cases}$$

terdapat transformasi affin lain sebagai inversnya, yaitu:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{d_1}{a_1d_1 - b_1c_1}x - \dfrac{b_1}{a_1d_1 - b_1c_1}y + \dfrac{(-md_1 + nb_1)}{a_1d_1 - b_1c_1} \\ y' = \dfrac{-c_1}{a_1d_1 - b_1c_1}x + \dfrac{a_1}{a_1d_1 - b_1c_1}y + \dfrac{(mc_1 - na_1)}{a_1d_1 - b_1c_1}, \dfrac{d_1a_1 - b_1c_1}{(a_1d_1 - b_1c_1)^2} \neq 0 \end{cases}$$

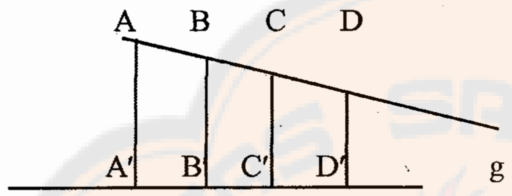
Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti bahwa himpunan transformasi affin membentuk suatu grup.

B. Proyeksi

Pada bagian ini akan disajikan mengenai proyeksi. Proyeksi yang merupakan trasnformasi khusus yang sederhana, yang akan menuntun kita pada transformasi proyektif. Proyeksi terdiri dari dua macam, yaitu proyeksi paralel dan proyeksi sentral.

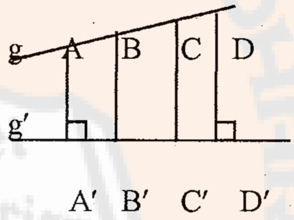
1. Proyeksi Paralel

Terlebih dahulu dibahas mengenai proyeksi paralel, yaitu proyeksi paralel dari garis ke garis yang sebidang. Misalkan g dan g′ garis-garis sebidang yang berlainan, dan misalkan ditetapkan suatu himpunan garis sejajar yang sebidang dengan g dan g′ tetapi didak memuat keduanya. Jika P adalah suatu titik pada g, ada garis anggota himpunan garis sejajar tersebut yang melalui P. Garis yang melalui P ini memotong g′ di P′. Transformasi dari titik-titik pada garis g ke titik-titik pada garis g′ oleh himpunan garis sejajar yang sebidang dan yang tidak memuat g atau pun g′ disebut suatu proyeksi paralel dari garis g ke garis g′.



gambar 4.b.1

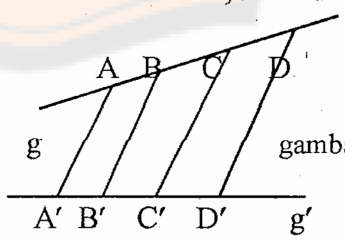
Jika garis pada himpunan garis sejajar itu tegak lurus pada g′, maka proyeksi itu disebut proyeksi ortogonal dari g ke g′. Kejadian tersebut adalah keadaan khusus proyeksi paralel dari garis g ke garis g′.



gambar 4.b.2

Suatu proyeksi paralel dari garis g ke garis g′ ini jelas merupakan suatu pemetaan 1-1. Karena setiap titik pada g dan g′ hanya dilalui tepat oleh satu garis, jadi setiap titik pada g hanya mempunyai pasangan tepat satu titik pada g′. Sebaliknya setiap titik pada g′ mempunyai pasangan tepat satu di garis g.

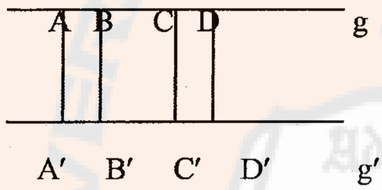
Kita perhatikan gambar 4.b.3 di bawah ini. Misalkan $\overline{AB}, \overline{CD}$ adalah dua segmen pada g dan A′, B′, C,′ D′ berturut - turut adalah bayangan dari A, B, C, D dalam proyeksi paralel dari g ke g′,



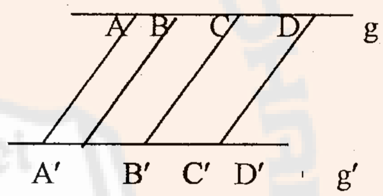
gambar 4.b.3

Maka $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$ atau A′B′ = k.AB dan C′D′ = k.CD, dengan k suatu nilai yang sama untuk perbandingan-perbandingan di atas. Dengan demikian seluruh jarak digandakan oleh k.

Jadi perbandingan dalam pembagian dipertahankan, demikian pula dengan keantaraan. Pada proyeksi paralel ini jarak tidak dipertahankan, kecuali jika k = 1. Salah satu contoh proyeksi paralel yang tidak mengubah jarak adalah proyeksi paralel dengan g // g′.

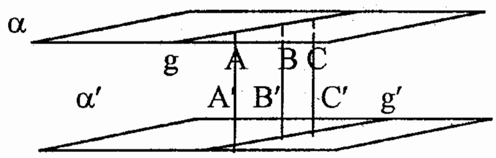


gambar 4.b.4a



gambar 4.b.4b

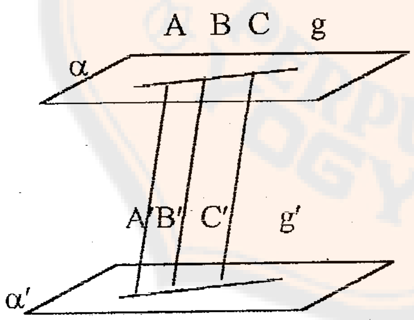
Untuk selanjutnya perlu diketahui juga proyeksi paralel dari suatu bidang ke bidang yang lain. Pada proyeksi ini , kita perhatikan bidang-bidang yang berlainan yaitu bidang α dan bidang α′ dan himpunan garis sejajar yang tidak terletak pada α dan α′. Jika A suatu titik pada α, akan terdapat suatu garis dari himpunan garis sejajar itu yang menembus α′ di suatu titik A′. Transformasi dari titik-titik pada α′ dengan A′ merupakan bayangan dari A disebut suatu proyeksi paralel dari bidang α ke bidang α′.

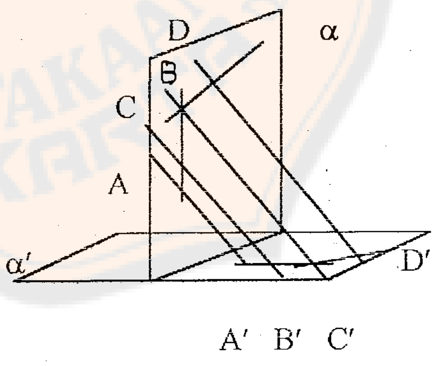


gambar 4.b.5

Misalkan transformasi T merupakan proyeksi paralel dari bidang α ke bidang α'. Jika g adalah suatu garis pada α, maka anggota-anggota himpunan garis sejajar yang melalui titik-titik pada g membentuk suatu bidang. Bidang yang terbentuk dari himpunan garis sejajar tersebut memotong α' pada g' yang merupakan bayangan-bayangan dari titik-titik pada g. Dengan demikian g' bayangan dari g, dan transformasi T mengakibatkan suatu proyeksi paralel dari g ke g' yang sebidang. Dengan demikian untuk sebarang titik A, B yang berlainan pada g terdapat A', B' pada g' sedemikian hingga $A'B'$=k. AB. Karena g pada α maka transformasi T mempertahankan keantaraan dan perbandingan dalam pembagian. Demikian juga, karena transformasi T adalah pemetaan 1-1 dan membawa garis ke garis, transformasi T tentu mempertahankan kesejajaran dan konkurensi.

Kita lihat jarak oleh transformasi T. Jika α,α' sejajar, demikian juga g, g', dan karena itu k = 1, dalam kasus ini jarak dipertahankan. (gambar 4.b.6a)





gambar 4.b.6a

gambar 4.b.6b

Jika α dan α' berpotongan, nilai untuk k akan selalu berlainan untuk posisi g yang berlainan. Jadi jarak pada proyeksi paralel dari suatu bidang α ke bidang α' yang lain tidak digandakan oleh suatu nilai k yang sama, kecuali jika jarak dipertahankan.

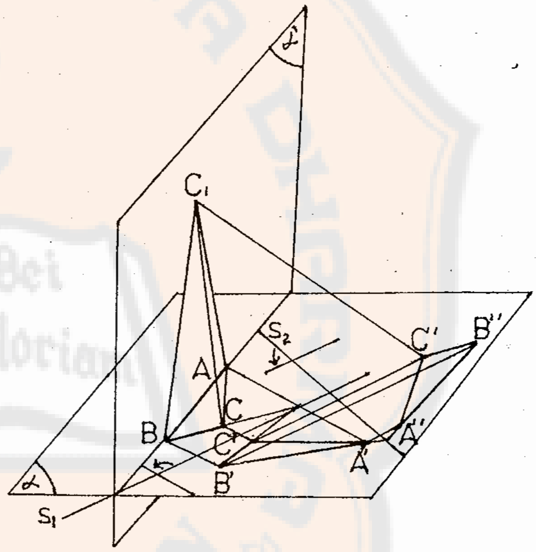
Teorema 4.B.1 :

Setiap transformasi affin dari suatu bidang pada dirinya sendiri adalah hasil kali dari proyeksi paralel.

Bukti :

Misalkan transformais T suatu transformasi affin pada α dengan $T(\Delta ABC)=\Delta A''B''C''$.

Misalkan transformasi T_1 adalah proyeksi paralel dari α ke α_1 dengan α_1 memotong α sepanjang garis AB, sehingga T_1 (Δ ABC) = Δ ABC_1. Selanjutnya transformasi T_2 merupakan proyeksi paralel dari α_1 ke α,



gambar 4.b.7

sehingga $T_2(\Delta ABC_1) = \Delta$ ABC'', dengan demikian $T_2 \cdot T_1$ (Δ ABC) = Δ ABC'', yang merupakan pemetaan 1-1 dari α ke α. Dengan cara yang serupa Δ ABC'' diproyeksikan ke ΔAB''C''. Misalkan α_2 bidang yang memotong α sepanjang garis AC'', transformasi T_3 suatu proyeksi paralel dari α ke α_2 dan transformasi T_4 proyeksi paralel dari α_2 ke α, sehingga T_3 (Δ ABC'') = Δ AB_2C'', B_2 pada α_2 tetapi tidak pada

α dan $T_4(\Delta AB_2C'')=\Delta AB''C''$. Dengan demikian hasil kali $T_4 \cdot T_3(\Delta AB_2C'') = \Delta AB''C''$, yang merupakan pemetaan 1-1 dari α ke α.

Selanjutnya Δ AB″C″ diproyeksikan ke Δ A″B″C″ dengan cara serupa. Misalkan transformasi T_5, T_6 berturut-turut merupakan proyeksi paralel dari α ke α_3 dan proyeksi paralel dari α_3 ke α dengan α_3 memotong α sepanjang garis B″C″, sehingga

$T_5\,(\Delta\ AB''C'') = \Delta\ A_3B''C''$, A_3 pada α_3 tetapi tidak pada α, dan

$T_6\,(\Delta\ A_3B''C'') = \Delta A''B''C''$.

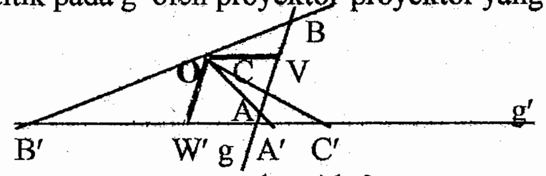
Dengan demikian $T_5 \cdot T_6\ (\Delta\ AB''C'') = \Delta\ A''B''C''$, yang merupakan pemetaan 1-1 dari α ke α. Jadi hasil kali trasnformasi $T_6 \cdot T_5 \cdot T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1\ (\Delta\ ABC) = T\ (\Delta\ A''B''C'') = T\ (\Delta\ ABC)$, yang merupakan pemetaan 1-1 dari α ke α. Terbukti bahwa transformasi affin dari suatu bidang ke bidang iti sendiri merupakan hasil kali proyeksi paralel.

Suatu pemetaan dari suatu bidang onto dirinya sendiri yang merupakan hasil kali proyeksi paralel adalah transformasi affin. Misalkan proyeksi paralel dimulai dari α ke α_1, kemudian α_1 ke α_2, α_2 ke α_3, dan seterusnya sampai α_n. Misalkan $\alpha_n = \alpha$ sehingga proyeksi terakhir memetakan α_{n-1} ke α. Jika proyeksi tersebut berturut-turut dinotasikan oleh transformasi $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ maka $T_1\,(\alpha) = \alpha_1$, $T_2\,(\alpha_1) = \alpha_2$, $T_3(\alpha_2)=\alpha_3$, ..., $T(\alpha_{n-1}) = \alpha$. $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \ldots \cdot T_n$ merupakan hasil kali n proyeksi yang memetakan α ke dirinya sendiri. Hasil kali transformasi tersebut dapat dinotasikan oleh transformasi T, maka T $(\alpha) = \alpha$. Setiap proyeksi paralel merupakan pemetaan 1-1, dan mempertahankan kolinearitas, perbandingan dalam pembagian, begitu pula dengan transformasi T. Sifat-sifat yang diperthankan tersebut merupakan sifat-sifat transformasi affin. Dengan demikian hasil kali proyeksi paralel tersebut adalah transformasi affin.

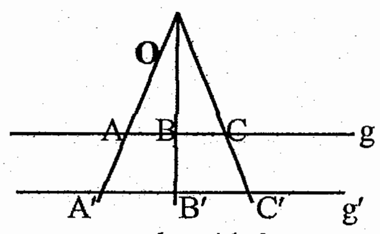
2. Proyeksi Sentral

Selanjutnya disajikan mengenai proyeksi sentral. Pada proyeksi sentral ini garis-garis yang menghubungkan titik-titik pada bayangan mereka (proyektornya) tidak sejajar seperti pada proyeksi paralel, tetapi proyektor-proyektornya berpotongan pada satu titik yang disebut sebagai pusatnya atau sentral. Jika proyeksi sentral itu dari garis g ke garis g′ maka titik pusatnya tidak pada kedua garis tersebut. Begitu juga jika proyeksi sentral itu dari bidang α ke bidang α', titik pusat (sentral) proyeksi tersebut tidak pada kedua bidang itu.

Sekarang kita perhatikan proyeksi sentral dari garis g ke garis g′. Misalkan g dan g′ adalah dua garis yang sebidang dan misalkan O suatu titik dalam bidang yang sama tetapi tidak pada g atau pun g′, maka dapat didefinisikan proyeksi sentral dari g ke g′ adalah suatu transformasi yang mentransformasikan titik-titik pada g ke titik-titik pada g′ oleh proyektor-proyektor yang melalui O.



gambar 4.b.8



gambar 4.b.9

Misalkan titik V pada g adalah titik potong garis yang melalui O dan sejajar g′ dengan g, maka setiap titik pada g selain V mempunyai bayangan di g′. Titik V tidak mempunyai bayangan di g′ karena OV tidak memotong g′.

Hal yang serupa, misalkan W′ titik potong garis yang melalui O dan sejajar g dengan g′, maka W′ bukan bayangan dari titik mana pun (tidak mempunyai asal), sedangkan titik-titik pada g′selain W′ merupakan bayangan dari titik-titik pada g. Penjelasan di atas memnunjukkan bahwa proyeksi sentral dari suatu garis ke garis yang lain tidak selalu memetakan garis lengkap ke garis lengkap. Proyeksi sentral dari garis lengkap ke garis lengkap terjadi jika garis-garis tersebut saling sejajar. Dapat dilihat pada gambar 4.b.9, garis g // g′, dan itu merupakan kejadian khusus pada proyeksi sentral dari suatu garis ke garis lain. Meskipun demikian, dalam proyeksi sentral ini terdapat korespondensi satu-satu antara titik -titik pada garis g selain V dan titik-titik pada garis g′ selain W′.

Berikut ini ciri-ciri penting yang lain pda proyeksi sentral dari suatu garis ke garis yang lain :

a. Keantaraan tidak selalu dipertahankan.

Contoh : dapat diperhatikan gambar 4.b.8 sebelumnya.

Pada g, C terletak di antara A dan B tetapi setelah diproyeksikan pada g′, C′ tidak di antara A′ dan B′. Lebih jelasnya , tidak ada titik-titik di antara A dan B yang diproyeksikan ke titik-titik di antara A′ dan B′.

Secara khusus titik tengah AB tidak diproyeksikan ke titik tengah A′B′.

b. Ruas garis tidak selalu diproyeksikan ke ruas garis.

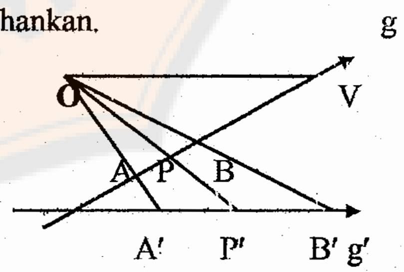
Contoh : Dapat diperhatikan kembali gambar 4.b.8.

Ruas garis AV diproyeksikan ke suatu sinar yang merupakan bagian dari g′, sinar garis tersebut berpangkal di A ke arah kanan. Begitu juga dengan BV diproyeksikan ke sinar garis pada g′ yang berpangkal di B′ ke arah kiri.

c. Jarak tidak dipertahankan

Pada gambar 4.b.8 pula dapat dilihat bahwa titik-titik pada g yang semula dekat dengan V, misalkan A dan B, yang satu dalam AV dan yang lain dalam BV. Setelah diproyeksikan pada g′ satu sama lain (A′ dan B′) saling berjauhan, A′ jauh di sebelah kanan sedangkan B′ jauh di sebelah kiri. Contoh lain AC. Segmen AC diproyeksikan ke A′C′ pada g′ yang jarak A′C′ kurang lebih dua atau tiga kali AC.

d. Perbandingan dalam pembagian tidak selalu dipertahankan.



Contoh-contoh mengenai perubahan jarak di atas, menunjukan bahwa jarak - jarak itu tidak dapat digandakan oleh suatu konstanta yang sama. Dengan kata lain perbandingan

gambar 4.b.10

dalam pembagian jarak-jarak setiap segmen (ruas garis) yang berkorespondensi tidak selalu sama. Kita perhatikan gambar 4.b.10. Misalkan A, B, P titik-titik yang berlainan pada g selain V dan misalkan A′,B′, P′ berturut-turut bayangan mereka. A, B pada sisi yang sama dari V. Telah ditentukan arah positif pada g dan g′.

Perbandingan dalam pembagian dengan P membagi $\overline{AB}$ dan P′ membagi $\overline{A'B'}$ adalah

(1) $r = \dfrac{AP}{BP}$ dan $r' = \dfrac{A'P'}{B'P'}$

$\overline{AB}$ dan $\overline{BP}$ berlawanan arah, begitu pula dengan $\overline{A'P'}$ dan $\overline{B'P'}$, maka nilai r dan r′ negatif.

Kita misalkan (APB) seperti pada gambar 4.b.10.

Diperhatikan Δ AOP, dengan aturan sinus diperoleh

(2) $\mathrm{AP} = \mathrm{AO} \cdot \dfrac{\sin\angle\mathrm{AOP}}{\sin\angle\mathrm{OPA}}$

dan diperhatikan Δ BOP, dengan aturan sinus juga diperoleh

(3) $\mathrm{BP} = \mathrm{BO} \cdot \dfrac{\sin\angle\mathrm{POB}}{\sin\angle\mathrm{OPB}}$

Karena $\angle$OPB dan $\angle$OPA adalah sudut - sudut pelurus dan mempunyai nilai sinus yang sama, maka persamaan (3) dapat dinyatakan pula sebagai

(4) $\mathrm{BP} = \mathrm{BO} \cdot \dfrac{\sin\angle\mathrm{POB}}{\sin\angle\mathrm{OPA}}$

Pembagian persamaan (2) dan persamaan (4) diperoleh

(5) $\frac{AP}{BP} = \frac{AO}{BO} \cdot \frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle POB}$

Selanjutnya kita perhatikan A', P', B'. Pada segitiga-segitiga bayangan mereka, $\Delta P'OA'$ dan $\Delta B'OP'$, dengan cara yang sama seperti di atas dengan menggunakan aturan sinus diperoleh

(6) $\frac{A'P'}{B'P'} = \frac{A'O}{B'O} \cdot \frac{\sin\angle A'OP'}{\sin\angle P'OB'}$

$m\angle A'OP' = m\angle AOP$ dan $m\angle P'OB' = m\angle POB$. Dengan membandingkan (5) dan (6) diperoleh

(7) $\frac{r'}{r} = \frac{A'O \cdot BO}{AO \cdot B'O}$, $\quad r' = \frac{A'O \cdot BO}{AO \cdot B'O} r$

Dari (7) dapat dilihat bahwa $r' \neq r$, karena itu perbandingan dalam pembagian tidak dipertahankan, kecuali jika koefisien r adalah 1, yaitu $\frac{A'O}{B'O} = \frac{AO}{BO}$ .Hal itu terjadi jika $\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$. Dan itu mungkin terjadi jika g dan g' saling sejajar.

e. Perbandingan rangkap dipertahankan

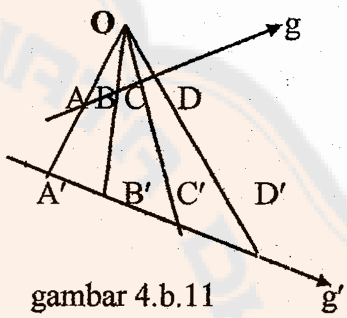
Sebelum dibahas lebih lanjut, kita lihat terlebih dahulu definisi mengenai perbandingan rangkap.

Definisi 4.B.1 :

Jika A, B, C, D adalah titik-titik segaris (kolinear), besar

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{AD}{DB}$$

disebut perbandingan rangkap atau perbandingan silang dengan C,D pada garis $\overline{AB}$, dan diwakili oleh simbol / notasi (AB,CD), yang dibaca "perbandingan rangkap / perbandingan silang untuk A, B, C, D".



$$(AB,CD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$$

gambar 4.b.11

Perbandingan silang di atas akan bernilai negatif atau bernilai positif tergantung pada nilai masing-masing perbandingan, dalam perbandingan di atas yaitu $\frac{AC}{BC}$ dan $\frac{AD}{BD}$. Jika keduanya bernilai positif atau keduanya bernilai negatif maka perbandingan silangnya bernilai positif, sedangkan jika $\frac{AC}{BC}$ bernilai positif dan $\frac{BD}{AD}$ bernilai negatif atau sebaliknya, maka perbandingan silangnya bernilai negatif.

Kita perhatikan gambar 4.b.11, $\frac{AC}{BC}$ dan $\frac{AD}{BD}$ keduanya bernilai positif sehingga perbandingan silangnya bernilai positif, sedangkan $\frac{AC}{CB}$ dan $\frac{AD}{DB}$ keduanya bernilai negatif sehingga perbandingan silangnya bernilai positif juga. Jadi

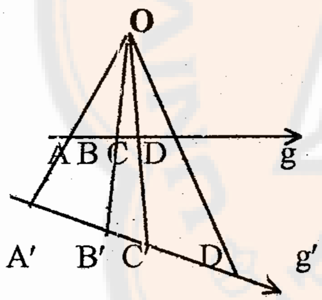
$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ atau $\frac{AC}{CB}\cdot\frac{DB}{AD}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$. Untuk selanjutnya agar lebih mudah kita gunakan

$$(AB,CD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD} \text{ atau}$$

$$(AB,CD)=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$$

Perbandingan silang ini dalam suatu proyeksi dipertahankan (tetap).

Berikutnya kita lanjutkan bahwa perbandingan silang dalam proyeksi sentral dipertahankan / tetap. Dengan menggunakan persamaan untuk luas segitiga kita dapat menunjukkannya.



gambar 4.b.12

$$\frac{AC}{BC}=\frac{L\Delta OAC}{L\Delta OBC}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin\angle AOC}{\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\angle BOC}$$

$$=\frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{BD}{AD}=\frac{L\Delta OBD}{L\Delta OAD}=\frac{\frac{1}{2}OB\cdot OD\sin\angle BOD}{\frac{1}{2}OA\cdot OD\sin\angle AOD}=\frac{OB\sin\angle BOD}{OA\sin\angle AOD} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{L\Delta OA'C'}{L\Delta OB'C'}=\frac{\frac{1}{2}OA'\cdot OC'\sin\angle A'OC'}{\frac{1}{2}OB'\cdot OC'\sin\angle B'OC'}=\frac{OA'\cdot\sin\angle A'OC'}{OB'\cdot\sin\angle B'OC'} \quad \ldots(3)$$

dan

$$\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{L\Delta OB'D'}{L\Delta OA'D'} = \frac{\frac{1}{2}OB' \cdot OD' \sin\angle B'OD'}{\frac{1}{2}OA' \cdot OD' \sin\angle A'OD'} = \frac{OB' \sin\angle B'OD'}{OA' \sin\angle A'OD'} \quad \ldots(4)$$

dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC} \cdot \frac{OB\sin\angle BOD}{OA\sin\angle AOD} = \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} \cdot \frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle AOD} \quad \ldots(5)$$

dari (3) dan (4) diperoleh

$$\frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D}{A'D'} = \frac{OA' \sin\angle A'OC'}{OB' \sin\angle B'OC'} \cdot \frac{OB' \sin\angle B'OD'}{OA' \sin\angle A'OD'} = \frac{\sin\angle A'OC'}{\sin\angle B'OC'} \cdot \frac{\sin\angle B'OD'}{\sin\angle A'OD'} \ldots(6)$$

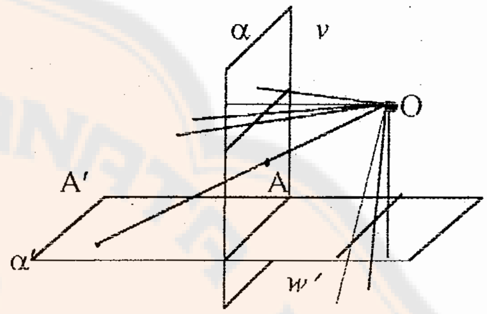
Dengan demikian untuk empat titik yang berlainan A, B, C, D pada g yang mempunyai bayangan pada g′ besarnya perbandingan silang tetap. Dengan notasi (AB,CD) = (A′B′,C′D′).

Proyeksi yang menjadi pokok bahasan pada bagian ini adalah proyeksi dari suatu bidang ke bidang itu sendiri. Tetapi untuk lebih memahami mengenai transformasi proyektif, suatu proyeksi dari suatu bidang ke bidang yang lain perlu sedikit dibicarakan.

Sebelumnya telah sedikit disajikan mengenai pengertian proyeksi paralel dari suatu budang ke bidang yang lain. Selanjutnya akan di sajikan pengertian mengenai proyeksi sentral dari suatu bidang ke bidang yang lain.

Misalkan terdapat bidang α dan bidang α' yang berlainan dengan sentral O tidak pada kedua bidang itu. Jika A suatu titik pada α dan OA memotong α' di suatu titik A′, transformasi dari α ke α' dengan sentral O itu disebut proyeksi sentral dari α ke α' dengan sentral O dengan A′ merupakan bayangan dari A.

bidang yang melalui O dan sejajar α'.Semua titik pada perpotongan bidang tersebut dengan bidang α tidak mempunyai bayangan di α'. Titik-titik tersebut terletak pada satu garis yang disebut garis v. Garis v ini disebut garis di α yang hilang, dan titik-titiknya disebut titik-titik di α yang hilang. Demikian pula pada α' terdapat titik-titik yang hilang, titik-titik yang tidak mempunyai titik asal di α.



gambar 4.b.13

Titik A′ pada α' tidak mempunyai asal pada α jika garis yang menghubungkan A′ dengan O sejajar α. Semua titik yang terdapat pada perpotongan α' dengan bidang yang melalui O dan sejajar α tidak mempunyai asal di α . Titik-titik itu terletak pada satu garis yang disebut garis w′. Garis w′ ini disebut garis yang hilang pada α' dan titik-titiknya disebut titik-titik yang hilang pada α'.

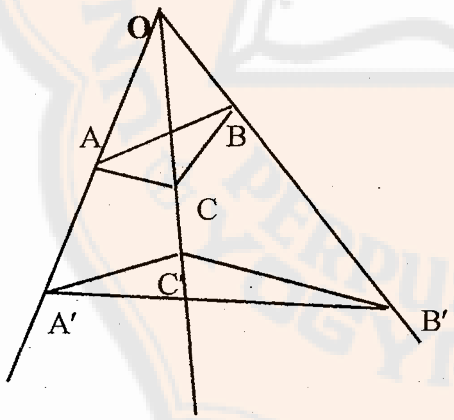
Setiap titik pada α selain titik-titik pada v mempunyai bayangan yang tunggal di α', demikian juga setiap titik pada α' selain titik-titik pada w′ mempunyai asal yang tunggal di α. Dengan demikian selain titik-titik pada v dan w′, proyeksi sentral dari α ke α' merupakan pemetaan 1-1.

Misalkan proyeksi ini dinotasikan oleh transformasi T. Jika g adalah garis selain v pada α, bidang yang melalui O dan g akan memotong α' di garis g′. Garis g, g′ dan titik O (sentral) terletak pada satu bidang, O tidak pada g dan g′. Jadi transformasi T mengakibatkan proyeksi sentral dari suatu garis ke garis yang lain.

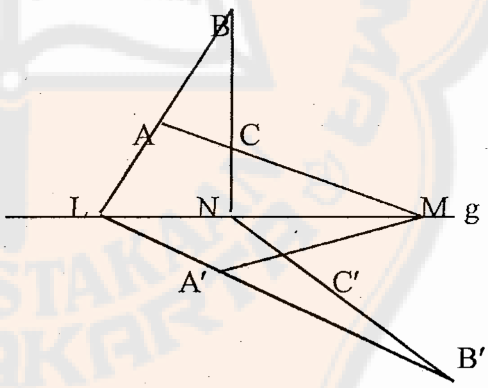
3. Perspektivitas

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai penggunaan perspektivitas. Berikut ini adalah pengertian perspektivitas.

Dua segitiga ABC, A′B′C′ dengan garis AA′, BB′, CC′ berpotongan pada satu titik, misalkan pada O, maka kedua segitiga iti dikatakan perspektif terhadap titik O tersebut. Jika dua segitiga ABC, A′B′C′ dengan perpotongannya L, M, N berturut-turut untuk pasangan-pasangan garis AB dan A′B′, AC dan A′C′, BC dan B′C′ terletak pada satu garis maka kedua segitiga itu dikatakan perspektif terhadap garis itu (garis yang melalui L, M, N)



gambar 4.b.14.a



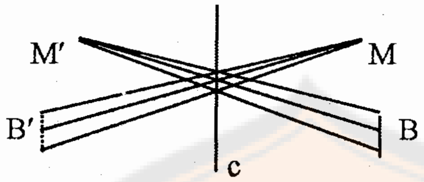
gambar 4.b.14.b

Kita perhatikan gambar 4.b.14a di atas. Pertama dapat diperhatikan bahwa Δ ABC dan Δ A′B′C′ perspektif terhadap titik O, karena garis-garis yang menghubungkan titik-titik yang berkorespondensi melalui titik O. Titik O disebut sebagai pusat perspektivitas dan garis-garis yang melalui O disebut proyektor dari kedua segitiga itu.

Selanjutnya dapat dilihat pada gambar 4.b.14.b bahwa Δ ABC dan Δ A′B′C′ perspektif terhadap garis g, karena titik potong - titik potong pasangan - pasangan garis yang berkorespondensi terletak pada garis g.

Gambar di atas juga menunjukkan suatu proyeksi sentral dari Δ ABC ke ΔA′B′C′ dengan sentral (pusat) O . Titik-titik yang berkorespondensi dihubungkan oleh garis-garis yang melalui O . Dengan demikian proyeksi sentral dnegan pusat O disebut perspektivitas dengan pusat perspektivitas O , atau sebaliknya. Karena perspektivitas dengan sentral O ini disebut juga proyeksi sentral dengan sentral O maka pada perspektivitas itu dikenal juga adanya titik-titik yang hilang, yaitu titik yang tidak mempunyai bayangan dan titik yang tidak mempunyai asal. Titik yang hilang tersebut dalam geometri proyektif dikenal sebagai titik ideal.

Ada pun contoh perspektif dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya penggunaan cermin. Titik-titik pada cermin perspektif dengan titik-titik pada bayangan dari mata.



gambar 4.b.15

Demikian pula titik-titik pada cermin dengan titik-titik pada benda terhadap bayangan mata.

Sebagai contoh perspektif dalam ruang dapat dilihat pada kerucut lingkaran tegak, yaitu sebarang lingkaran pada kerucut perspektif dengan suatu ellips terhadap puncak kerucut.

C. Transformasi Proyektif

Transformasi affin dari suatu bidang ke dirinya sendiri dapat diturunkan oleh proyeksi pararel dari suatu bidang ke bidang yang lain. Dengan menggunakan keduanya, proyeksi paralel dan proyeksi sentral, kita dapat menuju ke konsep yang lebih luas mengenai transformasi dari suatu bidang ke bidang itu sendiri, yaitu suatu transformasi proyektif.

Definisi 4.C.1 :

Suatu transformasi proyektif dari suatu bidang ke dirinya sendiri adalah suatu transformasi yang

(a) membawa titik-titik pada suatu bidang ke bidang itu sendiri dengan jalan 1-1, kecuali mungkin bahwa titik-titik pada satu garis tidak mempunyai bayangan dan titik-titik pada satu garis tidak mempunyai asal,

(b) mempertahankan kolinearitas, dan

(c) mempertahankan perbandingan silang pada titik-titk.

Seperti telah kita ketahui bahwa himpunan similaritas memuat semua isometri dan ada transformasi yang bukan isometri, yaitu dilatasi sentral dan hasil kali dilatasi dengan isometri. Sementara itu himpunan transformasi affin memuat semua similaritas dan ada yang bukan similaritas. Demikian pula himpunan transformasi proyektif memuat himpunan transformasi affin dan ada transformasi yang bukan affin.

Definisi 4.C.1 dan apa yang telah kita bahas mengenai transformasi affin menunjukkan bahwa setiap transformasi affin pada bidang adalah suatu transformasi proyektif dari suatu bidang ke bidanng itu sendiri. Transformasi affin tersebut merupakan keadaan khusus dari transformasi proyektif yang berkorespondensi tanpa melibatkan titik-titik yang hilang dan perbandingan dalam pembagian dipertahankan.

Sedangkan untuk transformasi proyektif dari suatu bidang ke bidang itu sendiri yang bukan affin adalah transformasi yang berkorespondensi 1-1 yang melibatkan titik-titik yang hilang. Suatu contoh untuk transformasi ini adalah hasil kali suatu proyeksi sentral dari bidang α ke bidang α' yang berpotongan dan suatu proyeksi paralel dari α' kembali ke α.

Titik-titik pada satu garis istimewa yang disebut dalam definisi 4.C.1 disebut titik-titik yang hilang, yaitu titik-titik yang tidak mempunyai bayangan atau titik-titik yang tidak mempunyai asal, seperti halnya pada proyeksi. Sedangkan titik-titik yang bukan titik-titik yang hilang sering disebut titik-titik biasa "*ordinary*".

Berikut ini terdapat suatu teorema yang mendukung suatu pernyataan bahwa dengan menggunakan proyeksi paralel dan proyeksi sentral kita dapat menuju ke transformasi proyektif.

Teorema 4.C.1 :

Sebarang transformasi proyektif yang diberikan dapat diperoleh dari hasil kali suatu rangkaian proyeksi, tidak lebih dari satu yang mempunyai unsur-unsur yang hilang.

Bukti untuk teorema ini ditunda sampai pembahasan mengenai persamaan transformasi proyektif.

Pada pembahasan mengenai transformasi affin telah dibuktikan bahwa transformasi affin dari suatu bidang ke bidang itu sendiri merupakan hasil kali rangkaian proyeksi paralel dari suatu bidang ke bidang yang lain yang kembali ke bidang itu sendiri. Transformasi affin ini mempertahankan sifat-sifat proyeksi paralel dari suatu bidang ke bidang yang lain. Menurut teorema 4.C.1, Transformasi affin ini merupakan transformasi proyektif.

Sekarang kita misalkan suatu proyeksi dari suatu bidang ke bidang yang lain yang dimulai dari α, proyeksi dari α ke α_1, dan proyeksi dari α_1 ke α_2, proyeksi dari

α_2 keα_3 dan seterusnya sampai ke α_{n-1}. Misalkan proyeksi-proyeksi tersebut adalah proyeksi paralel. Yang terakhir dilanjutkan oleh proyeksi sentral dari α_{n-1} ke α_n, dimisalkan $\alpha_n = \alpha$.

Proyeksi paralel dari α ke α_1 tentu saja sifat-sifatnya sama dengan sifat-sifat proyeksi paralel dari suatu bidang ke bidang yang lain, demikian pula proyeksi paralel dari α_1 ke α_2, proyeksi paralel dari α_2 ke α_3 dan seterusnya sampai proyeksi paralel dari α_{n-2} ke α_{n-1}. Selanjutnya proyeksi sentral dari α_{n-1} ke α_n sudah pasti sifat-sifatnya sama dengan proyeksi sentral dari suatu bidang ke bidang yang lain. Jadi rangkaian proyeksi di atas memenuhi sifat-sifat proyeksi dari suatu bidang ke bidang yang lain, yang juga merupakan sifat-sifat transformasi proyektif dari α ke α, karena $\alpha_n = \alpha$.

Jika proyeksi-proyeksi itu dinotasikan oleh transformasi T berturut-turut dengan T_1, T_2, T_3, ..., $T_n(\alpha_{n-1}) = \alpha_n = \alpha$. Rangkaian proyeksi T_1, T_2, T_3, ..., T_{n-1}, T_n menghasilkan n proyeksi yang merupakan suatu pemetaan dari α onto α kecuali mungkin ada satu garis yang hilang. Hasil rangkaian ini dapat dinotasikan dengan transformasi $T(\alpha) = \alpha$.

Menurut teorema 4.C.1 hasil kali dari rangkaian proyeksi yang dijelaskan di atas merupakan suatu transformasi proyektif dari suatu bidang ke bidang itu sendiri. Dengan demikian teorema 4.C.1 menimbulkan suatu akibat bahwa sifat-sifat khusus dari transformasi proyektif tepat sama seperti sifat-sifat umum untuk semua proyeksi dari suatu bidang ke bidang yang lain. Dan karena itu sifat-sifat itu disebut sifat proyektif.

D. Persamaan Transformasi Proyektif

Dalam pembahasan pada bagian ini telah ditentukan suatu persamaan yang berbentuk pecahan yang akan ditunjukkan bahwa persamaan itu adalah bentuk persamaan untuk transformasi proyektif. Persamaan itu berbentuk :

(1) $$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}$$

dengan $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

Untuk selanjutnya determinan di atas disebut sebagai determinan transformasi (1), dan dinotasikan oleh Δ. Transformasi yang persamaannya ditunjukkan oleh (1) disebut transformasi pecahan.

Berikut ini suatu teorema mengenai bentuk persamaan transformasi (1) di atas.

Teorema 4.D.1 :

Setiap transformasi pecahan pada bentuk (1) adalah suatu transformasi proyektif, dan akan berupa transformasi affin jika $c_1 = c_2 = 0$.

Bukti :

Untuk membuktikan teorma di atas, ditunjukkan terlebih dahulu bahwa persamaan bentuk (1) dapat merupakan persamaan transformasi affin dan transformasi dengan persamaan bentuk (1) memenuhi sifat-sifat transformasi proyektif pada definisi 4.C.1.

(i) ditunjukkan bahwa persamaan bentuk (1) menunjukkan semua transformasi affin jika $c_1 = c_2 = 0$.

Kita perhatikan pada persamaan bentuk (1), jika $c_1 = c_2 = 0$ tidak menyebabkan c_3 maupun a_1b_2-a_2b_1 menjadi nol.

Misalkan $c_1 = c_2 = 0$ disubstitusikan ke persamaan (1) diperoleh

$$x' = \frac{a_1}{c_3}x + \frac{a_2}{c_3}y + \frac{a_3}{c_3}, \qquad y' = \frac{b_1}{c_3}x + \frac{b_2}{c_3}y + \frac{b_3}{c_3}$$

dengan $c_3 \neq 0$. Persamaan di atas adalah susunan persamaan dengan derajat satu, yang determinannya

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_3} & \frac{a_2}{c_3} \\ \frac{b_1}{c_3} & \frac{b_2}{c_3} \end{vmatrix} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{c_3^2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

tidak sama dengan nol karena $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Karena itu bentuk-bentuk di atas menunjukkan transformasi affin.

Sekarang sebaliknya, sebarang transformasi affin yang diberikan

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + a_3 \\ y' = b_1x + b_2y + b_3 \end{cases}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

dapat ditulis dalam bentuk (1) dengan pengambilan $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$ dan menuliskan bahwa dalam kasus ini

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dengan demikian, kita peroleh semua transformasi proyektif yang affin dari (1) dengan pengambilan $c_1 = c_2 = 0$.

(ii) Sekarang kita tunjukkan jika c_1, c_2 keduanya tidak nol, maka tiga sifat yang didefinisikan pada suatu transformasi proyektif (definisi 4.C.1) dipenuhi oleh(1)

a) Jika nilai diberikan pada x, y dalam (1), diketahui nilai-nilai x', y' yang berkorespondensi dengan tunggal dapat dihitung jika dan hanya jika $c_1x + c_2y + c_3 \neq 0$. Jika $c_1x + c_2y + c_3 = 0$, tidak diperoleh nilai x' dan y'.

Dengan demikian setiap titik pada garis (2) berikut ini

(2) $\qquad c_1x + c_2y + c_3 = 0$

tidak mempunyai bayangan.

Untuk menunjukkan sebalikya bahwa semua titik, kecuali titik-titik pada suatu garis khusus, mempunyai titik asal, persamaan (1) diubah dalam x dan y, diperoleh

(3) $$x = \frac{A_1x' + B_1y' + C_1}{A_3x' + B_3y' + C_3}, \qquad y = \frac{A_2x' + B_2y' + C_2}{A_3x' + B_3y' + C_3}$$

dengan $A_1, B_1, C_1, \ldots$ adalah kofaktor dari $a_1, b_1, c_1, \ldots$ dalam Δ.

Pengerjaan aljabar ini berlaku hanya jika penyebut pada (3) tidak sama dengan nol. Jika penyebutnya nol, nilai-nilai untuk x dan y tidak dapat diperoleh. Penyebut pada persamaan (3) juga akan nol jika A_3, B_3, C_3 ketiganya bernilai nol, dan itu tidak mungkin terjadi karena $\delta \neq 0$.

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Jadi ada nilai x', y' yang penyebutnya tidak sama dengan nol. Pasangan x', y' tersebut, dengan persamaan (3) memungkinkan kita menghitung nilai pasangan tunggal untuk x, y. Dalam transformasi (1), setiap titik (x', y') tidak pada garis

(4) $\qquad A_3x' + B_3y' + C_3 = 0$

mempunyai suatu asal yang tunggal, dan setiap titik pada garis (4) tidak mempunyai titik asal.

Pada garis (4) A_3, B_3 tidak keduanya nol. Misalkan transformasi (1) dinotasikan oleh T dan memandang (3) sebagai bentuk implisit dari trasnformasi T. Kita boleh juga menganggapnya sebagai bentuk eksplisit dari T^{-1}. T^{-1} adalah suatu transformasi pecahan yang determinannya $\delta \neq 0$. Jika A_3, B_3 keduanya nol, T^{-1} akan berupa affin oleh (i). Inversnya akan berupa affin juga. Hal ini bertentangan dengan pengandaian kita bahwa c_1 dan c_2 keduanya tidak nol.

Jadi dengan pengandaian c_1, c_2 keduanya tidak nol, telah dibuktikan bahwa (1) mununjukkan suatu korespondensi 1-1 antara titik-titik pada bidang, kecuali titik-titik pada garis (4) yang tidak mempunyai titik asal.

b). Sekarang dengan pengandaian yang sama, ditunjukkan bahwa(1) mempertahankan kolinearitas.

Misalkan

(5) $\qquad ax + by + c = 0$

sebarang garis selain garis (2), dan a, b keduanya tidak nol.

Dengan mensubstitusikan (3) ke (5) diperoleh bayangan dari garis ini menjadi

$$a\frac{A_1x' + B_1y' + C_1}{A_3x' + B_3y' + C_3} + b\frac{A_2x' + B_2y' + C_2}{A_3x' + B_3y' + C_3} + c = 0$$

atau disederhanakan menjadi

(6) $\qquad (aA_1 + bA_2 + cA_3)x' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)y' + (aC_1 + bC_2 + cC_3) = 0$

Jika P_1, P_2, P_3 adalah titik-titik pada garis (5) yang mempunyai bayangan, koordinat-koordinat bayangan dari titik-titik itu akan memenuhi (6). Jika koefisien-koefisien dari x' dan y' pada (6) keduanya nol, maka nilai konstanta juga akan nol. Cara lain untuk mengatakan bahwa ketiga bilangan itu nol yaitu dengan mengatakan bahwa persamaan - persamaan berikut ini

$$A_1u + A_2v + A_3w = 0$$

$B_1u + B_2v + B_3w = 0$

$C_1u + C_2v + C_3w = 0$

dengan $u = a$, $v = b$, $w = c$. Tidak mungkin 0,0,0 merupakan penyelesaian untuk susunan persamaan di atas, karena $\delta \neq 0$, sedangkan a, b tidak keduanya nol. Karena itu koefisien untuk x', y' pada (6) tidak keduanya nol. Persamaan (6) adalah persamaan suatu garis, dan bayangan dari P_1, P_2, P_3 memenuhi garis tersebut. Jadi bayangan dari titik-titik P_1, P_2, P_3 adalah kolinear.

Terbukti.

c). Terakhir, ditunjukkan bahwa (1) mempertahankan perbandingan silang pada titik-titik jika c_1, c_2 keduanya tidak nol. Misalkan A, B, C, D titik-titik biasa (ordinary) segaris yang berlainan, dengan absis x_1, x_2, x_3, x_4. Bayangan mereka A′, B′, C′, D′, menurut bukti a) dan b) adalah berlainan dan segaris. Pertama-tama diambil A′, B′, C′ dan absis mereka x_1', x_2', x_3' dengan persamaan - persamaan

(7) $$x_1' = \frac{a_1x_1 + a_2y_1 + a_3}{c_1x_1 + c_2y_1 + c_3} \qquad x_2' = \frac{a_1x_3 + a_2y_2 + a_3}{c_1x_1 + c_2y_2 + c_3},$$

$$x_3' = \frac{a_1x_3 + a_2y_3 + a_3}{c_1x_3 + c_2y_3 + c_3}$$

Jika r adalah perbandingan dalam pembagian untuk C membagi $\overline{AB}$, maka

$$x_3 = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}.$$

Dengan mensubstitusikan x_3 dan y_3 ke x_3' (7) dan langsung disederhanakan, diperoleh

$$x_3' = \frac{(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3) + r(a_1x_2 + a_2y_2 + a_3)}{(c_1x_1 + c_2y_1 + c_3) + r(c_1x_2 + c_2y_2 + c_3)}$$

Dengan menotasikan $c_1x_1 + c_2y_1 + c_3$ oleh h dan $c_1x_2 + c_2y_2 + c_3$ oleh k, dan diwakili oleh (7), persamaan di atas menjadi

$$x_3' = \frac{hx_1' + krx_2'}{h+kr} = \frac{x_1' + \left({}^{kr}\!/_{h}\right)x_2'}{1 + {}^{kr}\!/_{h}}, \qquad h \text{ dan } k \text{ tidak nol.}$$

Jadi C′ membagi $\overline{A'B'}$ dengan rasio ${}^{kr}\!/_{h}$. Jika s nilai perbandingan dalam pembagian untuk D membagi $\overline{AB}$, maka dengan cara yang sama seperti di atas nilai perbandingan dalam pembagian untuk D′ membagi $\overline{A'B'}$ dapat ditentukan. Nilai itu adalah ${}^{ks}\!/_{h}$, karena itu

$$(AB,CD) = \frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD} = \frac{h}{s} \qquad \text{dan}$$

$$(A'B',C'D') = \frac{A'C'}{B'C'}\cdot\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{kr}{h}\cdot\frac{h}{ks} = \frac{h}{s}$$

terbukti bahwa (1) mempertahankan perbandingan silang pada titik-titik.

Dari bukti a), b), c), terbukti bahwa transformasi pecahan berbentuk (1) merupakan transformasi proyektif.

terbukti bahwa (1) mempertahankan perbandingan silang pada titik-titik.

Dari bukti a), b), c), terbukti bahwa transformasi pecahan berbentuk (1) merupakan transformasi proyektif.

Dari bukti (i) dan (ii) terbukti bahwa transformasi pecahan bentuk (1) merupakan transformasi proyektif yang merupakan transformasi affin apabila $c_1 = c_2 = 0$.

Telah kita bicarakan bahwa setiap transformasi proyektif dapat diperoleh sebagai hasil dari rangakaian proyeksi (teorema 4.C.1). Bukti untuk teorema tersebut akan dibicarakan berikut ini setelah kita buktikan teorema 4.D.2 sebagai teorema pendukungnya.

Teorema 4.D.2 :

Ada suatu transformasi proyektif tunggal yang menghasilkan suatu garis v tidak mempunyai bayangan dan membawa titik-titik A, B, C nonkolinear yang diketahui berturut-turut ke titik-titik A′, B′, C′ nonkolinear.

Bukti :

Dimisalkan persamaan untuk v adalah

(1) $ax + by + c = 0$,

koordinat-koordinat untuk A, B, C berturut-turut adalah (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) dan untuk A′, B′, C′ adalah (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3'). Tugas kita adalah menentukan koefisien-koefisien persamaan berikut

(2) $$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}$$

sehingga transformasi itu menghasilkan garis (1) yang tidak mempunyai bayangan dan A, B, C berturut-turut dipetakan ke A′, B′, C′.

Pertama-tama ketentuan c_1, c_2, c_3 diganti menjadi a, b, c yang sebanding. Pengerjaannya secara sederhana kita misalkan $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$. Dengan demikian diperoleh

(3) $$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{ax + by + c} \qquad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{ax + by + c}$$

dan mencari nilai-nilai untuk a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

Karena (3) membawa A ke A′, kita harus mempunyai

$$x' = \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{ax_1 + by_1 + c}, \qquad y' = \frac{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3}{ax_1 + by_1 + c}.$$

Demikian juga dua persamaan yang berkorespondensi dengan B, B′ dan dua persamaan yang berkorespondensi dengan C, C′, sehingga terdapat enam persamaan pecahan. Dengan demikian a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 harus mempunyai nilai yang memenuhi enam persamaan tersebut. Persamaan - persamaan tersebut dapat ditetapkan sebagai berikut :

$$x_1 a_1 + y_1 a_2 + a_3 = x_1'(ax_1 + by_1 + c)$$
$$x_2 a_1 + y_2 a_2 + a_3 = x_2'(ax_2 + by_2 + c)$$
$$x_3 a_1 + y_3 a_2 + a_3 = x_3'(ax_3 + by_3 + c)$$
$$x_1 b_1 + y_1 b_2 + b_3 = y_1'(ax_1 + by_1 + c)$$
$$x_2 b_1 + y_2 b_2 + b_3 = y_2'(ax_2 + by_2 + c)$$

$$x_3b_1 + y_3b_2 + b_3 \quad = y_3'(ax_3 + by_3 + c)$$

Persamaan-persamaan di atas adalah enam persamaan linear dengan enam bilangan yang tidak diketahui, yaitu a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

Determinan dari sistem tersebut adalah

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{atau} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

oleh hukum Laplace, determinan di atas tidak nol karena A, B, C nonkolinear. Oleh karena itu sistem persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu hanya ada satu himpunan untuk nilai-nilai a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, maka transformasi (3) akan memenuhi dua syarat dari teorema 4.D.2.

Jadi, jika $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$ maka ada suatu transformasi proyektif tunggal yang memenuhi syarat-syarat dari teorema di atas. Jika c_1, c_2, c_3 sebanding dengan a, b, c tetapi tidak sama, misalkan c_1, c_2, c_3 dalam (2) berturut-turut menjadi k kali a, b, c dengan $k \neq 0$, maka akan ada lagi suatu penyelesaian tunggal untuk enam bilangan yang tidak diketahui itu, tetapi nilai - nilai itu hanya akan menjadi k kali dari yang dihasilkan pertama. Aturan Cramer dengan penyelesaian menggunakan determinan akan membuat lebih jelas bahwa transformasi yang dihasilkan tidak berbeda dari yang pertama, dengan $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$. Terbukti.

Sekarang dapat dibuktikan teorema 4.C.1 (halaman 89). Jadi kita kembali ke teorema 4.C.1 yang menyatakan

"Sebarang transformasi proyektif yang dapat diberikan dapat diperoleh sebagai hasil dari suatu rangkaian proyeksi, tidak lebih dari satu yang mempunyai anggota - anggota yang hilang."

Bukti :

Misalkan T transformasi yang diberikan pada suatu bidang α (dari α ke α). Jika transformasi T adalah transformsi affin, teorema 4.C.1 (halaman 89) benar oleh teorema 4.B.1 (halaman 74) yang menyatakan bahwa setiap transformasi affin dari suatu bidang ke dirinya sendiri adalah hasil kali dari beberapa proyeksi paralel. Misalkan transformasi T bukan affin, maka ada suatu garis v yang tidak mempunyai bayangan. Misalkan A, B, C adalah titik titik- nonkolinear, tidak satu pun pada v, dan misalkan bayangan mereka adalah A′, B′, C′. Dengan menggunakan proyeksi sentral, proyeksi dari bidang α ke suatu bidang α' yang berpotongan sedemikian hingga v tidak mempunyai bayangan, A, B, C tentu akan mempunyai bayangan nonkolinear A_1, B_1, C_1 pada α'. Jika sekarang kita proyeksikan α' kembali ke α oleh suatu proyeksi paralel, A_1, B_1, C_1 akan dipetakan ke tiga titik nonkolinear A_2, B_2, C_2. Misalkan R adalah suatu transformasi dari α ke dirinya sendiri sedemikian hingga v tidak mempunyai bayangan dan A, B, C berturut-turut dipetakan ke A_2, B_2, C_2.

adalah suatu transformasi proyektif dari α ke dirinya sendiri sedemikian hingga v tidak mempunyai bayangan dan A, B, C berturut-turut dipetakan ke A′, B′, C′. Oleh teorema 4.D.2 maka tarnsformasi proyektif $T = RR'$.

Terbukti.

Seperti kita ketahui bahwa transformasi affin adalah transformasi proyektif dengan syarat - syarat tertentu atau dengan kata lain transformasi affin adalah keadaan khusus dari tranformasi proyektif, hal tersebut menunjukkan bahwa himpunan transformasi affin adalah himpunan bagian dari himpunan transformasi proyektif. Untuk melihat hubungan antara transformasi affin dan transformasi proyektif dengan lebih jelas lagi, akan dibuktikan teorema berikut ini.

Teorema 4.D.3 :

Himpunan transformasi proyektif membentuk suatu grup.

Bukti :

(i) Sebarang transformasi proyektif yang berlainan, hasil kalinya adalah transformasi proyektif.

(1) $$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3},$$

(1) $$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3},$$

dengan $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dan (2)

$$x' = \frac{d_1x + d_2y + d_3}{f_1x + f_2y + f_3}, \qquad y' = \frac{e_1x + e_2y + e_3}{f_1x + f_2y + f_3},$$

dengan $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Hasil kali transformasi (1) dan (2) berturut-turut akan mentransformasikan $(x, y) \to (x', y') \to (x'', y'')$. Hasil kali kedua transformasi itu dinyatakan dengan R. Jika (1) mentransformasikan suatu titik P ke P′, dan (2) mnetransformasikan titik P′ ke P″ maka R(P) = P″. Hasil kali (1) dan (2) adalah persamaan untuk transformasi R, yaitu sebagai berikut :

(3) $$x'' = \frac{(d_1a_1 + d_2b_1 + d_3c_1)x + (d_1a_2 + d_2b_2 + d_3c_2)y + (d_1a_3 + d_2b_3 + d_3c_3)}{(f_1a_1 + f_2b_1 + f_3b_1)x + (f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2) + (f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3)}$$

$$y'' = \frac{(e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1)x + (e_1a_2 + e_2b_2 + e_3c_2)y + (e_1a_3 + e_2b_3 + e_3c_3)}{(f_1a_1 + f_2b_1 + f_3c_1)x + (f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2)y + (f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3)}$$

Determinan utnuk persamaan (3) adalah Δ_2 , yaitu :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1a_1 + d_2b_1 + d_3c_1 & d_1a_2 + d_2b_2 + d_3c_2 & d_1a_3 + d_2b_3 + d_3c_3 \\ e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1 & e_1a_2 + e_2b_2 + e_3c_2 & e_1a_3 + e_2b_3 + e_3c_3 \\ f_1a_1 + f_2b_1 + f_3c_1 & f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2 & f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1 \cdot \Delta \neq 0$$

Jadi $\Delta_2 \neq 0$ karena Δ_1 dan Δ keduanya tidak nol.

Dengan demikian transformasi R adalah suatu transformasi proyektif.

Sifat tertutup terhadap perkalian dipenuhi.

(ii) Himpunan transformasi proyektif tidak kosong, karena sekurang-kurangnya memuat elemen idenditas.

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}$$

dengan $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$ dan $a_1 = b_2 = c_3 = 1$

yaitu transformasi identitas

$x' = x$

$y' = y$ dengan $\Delta = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 = 1$.

(iii) Dengan sendirinya sifat assosiatif terhadap perkalian dipenuhi dalam himpunan transformasi proyektif.

(iv) Untuk sebarang transformasi proyektif

(1) $$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3} \quad , \qquad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3},$$

$$\text{dengan } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ada suatu transformasi proyektif

(2) $$x'' = \frac{d_1x' + d_2y' + d_3}{f_1x' + f_2y' + f_3} \quad , \qquad y'' = \frac{e_1x' + e_2y' + e_3}{f_1x' + f_2y' + f_3},$$

$$\text{dengan } \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

sehingga hasil kali (1) dan (2) adalah transformasi identitas.

Hasil kali (1) dan (2) adalah

(3)
$$x'' = \frac{(d_1a_1 + d_2b_1 + d_3c_1)x + (d_1a_2 + d_2b_2 + d_3c_2)y + (d_1a_3 + d_2b_3 + d_3c_3)}{(f_1a_1 + f_2b_1 + f_3c_1)x + (f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2)y + (f_1a_3 + f_2b_3f_3c_3)}$$

$$y'' = \frac{(e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1)x + (e_1a_2 + e_2b_2 + e_3c_2)y + (e_1a_3 + e_2b_3 + e_3c_3)}{(f_1a_1 + f_2b_1 + f_3c_1)x + (f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2)y + (f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3)}$$

dengan $\Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1a_1 + d_2b_1 + d_3c_1 & d_1a_2 + d_2b_2 + d_3c_2 & d_1a_3 + d_2b_3 + d_3c_3 \\ e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1 & e_1a_2 + e_2b_2 + e_3c_2 & e_1a_3 + e_2b_3 + e_3c_3 \\ e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1 & f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2 & f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3 \end{vmatrix} = 1$

dan itu akan terjadi apabila

(4) (a) $d_1a_1 + d_2b_1 + d_3c_1 = 1$

(b) $d_1a_2 + d_2b_2 + d_3c_2 = 0$

(c) $d_3a_3 + d_2b_3 + d_3c_3 = 0$

(d) $e_1a_1 + e_2b_1 + e_3c_1 = 0$

(e) $e_1a_2 + e_2b_2 + e_3c_2 = 1$

(f) $e_1a_3 + e_2b_3 + e_3c_3 = 0$

(g) $f_1a_1 + f_2b_1 + f_3c_1 = 0$

(h) $f_1a_2 + f_2b_2 + f_3c_2 = 0$

(i) $f_1a_3 + f_2b_3 + f_3c_3 = 1$

dengan menggunakan hukum Cramer dapat diperoleh

$$(5)\qquad \begin{array}{lll} d_1 = \dfrac{b_3c_2 - b_2c_3}{\Delta} & e_1 = \dfrac{b_1c_3 - b_3c_1}{\Delta} & f_1 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{\Delta} \\ d_2 = \dfrac{a_2c_3 - a_3c_2}{\Delta} & e_2 = \dfrac{a_3c_1 - a_1c_3}{\Delta} & f_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta} \\ d_3 = \dfrac{a_3b_2 - a_2b_3}{\Delta} & e_3 = \dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{\Delta} & f_3 = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{\Delta} \end{array}$$

$d_1, d_2, d_3, \ldots$ adalah kofaktor dari $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dalam Δ.

Dengan mensubstitusikan (5) ke persamaan (1) maka dapat diperoleh

$$(6)\qquad x'' = \frac{\dfrac{b_3c_2 - b_2c_3}{\Delta}x + \dfrac{a_2c_3 - a_3c_2}{\Delta}y + \dfrac{a_3b_2 - a_2b_3}{\Delta}}{\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{\Delta}x + \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta}y + \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{\Delta}}$$

$$= \frac{(b_3c_2 - b_2c_3)x + (a_2c_3 - a_3c_2)y + (a_3b_2 - a_2b_3)}{(b_1c_2 - b_2c_1)x + (a_2c_1 - a_1c_2)y + (a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{b_1c_3 - b_3c_1}{\Delta}x + \dfrac{a_3c_1 - a_1c_3}{\Delta}y + \dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{\Delta}}{\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{\Delta}x + \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta}y + \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{\Delta}}$$

$$= \frac{(b_1c_3 - b_3c_1)x + (a_3c_1 - a_1c_3)y + (a_1b_3 - a_3b_1)}{(b_1c_2 - b_2c_1)x + (a_2c_1 - a_1c_2)y + (a_1b_2 - a_2b_1)}$$

Hasil kali (6) dan (1) diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (6) yang hasilnya adalah

$$x'' = x,\quad y'' = y \quad \text{dengan } \Delta_2 = 1.$$

Jadi untuk sebarang transformasi proyektif ada transformasi proyektif lain yaitu

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_3x + B_3y + C_3}, \qquad y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_3x + B_3y + C_3}$$

$$\text{dengan } \Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

sebagai inversnya.

A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 berturut-turut menggantikan d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3, f_1,f_2,f_3, yaitu kofaktor dari a_1, b_1, c_1, … dalam Δ

Dari (i) , (ii), (iii), (iv) terbukti bahwa himpunan transformasi proyektif membentuk suatu grup.

Kita ketahui bahwa himpunan transformasi affin membentuk suatu grup, dan karena himpuna transformasi proyektif juga membentuk suatu grup maka dapat dinyatakan bahwa grup transformasi affin adalah subgrup dari grup transformasi proyektif. Dengan memperhatikan bentuk persamaan transformasi affin dan bentuk persamaan transformasi proyektif, akan tampak dengan jelas bahwa transformasi affin adalah transformasi proyektif atau dapat disebut juga keadaan khusus dari transformasi proyektif.

Berikut ini adalah bentuk persamaan transformasi proyektif (1) dan bentuk persamaan transformasi affin (2)

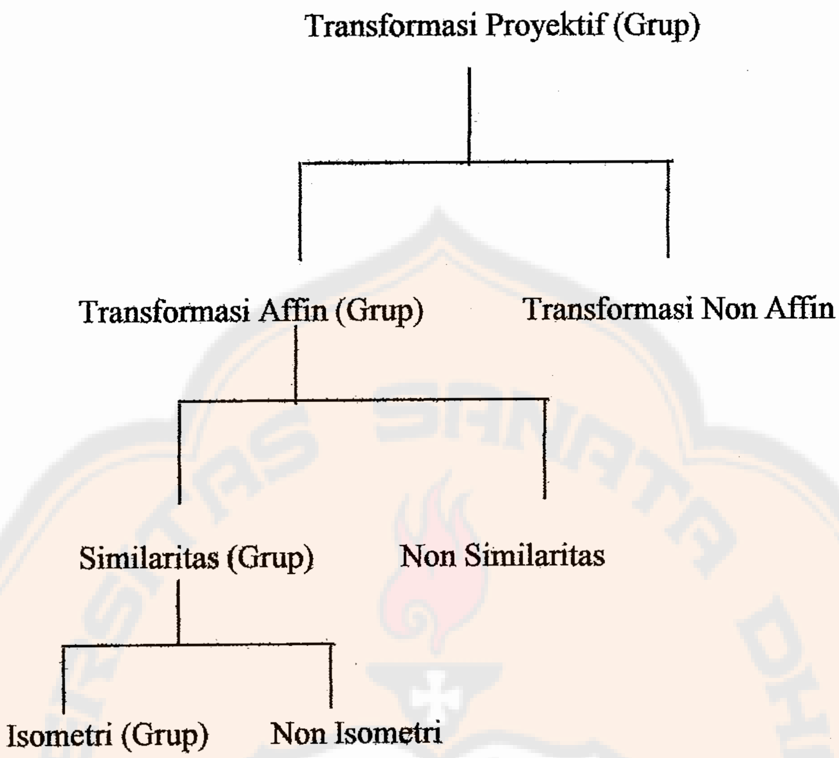
(1) $x' = \dfrac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}$, $y' = \dfrac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}$,

$$\text{dengan } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(2) $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$, dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Jika (1) dan (2) diperhatikan dengan seksama tampak bahwa (2) adalah persamaan transformasi proyektif dengan $c_1 = c_2 = 0$.

Dalam pembicaraan sebelumnya telah dikatakan bahwa himpunan transformasi affin memuat himpunan similaritas dan himpunan isometri. Karena himpunan transformasi affin adalah himpunan bagian dari himpunan transformasi proyektif, maka secara tak langsung himpunan similaritas dan himpunan isometri adalah himpunan bagian dari himpunan transformasi proyektif. Dengan demikian tansformasi itu dapat diklasifikasikan sebagai berikut :


Transformasi Proyektif (Grup)
Transformasi Affin (Grup)
Transformasi Non Affin
Similaritas (Grup)
Non Similaritas
Isometri (Grup)
Non Isometri

BAB V

KESIMPULAN

Transformasi proyektif adalah transformasi yang paling luas dari keempat transformasi yang kita bicarakan . Himpunan transformasi proyektif ini membentuk suatu grup yang disebut sebagai grup transformasi proyektif. Pada Transformasi proyektif ini hanya insidensi yang invarian. Pada transforamsi proyektif ini dikenal adanya titik-titik yang tidak mempunyai asal dan titik-titik yang tidak mempunyai bayangan "*vanishing point* ", dalam geometri proyektif titik-titik itu disebut sebagai titik-titik ideal. Transformasi proyektif adalah hasil kali dari rangkaian proyeksi dengan paling banyak satu yang mempunyai titik-titik yang hilang.

Persamaan umum tansformasi proyektif adalah :

(1) $x' = \dfrac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}$, $y' = \dfrac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

determinan di atas dinotasikan oleh Δ dan disebut sebagai determinan dari susunan persamaan transformasi (1).

Transformasi proyektif merupakan pemetaan 1-1 kecuali mungkin bahwa titik-titik pada satu garis yang tidak mempunyai bayangan dan titik-titik pada satu garis yang tidak mempunyai asal. Transformasi proyektif juga mempertahankan kolinearitas dan perbandingan silang pada titik - titik.

Sebelumnya kita juga mengenal himpunan - himpunan transformasi lain yang membentuk suatu grup, yaitu grup transformasi affin dan grup transformasi geometri Euclides yang terdiri dari grup similaritas dan grup isometri.Berikut ini adalah persamaan-persamaan untuk transformasi-transformasi tersebut.

Persamaan umum transformasi affin :

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}, \qquad \text{dengan } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Persamaan umum similaritas :

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n, \end{cases} \qquad \text{dengan } a^2 + b^2 \neq 0,$$

tanda "+" untuk similaritas searah sedangkan tanda "-" untuk similaritas mengubah arah.

Persamaan umum isometri :

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + D, \end{cases} \qquad \text{dengan } A^2 + B^2 = 1,$$

tanda "+" untuk isometri searah sedangkan tanda "-" untuk isometri mengubah arah.

Kita perhatikan persamaan-persamaan di atas satu persatu. Jika pada persamaan (1) $c_1 = c_2 = 0$ maka persamaan tersebut akan menjadi persamaan untuk transformasi affin (2) yaitu $a = \frac{a_1}{c_3}, b = \frac{a_2}{c_3}, c = \frac{b_1}{c_3}, d = \frac{b_2}{c_3}, m = \frac{a_3}{c_3}, n = \frac{b_3}{c_3}$

dengan $\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{c_3} & \dfrac{a_2}{c_3} \\ \dfrac{b_1}{c_3} & \dfrac{b_2}{c_3} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{c_3^2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Selanjutnya persamaan similaritas (3) adalah persamaan transformasi affin dengan c = -b yaitu $\dfrac{b_1}{c_3} = -\dfrac{a_2}{c_3}$ dan $a = d$ yaitu $\dfrac{a_1}{c_3} = \dfrac{b_2}{c_3}$ dengan $a^2 + b^2 = \left(\dfrac{a_1}{c_3}\right)^2 + \left(\dfrac{a_2}{c_3}\right)^2 \neq 0$.

Jika $a^2 + b^2 = 1$ yaitu $\left(\dfrac{a_1}{c_3}\right)^2 + \left(\dfrac{a_2}{c_3}\right)^2 = 1$ maka persamaan similaritas tersebut akan menjadi persamaan isometri (4) dengan A=a dan B=b.

Dengan demikian grup isometri adalah subgrup dari grup similaritas, grup similaritas adalah subgrup dari grup transformasi affin dan grup transformasi affin adalah subgrup dari grup transformasi proyektif. Jadi grup transformasi geometri Euclides adalah subgrup dari grup transformasi proyektif.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, Jr. (1967). *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Proyective Geometry*. McGraw-Hill, Inc : USA.

Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry*. New York : John Wiley, Sons,Inc.

Gans, David. (1969). *Transformations and Geometries*. Appleton Century. Crofts, Meredith Corporation.

Martin, George E. (1982). *Transformation Geometry : An Introduction to Symetry*. New York : Springer-Verlag New York, Inc.

Moeharti, Hw. (1986). *Sistem – sistem Geometri*. Jakarta : Karunika UT.

Moeharti, Hw. (1989). *Vektor dan Transformasi dalam Geometri*. Yogyakarta : FP MIPA.

Rawuh. (1992). *Geometri Transformasi*. Departemen P dan K Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Tinggi.

Susanta, B. (1990). *Geometri Transformasi*. Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan.