PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DAN KEDUA SIMULTAN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DENGAN METODE OPERATOR DIFERENSIAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Yulianus Mistar Krisnanto
NIM : 951414002
NIRM : 950051120501120002

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2002

SKRIPSI

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DAN KEDUA SIMULTAN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DENGAN METODE OPERATOR DIFERENSIAL

Oleh:

Yulianus Mistar Krisnanto

NIM : 951414002

NIRM : 950051120501120002

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Drs. A. Tutoyo, M.Sc. tanggal 5 - 11 2002

S K R I P S I

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE PERTAMA DAN KEDUA SIMULTAN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DENGAN METODE OPERATOR DIFERENSIAL

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Yulianus Mistar Krisnanto
NIM : 951414002
NIRM : 950051120501120002

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 16 Oktober 2002

dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	**Drs. A. Atmadi, M.Si.**	....
Sekretaris	**Drs. Th. Sugiarto, M.T.**	....
Anggota	**Drs. A. Tutoyo, M.Sc.**	....
Anggota	**Drs. A. Mardjono.**	....
Anggota	**M. Andy Rudhito, S.Pd.**	....

Yogyakarta, 16 Oktober 2002

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

HALAMAN MOTTO

"Ada saat-saat istimewa dalam kehidupan kita, dan sebagian besar datang melalui dorongan orang lain"

(George Adams)

"Janganlah hendaknya kamu kuatir tentang apapun juga, tetapi nyatakanlah dalam segala hal keinginanmu kepada Allah dalam doa dan permohonan dengan ucapan syukur"

(Filipi: 4: 6)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan rasa penuh syukur kepada Allah, skripsi ini dipersembahkan untuk:
Bapak, Ibu, mbah kakung, mbah putri, Mas Lilik, Apriik, Tini,
dan tersayang Natalia yang telah menemani serta memberi dorongan dan doa.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 16 Oktober 2002

Penulis

Yulianus Mistar Krisnanto

ABSTRAK

Masalah skripsi ini adalah menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan dengan metode operator diferensial.

Tujuan skripsi ini adalah menguraikan tentang penggunaan metode operator diferensial untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan.

Sistem persamaan diferensial linear orde pertama simultan dengan koefisien konstan mempunyai bentuk normal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Dx_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\ Dx_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{aligned}.$$

Sistem ini dapat ditulis sebagai bentuk:

$$\begin{aligned} Dx_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 &= f_1(t) \\ Dx_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{atau}$$

$$\begin{aligned} (D - a_{11})x_1 \qquad - a_{12}x_2 &= f_1(t) \\ - a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 &= f_2(t) \end{aligned}.$$

Kita perhatikan juga sistem persamaan diferensial dengan koefisien konstan yang mempunyai bentuk lebih umum dalam operator diferensial $L_{ij} = a_2D^2 + a_1D + a_0$ dengan a_0, a_1, a_2 dan i,j =1,2 dalam dua fungsi tak diketahui adalah

$$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 &= f_1(t) \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{dengan} \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan yang memenuhi $f_i(t) \equiv 0$ dimana i = 2,3 , maka sistem tersebut disebut homogen. Dan jika $f_i(t) \neq 0$ maka sistem disebut nonhomogen.

Dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear dengan metode operator diferensial, pertama menentukan persamaan karakteristik. Dari persamaan karakteristik ini dapat diperoleh akar-akar persamaan karakteristik. Akar-akar persamaan karakteristik yang telah diperoleh digunakan untuk membentuk penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Penyelesaian umum dari sistem persamaan linear nonhomogen mempunyai bentuk $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, dimana $y_c(t)$ merupakan penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dan $y_p(t)$ merupakan penyelesaian khusus dari sistem persamaan diferensial linear nonhomogen.

Sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan mempunyai penerapan dalam kehidupan sehari-hari dalam bidang rangkaian listrik, mekanika, dan masalah campuran.

ABSTRACT

The problem of this thesis is to solve the system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient with differential operator method.

This thesis aims to discuss the use of the differential operator method in solving the system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient.

The system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient first order has the normal form as follows:

$$Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t)$$
$$Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t)$$

This system can be written as:

$$\begin{aligned} Dx_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 &= f_1(t) \\ Dx_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{or}$$
$$\begin{aligned} (D-a_{11})x_1 \qquad - a_{12}x_2 &= f_1(t) \\ -a_{21}x_1 + (D-a_{22})x_2 &= f_2(t) \end{aligned}$$

In this thesis, we also pay attention to the system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient that has common form in the differential operator $L_{ij} = a_2D^2 + a_1D + a_0$ with a_0, a_1, a_2 and $i,j = 1,2$ in the two unknown functions

$$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 &= f_1(t) \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{with} \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

The system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient that satisfies $f_i(t) \equiv 0$ where $i = 2,3$, then the system is homogenous. On the other hand, if $f_i(t) \neq 0$ then the system is nonhomogenous.

The first step is solving a system of linear differential equation with differential operator method is determining the characteristic equation from which the root of characteristic equation can be obtained. These roots are used to form a general solution of the system of differential equation with constant coefficient. A general solution of nonhomogenous linear system has the form of $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, where $y_c(t)$ is a general solution of the corresponding homogenous linear system and $y_p(t)$ is a particular solution of the nonhomogenous linear system.

The application of the system of simultaneous linear differential equation with constant coefficient in a daily life is on the use of electric series, mechanics, and mixing problem.

KATA PENGANTAR

Puji syukur dan terima kasih ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa yang telah melimpahkan rahmat dan karunia kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi yang berjudul Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama Dan Kedua Simultan Dengan Koefisien Konstan Dengan Metode Operator Diferensial bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma.

Penulisan skripsi ini tidak mungkin dapat terlaksana dengan baik tanpa adanya dukungan, bantuan dan kerjasama dari berbagai pihak yang terkait, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc. selaku pembimbing yang telah membantu serta membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Th. Sugiarto, M.T. selaku Kaprodi Matematika.
3. Segenap dosen lain Jurusan Pendidikan Matematika dan Matematika atas bantuan yang diberikan selama menimba ilmu di bangku kuliah.
4. Bapak Narjo dan Bapak Sugeng selaku sekretariat yang telah membantu dan melayani untuk kelancaran studi.
5. Bapak M. Saniyun dan MG. Murtini atas berkat dan doanya
6. Seluruh anggota keluarga di rumah yang banyak mendorong dan mendoakan penulis sehingga skripsi ini dapat selesai.

7. Dik Lia yang telah membantu, juga untuk semua kebaikan dan pengertiannya.
8. Teman-teman Pendidikan Matematika angkatan '95 dan teman dekatku Toto, Handoko, Blackie dan Sutarno atas sarannya.
9. Teman-teman kost Jatayu 183, terima kasih atas kebersamaannya.
10. Teman-teman P_3W, khususnya Dian, Merry, Ismi, Vella, Yusri, Fery, Ucik, Apriyanto atas persahabatan kita selama ini dan Ita atas terjemahannya, serta semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini.

Semoga kebaikan mereka mendapat rahmat dan berkat dari Tuhan Yang Maha Kasih. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, Oktober 2002

Penulis

Yulianus Mistar Krisnanto

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Pada saat sekarang matematika adalah bidang studi yang perlu dan selalu dibutuhkan, karena matematika dapat digunakan untuk menyederhanakan kehidupan nyata dalam bentuk lambang-lambang dan bahasa matematika. Salah satu materi matematika yang dapat digunakan untuk menyederhanakan kehidupan nyata tersebut adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau diferensial dari satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan beberapa macam cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung hanya pada satu variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan fungsi yang belum diketahui bergantung pada dua atau lebih variabel bebas, maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial.

Bentuk umum persamaan diferensial biasa adalah

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

dengan x menyatakan variabel bebas dan y menyatakan variabel tak bebas.

Persamaan diferensial parsial tingkat kedua berbentuk:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots\ldots) = 0$$

dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ menyatakan variabel bebas dan z merupakan variabel tak bebas.

Persamaan diferensial juga dapat diklasifikasikan berdasarkan ordenya, yaitu tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut.

Persamaan diferensial dapat juga dibedakan menjadi persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear.

Persamaan diferensial biasa tingkat n disebut linear dalam y jika persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1(x)y^1 + a_0(x) = f(x) \qquad ,$$

dimana a_0 , a_1, a_2, ..., a_n dan f adalah fungsi-fungsi dari x pada suatu interval yang memuat x dan $a_n(x) \neq 0$ pada interval itu. Fungsi $a_n(x)$ disebut fungsi-fungsi koefisien. Selanjutnya persamaan diferensial yang tidak linear disebut persamaan diferensial nonlinear.

Sebagai contoh :

1. $y^{/} + xy = 3$
2. $y^{//} + 5y^{/} + 6y = \cos x$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
4. $y \sin y = y^{//}$
5. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
6. $y^{//} + 5y = \cos y$

Persamaan 1 dan 5 merupakan persamaan diferensial tingkat 1 sedangkan persamaan 2, 3, 4, dan 6 adalah persamaan diferensial tingkat 2. Persamaan 1, 2, 4,dan 6 merupakan persamaan diferensial biasa sedangkan persamaan 3 dan 5 adalah persamaan diferensial parsial. Persamaan 1, 2, dan 6 adalah persamaan diferensial linear.

Kita telah membahas suatu persamaan diferensial yang mengandung satu fungsi yang tak diketahui, seperti contoh di atas. Sejalan perkembangan matematika, yaitu dengan adanya penerapan dan generalisasi maka dikenal sistem n persamaan diferensial dengan n fungsi tak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih atau sama dengan dua. Dalam skipsi ini akan dipusatkan pada persamaan diferensial linear yang membentuk suatu sistem linear.

Contoh :

$$3y_1' + 2y_1 - y_2 = 2$$

$$y_1 + y_2 = 0$$

Secara umum sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk

$$Dx_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t)$$
$$Dx_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)$$

dimana koefisien $a_{11}(t), a_{12}(t), a_{21}(t), a_{22}(t)$,dan fungsi-fungsi $f(t)_1, f_2(t)$, semua merupakan fungsi t yang kontinu pada salah suatu I dan x_1 , x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui. Dx_1, Dx_2 berturut-turut menyatakan turunan pertama terhadap t. Dalam persamaan di atas untuk n= 2 (dua persamaan dan dua fungsi yang tak diketahui). Selanjutnya untuk mempermudah dapat digunakan notasi operator sehingga didapat

$$L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 = f_1(t)$$
$$L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 = f_2(t)$$

dimana D = $\frac{d}{dt}$, dan D$''$ = $\frac{d''}{dt''}$, sedangkan $L_{11}(D), L_{12}(D), L_{21}(D), L_{22}(D)$ adalah polinom operator diferensial, x_1, x_2 adalah fungsi yang tak diketahui. Dalam hal ini sistem persamaan linear di atas akan diselesaikan dengan beberapa metode untuk mencari fungsi-fungsi tak diketahui yang memenuhi sistem linear tersebut.

2. Perumusan Masalah

Dari uraian yang telah dikemukakan dalam latar belakang, dapat dirumuskan beberapa masalah :

1. Bagaimanakah penggunaan metode operator diferensial untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan ?
2. Bagaimanakah penerapan sistem linear tersebut dalam kehidupan nyata ?

3. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Memahami penggunaan metode operator diferensial untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial simultan dengan koefisien konstan.
2. Memahami penerapan sistem persamaan diferensial simultan dengan koefisien konstan yang diselesaikan dengan metode operator diferensial.

4. Manfaat Penulisan

Manfaat pembahasan topik ini bagi penulis adalah penulis lebih mengerti tentang operator diferensial dan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial linear dengan metode operator diferensial sehingga penulisan topik ini memperluas metode penyelesaian sistem persamaan diferensial linear. Untuk masalah-masalah yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, yang dapat dimodelkan ke dalam persamaan diferensial, metode penyelesaian ini diharapkan dapat mempermudah dalam menyelesaikan masalah yang ada.

Untuk bidang studi yang bersangkutan dapat digunakan untuk menambah wawasan bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan dapat digunakan persamaan diferensial.

5. Pembatasan Masalah

Materi yang akan dibahas pada skripsi ini mencakup penyelesaian sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan yang mempunyai dua atau tiga fungsi yang tak diketahui dengan menggunakan operator diferensial.

Dalam pembahasan akan dibahas juga tentang penerapan dalam rangkaian listrik, mesin, dan masalah campuran.

Sistem persamaan diferensial linear yang mempunyai lebih dari tiga persamaan dan tiga fungsi tak diketahui tidak akan dibahas dalam skripsi ini.

6. Metode Penulisan

Penulisan yang dilakukan oleh penulis untuk membuat skripsi ini dengan metode studi pustaka.

7. Sistematika Penulisan

Bab I Pendahuluan

1. Latar Belakang
2. Perumusan Masalah
3. Tujuan Penulisan
4. Manfaat Penulisan
5. Pembatasan Masalah
6. Metode Penulisan
7. Sistematika Penulisan

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas tentang operator diferensial dan persamaan linear yang menjadi dasar dari bab tiga. Berikut ini akan dibahas tentang operator diferensial yang merupakan metode untuk menyelesaikan sistem persamaan.

2.1 Operator Diferensial

Operator diferensial adalah suatu tranformasi yang mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain. Sekarang akan dibahas tentang pengertian-pengertian yang berkaitan dengan operator diferensial.

Definisi 2.1:

Operator diferensial D^n adalah operator diferensial tingkat n, yang dapat ditulis sebagai $\dfrac{d^n}{dx^n}$.

Contoh 2.1:

Operator D^3 bekerja pada $x^4 + 5x^2$ akan diperoleh bentuk 24x dan ditulis $D^3(x^4 + 5x^2) = 24x$.

Definisi 2.2:

Kombinasi linear operator diferensial berbentuk

$b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \ldots + b_1 D + b_0$ disebut polinom operator tingkat n dan ditulis P(D) dimana b_0 , b_1,......,b_n adalah konstanta-konstanta dengan $b_n \neq 0$.

Contoh 2.2:

a) $P_1(D) = D^2 + 2D - 1$, merupakan polinom operator tingkat 2.

b) $P_2(D) = D^3 + 8D^2 + 6D + 3$, merupakan polinom operator tingkat 3.

Apabila P(D) dikerjakan pada fungsi y yang berturunan n kali, kita tulis P(D)y dan

$$P(D)y = (b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \ldots + b_1 D + b_0)y$$

$$= b_n D^n y + b_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + b_1 Dy + b_0 y$$

karena $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$, maka

$$P(D)y = b_n \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1 \frac{dy}{dx} + b_0 y.$$

Bentuk ini adalah persamaan diferensial dengan koefisien konstan.

Contoh 2.3 :

$2y'' - 3y' + y = 0$ dapat ditulis sebagai $(2D^2 - 3D + 3)y = 0$

Fungsi-fungsi untuk P(D) y berarti disebut admisible operator fungsi y.

Misalnya hanya fungsi berturunan dua kali admissible untuk operator $(D^2 + 1)$.

Setelah kita mengetahui polinom operator, maka perlu kita membahas hubungan dari dua polinom operator. Hubungan dua polinom operator didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3:

Dua operator $P_1(D)$ dan$P_2(D)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $P_1(D)y = P_2(D)y$ untuk semua fungsi admissible y.

Contoh 2.4:

Misalnya $P_1(D) = D^2 - 5D + 6$ dan $P_2(D) = (D - 2)(D - 3)$ dengan fungsi $y = 2x + 1$.

Akan dicari apakah $P_1(D)y$ dan $P_2(D)y$ sama ?

$P_1(D)y = (D^2 - 5D + 6)(2x + 1) = 0 - 5(2) + 12x + 6 = 12x - 4.$

$P_2(D)y = (D - 2)(D - 3)(2x + 1) = (D - 2)(2 - 3(2x + 1))$

$= (D - 2)(-6x - 1) = (-6) - 2(-6x - 1)$

$= 12x - 4.$

Dua polinom operator dapat dioperasikan seperti operasi aljabar, pengoperasian polinom operator diferensial akan didefinisikan berikut ini. Penjumlahan antara dua polinom operator dapat juga dioperasikan, dengan definisi 2.4.

Definisi 2.4:

Jumlah dua operator $[P_1(D) + P_2(D)]y$ diperoleh dengan mula-mula menyatakan P_1 dan P_2 sebagai kombinasi linear operator D dan menjumlahkan koefisien-koefisien dari pangkat-pangkat operator D yang sama.

Contoh 2.5:

Jika $P_1(D) = 2D^2 + 4D + 6$ dan

$P_2(D) = 5D^3 + 6D^2 - D$,

maka $P_1(D) + P_2(D) = 5D^3 + 8D^2 + 3D + 6$.

Teorema 2.1:

Polinom operator yang dikenakan pada fungsi y mempunyai sifat:

1. $P(D)(y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2$.
2. $P(D)(cy) = c\,P(D)y$.

dimana y, y_1, y_2 adalah fungsi-fungsi admissible untuk $P(D)$, c adalah konstanta sebarang.

Dari kedua sifat di atas bisa ditulis dengan

$$P(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1P(D)y_1 + c_2P(D)y_2.$$

Dengan y_1, y_2 fungsi-fungsi admissible untukP(D), dan c_1, c_2 adalah konstanta sebarang. Berikut ini akan diberikan bukti dari sifat di atas.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$P(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + b_1D + b_0)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= b_n D^n(c_1y_1 + c_2y_2) + b_{n-1}D^{n-1}(c_1y_1 + c_2y_2) + ... + b_1D(c_1y_1 + c_2y_2) + b_0(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$= c_1(b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + ... + b_1D + b_0)y_1 + c_2(b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + ... + b_1D + b_0)y_2$$
$$= c_1P(D)y_1 + c_2 P(D)y_2.$$

Jadi terbukti bahwa sifat di atas berlaku untuk polinom operator diferensial.

Definisi 2.5:

Dengan hasil kali dua operator $P_1(D)P_2(D)$dimaksud ekuivalen dengan operator yang memperoleh dengan menggunakan operator $P_2(D)$ diikuti dengan $P_1(D)$. Jadi hasilkali $(P_1(D)P_2(D))y$ didefinisikan $[P_1(D)P_2(D)]y = P_1(D)[P_2(D)y]$ untuk setiap fungsi admisible y.

Contoh 2.6:

Jika diketahui : $P_1(D) = 3D^2 + 5D$,

$P_2(D) = 2D + 4$,

$y = 5x^2 + 7x$,

hasil kali operator P_1P_2 pada fungsi y adalah

$P_1P_2(y) = P_1(D)[P_2(D)(y)]$.

$$\begin{aligned} P_2(D)(y) &= (2D+4)y = (2D+4)(5x^2+7x) \\ &= 2(10x+7) + 4(5x^2+7x) \\ &= 20x + 14 + 20x^2 + 28x \\ &= 20x^2 + 48x + 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(D)[P_2(D)(y)] &= (3D^2+5D)(20x^2+48x+14) \\ &= 3(40) + 5(40x+48) \\ &= 120 + 200x + 240 \\ &= 200x + 360. \end{aligned}$$

Kita juga dapat mencari hasil kali polinom operator P_1P_2 pada fungsi y dengan sifat perkalian antara dua polinom operator. Hal tersebut akan ditunjukan pada penyelesaian berikut.

$$
\begin{aligned}
[P_1(D)P_2(D)]y &= [(3D^2+5D)(2D+4)](5x^2+7x) \\
&= (3D^3+22D^2+20D)(5x^2+7x) \\
&= 22(10)+20(10x)+20(7) \\
&= 200x+360.
\end{aligned}
$$

Dengan kedua cara di atas, didapatkan hasil penyelesaian yang sama. Jadi definisi di atas berlaku untuk dua polinom operator.

Setiap persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan dalam bentuk operator sebagai P(D)y = 0.

Setelah kita mengetahui definisi perkalian dua polinom operator diferensial, kita akan mencari sifat perkalian dua polinom operator diferensial.

misalkan: $P_1(D) = a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots\dots + a_1 D + a_0$ dan

$P_2(D) = b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots\dots + b_1 D + b_0$

dua polinom operator diferensial dengan $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ dan $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$ merupakan koefisien-koefisian konstan dari polinom di atas.

Sekarang kita lihat polinom di bawah ini

$P_1(r) = a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \dots\dots + a_1 r + a_0$

$P_2(r) = b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \dots\dots + b_1 r + b_0$

adalah dua polinom hasil subtitusi r pada operator $P_1(D)$ dan $P_2(D)$. Dengan mengganti D dengan r, D^2 dengan r^2, ..., D^k dengan r^k. Kemudian perkalian polinom $P_1(D)$ dan $P_2(D)$ dinotasikan dengan P(r) adalah

$P(r) = P_1(r)\, P_2(r).$

Jika y adalah sebuah fungsi yang mempunyai turunan $m+n$, dapat dibuktikan bahwa

$P_1(D)\, P_2(D)\, y = P2(D)\, P_1(D)\, y = P(D)\, y$

dimana P(D) sebagai operator yang diperoleh dari polinom P(r), dengan mengganti r dengan D, r^2 dengan D^2, ..., r^{m+n} dengan D^{m+n}.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $P_1(D)P_2(D)$ y = $P_2(D)P_1(D)$ y = P(D) y. Untuk membuktikan cukup dibuktikan bahwa $P_1(D)$ $P_2(D)$ y = P(D) y dan $P_2(D)$ $P_1(D)$ y = P(D) y, apakah hasilnya sama ?

$$\begin{aligned}
P_1(D)(P_2(D)y) &= (a_m r^m + a_{m-1}r^{m-1} + \ldots + a_1 r + a_0)(b_n r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \ldots + b_1 r + b_0)y \\
&= (a_m r^m + a_{m-1}r^{m-1} + \ldots + a_1 r + a_0)(b_n r^n y + b_{n-1}r^{n-1}y + \ldots + b_1 ry + b_0 y) \\
&= (a_m r^m (b_n r^n y) + a_m r^m (b_{n-1}r^{n-1}y) + \ldots + a_0(b_1 ry) + a_0(b_0 y)) \\
&= (a_m b_n r^m r^n y + a_m b_{n-1} r^m r^{n-1} y + \ldots + a_0 b_1 ry + a_0 b_0 y) \\
&= (a_m b_n r^{m+n} y + a_m b_{n-1} r^{m+n-1} y + \ldots + a_0 b_1 ry + a_0 b_0 y) \\
&= (a_m b_n r^{m+n} + a_m b_{n-1} r^{m+n-1} + \ldots + a_0 b_1 r + a_0 b_0)y \\
&= P(D)y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(D)(P_1(D)y) &= (b_n r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \ldots + b_1 r + b_0)(a_m r^m + a_{m-1}r^{m-1} + \ldots + a_1 r + a_0)y \\
&= (b_n r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \ldots + b_1 r + b_0)(a_m r^m y + a_{m-1}r^{m-1}y + \ldots + a_1 ry + a_0 y)y \\
&= (b_n r^n (a_m r^m y) + b_n r^n (a_{m-1}r^{m-1}y) + \ldots + b_0(a_1 ry) + b_0(a_0 y)) \\
&= (b_n a_m r^n r^m y + b_n a_{m-1} r^n r^{m-1} y + \ldots + b_0 a_1 ry + b_0 a_0 y) \\
&= (b_n a_m r^{n+m} y + b_n a_{m-1} r^{n+m-1} y + \ldots + b_0 a_1 ry + b_0 a_0 y) \\
&= (b_n a_m r^{n+m} + b_n a_{m-1} r^{n+m-1} + \ldots + b_0 a_1 r + b_0 a_0)y \\
&= P(D)y.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $P_1(D)$ $P_2(D)$ y = P2(D) $P_1(D)$ y = P(D) y.

Contoh 2.7:

Jika $P_1(D) = D^2 + 1$, $P_2(D) = 3D + 2$, $y = t^3$

maka
$$\begin{aligned}
P_1(D)P_2(D)y &= (D^2+1)(3D+2)t^3 \\
&= (D^2+1)(9t^2+2t^3) \\
&= D^2(9t^2+2t^3) + (9t^2+2t^3) \\
&= 9.2 + 2.3.2.t + 9t^2 + 2t^3 \\
&= 18 + 12t + 9t^2 + 2t^3.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(D)P_1(D)y &= (3D+2)(D^2+1)t^3 \\
&= (3D+2)(6t+t^3) \\
&= 3(6)+3(3t^2)+2(6t+t^3) \\
&= 18+9t^2+12t+2t^3.
\end{aligned}
$$

Untuk $P(D) = P_1(D)P_2(D)$

$= 3D^3+2D^2+3D+2$ dan

$$
\begin{aligned}
P(D)y &= (3D^3+2D^2+3D+2)t^3 \\
&= 3(6)+2(6t)+3(3t^2)+2t^3 \\
&= 2t^3+9t^2+12t+18.
\end{aligned}
$$

dari contoh di atas terlihat bahwa :

$P_1(D)\, P_2(D)\, y = P2(D)\, P_1(D)\, y = P(D)\, y = 2t^3 + 9t^2 + 12\, t + 18.$

Dari perkalian dua polinom operator diferensial linear dengan koefisien konstan diperoleh dua hal penting yaitu :

1. Pengaruh pengoperasian terhadap y oleh P_2 dan kemudian hasilnya dioperasikan oleh P_1 mempunyai hasil yang sama dengan pengoperasian terhadap y oleh P_1 kemudian hasilnya dioperasikan oleh P_2 .
2. Pengaruh pengoperasian terhadap y oleh P_1 kemudian hasilnya dioperasikan oleh P_2 atau pengoperasian terhadap y oleh P_2 kemudian hasilnya dioperasikan oleh P_1 adalah sama dengan pengoperasian y oleh hasilkali dua operator diferensial P_1 dengan P_2 .

Dengan adanya perkalian, maka dapat kita gunakan bahwa pembagian dua operator diferensial dapat dinyatakan sebagai $\left(\frac{P_1(D)}{P_2(D)}\right)y = P_1(D)\left(\frac{1}{P_2(D)}\right)y$,

dengan $P_2(D) \neq 0$. Kita mendefinikan $\frac{1}{P_2(D)}$ sebagai integrasi dari $P_2(D)$.

Polinom operator P(D) dapat dinyatakan dalam bentuk faktorisasi, yang akan dijelaskan sebagai berikut:

Misalnya: $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 D + a_0$, dimana a_0 , a_1, ...,a_n adalah konstanta. maka untuk P(r) memenuhi

$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 r + a_0$, merupakan polinom r yang diperoleh dari P(D) dengan subtitusi r terhadap D, r^2 terhadap D^2 , r^n terhadap D^n . Misalkan r_1, r_2, ..., r_n . adalah akar dari polinom P(r) = 0 , maka dapat dinyatakan dalam bentuk faktorisasi .

$$P(r) = a_n (r - r_1)(r - r_2)\dots\dots\dots(r - r_n)$$

kemudian dilakukan penggantian r pada persamaan di atas dengan D maka didapatkan persamaan yang dinyatakan dalam bentuk operator diferensial, yaitu

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 D + a_0$$

dalam bentuk faktorisasi

$$P(D) = a_n (D - r_1)(D - r_2)\dots\dots\dots(D - r_n).$$

Contoh 2.8 :

Jika $P(D) = D^3 - 3D^2 + D - 3$, dan

$y = x^3 + 2$

carilah hasil pengoperasian yang dikenakan pada y

$$\begin{aligned} P(D)\, y &= (D^3 - 3D^2 + D - 3)(x^3 + 2) \\ &= 6 - 3(6x) + 3x^2 - 3(x^3 + 2) \\ &= 6 - 18x + 3x^2 - 3x^3 - 6 \\ &= -3x^3 + 3x^2 - 18x. \end{aligned}$$

mencari hasil pengoperasian P(D) yang dikenakan pada y dapat dicari seperti contoh di atas, atau dengan cara yang lain yaitu dengan cara pemfaktoran, yang diperlihatkan di bawah ini

$$\begin{aligned} P(D)\, y &= (D^3 - 3D^2 + D - 3)(x^3 + 2) \\ &= (D^2 + 1)(D - 3)(x^3 + 2) \\ &= (D^2 + 1)(3x^2 - 3x^3 - 6) \end{aligned}$$

$= 6 - 18x + 3x^2 - 3x^3 - 6$

$= -3x^3 + 3x^2 - 18x.$

Persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan.dapat ditulis dengan notasi L yaitu :

$$\mathrm{L}\,(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y$$

atau $$\mathrm{L}\,(y) = (a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{d}{dx} + a_0) y$$

atau $$\mathrm{L}\,(y) = f(x).$$

Dalam menggunakan notasi operator diferensial kita bisa menggunakan notasi P(D)y ataupun bisa digunakan notasi L(y), tetapi untuk selanjutnya untuk memudahkan kita gunakan notasi operator L(y).

2.2 Persamaan Diferensial Linear

Pada bagian ini akan dibahas tentang pengertian dan metode penyelesaian untuk persamaan diferensial linear tingkat-n.

Pertama kita akan membahas tentang pengertian dari persamaan diferensial linear tingkat-n.

Definisi 2.6:

Persamaan diferensial linear tingkat-n dalam y adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y = q(x) \qquad (2.1)$$

Fungsi –fungsi $q(x), a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ adalah fungsi dari x dan bukan dari y, dengan $a_n(x) \neq 0$ untuk semua x dalam [a,b].

Contoh 2.9:

Berikut ini diberikan sistem linear dengan orde dua dan pertama yaitu

$$y'' + y = \sin 2x$$
$$y' x^2 y = e^x.$$

Pada persamaan (2.1), fungsi $q(x)$ di ruas kanan disebut fungsi masukan(input) atau penggerak(driving). Apabila ruas kiri dari persamaan (2.1) sama dengan nol atau $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots.. + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ (2.2)
maka persamaan (2.2) disebut persamaan diferensial linear homogen. Jika ruas kanan persamaan tidak sama dengan nol dan $a_n(x) \neq 0$ untuk semua x dalam [a,b] persamaan disebut persamaan linear nonhomogen.

Jika $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, merupakan fungsi konstan, maka persamaannya dapat disebut persamaan dengan koefisien konstan, dan jika fungsi itu merupakan variabel maka persamaannya disebut persamaan dengan koefisien variabel.

Contoh 2.10:

Persamaan

$$5y'' + y = 0$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$$

kedua contoh di atas adalah persamaan diferensial linear homogen, sedangkan kedua contoh berikut adalah persamaan diferensial linear nonhomogen

$$y'' + y = \cos 2x$$
$$y'' + 2y' + e^x = 0.$$

2.2.1 Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial Linear Homogen

Persamaan diferensial linear dikelompokkan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear homogen dan persamaan diferensial linear nonhomogen. Berikut ini akan diberikan definisi kombinasi linear dari dua penyelesaian.

Definisi 2.7:

Misalkan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui dan c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang maka jumlah $c_1y_1 + c_2y_2$ disebut kombinasi linear dari dua penyelesaian .

Contoh 2.11:

Misalkan fungsi $y_1 = c_1e^{2x}$ dan $y_2 = c_2e^{-2x}$ adalah penyelesaian persamaan $y'' - 4y = 0$. Menurut definisi 2.7 kombinasi linear $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ merupakan penyelesaian persamaan.

Untuk memperlihatkan bahwa kombinasi linear dari kedua fungsi tersebut adalah suatu penyelesaian dengan mensubtitusikan $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ ke dalam persamaan $y'' - 4y = 0$, maka akan didapatkan

$$\frac{d^2}{dx^2}(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}) - 4(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}) = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x} - 4c_1e^{2x} - 4c_2e^{-2x} = 0.$$

Ini menunjukan bahwa kombinasi linear tersebut suatu penyelesaian.

Teorema 2.2: Prinsip Superposisi

Jika $y_1, y_2, \ldots, y_R$ adalah penyelesaian PDLH

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots.. + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.3)$$

dan jika $c_1, c_2, \ldots, c_R$ adalah konstanta-konstanta, maka kombinasi linear $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots.. + c_Ry_R$ juga penyelesaian persamaan (2.3).

Bukti :

Kita akan membuktikan untuk R = 2, karena y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan (2.3) maka dapat ditulis

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \ldots.. + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \qquad (2.4)$$

dan

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \ldots.. + a_1(x)y_2^{/} + a_0(x)y_2 = 0\,. \qquad (2.5)$$

Kalikan setiap suku persamaan (2.4) dengan c_1 dan kalikan setiap suku persamaan (2.5) dengan c_2 kemudian hasil masing-masing perkalian tersebut dijumlahkan maka diperoleh $a_n(x)\left[c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}\right] + \ldots.. + a_0(x)\left[c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}\right] = 0\,.$ (2.6)

Dengan sifat linearitas dari turunan kita mempunyai

$$c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)}\,.$$

Jadi persamaan (2.6) adalah suatu pernyataan bahwa $y = c_1y_1 + c_2y_2$ adalah penyelesaian persamaan (2.3). *Bukti selesai.*

Contoh 2.12:

Fungsi $y = e^x$ dan $y = e^{6x}$ keduanya adalah penyelesaian dari persamaan $y^{//} - 7y^{/} + 6y = 0$.Menurut teorema 2.2 kombinasi linear $y = c_1e^x + c_2e^{6x}$ juga penyelesaian persamaan diferensial.

Dengan adanya teorema 2.2 di atas maka untuk penyelesaian tambahan dapat diperoleh dengan mengambil kombinasi linear penyelesaian–penyelesaian yang diketahui, tetapi penyelesaian yang baru tersebut(hasil kombinasi linear) belum tentu menjadi penyelesaian yang baru, karena kombinasi linear itu masih bisa diubah menjadi penyelesaian yang konstantanya kurang dari konstanta awal. Untuk lebih mudahnya dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 2.13:

Fungsi $y_1 = 2e^{-4x}$ dan $y_2 = 4e^{-4x}$ keduanya adalah penyelesaian persamaan $y^{//} + 8y^{/} + 16y = 0$.

Menurut teorema, $y = c_1\, 2\, e^{-4x} + c_2\, 4\, e^{-4x}$ juga penyelesaian persamaan,

tetapi $y = 2\, c_1e^{-4x} + 4\, c_2e^{-4x}$ bukan penyelesaian dengan dua konstanta sebarang , karena

$$y = c_1 2e^{-4x} + c_2 4e^{-4x}$$
$$= (2c_1 + 4c_2)e^{-4x} \quad \text{, dimana } 2c_1 + 6c_2 = c$$
$$= ce^{-4x}$$

Penyelesaian tersebut penyelesaian dengan satu konstanta sebarang yang semula merupakan kombinasi linear dari dua penyelesaian.

Dari contoh di atas maka timbul satu pertanyaan. Misalnya dua fungsi y_1 dan y_2 adalah fungsi sebarang dan berbeda, maka apakah hubungan antara y_1 dan y_2 sehingga kombinasi linear y_1 dan y_2 merupakan penyelesaian ?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut harus diketahui bahwa ada kriteria yang harus dipenuhi agar menjadi penyelesaian umum persamaan diferensial. Dengan teorema 2.2, suatu kombinasi linear dari dua fungsi belum tentu menjadi persamaan yang baru, yang merupakan penyelesaian persamaan. Karena mungkin persamaan baru tersebut masih bisa disederhanakan lagi, seperti contoh 2.13.

Definisi 2.8:

Penyelesaian persamaan diferensial tingkat-n disebut mempunyai n konstanta dasar sebarang, jika penyelesaian itu secara aljabar tidak dapat disederhanakan menjadi bentuk yang memuat kurang dari n konstanta sebarang.

Penyelesaian Bebas Linear

Dengan adanya definisi 2.8, maka kita akan apakah kombinasi linear yang baru merupakan penyelesaian, tetapi untuk mengetahui bilamana n konstanta dapat direduksi ke dalam konstanta yang banyaknya kurang dari n. Penjelasan yang lebih lanjut dapat perhatikan berikut ini.

Definisi 2.9:

1. n fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ disebut tak bebas linear pada interval [a,b] jika dapat ditentukan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tak semua nol sedemikian rupa sehingga

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0 \tag{2.7}$$

untuk semua x dalam [a,b].

2. Jika relasi dalam persamaan (2.7) benar hanya bila $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, maka fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ disebut bebas linear pada [a,b].

Apabila dua fungsi tak bebas linear maka salah satunya sama dengan kelipatan yang lain, sedangkan fungsi yang bebas linear maka tak mungkin menyatakan suatu fungsi sebagai kelipatan yang lain.

Misalkan ada dua fungsi y_1 (x) dan $y_2(x)$ yang takbebas linear pada selang $a \le x \le b$, maka dapat diambil bahwa salah satu fungsinya merupakan kelipatan konstan(k) dari fungsi yang lain,andaikan

$y_1(x)$ merupakan kelipatan konstan dari $y_2(x)$, maka dapat ditulis

$$y_1(x) = \mathrm{k}\ y_2(x) \tag{2.8}$$

persamaan tersebut diturunkan , akan didapat

$$y_1'(x) = \mathrm{k}\ y_2'(x) \tag{2.9}$$

dari persamaan (2.8) dapat dibentuk menjadi $\mathrm{k} = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, dari persamaan (2.9) dapat dibentuk $\mathrm{k} = \dfrac{y_1'(x)}{y_2'(x)}$. Dari kedua bentuk persamaan tersebut dapat katakan bahwa

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_2'(x)}$$

atau

$$y_1(x)y_2'(x) = y_2(x)y_1'(x)$$

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0. \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) dapat dirubah menjadi bentuk determinan yaitu

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad ,a \le x \le b \tag{2.11}$$

Jadi dua fungsi yang takbebas linear dapat dikatakan determinannya, seperti yang ditunjukkan (2.11) adalah tidak sama dengan nol.

Berarti pula untuk tiga fungsi $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ yang takbebas linear pada interval a ≤ x ≤ b, dengan jalan yang sama dengan di atas maka dapat ditentukan bahwa

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = 0 \quad , a \le x \le b.$$

Berikut ini akan dipelajari tentang bagaimana menentukan fungsi-fungsi bebas linear, dari pada kita mencari dengan definisi 2.9. Untuk definisi di bawah ini kita dapat menentukan apakah himpunan penyelesaian PDLH bebas linear atau tidak.

Definisi 2.10:

Misalkan $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n buah fungsi-fungsi dan turunan turunannya sampai n-1 kontinu pada selang interval a ≤ x ≤ b, Wronskian dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yang dinyatakan $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)$ ditentukan determinan

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & . & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & . & y_n'(x) \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & . & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Teorema 2.3:

Misalkan $a_0, a_1, \ldots, a_n$, adalah fungsi fungsi kontinu dari x pada interval $a \le x \le b$ dan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ merupakan penyelesaian persamaan(homogen), maka fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah bebas linear pada $a \le x \le b$ jika dan hanya jika Wronskian dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah tidak sama dengan nol untuk semua x dalam interval $a \le x \le b$.

Bukti :

($\Rightarrow$) jika $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ adalah bebas linear maka $y = c_1y_1(x)+ c_2y_2(x)+\ldots +c_ny_n(x)$ adalah penyelesaian umum persamaan(2.2) oleh karena itu $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$memenuhi kondisi awal. Ini berperanan penting dalam persamaan linear simultan untuk $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang determinannya adalah $W(x_0)$. Sebab ini dapat selesaikan untuk $c_1, c_2, \ldots, c_n$ untuk sebarang pilihan $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$, determinan $W(x_0)$ harus tidak sama dengan nol.

($\Leftarrow$) Jika $W(x) \neq 0$, fungsi harus bebas linear, andaikan fungsi tidak bebas linear maka sebarang konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tidak semua nol

$$c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) \ldots\ldots + c_ny_n'(x) = 0$$

kita turunkan relasi n - 1

$$c_1y_1'(x) + \ldots\ldots + c_ny_n'(x) = 0$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(x) + \ldots.. + c_ny_n^{(n-1)}(x) = 0.$$

Jadi semua c memenuhi persamaan homogen, sebab semua c tidak sama dengan nol, determinan koefisien harus nol untuk setiap x. Tetapi determinan adalah W(x), dimana telah kita asumsikan berbeda dari nol. Berarti terjadi kontradiksi, maka fungsi harus bebas linear. *Bukti selesai*

Contoh 2.14:

Fungsi $y_1(x) = \cos x$ dan $y_2(x) = \sin x$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$. Apakah kedua fungsi tersebut bebas linear ?

Penyelesaian :

Untuk mencari apakah kedua fungsi tersebut bebas linear atau tidak dapat ditentukan dengan mencari determinan Wronskiannya yaitu

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0,$$

karena determinan Wronskiannya tidak sama dengan nol, maka kedua fungsi tersebut adalah bebas linear.

Contoh 2.15:

Hitunglah Wronskian dan tentukan apakah himpunan fungsi-fungsi xe^{6x}, x^2e^{6x} bebas linear atau tidak ?

Penyelesaian :

Dari himpunan fungsi-fungsi tersebut dihitung Wronskiannya

$$\begin{vmatrix} xe^{6x} & x^2e^{6x} \\ e^{6x} + 6xe^{6x} & 2xe^{6x} + 6x^2e^{6x} \end{vmatrix} = 2x^2e^{12x} + 6x^3e^{12x} - (x^2e^{12x} + 6x^3e^{12x})$$

$$= x^2e^{12x} \neq 0$$

karena dari hasil pencarian Wronskian diperoleh tidak sama dengan nol, maka himpunan fungsi-fungsi tersebut bebas linear.

2.2.2 Persamaan Diferensial Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Kita sekarang akan mempelajari tentang metode penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisiennya konstan. Berikut ini akan dibahas tentang persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan yang akan dijelaskan oleh definisi berikut.

Definisi 2.11:

Persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan adalah persamaan yang mempunyai bentuk

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.13}$$

dimana a , b, dan c adalah konstanta dan $a \neq 0$.

Persamaan dengan koefisien konstan sedikit spesial tetapi sangat luar biasa pentingnya di dalam aplikasi. Di dalam bab ini kita akan menghasilkan metode untuk menghasilkan penyelesaian umum dari (2.13). Persamaan nonhomogen dengan koefisien konstan akan dipelajari dalam subbab berikut ini.

Dalam pembahasan sebelumnya didefinisikan $D = \frac{d}{dx}$ dan yang lebih umum adalah $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, maka

$$D(\cos x) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$D^2(\cos x) = \frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = -\cos x$$

Persamaan diferensial(2.13) jika ditulis dalam notasi L yaitu

$$Ly = (a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c)y = 0 \tag{2.14}$$

dimana L adalah operator diferensial linear. Dan Untuk mempermudah persamaan(2.14) dapat juga ditulis $Ly = (aD^2 + bD + c)y$. (2.15)

Kita mengulang persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan dengan bentuk

$$y' - ky = (\mathrm{D} - k)y = 0 .$$

Persamaan diferensial linear orde pertama tersebut mempunyai beberapa fungsi yang memenuhi, salah satunya adalah fungsi $y = e^{kx}$ yang merupakan penyelesaian.

Sekarang kita akan mencoba sampai mendapat sebuah penyelesaian persamaan(2.15) dengan bentuk $y = e^{\lambda x}$, dimana λ adalah konstanta sebarang . Untuk menentukan $y = e^{\lambda x}$ adalah penyelesaian persamaan (2.15) dengan mensubtitusikan $y = e^{\lambda x}$ ke dalam persamaan(2.15). Diperoleh $\mathrm{D}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ dan $\mathrm{D}^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$, maka

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(e^{\lambda x}) &= a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} \\ &= (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0. \end{aligned}$$

Karena $e^{\lambda x}$ tidak akan sama dengan nol, maka persamaan di atas dapat diselesaikan dengan menyelesaikan $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Polinomial

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{2.16}$$

ini adalah polinom karakteristik untuk (2.15) dan persamaan P(λ) = 0 disebut persamaan karakteristik dari (2.15). Akar dari P(λ) disebut akar karakteristik dari(2.15). Lambang P(λ) dapat ditulis dengan **L** jika polinom (2.16) ditulis dalam notasi D, yaitu

$$\mathrm{L} = a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D} + c .$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.15), dapat diselesaikan dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik (2.15). Tentang penyelesaian persamaan (2.15) akan dibahas oleh beberapa kasus berikut ini.

Kasus I.

Akar-akar $P(\lambda) = 0$ adalah real dan berbeda.

Kita asumsikan bahwa persamaan karakteristik mempunyai dua akar real λ_1 dan λ_2 dan $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Karena akar-akarnya λ_1 dan λ_2 maka penyelesaian persamaan (2.15) adalah

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ dan } y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Untuk membentuk kombinasi linear dari kedua fungsi tersebut maka keduanya harus bebas linear. Wronskian dari pasangan penyelesaian ini adalah

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}.$$

Karena $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, maka Wronskian tidak akan sama dengan nol untuk semua bilangan x.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika persamaan karakteristik dari persamaan(2.15) mempunyai dua akar real yang berbeda yaitu $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Contoh 2.16:

Tentukan penyelesaian umum dari $y'' + 2y' - 15y = 0$. Polinom karakteristiknya adalah $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda + 5)(\lambda - 3)$ akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_1 = -5$ dan $\lambda_2 = 3$. Penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{3x}.$$

Contoh 2.17:

Selesaikanlah persamaan $(2D^2 - D - 1)y = 0$.

Penyelesaian:

Tentukan dahulu persamaan karakteristiknya, yaitu $p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$. Kemudian dapat ditemukan akar-akar karakteristiknya yaitu $\lambda = -\frac{1}{2}$ dan $\lambda = 1$.

Penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^x .$$

Kasus II.

Akar-akar dari $P(\lambda) = 0$ adalah real dan sama.

Dalam kasus ini $\lambda_1 = \lambda_2$ dan $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$. Salah satu penyelesaiannya adalah $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Karena $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$, maka y_2 adalah sebuah penyelesaian kedua. Kedua penyelesaian tersebut $\{y_1, y_2\}$ adalah penyelesaian yang bebas linear, untuk y_2 belum diketahui. Untuk menemukan penyelesaian y_2 kita dapat menulis persamaan $ay'' + by' + c = 0$ dalam bentuk operator diferensial menjadi

$$\begin{aligned} Ly &= (aD^2 + bD + c)y \\ &= a(D - \lambda_1)^2 y = 0 \end{aligned}$$

atau

$$(D - \lambda_1)[(D - \lambda_1)y] = 0 . \qquad (2.17)$$

Kita misalkan $w = (D - \lambda_1)y$, dimana y penyelesaian (2.15). Kemudian bentuk dari (2.17) dapat ditulis

$$(D - \lambda_1)[(D - \lambda_1)y] = (D - \lambda_1)w = 0 .$$

Oleh karena itu, w memenuhi persamaan linear orde pertama

$$(D-\lambda_1)w = 0.$$

Persamaan order pertama ini dapat ditemukan penyelesaian untuk *w*, sehingga dapat ditemukan penyelesaiannya adalah $w = c_1 e^{\lambda_1 x}$.

Andaikan diketahui $w = c_1 e^{\lambda_1 x}$, kita dapat menyelesaikan

$$(D-\lambda_1)y = w \tag{2.18}$$

untuk y. Persamaan (2.18) ditulis dalam bentuk

$$y' - \lambda_1 y = c_1 e^{\lambda_1 x}, \tag{2.19}$$

ini adalah persamaan linear orde pertama. Faktor pengintegralan dari persamaan tersebut adalah $e^{-\lambda_1 x}$. Kemudian dikalikan (2.19) dengan $e^{-\lambda_1 x}$, kita dapatkan

$$e^{-\lambda_1 x}(y' - \lambda_1 y) = e^{-\lambda_1 x} c_1 e^{\lambda_1 x}$$

$$e^{-\lambda_1 x} y' - e^{-\lambda_1 x}\lambda_1 y = c_1 e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_1 x}$$

$$e^{-\lambda_1 x} y' - e^{-\lambda_1 x}\lambda_1 y = c_1 e^{0.x}$$

$$d(e^{-\lambda_1 x} y) = c_1 .$$

Kedua ruas persamaan ini diintegralkan sehingga diperoleh

$$e^{-\lambda_1 x} y = c_1 x + c_2$$

atau $$y = (c_1 x + c_2)e^{\lambda_1 x}$$

atau $$y = c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang. Persamaan ini merupakan penyelesaian umum dari persamaan(2.13).

Andaikan $c_2 = 0$ dan $c_1 = 1$, maka penyelesaian umum tersebut menjadi $y = xe^{\lambda_1 x}$. Berarti penyelesaian kedua dari persamaan(2.13) adalah $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$.

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ dan $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ adalah bentuk dari himpunan fundamental dari penyelesaian. Akan diteliti apakah kedua penyelesaian tersebut bebas linear dengan Wronskian

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Jika persamaan karakteristik dari persamaan(2.15) mempunyai akar $\lambda_1 = \lambda_2$ yaitu dua akar yang sama maka persamaan(2.15) mempunyai penyelesaian umum

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}.$$

Contoh 2.18:

Selesaikan persamaan dengan kondisi awal berikut ini $(D^2 - 8D + 16)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial linear homogen tersebut adalah $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$, maka akar akarnya adalah $\lambda_{1,2} = 4$, ini adalah akar karakteristik berulang. Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 xe^{4x}$$

Sekarang kita cari penyelesaian khususnya dengan menurunkan y

$$y' = 4c_1 e^{4x} + c_2 e^{4x} + 4c_2 xe^{4x}$$

persamaan ini harus memenuhi kondisi awal

$y(0) = 0$, maka $c_1 e^{4.0} + c_2.0.e^{4.0} = 0$ sehingga $c_1 = 0$

$y'(0) = 1$, maka $4c_1 e^{4.0} + c_2 e^{4.0} + 4c_2.0.e^{4.0} = 1$ sehingga $4c_1 + c_2 = 1$

$4.0 + c_2 = 1$,

$c_2 = 1$

Jadi penyelesaian khususnya adalah

$$y = e^{4x} + 4xe^{4x}.$$

Kasus III.

Akar-akar P(λ) kompleks

Dalam kasus ini akan dikembangkan metode untuk mencari persamaan homogen linear dengan koefisien konstan

$$\mathrm{L}y = (aD^2 + bD + c)y = 0. \qquad (2.20)$$

Dalam kasus ini persamaan karakteristik $\mathrm{P}(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ mempunyai akar-akar kompleks.

Dalam kasus tersebut dimana λ_1 dan λ_2 adalah bilangan kompleks, kita mempunyai pertanyaan "Apakah ada beberapa cara yang sesuai untuk mendefinisikan $e^{\lambda_1 x}$ dan $e^{\lambda_2 x}$ ke dalam nilai-nilai real ?". Jika ada, apakah $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ dan $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ adalah penyelesaian dari persamaan (2.20) dalam interval $-\infty < x < +\infty$. Hal tersebut dimungkinkan karena penggunaan lebih memerlukan penyelesaian dengan nilai-nilai real.

Sebelum menjawab pertanyaan, kita mengulang sedikit tentang kalkulus. Dalam bilangan kompleks kita mengenal

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} = u \quad \text{dan} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} = v$$

dengan $z = u + iv$, u dan v adalah bilangan real.

Fungsi e^x mempunyai bentuk dalam **deret taylor's** di sekitar $x = 0$ adalah

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

untuk beberapa bilangan real x. Kita ganti x dengan ix dalam deret dan menggunakan hasil deret ini sebagai definisi dari e^{ix}.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \ldots..$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .....)$$
$$= \cos x + i \sin x$$

berarti juga bahwa fungsi e^{ix} dapat dinyatakan dengan **rumus euler**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (2.21)$$

untuk semua bilangan real x, Untuk bilangan kompleks $z = u + iv$ didefinisikan .

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

atau

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}\left[\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)\right]. \qquad (2.22)$$

Selanjutnya

$$e^{\bar{z}} = e^{\operatorname{Re} z}\left[\cos(\operatorname{Im} z - i \sin(\operatorname{Im} z)\right] = \overline{e^z} \qquad (2.23)$$

Perhatikan kembali persamaan(2.20), misalkan akar-akar karakteristik dari polinomial $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ mempunyai pasangan akar kompleks konjugat sebut saja

$$\lambda_1 = u + iv \text{ dan } \lambda_2 = u - iv = \overline{\lambda_1}\ .$$

Kita definisikan y_1 dengan rumus

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(u+iv)x} = e^{ux}e^{ivx}$$
$$= e^{ux}(\cos vx + i \sin vx)$$

maka

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{ux}(\cos vx + i \sin vx)\right)$$
$$= ue^{ux}(\cos vx + i \sin vx) + e^{ux}(-v \sin vx + iv \cos vx)$$
$$= ue^{ux}(\cos vx + i \sin vx) + ive^{ux}(\cos vx + i \sin vx)$$
$$= (u + iv)\left[e^{ux}(\cos vx + i \sin vx)\right]$$
$$= (u + iv)y_1 = \lambda_1 y_1$$

dan $$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\lambda_1 y_1)=\lambda_1\frac{dy_1}{dx}=\lambda_1^2 y_1$$

karena itu $$a\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1=(a\lambda_1^2+b\lambda_1+c)y_1=0.$$

Dengan perhitungan yang sama kita lihat bahwa $y_2=e^{\lambda_2 x}=\overline{y_1}$ juga penyelesaian. Oleh karena itu penyelesaian umumnya adalah $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$, dengan penyelesaian y_1 dan y_2 adalah bernilai kompleks.

Bagaimanapun juga kita dapat memperoleh penyelesaian yang nilainya real seperti di bawah ini . Didefinisikan

$$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}\text{ dan }y_4=\frac{y_1-y_2}{2i}$$

karena y_3 dan y_4 adalah kombinasi linear dari penyelesaian y_1 dan y_2 , maka mereka juga merupakan penyelesaian. Karena $y_2=\overline{y_1}$, maka

$$y_3=\frac{y_1+\overline{y_1}}{2}=\operatorname{Re}y_1,\qquad y_4=\frac{y_1-\overline{y_1}}{2i}=\operatorname{Im}y_1,$$

atau

$$y_3=e^{ux}\cos vx\text{ dan }y_4=e^{ux}\sin vx\,.$$

Dua penyelesaian ini adalah bebas linear , sebab

$$\begin{aligned}w(y_3,y_4)(x)&=\begin{vmatrix}e^{ux}\cos vx & e^{ux}\sin vx\\ ue^{ux}\cos vx-ve^{ux}\sin vx & ue^{vx}\sin vx+ve^{ux}\cos vx\end{vmatrix}\\
&=e^{2ux}(u\cos vx\sin vx+v\cos^2 vx)-e^{2ux}(u\cos vx\sin vx-u\sin^2 vx)\\
&=e^{2ux}\left[(u\cos vx\sin vx-u\cos vx\sin vx)+(v\cos^2 vx+\sin^2 vx)\right]\\
&=e^{2ux}(v)=ve^{2ux}\neq 0.\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian umum persamaan(2.15) dengan akar-akar kompleks $\lambda=u\pm iv$ dari persamaan karakteristiknya adalah

$$y=e^{ux}(c_1\cos vx+c_2\sin vx)\,.$$

Contoh 2.19:

Selesaikan persamaan diferensial $(D^2+2D+10)y=0$.

Penyelesaian :

Polinom karakteristik dari persamaan dalam bentuk operator diferensial di atas adalah $p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+10$ dan persamaan karakteristik $p(\lambda)=0$.

Akar-akar karakteristiknya adalah λ_1 = -1+3i dan λ_2 = -1-3i. Penyelesaiannya berupa dua nilai kompleks yaitu

$$e^{(-1\,\pm\,3i)}=e^{-x}(\cos 3x \pm i\sin 3x)$$

sehingga $\{e^{-x}\cos 3x, e^{-x}\sin 3x\}$ adalah himpunan penyelesaian fundamental yang bernilai real.

Penyelesaian umumnya adalah

$$y=c_1e^{-x}\cos 3x+c_2e^{-x}\sin 3x.$$

2.3 Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Pada subbab sebelumnya telah dibahas tentang persamaan linear homogen dan penyelesaiannya dengan metode operator diferensial. Pembahasan subbab ini akan digunakan untuk menyelesaian sistem persamaan diferensial linear dengan koefisian konstan orde dua, yang mempunyai bentuk nonhomogen.

Definisi 2.12:

Persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan koefisien konstan adalah persamaan yang mempunyai bentuk

$$\mathrm{L}y=ay''+by'+cy=g(x) \tag{2.24}$$

dimana a, b, dan c adalah konstanta dimana a ≠ 0 dan g(x) adalah fungsi yang kontinu pada interval $a\le x\le b$.

Definisi 2.13:

Suatu fungsi y_p yang tidak memuat konstanta sebarang dan memenuhi persamaan(2.24) dapat disebut *penyelesaian partikular dari persamaan.*

Contoh 2.20:

1. Persamaan $3y'' + y' = 8$ mempunyai persamaan khusus yaitu $y_p = 8x$.

   Karena dengan memasukkan $y_p' = 8$ dan $y_p'' = 0$ ke dalam persamaan

   $3y'' + y' = 8$ menghasilkan identitas 0 + 8 = 8.

2. Tunjukkan bahwa $y_p = 2e^x$ adalah penyelesaian khusus dari persamaan

   $y'' + 3y' + 2y = 12e^x$.

Untuk menunjukkan tinggal memasukkan $y_p = 2e^x$, $y_p' = 2e^x$, dan $y_p'' = 2e^x$ ke dalam persamaan $y'' + 3y' + 2y = 12e^x$ menghasilkan identitas

$2e^x + 2(2e^x) + 2(2e^x) = 12e^x$.

Definisi 2.14:

Bersesuaian dengan persamaan (2.24) adalah persamaan diferensial linear homogen

$$Ly = ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.25}$$

disebut *persamaan diferensial homogen yang terkait.*

Dalam penjelasan operator diferensial terdapat teorema

$L(d_1y_1 + d_2y_2) = d_1Ly_1 + d_2Ly_2$ dengan L sebagai operator diferensial.

Untuk semua konstanta d_1, d_2 dan untuk semua fungsi y_1, y_2 yang mempunyai dua turunan yang kontinu. Penyelesaian umum dari persamaan (2.25) dapat diletakkan bersama-sama seperti aturan berikut ini.

Teorema 2.4: ***Prinsip Superposisi***

Andaikan y_p merupakan penyelesaian partikular dari L$y = g$, dan andaikan y_1 dan y_2 merupakan dua penyelesaian bebas linear dari persamaan homogen L$y = 0$. Maka penyelesaian umum dari (2.24) dapat ditulis dalam bentuk

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \tag{2.26}$$

dimana c_1 dan c_2 konstanta sebarang.

Bukti :

Untuk membuktikan teorema, harus kita buktikan bahwa $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ adalah penyelesaian dari (2.24) . Dengan sifat linearitas dari operator diferensial L, maka

$$\begin{aligned} \mathrm{L}y &= \mathrm{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p) \\ &= c_1 \mathrm{L}y_1 + c_2 \mathrm{L}y_2 + \mathrm{L}y_p \\ &= c.0 + c.0 + g = g \end{aligned}$$

sehingga $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ adalah penyelesaian dari $L_y = g$ dengan dua konstanta sebarang c_1 dan c_2 .

Kemudian harus dibuktikan bahwa konstanta memenuhi beberapa kondisi awal $y(x_0) = a_0$ dan $y'(x_0) = a_1$. Tentu saja , ini harus tunggal dalam memilih c_1 dan c_2 supaya

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + y_p(x_0) = a_0$$

dan $$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + y_p'(x_0) = a_1 .$$

Selanjutnya kita mempunyai pemecahan sistem simultan

$$\begin{aligned} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 &= (a_0 - y_p(x_0)) \\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2 &= (a_1 - y_p'(x_0)) \end{aligned}$$

untuk c_1 dan c_2 . Oleh sebab itu y_1 dan y_2 bebas linear, determinannya adalah

$$\det\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = w(y_1, y_2)(x_0) \neq 0\,.$$

Jadi karena y_1 dan y_2 bebas linear maka c_1 dan c_2 akan dipenuhi satu dan hanya satu jalan. *Bukti selesai.*

Contoh 2.21:

Tunjukkan bahwa $y = \frac{1}{2}x^2$ adalah penyelesaian partikular dari

$y'' + 2y = x^2 + 1, y(0) = 1, y'(0) = 1$ kemudian tentukan juga penyelesaian masalah nilai awal .

Penyelesaian :

Untuk menunjukkan bahwa $y = \frac{1}{2}x^2$ adalah penyelesaian persamaan diferensial, subtitusikan $y = \frac{1}{2}x^2$ dan $y'' = 1$ ke dalam persamaan $y'' + 2y = x^2 + 1$, maka didapatkan $y'' + 2y = 1 + 2(\frac{1}{2}x^2) = x^2 + 1$.

Perhatikan persamaan homogen $y'' + 2y = 0$ dan akar-akar persamaan bantu $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = -2$. jadi penyelesaian umum persamaan homogen adalah

$$y = c_1 + c_2e^{-2x}.$$

Sedangkan penyelesaian umum nonhomogennya adalah

$$y = c_1 + c_2e^{-2x} + \tfrac{1}{2}x^2$$

sehingga $y(0) = c_1 + c_2$ dan $y' = -2c_2e^{-2x} + x$ maka $y'(0) = -2c_2$

dari kondisi di atas, bahwa $c_1 + c_2 = 1$, dan $-2c_2 = 1$ maka dari sistem persamaan diperoleh

$$c_1 = \tfrac{3}{2}, \text{ dan } c_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Jadi penyelesaiannya adalah

$$y = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Kita dapat menemukan persamaan umum (2.24) jika salah satu penyelesaian partikular dari (2.26) dapat ditemukan dan jika dua penyelesaian y_1 dan y_2 bebas linear yang diperoleh dari persamaan homogen yang terkait yaitu Ly = 0 dapat ditemukan . Bentuk kombinasi linearnya adalah

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{2.27}$$

dan dijumlahkan dengan y_p . Penyelesaian (2.27) ini merupakan penyelesaian komplementer, dan y_p adalah penyelesaian partikular dari (2.24).

Dengan metode yang sama dapat digunakan untuk memisahkan penyelesaian dari persamaan $Ly = g_1 + g_2$ dalam tiga bagian. Kemudian { y_1,y_2 } merupakan himpunan penyelesaian fundamental dari persamaan homogen Ly = 0. Maka y_{p_1} dan y_{p_2} merupakan penyelesaian partikular dari dua persamaan homogen

$$Ly_{p_1} = g_1 \text{ dan } Ly_{p_2} = g_2$$

maka penyelesaian umum dari $Ly = g_1 + g_2$ adalah

$$y = c_1 y_1 + c_1 y_1 + y_{p_1} + y_{p_2} .$$

Dengan teorema berikut ini akan diperlihatkan bahwa fungsi penggerak g yang diandaikan bahwa fungsi penggerak $g = g_1 + g_2$, penyelesaian dari persamaan diferensial linear tersebut penyelesaiannya dapat dilihat dari fungsi g_1 dan g_2 secara sendiri-sendiri.

Teorema 2.5:

Andaikan y_{p_1} adalah penyelesaian partikular dari

$$Ly = b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = g_1(x) \tag{2.28}$$

dan y_{p_2} adalah penyelesaian partikular dari

$$\mathrm{L}y = b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = g_2(x) \tag{2.29}$$

maka y_{p_1} + y_{p_2} adalah penyelesaian partikular dari persamaan

$$\mathrm{L}y = b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = g_1(x) + g_2(x). \tag{2.30}$$

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa $y = y_{p_1} + y_{p_2}$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan (2.30), dengan mensubtitusikan $y = y_{p_1} + y_{p_2}$ ke dalam ruas kiri dari persamaan(2.30) sehingga akan sama dengan ruas kanan. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& b_2(y_{p_1} + y_{p_2})'' + b_1(y_{p_1} + y_{p_2})' + b_0(y_{p_1} + y_{p_2}) \\
&= b_2 y_{p_1}'' + b_2 y_{p_2}'' + b_1 y_{p_1}' + b_1 y_{p_2}' + b_0 y_{p_1} + b_0 y_{p_2} \\
&= (b_2 y_{p_1}'' + b_1 y_{p_1}' + b_0 y_{p_1}) + (b_2 y_{p_2}'' + b_1 y_{p_2}' + b_0 y_{p_2}) \\
&= g_1(x) + g_2(x)
\end{aligned}$$

bentuk $b_2 y_{p_1}'' + b_1 y_{p_1}' + b_0 y_{p_1}$ sama dengan $g_1(x)$ karena y_{p_1} adalah penyelesaian partikular dari (2.28) dan bentuk $b_2 y_{p_2}'' + b_1 y_{p_2}' + b_0 y_{p_2}$ sama dengan $g_2(x)$ karena y_{p_2} adalah penyelesaian partikular dari (2.29).

Bukti selesai.

Untuk memperluas teorema di atas maka dapat ditampilkan

$$Ly = g_1 + g_2 + \ldots.. + g_m \tag{2.31}$$

pertama kali harus ditemukan penyelesaian y_{p_j} dari $Ly = g_j$ untuk $j = 1,2,\ldots,m$, kemudian temukan suatu himpunan fundamental { y_1, y_2 } dari penyelesaian Ly = 0, dan bentuk penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \sum_{j=1}^{m} y_{p_j}. \tag{2.32}$$

Untuk menentukan y_c telah dibahas pada sub bab sebelumnya , untuk menentukan y_{p_1} dan y_{p_2} akan dibahas dalam materi berikut ini.

Dari definisi dan teorema di atas telah dibahas tentang penyelesaian persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan koefisien konstan, selanjutnya akan dibahas lebih lanjut penjelasan tentang penyelesaian persamaan dengan metode operator diferensial. Metode ini sebenarnya hampir mirip dengan metode keluarga diferensial, perbedaannya adalah mengubah persamaan diferensial linear nonhomogen menjadi persamaan diferensial linear homogen. Kemudian persamaan diferensial homogen baru tersebut diselesaikan dengan mengunakan operator diferensial.

Berikut ini akan diberikan definisi penghapusan(annihilators).

Definisi 2.15:

Andaikan *g(x)* mempuyai n derivatif, maka polinom operator diferensial $M = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ disebut menghapus *g(x)* jika **M***g(x)* = 0.

Di atas telah dibahas definisi penghapusan dan sebenarnya metode ini hanya efektif pada fungsi yang akan dihapus atau fungsi penggeraknya terbatas pada suku-suku berbentuk kombinasi linear fungsi-fungsi $x^k e^{\lambda x} \cos bx$ dan $x^k e^{\lambda x} \sin bx$ dimana k adalah konstanta positif dan b konstanta sebarang. Jadi metode operator diferensial hanya akan digunakan pada fungsi g(x) yang dapat dihapus, untuk selain fungsi-fungsi tersebut tidak akan dibahas pada penulisan ini.

Berikut ini akan dibahas tentang penggunaan metode oprator diferensial untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen.

Dalam teorema(2.24), diberikan bahwa persamaan(2.24) mempunyai penyelesaian $y = y_c + y_p$ dimana y_p adalah persamaan partikular.

Andaikan persamaan diferensial nonhomogen mempunyai bentuk L(D)y = g(x) dimana fungsi g(x) adalah fungsi yang dapat dihapus oleh operator diferensial **M,** maka **M**$g(x) = 0$. Dalam membentuk bentuk umum y_p dapat dilihat langkah-langkah berikut.

1. Tentukan y_c yang merupakan penyelesaian komplementer.
2. Tentukan penghapus **M** untuk g(x), kemudian kerjakan pada kedua ruas persamaan L(D)y = g(x) dan didapatkan $\mathbf{M}\,L(D)y = 0$.
3. Tentukan penyelesaian diferensial linear homogen $\mathbf{M}\,L(D)y = 0$. Hasil penyelesaian ini akan terdiri dari dua penyelesaian yaitu $y_c + y_p$ sedangkan y_p adalah penyelesaian yang diperoleh dari akibat dari **M**. Suku-suku tambahan ini adalah bentuk umum dari persamaan partikular.
4. Bentuk umum tersebut harus dicari koefisien-koefisiennya dengan mensubtitusikan ke dalam persamaan diferensial linear nonhomogen, selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien variabel yang sejenis akan didapatkan konstanta-konstanta penyelesaian.

Contoh 2.22:

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\sin x. \qquad (2.33)$$

Penyelesaian :

Dalam bentuk operator diferensial persamaan(2.33) dapat ditulis sebagai

$$(D^2 - 2D - 3)y = 2e^x - 10\sin x.$$

Persamaan diferensial linear homogen yang berkaitan dari persamaan(2.33) adalah

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 0$$

penyelesaian komplementer dari persamaan diferensial linear homogen adalah

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} .$$

Perhatikan fungsi penggerak $g(x) = 2e^x - 10\sin x$ yang terdiri dari dua fungsi . Fungsi $2e^x$ diberikan penghapus (D-1) dan fungsi $-10\sin x$ diberikan penghapus $(\mathrm{D}^2 + 1)$. Jadi fungsi $g(x) = 2e^x - 10\sin x$ mempunyai fungsi penghapus $(D-1)(D^2+1)$. Dengan menggunakan penghapus pada kedua ruas pada persamaan (2.33) maka akan diperoleh

$$(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}^2+1)(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = (\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}^2+1)(2\mathrm{e}^x - 10\sin x)$$
$$(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}^2+1)(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 0$$
$$(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}^2+1)(\mathrm{D}-3)(\mathrm{D}+1)y = 0 . \quad (2.34)$$

Persamaan diferensial homogen(2.34) mempunyai akar-akar -1, -1, , 3, dan ± i. Jadi penyelesaian persamaan homogennya adalah

$$y = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}}_{y_c} + \underbrace{c_3 e^x + c_4 \cos x + c_5 \sin x}_{y_p} \quad (2.35)$$

dari persamaan (2.35) dapat disimpulkan bahwa y_p harus bersesuaian dengan $c_3 e^x + c_4 \cos x + c_5 \sin x$ karena dua suku pertama adalah y_c. Dengan menggunakan notasi koefisien yang berbeda pada $c_3 e^x + c_4 \cos x + c_5 \sin x$ dapat ditulis sebagai

$$y_p = Ae^x + B\cos x + C\sin x .$$

Untuk mencari koefisien dari y_p , dapat dicari dengan mensubtitusikan ke dalam persamaan(2.33) sedemikian hingga

$$y_p^{\prime} = Ae^x + B\cos x - C\sin x$$
$$y_p^{\prime\prime} = Ae^x - B\sin x - C\cos x$$

subtitusikan ke dalam persamaan (2.33), maka

$$(Ae^x - B\sin x - C\cos x) - 2(Ae^x + B\cos x - C\sin x)$$
$$- 3(Ae^x + B\sin x + C\cos x) = 2e^x - 10\sin x$$

$$Ae^x - B\sin x - C\cos x - 2Ae^x - 2B\cos x + 2C\sin x$$
$$- 3Ae^x - 3B\sin x - 3C\cos x = 2e^x - 10\sin x$$
$$Ae^x - 2Ae^x - 3Ae^x - B\sin x + 2C\sin x - 3B\sin x$$
$$- C\cos x - 2B\cos x - 3C\cos x = 2e^x - 10\sin x$$
$$-4Ae^x + (2C - 4B)\sin x + (-2B - 4C)\cos x = 2e^x - 10\sin x .$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien yang sejenis maka diperoleh sistem persamaan

$$-4A = 2, \quad 2C - 4B = 0, \quad -2B - 4C = -10$$

dari sistem persamaan tersebut diperoleh

$$A = -\tfrac{1}{2}, \quad B = 1, \quad C = 2$$

sedemikian hingga penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = -\tfrac{1}{2}e^x - \cos x + 2\sin x .$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^x - \cos x + 2\sin x .$$

Dalam mencari persamaan partikular y_p , lebih mudah bila kita mempunyai bentuk umum untuk membentuk persamaan tersebut. Berikut ini akan diberikan bentuk umum dari y_p

a. Bentuk umum y_p, terdiri dari kombinasi linear fungsi-fungsi penghapus dari fungsi pengerak $g(x)$. Apabila ada suku dari y_p yang merupakan duplikat dalam y_c ,maka

b. Bentuk y_c yang merupakan duplikat y_c harus digandakan dengan mengalikan x berpangkat bilangan bulat positif minimum sesuai yang diperlukan untuk membuat semua suku dalam $y_c + y_p$ adalah fungsi-fungsi yang bebas linear.

Metode koefisien tak tentu dengan operator diferensial hanya efektif untuk fungsi pengerak berupa fungsi-fungsi yang telah dicantumkan pada tabel maupun kombinasi linearnya. Andaikan fungsi penggeraknya mempunyai bentuk seperti $tg\, x, \sec x,$ dan $x^{\frac{1}{2}}$ metode ini akan sulit digunakan, tetapi untuk fungsi seperti itu tidak akan dibahas.

Daftar tabel fungsi $g(x)$ dan bentuk umum y_p

Fungsi $g(x)$	y_p
x^n (n bilangan positif)	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$
$e^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$\sin bx$ atau $\cos bx$	$A\sin bx + B\cos bx$
$x^n e^{\lambda x}$	$e^{\lambda x}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n)$
$e^{\lambda x}\sin bx$ atau $e^{\lambda x}\cos bx$	$e^{\lambda x}(A\sin bx + B\cos bx)$

Contoh 2.23:

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial linear nonhomogen

$$y'' + y' - 2y = 6e^{-2x} + 3e^{x} - 4x^2 . \qquad (2.36)$$

Penyelesaian :

Persamaan (2.36) dapat ditulis dalam operator diferensial

$$(D^2 + D - 2)y = 6e^{-2x} + 3e^x - 4x^2.$$

Persamaan diferensial linear homogen yang berkaitan adalah

$$(D^2 + D - 2)y = 0.$$

PDLH ini mempunyai akar-akar 1 dan – 2, sehingga penyelesaian komplementer dari PDLH adalah

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Dengan ketentuan bentuk umum y_p di atas maka dapat di tentukan penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = Ae^x + Be^{-2x} + C + Dx + Ex^2$$

karena e^{-2x} dan e^x merupakan kelipatan konstan dari y_c , maka masing-masing fungsi digandakan dengan x sehingga diperoleh bentuk y_p yang merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi keluarga diferensial yang telah digandakan yaitu

$$y_p = Axe^x + Bxe^{-2x} + C + Dx + Ex^2 \tag{2.37}$$

persamaan ini merupakan penyelesaian partikular dari PDLNH. Dengan menurunkan y_p sampai tingkat dua

$$y_p' = Ae^x + Axe^x + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x} + D + 2Ex$$
$$y_p'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x - 2Be^{-2x} - 2Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} + 2E$$
$$= 2Ae^x + Axe^x - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} + 2E$$

subtitusikan ke dalam persamaan (2.36), maka

$$
\begin{aligned}
&(2Ae^x + Axe^x - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} + 2E) \\
&\qquad + (Ae^x + Axe^x + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x} + D + 2Ex) \\
&\qquad\qquad - 2(Axe^x + Bxe^{-2x} + C + Dx + Ex^2) = 6e^{-2x} + 3e^x - 4x^2 \\
&2Ae^x + Axe^x - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} + 2E \\
&\qquad + Ae^x + Axe^x + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x} + D + 2Ex \\
&\qquad\qquad - 2Axe^x - 2Bxe^{-2x} - 2C - 2Dx - 2Ex^2 = 6e^{-2x} + 3e^x - 4x^2 \\
&2Ae^x + Ae^x + Axe^x + Axe^x - 2Axe^x \\
&\quad - 4Be^{-2x} + Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} - 2Bxe^{-2x} - 2Bxe^{-2x} \\
&\qquad + 2E + D - 2C + 2Ex - 2Dx - 2Ex^2 = 6e^{-2x} + 3e^x - 4x^2 \\
&3Ae^x - 3Be^{-2x} - 2Ex^2 + (2E - 2D)x + (2E + D - 2C) = 6e^{-2x} + 3e^x - 4x^2.
\end{aligned}
$$

Dengan menyamakan koefisien–koefisien yang sejenis maka diperoleh sistem persamaan

$$3Ae^x = 3e^x, \quad -3Be^{-2x} = 6e^{-2x}, \quad -2Ex^2 = -4x^2, \quad 2E - 2Dx = 0, \quad 2E + D - 2C = 0$$

dari sistem persamaan diperoleh

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 3, \quad D = 2, \quad E = 2$$

sedemikian hingga penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = xe^x - 2xe^{-2x} + 3 + 2x + 2x^2.$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} + xe^x - 2xe^{-2x} + 3 + 2x + 2x^2.$$

BAB III

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR SIMULTAN ORDE PERTAMA DAN KEDUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DENGAN METODE OPERATOR DIFERENSIAL

3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear Simultan

Pada bab sebelumnya telah kita mempelajari tentang penyelesaian persamaan diferensial linear dengan satu fungsi tak diketahui . Dalam bab ini akan dibahas tentang sistem persamaan linear dengan dua dan tiga fungsi tak diketahui. Pembahasan sistem tersebut akan diperluas dengan membahas tentang penyelesaian dari sistem persamaan diferensial dengan koefisien konstan. Untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial dengan koefisian konstan sebenarnya banyak cara atau metode yang bisa digunakan tetapi kita akan memfokuskan dengan menggunakan metode operator diferensial.

Karena kita akan menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear dengan menggunakan operator diferensial maka untuk selanjutnya kita akan membatasi pada sistem persamaan dengan notasi operator diferensial linear.

Sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dengan dua fungsi tak diketahui mempunyai bentuk baku

$$\begin{aligned} Dx_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\ Dx_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana $D = \dfrac{d}{dt}$ dan a_{ij} adalah konstanta. Sistem(3.1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} Dx_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 &= f_1(t) \\ Dx_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{atau}$$

$$\begin{aligned}(D-a_{11})x_1 \qquad - a_{12}x_2 &= f_1(t)\\ -a_{21}x_1 + (D-a_{22})x_2 &= f_2(t)\end{aligned}.$$

Kita akan memperhatikan dengan lebih umum sistem persamaan diferensial linear simultan orde dua dengan dua fungsi tak diketahui dimana $L_{ij}(D) = a_2D^2 + a_1D + a_0$, dengan $i, j = 1,2$ akan mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{11}(\mathrm{D})x_1 + \mathrm{L}_{12}(\mathrm{D})x_2 &= f_1(t)\\ \mathrm{L}_{21}(\mathrm{D})x_1 + \mathrm{L}_{22}(\mathrm{D})x_2 &= f_2(t)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

dimana $\mathbf{L}_{ij}$(D) adalah polinom operator diferensial.

Bentuk sistem tiga persamaan diferensial linear simultan dengan tiga fungsi tak diketahui mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{11}(\mathrm{D})x_1 + \mathrm{L}_{12}(\mathrm{D})x_2 + L_{13}(D)x_3 &= f_1(t)\\ \mathrm{L}_{21}(\mathrm{D})x_1 + \mathrm{L}_{22}(\mathrm{D})x_2 + L_{23}(D)x_3 &= f_2(t)\\ \mathrm{L}_{31}(\mathrm{D})x_1 + \mathrm{L}_{32}(\mathrm{D})x_2 + L_{33}(D)x_3 &= f_3(t)\end{aligned}$$

dimana $\mathbf{L}_{ij}$(D) adalah polinom operator diferensial.

Setiap sistem dari bentuk (3.1) adalah bentuk dari (3.2), tetapi tidak setiap sistem dari (3.2) adalah sistem order pertama. Biasanya, sebuah sistem seperti itu (3.2) dapat ditulis sebagai sistem order pertama, seperti yang telah ditunjukkan sebelumnya.

Contoh 3.1:

1. Sistem persamaan berikut adalah sistem persamaan diferensial linear dengan dua fungsi tak diketahui

$$\begin{aligned}(D+2)x + (D+2)y &= e^{-3t}\\ (D+3)x + (D+3)y &= e^{-2t}\end{aligned}.$$

2. Sistem persamaan

$$
\begin{aligned}
& (-D^2+5D-7)x_2 + (D-1)x_3 = 0 \\
x_1 \quad & +(D-2)x_2 \qquad -x_3 = 0 \\
& (4D-9)x_2 + (D-1)x_3 = 0
\end{aligned}
$$

adalah sistem persamaan dengan tiga fungsi tak diketahui.

Setelah kita membahas bentuk sistem persamaan diferensial linear, kita akan membahas tentang penyelesaian sistem persamaan yang menggunakan metode operator diferensial.

3.2 Metode Eliminasi

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear adalah metode eliminasi. Berikut ini akan diberikan definisi tentang penyelesaian sistem persamaan diferensial linear.

Definisi 3.1:

Sebuah penyelesaian sistem dua persamaan diferensial linear simultan dengan dua fungsi tak diketahui

$$
\begin{aligned}
L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 &= f_1(t) \\
L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 &= f_2(t)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

adalah pasangan fungsi x_1 dan x_2 yang keduanya secara serempak memenuhi persamaan.

Tehnik pertama dapat digunakan untuk memecahkan sistem dari jenis (3.3) adalah disebut metode eliminasi. Teori dan teknik mengingatkan dari metode eliminasi untuk menyelesaikan sistem dari persamaan aljabar linear.

Definisi 3.2:

Sebuah sistem persamaan dikatakan ekuivalen dengan persamaan(3.3) jika mereka mempunyai penyelesaian yang sama.

Contoh 3.2:

Dua sistem berikut ini adalah ekuivalen

$$\begin{aligned}(-D+6)y_1 - Dy_2 &= -1\\(D-3)y_1 \qquad\quad &= 0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}3y_1 \qquad - Dy_2 &= -1\\(D-3)y_1 \qquad\quad &= 0\end{aligned}$$

karena kedua sistem tersebut mempunyai penyelesaian yaitu

$$y_1 = c_1e^{3x} \qquad\qquad y_2 = c_2e^{3x} + x$$

Untuk memulai menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan berorde dua dengan operator diferensial, kita akan membuat garis besar untuk menyelesaikan sistem linear. Dari definisi bentuk sistem persamaan diferensial linear simultan orde dua adalah

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{11}x_1 + \mathrm{L}_{12}x_2 &= f_1(t)\\\mathrm{L}_{21}x_1 + \mathrm{L}_{22}x_2 &= f_2(t)\end{aligned} \qquad (3.4)$$

dimana L_{11}, L_{12}, L_{21}, dan L_{22} adalah operator diferensial linear order dua dengan koefisien konstan.

Contoh 3.3:

Carilah bentuk operator diferensial dari sistem persamaan diferensial linear (3.4) dari

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = t+1\\&\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + y = 2t-1\end{aligned}$$

Penyelesaian :

Dari persamaan di atas kita dapat menggunakan notasi operator diferensial, maka sistem tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} &D^2 x - D\,y = t + 1 \\ &(D - 3)x + (D + 1)y = 2t - 1 \end{aligned}$$

Dengan jelas ini adalah bentuk dari (3.3) dimana

$$L_{11} = D^2,\ L_{12} = -D,\ L_{21} = D - 3,\ \ L_{22} = D + 1.$$

Sekarang perhatikan sistem umum(3.4), kita kerjakan operator diferensial L_{22} pada persamaan pertama dari(3.4) dan kerjakan operator diferensial L_{12} pada persamaan kedua dari(3.4). Ini akan menghasilkan

$$\begin{aligned} &L_{22}L_{11}x_1 + L_{22}L_{12}x_2 = L_{22}f_1(t) \\ &L_{12}L_{21}x_1 + L_{12}L_{22}x_2 = L_{12}f_2(t) \end{aligned}$$

kemudian dengan cara mengurangi persamaan pertama dengan persamaan kedua dan karena $L_{22}L_{12}x_1 = L_{12}L_{22}x_2$, maka akan diperoleh

$$L_{22}L_{11}x_1 - L_{12}L_{21}x_1 = L_{22}f_1(t) - L_{12}f_2(t)$$

atau

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})x_1 = L_{22}f_1(t) - L_{12}f_2(t). \tag{3.5}$$

Bentuk $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$ di dalam ruas kiri dari persamaan (3.5) yang merupakan operator diferensial linear dengan koefisien konstan. Jika bentuk $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$ tidak sama dengan nol dan bentuk tersebut kita notasikan dengan L_1. Jika fungsi f_1(t) dan fungsi f_2(t) membuat ruas kanan dari(3.5) yaitu $L_{22}f_1(t) - L_{12}f_2(t)$ ada, maka kita tulis ruas kanan tersebut sebagai fungsi g_1 dari t. Persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai

$$L_1 x = g_1(t). \tag{3.6}$$

Persamaan(3.6) adalah persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dalam satu variabel bebas x_1, kita melihat prosedur eliminasi yang lain untuk variabel bebas x_2.

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial (3.6) untuk x_1, telah dibahas dalam bab sebelumnya. Persamaan (3.6) adalah persamaan berorder empat karena persamaan ini hasil kali dua polinom operator diferensial berorde dua, sehingga penyelesaian umumnya adalah berbentuk

$$x_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 + \mathrm{U}_1 \tag{3.7}$$

dimana u_1, u_2, u_3, u_4 adalah empat penyelesaian yang bebas linear dari persamaan diferensial linear homogen $\mathrm{L}_1 x_1 = 0$, c_1, c_2, c_3, c_4 adalah konstanta sebarang dan U_1 adalah penyelesaian partikular dari $\mathrm{L}_1 x_1 = g_1$.

Untuk mendapatkan penyelesaian(3.4) yang lengkap maka kita akan mengeliminasi x_2 . Dari sistem (3.4) kita kalikan dengan operator diferensial L_{21} kepada persamaan pertama dan L_{11} persamaan kedua, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{21}\mathrm{L}_{11}x_1 + \mathrm{L}_{21}\mathrm{L}_{12}x_2 &= \mathrm{L}_{21}f_1(t) \\ \mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{21}x_1 + \mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22}x_2 &= \mathrm{L}_{11}f_2(t) \end{aligned}$$

Kurangkan persamaan kedua dengan persamaan pertama, maka akan diperoleh

$$(\mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22} - \mathrm{L}_{21}\mathrm{L}_{12})x_2 = \mathrm{L}_{11}f_2(t) - \mathrm{L}_{21}f_1(t)$$

atau

$$(\mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22} - \mathrm{L}_{12}\mathrm{L}_{21})x_2 = \mathrm{L}_{11}f_2(t) - \mathrm{L}_{21}f_1(t). \tag{3.8}$$

Jika fungsi-fungsi $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ membuat ruas kanan persamaan(3.8) yaitu $\mathrm{L}_{11}f_2(t) - \mathrm{L}_{21}f_1(t)$ ada, maka kita tulis ruas kanan tersebut sebagai fungsi g_2 dari t, sedemikian hingga persamaan dapat ditulis

$$\mathrm{L}_1 x_2 = g_2(t). \tag{3.9}$$

dimana L_1 dinotasikan untuk operator diferensial $\mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22} - \mathrm{L}_{12}\mathrm{L}_{21}$.

Persamaan (3.9) adalah persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dalam satu variabel bebas x_2 , karena kita telah mengeliminasi variabel x_1. Seperti dalam bab sebelumnya penyelesaian persamaan(3.9) untuk x_2, adalah penyelesaian dalam bentuk

$$x_2 = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4 + \mathrm{U}_2 \tag{3.10}$$

dimana u_1, u_2, u_3, u_4 adalah empat penyelesaian bebas linear dari persamaan homogen $\mathrm{L}_1 x_2 = 0$ (atau $\mathrm{L}_1 x_2 = 0$) . Sudah dapat dilihat dalam(3.10), k_1, k_2, k_3, k_4 adalah konstanta sebarang, dan U_2 adalah penyelesaian partikular dari

$\mathrm{L}_1 x_2 = g_2(t)$.

Jadi kita lihat bahwa jika x_1 dan x_2 memenuhi sistem linear(3.4) maka x_1 memenuhi satu persamaan diferensial (3.6) dan x_2 memenuhi satu persamaan diferensial linear (3.9). Maka jika x_1 dan x_2 memenuhi sistem (3.4), maka x_1 adalah bentuk dari (3.7) dan x_2 adalah bentuk dari (3.10). Bagaimanapun, pasangan fungsi diberikan oleh (3.7) dan (3.10) tidak dapat memenuhi sistem (3.4) untuk semua pilihan dari konstanta c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, k_4. Oleh karena itu pasangan ini (3.7) dan (3.10) secara serempak(bersamaan) tidak memenuhi sistem persamaan, yang diberikan sebarang pilihan dari 2×4 konstanta yaitu c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, k_4. Dengan kata lain, urutan untuk x_1 diberikan oleh(3.7) dan x_2 diberikan oleh(3.10) untuk memenuhi sistem(3.4) sebanyak 2×4 konstanta c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, k_4. Beberapa dari mereka tidak bebas dengan yang lain. Dapat ditunjukkan bahwa banyaknya konstanta bebas di dalam persamaan (3.7) dan(3.10) yang merupakan penyelesaian umum sistem linear(3.4) adalah sama dengan order yang terdapat pada bentuk operator $\mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22} - \mathrm{L}_{12}\mathrm{L}_{21}$ yang dapat diperoleh dengan mencari determinan

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}.$$

Pada operator "koefisien " dari x_1 dan x_2 dalam persamaan(3.4) maka determinan dari operator koefisien tidak identik dengan nol. Kita telah asumsikan bahwa operator L_1 mempunyai order 4. Jadi konstanta pada pasangan (3.7) dan (3.10) yang memenuhi sistem (3.4) hanya 4 konstanta dari 2×4 konstanta.

Di dalam menentukan order, yang mana terdapat 2×4 konstanta, harus dipilih 4 konstanta sebagai bebas dari 4 konstanta yang lain. Subtitusi x_1 yang diberikan oleh(4) dan x_2 yang diberikan oleh(3.10) ke dalam sistem persamaan (3.4). Konstanta-konstanta c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, k_4 yang memenuhi hubungan di dalam pasangan (3.7) dan (3.10) disebut penyelesaian umum dari (3.4).

Contoh 3.4:

Selesaikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} &= t+1 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + y &= 2t-1 \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Penyelesaian:

Kita menggunakan notasi operator diferensial pada sistem ini ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 x - \mathrm{D}\, y &= t+1 \\ (\mathrm{D} - 3)x + (\mathrm{D}+1)y &= 2t-1 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Kita menggunakan operator (D+1) pada persamaan pertama dari (3.12) dan operator D pada persamaan persamaan (3.12), diperoleh

$$\begin{aligned} (D+1)D^2x - (D+1)Dy &= (D+1)(t+1) \\ D(D-3)x + D(D+1)y &= D(2t-1) \end{aligned}$$

jumlahkan dua persamaan , kita peroleh

$$\left[(D+1)D^2 + D(D-3)\right]x = (D+1)(t+1) + D(2t-1)$$

$$(D^3 + D^2 + D^2 - 3D)x = 1 + t + 1 + 2$$

akhirnya

$$(D^3 + D^2 - 3D)x = t + 4 \tag{3.13}$$

penyelesaian umum dari persamaan diferensial (3.13) adalah

$$x = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-3t} - \frac{14}{9}t - \frac{1}{6}t^2. \tag{3.14}$$

Hasil dari sistem (3.12) dan gunakan operator diferensial (D- 3) pada persamaan dari (3.12) dan operator D^2 persamaan kedua (3.12) . Kita memperoleh

$$\begin{aligned} (D-3)D^2x - (D-3)Dy &= (D-3)(t+1) \\ D^2(D-3)x + D^2(D+1)y &= D^2(2t-1) \end{aligned}$$

kurangkan persamaan pertama dari persamaan kedua, kita mendapatkan

$$\left[-(D-3)D - D^2(D+1)\right]y = (D-3)(t+1) - D^2(2t-1)$$

atau

$$(-D^3 - 2D^2 + 3D)y = -3t - 2$$

atau

$$(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 3t + 2\,. \tag{3.15}$$

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial(3.15) adalah

$$y = k_1 + k_2 e^t + k_3 e^{-3t} - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{1}{2}t^2\,. \tag{3.16}$$

Maka jika x dan y memenuhi sistem(3.11) maka x harus ada dalam bentuk (3.14) dan y harus ada dalam bentuk (3.16) untuk pilihan dari konstanta-konstanta c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3 . Determinan dari operator diferensial dari x dan y di dalam (3.12) adalah

$$\begin{vmatrix} D^2 & -D \\ D-3 & D+1 \end{vmatrix} = D^3 + 2D^2 - 3D\,.$$

Hasil determinan tersebut adalah persamaan yang mempunyai orde tiga, maka di dalam penyelesaian umum dari sistem (3.11) mempunyai dua konstanta. Konstanta untuk pasangan (3.14)dan (3.16) memenuhi sistem (3.11) hanya tiga dari enam konstanta c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3 yang dapat bebas. Untuk mencari dua konstanta yang bebas, maka dapat diperoleh dengan mensubtitusikan x yang diberikan oleh (3.14) dan y yang diberikan oleh(3.16) ke dalam salah satu persamaan sistem(3.11). Subtitusi ke dalam persamaan kedua dari (3.11), kita memperoleh

$$\begin{aligned}
&\left[c_2e^t + 9c_3e^{-3t} - \tfrac{1}{3}\right] + \left[k_2e^t + 9k_3e^{-3t} - 1\right] - 3\left[c_1 + c_2e^t + c_3e^{-3t} - \tfrac{14}{9}t - \tfrac{1}{6}t^2\right] \\
&\qquad + \left[k_1 + k_2e^t + k_3e^{-3t} - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{1}{2}t^2\right] = 2t - 1 \\
&\left[-3c_1 + k_1\right] + \left[-2c_2 + 2k_2\right]e^t + \left[-6c_3 - 2k_3\right]e^{-3t} - \tfrac{26}{9} + 2t = 2t - 1 \\
&\left[-3c_1 + k_1\right] + \left[-2c_2 + 2k_2\right]e^t + \left[-6c_3 - 2k_3\right]e^{-3t} - \tfrac{17}{9} = 0.
\end{aligned}$$

Karena e^t dan e^{-3t} tidak pernah sama dengan nol maka persamaan di atas akan dipenuhi jika

$$\begin{aligned}
-3c_1 + k_1 - \tfrac{17}{9} &= 0 \\
-2c_2 + 2k_2 &= 0 \\
-6c_3 - 2k_3 &= 0
\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Sistem(3.17) harus dapat dipenuhi, dengan memilih tiga dari enam konstanta dalam(3.17). Jika kita memilih c_1, c_2 dan c_3 bebas, maka kita memperoleh

$$k_1 = \tfrac{17}{9} + 3c_1 \;,\quad k_2 = c_2 \quad \text{dan} \quad k_3 = -3c_3 .$$

Subtitusi konstanta k_1, k_2 dan k_3 ke dalam(3.16), menghasilkan persamaan $y = 3c_1 + c_2e^t - 3c_3e^{-3t} + \tfrac{17}{9} - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{1}{2}t^2$. Sehingga penyelesaian umum dari sistem(3.11) diberikan oleh

$$\begin{aligned}
x &= c_1 + c_2e^t + c_3e^{-3t} - \tfrac{14}{9}t - \tfrac{1}{6}t^2 \\
y &= 3c_1 + c_2e^t - 3c_3e^{-3t} + \tfrac{17}{9} - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{1}{2}t^2
\end{aligned}$$

dimana c_1, c_2 dan c_3 adalah konstanta bebas.

Jika kita memilih k_1, k_2 dan k_3 sebagai konstanta bebas di dalam (3.17), maka

$$\begin{aligned} c_1 &= -\tfrac{17}{9} + \tfrac{1}{3}k_1 \\ c_2 &= k_2 \\ c_3 &= -\tfrac{1}{3}k_3 \end{aligned}$$

sehingga penyelesaian umum dari sistem (3.11) dapat kita tulis

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}k_1 + k_2e^t - \tfrac{1}{3}k_3e^{-3t} - \tfrac{17}{9} - \tfrac{14}{9}t - \tfrac{1}{6}t^2 \\ y &= k_1 + k_2e^t + k_3e^{-3t} - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

Berikut ini akan diberikan teorema yang merupakan syarat dari suatu sistem persamaan dan banyak konstanta yang ada di dalam suatu penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial linear.

Teorema 3.1:

Andaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien operator diferensial

$$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 &= f_1(t) \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= f_2(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

maka banyaknya konstanta bebas adalah sama dengan order dari

$$\Delta = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} \ .$$

Bukti :

Dalam membuktikan kita mempunyai sistem yang terkait yaitu

$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 &= 0 \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$. Karena konstanta dari penyelesaian bergantung kepada persamaan homogen maka kita dapat mencari bukti dengan sistem homogennya. Untuk membuktikan persamaan pertama dalam sistem homogen kita bentuk menjadi $x_1 = -\dfrac{L_{12}}{L_{11}}x_2$, kemudian subtitusikan ke dalam persamaan kedua sehingga diperoleh

$$L_{21}(-\frac{L_{12}}{L_{11}})x_2 + L_{22}x_2 = 0$$

kita kalikan dengan operator diferensial L_{11} sehingga

$$-L_{21}L_{12}x_2 + L_{11}L_{22}x_2 = 0$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})x_2 = 0 \quad . \tag{1}$$

Persamaan pertama kita bentuk menjadi $x_2 = -\frac{L_{11}}{L_{12}}x_1$ kemudian subtitusikan ke dalam persamaan kedua sehingga

$$L_{21}x_1 + L_{22}(-\frac{L_{11}}{L_{12}})x_1 = 0$$

kita kalikan dengan operator diferensial L_{12} sehingga

$$L_{21}L_{12}x_1 - L_{11}L_{22}x_2 = 0 \text{ atau}$$

$$-L_{21}L_{12}x_1 + L_{11}L_{22}x_2 = 0 \text{ atau}$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})x_1 = 0 . \tag{2}$$

Sistem dari (1) dan (2), yaitu

$$\begin{aligned}(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})x_1 &= 0\\(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})x_2 &= 0\end{aligned}.$$

Karena koefisien dari x_1 dan x_2 sama yaitu $L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}$ maka peenyelesaiannya sebanyak orde dari $L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}$. Kombinasi linear dari penyelesaian juga merupakan penyelesaian dan konstanta yang diperlukan harus sebanyak orde dari $L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}$.

Jadi konstanta yang diberikan untuk penyelesaian sistem persamaan sebanyak orde dari $\Delta = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}$. *Bukti selesai.*

Teorema 3.2:

Jika persamaan(3.18) di dalam teorema 3.1, yang mempunyai Δ tidak identik nol, maka sistem persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tunggal.

Bukti :

Andaikan sistem mempunyai penyelesaian tunggal. Sistem mempunyai penyelesaian tunggal jika matriks dari koefisien operator diferensial

$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ mempunyai invers.

Karena syarat dari matriks $\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ mempunyai invers jika $L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} \neq 0$

Hal ini berbeda dengan hipotesis bahwa $L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = 0$.

Jadi, jika $\Delta = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = 0$ maka sistem mempunyai banyak penyelesaian atau tidak mempunyai penyelesaian. *Bukti selesai.*

Contoh 3.5 :

Berikut ini akan diselesaikan soal dari contoh 3.1 no 1

Sistem persamaan berikut merupakan sistem persamaan diferensial dengan dua fungsi tak diketahui . Selesaikanlah persamaan ini.

$$\begin{aligned} (D+2)x + (D+2)y &= e^{-3t} \\ (D+3)x + (D+3)y &= e^{-2t} \end{aligned}.$$

Penyelesaian :

Sebelum kita mencoba mencari penyelesaian dari sistem persamaan di atas, kita menguji apakah sistem tersebut mempunyai penyelesaian. Dengan menggunakan teorema 3.2 .

$$L_{11} = (D+2),\ L_{12} = (D+2),\ L_{21} = (D+3),\ L_{22} = (D+3).$$

Determinan

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D+2 & D+2 \\ D+3 & D+3 \end{vmatrix} = (D+2)(D+3)-(D+3)(D+2) = 0\,.$$

Menurut teorema 3.2, jika determinan koefisien operator diferensial identik dengan nol maka sistem tersebut tidak mempunyai penyelesaian .

Contoh 3.6:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini

$$\begin{aligned} &y_1'' - 2y_2' + y_2 = 1 \\ &2y_1' + y_1 + y_2'' - 4y_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menulis sistem persamaan dalam bentuk operator diferensial.

$$\begin{aligned} &D^2 y_1 + (-2D+1)y_2 = 1 \\ &(2D+1)y_1 + (D^2-4)y_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Kemudian langkah selanjutnya menguji apakah sistem persamaan ini mempunyai penyelesaian atau tidak dengan cara mencari determinan dari koefisien operator diferensial

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D^2 & -2D+1 \\ 2D+1 & D^2-4 \end{vmatrix} &= (D^2)(D^2-4)-(2D+1)(-2D+1) \\ &= D^4 - 4D^2 + 4D^2 - 2D + 2D - 1 = D^4 - 1 \end{aligned} \qquad (3.21)$$

Karena hasil operasi determinan tidak identik dengan nol maka sistem persamaan mempunyai penyelesaian.

Untuk mencari penyelesaiannya dimulai dengan cara mengeliminasi y_2 pada sistem(3.20). Dengan mengalikan persamaan pertama dari (3.20) dengan (D^2-4) dan persamaan kedua dengan (-2D+1), maka diperoleh

$$\begin{aligned} &(D^2-4)(D^2)y_1 + (D^2-4)(-2D+1)y_2 = (D^2-4)(1) \\ &(-2D+1)(2D+1)y_1 + (-2D+1)(D^2-4)y_2 = (-2D+1)(0) \end{aligned}$$

Hasil pengurangan persamaan pertama dengan persamaan kedua adalah

$$(D^2-4)(D^2)y_1-(-2D+1)(2D+1)y_1=(D^2-4)(1)-(-2D+1)(0)$$
$$(D^4-4D^2+4D^2+2D-2D-1)y_1=-4$$

$$(D^4-1)y_1=-4 \qquad (3.22)$$

Persamaan nonhomogen $(D^4-1)y_1=-4$ mempunyai penyelesaian komplementer

$$y_{1_c}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

dan penyelesaian partikularnya adalah

$$y_{1_p}=4\,.$$

Jadi penyelesaian umum persamaan nonhomogen(3.22) adalah

$$y_1=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+4\,. \qquad (3.23)$$

Untuk mencari penyelesaian y_2 dapat dengan mengeliminasi y_1 pada (3.20) maka dengan mengalikan persamaan pertama dari(3.20) dengan $(2D+1)$ dan persamaan kedua dengan D^2 maka diperoleh

$$(2D+1)(D^2)y_1+(2D+1)(-2D+1)y_2=(2D+1)(1)$$
$$(D^2)(2D+1)y_1+\ (D^2)(D^2-4)y_2=D^2(0)$$

Hasil pengurangan persamaan pertama dengan persamaan kedua adalah

$$[(2D+1)(-2D+1)-(D^2)(D^2-4)]y_2=(2D+1)(1)-D^2(0)$$
$$(-4D+2D-2D+1-D^4+4D^2)y_2=1$$
$$(-D^4+1)y_2=1 \qquad \text{atau}$$
$$(D^4-1)y_2=-1.$$

Persamaan nonhomogen $(D^4-1)y_1=-1$ mempunyai penyelesaian komplementer

$$y_{2_c}=k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x$$

sedangkan penyelesaian partikularnya adalah

$$y_{2_p}=1\ .$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan nonhomogen $(D^4-1)y_1=-1$ adalah

$$y_2 = k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3\cos x + k_4\sin x + 1 \tag{3.24}$$

dari determinan(3.21) diperoleh jika persamaan berorde empat maka konstanta sebarang penyelesaian umum sistem linear sebanyak empat. Dari persamaan(3.23) dan(3.24) dapat ditentukan

$$y_1' = c_1e^x - c_2e^{-x} - c_3\sin x + c_4\cos x$$
$$y_1'' = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x \quad \text{dan}$$

$$y_2' = k_1e^x - k_2e^{-x} - k_3\sin x + k_4\cos x$$

kemudian subtitusi ke dalam persamaan pertama dari sistem(3.20) akan diperoleh

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_2' + y_2 = {} & c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x \\ & -2(k_1e^x - k_2e^{-x} - k_3\sin x + k_4\cos x) \\ & +k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3\cos x + k_4\sin x + 1 = 1 \end{aligned}$$

atau

$$(c_1-2k_1)e^x + (c_2+3k_2)e^{-x} + (-c_3-2k_4+k_3)\cos x + (-c_4+2k_3+k_4)\sin x + 1 = 1$$

atau

$$(c_1-2k_1)e^x + (c_2+3k_2)e^{-x} + (-c_3-2k_4+k_3)\cos x + (-c_4+2k_3+k_4)\sin x = 0$$

karena e^x dan e^{-x} tidak pernah nol, maka persamaan homogen tersebut akan terpenuhi jika

$$c_1 - 2k_1 = 0$$
$$c_2 + 3k_2 = 0$$
$$-c_3 - 2k_4 + k_3 = 0$$
$$-c_4 + 2k_3 + k_4 = 0$$

dengan memilih konstanta k sebagai konstanta bebas, maka

$$c_1 = 2k_1$$
$$c_2 = -3k_2$$
$$c_3 = -2k_4 + k_3$$
$$c_4 = 2k_3 + k_4$$

Penyelesaian umum sistem persamaan diferensial linear (3.19) adalah

$$y_1 = k_1e^x - 3k_2e^{-x} + (k_3 - 2k_4)\cos x + (2k_3 + k_4)\sin x + 4$$
$$y_2 = k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3\cos x + k_4\sin x + 1$$

Dalam metode eliminasi sebuah sistem persamaan diferensial linear dapat dilakukan secara sistematik yaitu dengan menggunakan metode dalam aljabar yaitu menggunakan aturan Cramer's. Persamaan (3.5) dan (3.8) berturut-turut yang berbentuk

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})x_1 = L_{22}f_1(t) - L_{12}f_2(t) \tag{3.5}$$
$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})x_2 = L_{11}f_2(t) - L_{21}f_1(t) \tag{3.8}$$

Kita lihat bentuk operator diferensial $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$ pada ruas kiri dapat ditulis dalam kerja determinan

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$$

dan ruas kanan dari persamaan (3.5) ditulis dalam determinan adalah

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} \\ f_2(t) & L_{22} \end{vmatrix} = L_{22}f_1(t) - L_{12}f_2(t)$$

dan ruas kanan dari persamaan (3.8) ditulis dalam determinan adalah

$$\begin{vmatrix} L_{11} & f_1(t) \\ L_{21} & f_2(t) \end{vmatrix} = L_{11}f_2(t) - L_{21}f_1(t) \ .$$

Sedemikian hingga persamaan (3.5),(3.8) dapat ditulis dalam bentuk determinan pseudo

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} \\ f_2(t) & L_{22} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & f_1(t) \\ L_{21} & f_2(t) \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

Persamaan (3.25) mengingatkan pada aturan Cramer's untuk penyelesaian dua persamaan linear di dalam dua variabel dan dengan cara ini akan lebih mudah mengingatnya. Jika sistem persamaan diferensial linear adalah homogen ($f(t) \equiv 0$ dan $f(t) \equiv 0$), maka ruas kanan dari sistem persamaan (3.5), (3.8) dan (3.25) adalah nol.

Pengembangan dari sistem dua persamaan diferensial linear dengan dua fungsi tak diketahui adalah sistem tiga persamaan diferensial linear dengan tiga fungsi tak diketahui. Sistem dari tiga persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan yang mempunyai tiga fungsi tak diketahui dalam bentuk operator diferensial adalah

$$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 &= f_1(t) \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3 &= f_2(t). \\ L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3 &= f_3(t) \end{aligned}$$

Untuk mencari mencari variabel tak bebas $x_1 = x_1(t)$ kita gunakan aturan Cramer's yang memenuhi persamaan linear tunggal

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} & L_{13} \\ f_2(t) & L_{22} & L_{23} \\ f_3(t) & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}.$$

Demikian pula untuk mencari variabel tak bebas $x_2 = x_2(t)$, harus memenuhi persamaan linear tunggal

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & f_1(t) & L_{13} \\ L_{21} & f_2(t) & L_{23} \\ L_{31} & f_3(t) & L_{33} \end{vmatrix}$$

dan Untuk $x_3 = x_3(t)$

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & f_1(t) \\ L_{21} & L_{22} & f_2(t) \\ L_{31} & L_{32} & f_3(t) \end{vmatrix}.$$

Dengan adanya aturan Cramer's ini akan mempermudah dalam mencari penyelesaian sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien operator diferensial.

Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear kedua pada contoh 3.7

Contoh 3.7:

Akan diselesaikan soal dari contoh 3.1.2, yaitu sistem persamaan

$$\begin{aligned} (-D^2+5D-7)x_2 + (D-1)x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + (D-2)x_2 \qquad - x_3 &= 0 \\ (4D-9)x_2 + (D-1)x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.26)$$

adalah sistem persamaan dengan tiga fungsi tak diketahui.

Penyelesaian :

Kita mencari determinan koefisien operator diferensial dari sistem persamaan(3.26), yaitu

$$\begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 1 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix} = 0+0+(D-1)(1)(4D-9)-0-0-(D-1)(1)(-D^2+5D-7)$$

$$\begin{aligned} &= 4D^2-9D-4D+9+D^3-5D^2+7D-D^2+5D-7 \\ &= D^3-2D^2-D+2 \\ &= (D-2)(D+1)(D-1). \end{aligned}$$

Jalan yang mudah untuk menyelesaikan sistem persamaan yaitu dengan menggunakan aturan Cramer's seperti yang telah dijelaskan di atas. Penggunaan aturan tersebut akan dijelaskan dengan mengerjakan contoh. Untuk mencari variabel tak bebas x_1 dengan aturan Cramer's adalah

$$\begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 1 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 0 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix}$$

$$(D-2)(D+1)(D-1)x_1 = 0$$

sehingga penyelesaian persamaan diferensial homogen adalah

$$x_1 = a_1e^{2x} + a_2e^{-x} + a_3e^{x} \quad . \tag{3.27}$$

Kemudian dicari fungsi x_2 dengan aturan Cramer's maka

$$\begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 1 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & D-1 \end{vmatrix}$$

$$(D-2)(D+1)(D-1)x_2 = 0$$

sehingga persamaan linear homogen di atas mempunyai penyelesaian yaitu

$$x_2 = b_1e^{2x} + b_2e^{-x} + b_3e^{x} \quad . \tag{3.28}$$

Kemudian dicari fungsi x_3 dengan aturan Cramer's maka

$$\begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 1 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} 0 & -D^2+5D-7 & D-1 \\ 1 & D-2 & -1 \\ 0 & 4D-9 & D-1 \end{vmatrix}$$

$$(D-2)(D+1)(D-!)x_3 = 0$$

sehingga penyelesaian persamaan diferensial homogen adalah

$$x_3 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x} \quad . \tag{3.29}$$

Subtitusi penyelesaian (3.27), (3.28) dan (3.29), ke dalam persamaan ke tiga dari (3.26) akan diperoleh

$$(4D-9)(b_1e^{2x} + b_2e^{-x} + b_3e^{x}) + (D-1)(c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}) = 0$$

$$4D(b_1e^{2x} + b_2e^{-x} + b_3e^{x}) - 9b_1e^{2x} - 9b_2e^{-x} - 9b_3e^{x}$$
$$+ D(c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}) - c_1e^{2x} - c_2e^{-x} - c_3e^{x} = 0$$

$$8b_1e^{2x} - 4b_2e^{-x} + 4b_3e^{x} - 9b_1e^{2x} - 9b_2e^{-x} - 9b_3e^{x}$$
$$+ 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x} + c_3e^{x} - c_1e^{2x} - c_2e^{-x} - c_3e^{x} = 0$$

$$(b_1 + c_1)e^{2x} + (-13b_2 - 2c_2)e^{-x} + (-5b_3)e^{x} = 0. \qquad (3.30)$$

Karena e^{2x}, e^{-x} dan e^{x} tidak pernah nol, maka persamaan (3.30) akan dipenuhi jika

$$b_1 + c_1 = 0$$
$$-13b_2 - 2c_2 = 0$$
$$-5b_3 = 0 \text{ atau } b_3 = 0$$

kita ambil konstanta c_1 dan c_2 sebagai konstanta bebas

$$b_1 = -c_1$$
$$b_2 = -\tfrac{2}{13}c_2$$
$$b_3 = 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1e^{2x} + a_2e^{-x} + a_3e^{x} \\ x_2 &= -c_1e^{2x} - \frac{2}{13}c_2e^{-x} \\ x_3 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}. \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Dari hasil tersebut, kemudian dicari lagi konstanta agar terdapat tiga konstanta bebas dengan mensubtitusikan (3.31) ke dalam persamaan kedua dari persamaan (3.26), maka diperoleh

$$a_1e^{2x} + a_2e^{-x} + a_3e^{x} + (D-2)(-c_1e^{2x} - \frac{2}{13}c_2e^{-x}) - (c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}) = 0$$

$$a_1e^{2x} + a_2e^{-x} + a_3e^{x} - 2c_1e^{2x} + \frac{2}{13}c_2e^{-x} + 2c_1e^{2x} + \frac{4}{13}c_2e^{-x} - c_1e^{2x} - c_2e^{-x} - c_3e^{x} = 0$$

$$(a_1 - 2c_1 + 2c_1 - c_1)e^{2x} + (a_2 + \frac{2}{13}c_2 + \frac{4}{13}c_2 - c_2)e^{-x} + (a_3 - c_3)e^{x} = 0$$

$$(a_1 - c_1)e^{2x} + (a_2 - \frac{7}{13}c_2)e^{-x} + (a_3 - c_3)e^{x} = 0. \qquad (3.32)$$

Karena e^{2x}, e^{-x} dan e^{x} tidak pernah nol, maka persamaan (3.32) akan dipenuhi jika

$$a_1 - c_1 = 0 \quad \text{atau} \quad a_1 = c_1$$
$$a_2 - \frac{7}{13}c_2 = 0 \quad \text{atau} \quad a_2 = \frac{7}{13}c_2$$
$$a_3 - c_3 = 0 \quad \text{atau} \quad a_3 = c_3$$

Sehingga penyelesaian sistem persamaan (3.26) adalah

$$x_1 = c_1e^{2x} + \frac{7}{13}c_2e^{-x} + c_3e^{x}$$
$$x_2 = -c_1e^{2x} - \frac{2}{13}c_2e^{-x}$$
$$x_3 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}$$

3. 3. Metode Triangular

Dalam subbab sebelumnya telah dibahas tentang eliminasi untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear, tetapi eliminasi ini harus mencari berapa banyaknya konstanta bebas yang ada di dalam penyelesaian sistem persamaan. Untuk metode operator diferensial ini akan ditunjukkan tehnik yang selalu menghasilkan banyaknya konstanta sebarang yang benar. Berikut ini akan diberikan definisi tentang bentuk triangular.

Definisi 3.3:

Sebuah sistem persamaan diferensial dalam bentuk triangular jika masing-masing persamaan berturutan di dalam sistem mempunyai paling sedikit satu fungsi yang tak diketahui dari pada persamaan sebelumnya. Bentuk umum sistem dalam orde dua adalah

$$L_{11}x_1 = f_1(t)$$
$$L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = f_2(t)$$

dimana L_{11}, L_{21}, L_{22} adalah polinom operator diferensial.

Contoh 3.8:

Sistem berikut ini adalah sistem persamaan diferensial linear dalam bentuk triangular

$$(2D+3)x_1 = 0$$
$$(D+2)x_1 + D^2 x_2 = 0$$

Untuk membawa suatu sistem bentuk operator diferensial ke dalam bentuk triangular kita menggunakan definisi ekuivalen. Bentuk ekuivalen tersebut dapat dibentuk dengan perlakuan serangkaian operasi. Operasi tersebut ada tiga macam, yaitu

Pertama, kita dapat menukar tempat dari dua persamaan dari sistem .

Contoh 3.9:

Sistem berikut ini

a) $L_{11}x + L_{12}y = 3$
$L_{21}x + L_{22}y = 0$

Dengan menukar baris pertama ke baris kedua dan sebaliknya pada sistem (a), maka terbentuk sistem (b)

b). $L_{21}x + L_{22}y = 0$
$L_{11}x + L_{12}y = 3$

Jadi kedua sistem tersebut ekuivalen.

Kedua, operasi terdiri dari perkalian sederhana dalam satu persamaan dari sistem dengan konstanta tidak nol.

Ketiga, operasi dikerjakan dalam dua sisi dari satu persamaan dari sistem, misalkan baris ke-i dengan polinom operator $M(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$ dan jumlahkan hasilnya ke persamaan lain dari sistem, sebut baris ke-j. Di dalam sistem baru tersebut, hanya persamaan ke-j yang telah diganti. Untuk **M**(D) di peroleh dari pembuat nol pada kolom tertentu misalkan kolom-k, sehingga **M**(D)L_{ik}(D) + L_{jk}(D) = 0.

Untuk lebih jelasnya kita lihat sistem berikut

$$L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 = f_1(t) \qquad (3.33.a)$$

$$L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 = f_2(t) \qquad (3.33.b)$$

operasikan kedua ruas dari persamaan pertama dengan M(D) dan jumlahkan hasil ke dalam persamaan kedua, maka diperoleh

$$L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 = f_1(t) \qquad (3.34.a)$$

$$[L_{21}(D) + M(D)L_{11}(D)]x_1 + [L_{22}(D) + M(D)L_{12}(D)]x_2 = f_2(t) + M(D)f_1(t) \qquad (3.34.b)$$

untuk menunjukkan bahwa kedua sistem persamaan tersebut adalah ekuivalen kita lihat teorema berikut ini.

Dengan menggunakan definisi ekuivalen pada subbab sebelumnya, maka dapat dijelaskan teorema berikut ini untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan menggunakan sistem triangular.

Teorema 3.3:

Andaikan **M**(D) adalah polinom operator diferensial, maka sistem (3.33.a),(3.33.b) dan sistem (3.34.a),(3.34.b) adalah ekuivalen.

Bukti :

Menurut definisi, dua sistem persamaan diferensial ekuivalen adalah mempunyai penyelesaian yang sama, untuk menunjukkan tinggal ditunjukkan bahwa penyelesaian sistem persamaan pertama pasti juga memenuhi sistem persamaan kedua, atau sebaliknya.

Andaikan x_1 = x_1(t) , x_2 = x_2(t) adalah pasangan yang memenuhi persamaan pertama dari sistem pertama, maka x_1 = x_1(t) , x_2 = x_2(t) juga pasangan yang memenuhi persamaan kedua dari sistem pertama, dan sebaliknya.

Operator diferensial L_{11} , L_{21} , L_{12} , L_{22} ,dan $\mathbf{M}(D)$ adalah operator diferensial dengan koefisien konstan. Kita asumsikan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ kontinu untuk turunan semua order. Dengan menggunakan prinsip dasar, bahwa jika $x_1(t)$, $x_2(t)$ memenuhi persamaan (3.33.a) dan (3.33.b) maka $x_1(t)$, $x_2(t)$ juga memenuhi persamaan (3.34.a), karena persamaan (3.34.a) adalah sama dengan persamaan (3.33.a), dan persamaan (3.34.b) diperoleh dari persamaan (3.33.a),(3.33.b) dengan mengalikan $M(D)$ dengan persamaan (3.33.a) kemudian dijumlahkan dengan (3.33.b), maka $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ juga memenuhi (3.34.b). Sebaliknya jika penyelesaian (3.34.a) dan (3.34.b) didapatkan, maka penyelesaian (3.33.a) juga didapatkan karena sama dengan (3.33.a) dan (3.33.b) didapatkan dari (3.34.a),(3.34.b) dengan mengalikan (3.33.a) dengan M(D), kemudian digunakan untuk mengurangi (3.34.b), Jadi penyelesaian sistem persamaan kedua memenuhi sistem pertama. Jadi kedua sistem tersebut adalah ekuivalen. *Bukti selesai.*

Dengan adanya teorema di atas, maka dalam mencari penyelesaian sistem persamaan dapat dicari dengan membentuk sistem dalam bentuk triangular. Langkah-langkah dalam membentuk tiangular akan diberikan berikut ini :

1. Memilih sebuah $L_{ij}(D)$ dari order terkecil dan gunakan untuk mereduksi order dari semua operator diferensial yang lain di dalam kolom itu.
2. Operasi pada persamaan yang lain dan jumlahkan, menghasilkan persamaan lain.
3. Persamaan yang sedang dioperasikan harus dapat dimasukkan ke dalam sistem baru yang ekuivalen di dalam bentuk tak dirubah.
4. Ulangi proses sampai bentuk triangular .

Berikut ini diberikan definisi dari penyelesaian sistem persamaan diferensial linear.

Definisi 3.4:

Jika sistem berbentuk triangular, yaitu

$$L_{11}x_1 = f_1(t)$$
$$L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = f_2(t)$$

maka fungsi tak diketahui dapat ditentukan satu demi satu dari sistem persamaan ini. Sistem kemudian sudah tertentu dengan fungsi x tak diketahui, kecuali untuk sebarang konstanta dari pengintegralan(penggabungan), ditentukan dengan cara khusus.

Definisi 3.5:

Jika sistem persamaan pertama di dalam sistem triangular mengandung fungsi tak diketahui lebih dari satu atau jika beberapa persamaan yang lain mengandung lebih dari satu fungsi tak diketahui yang melebihi fungsi dalam persamaan sebelumnya, maka beberapa bilangan tak diketahui ditetapkan sebarang, dan ketetapan salah satunya dinyatakan dalam bentuk fungsi tak diketahui sebarang, sistem adalah inderteminate(tak tentu).

Definisi 3.6:

Jika mungkin terjadi persamaan pertama atau beberapa persamaan berikutnya dalam sistem triangular yang mengandung bukan fungsi tak diketahui , maka sistem ini dikatakan sistem tak bebas. Dari sistem ini terjadi dua kemungkinan, yaitu

1. persamaan pertama bebas dari fungsi tak diketahui adalah identitas dan dapat diabaikan, maka sistem konsisten dan dapat ditentukan yang lain atau tak dapat ditentukan.

2. persamaan bebas dari fungsi tak diketahui yang bukan identitas, maka sistem ini tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 3.10:

Tentukan bagaimana memilih fungsi h supaya dapat mengikuti sistem yang konsisten, dan tentukan penyelesaian umumnya ?

$$(D^2-1)x-(D^2-D)y=h \qquad (3.35.a)$$
$$(D^2+D)x-D^2y=0 \qquad (3.35.b)$$

Penyelesaian:

Langkah pertama kita akan mengeliminasi fungsi y, dengan definisi di atas maka untuk mengeliminasi y dengan mengurangi baris pertama dengan baris kedua, hasilnya untuk mengganti baris kedua, maka akan diperoleh

$$(D^2-1)x-(D^2-D)y=h$$
$$(-1-D)x+Dy=h$$

Dari kedua persamaan dijumlahkan baris pertama dengan baris kedua, maka akan diperoleh

$$(D^2+D)x-D^2y=0$$
$$(-1-D)x+Dy=h$$

dari kedua persamaan di atas, kalikan baris kedua dengan operator diferensial D, kemudian gunakan untuk mengurangi baris pertama, maka akan diperoleh

$$(0)x+(0)y=Dh \qquad (3.35.a')$$
$$-(D+1)x+Dy=h \qquad (3.35.b')$$

Kemudian persamaan (3.35.a′) terdiri selain y atau x, sistem (3.35.a), (3.35.b) adalah bebas. Persamaan (3.35.a′) identitas hanya jika $Dh \equiv 0$, sedemikian hingga sistem (3.35.a), (3.35.b) adalah konsisten jika dan hanya jika $h(t) = \mathrm{k}$ .Maka hanya persamaan (3.35.b′) sisanya yang memenuhi sistem. Sedemikian hingga persamaan terdiri dari dua fungsi yang tak diketahui, satu dari mereka dapat dipilih sebarang , maka

$$x(t) = f(t), \quad \text{dimana } f(t) \text{ sebarang} .$$

Maka kita mendapatkan untuk y, persamaan

$$Dy = k + (D+1)f$$

jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y(t) = kt + f(t) + \int^{t} f(t_1)dt_1 + A$$

dimana A adalah konstanta sebarang.

Contoh 3.11:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan metode Triangular

$$-(D+2)x_1 + (D^2 - 4)x_2 = 4t \qquad (3.36.a)$$
$$(D+3)x_1 + (D+7)x_2 = 0 \qquad (3.36.b)$$

Penyelesaian :

Dalam menyelesaikan sistem persamaan dengan metode triangular sistem tersebut harus kita bentuk ke dalam bentuk triangular dengan cara sebagai berikut. Jumlahkan persamaan kedua kepada persamaan pertama, maka akan diperoleh sistem yang berbentuk

$$x_1 + (D^2 + D + 3)x_2 = 4t \qquad (3.37.a)$$
$$(D+3)x_1 + (D+7)x_2 = 0 \qquad (3.37.b)$$

Selanjutnya kita lihat persamaan pertama dioperasikan dengan (D+3), didapatkan

$$(D+3)x_1 + (D+3)(D^2 + D + 3)x_2 = 4 + 12t$$

persamaan ini kita gunakan untuk mengurangi persamaan kedua dari sistem, diperoleh sistem persamaan yaitu

$$x_1 + (D^2 + D + 3)x_2 = 4t \qquad (3.38.a)$$
$$\left[(D+7) - (D+3)(D^2 + D + 3)\right]x_2 = -4 - 12t \qquad (3.38.b)$$

persamaan kedua yang terlibat hanya satu fungsi yang tidak diketahui yaitu x_2 , dapat ditulis sebagai

$$\left[(D+7)-(D+3)(D^2+D+3)\right]x_2 = -4-12t$$
$$\left[(D+7)-(D^3+D^2+3D+3D^2+3D+9)\right]x_2 = -4-12t$$
$$-(D^3+4D^2+5D+2)x_2 = -(4+12t)$$
$$(D+2)(D+1)^2 x_2 = 4+12t$$

Dari persamaan di atas dapat dicari penyelesaian dari fungsi x_2. Dengan cara yang sudah dibahas pada bab sebelumnya maka persamaan nonhomogen ini mempunyai penyelesaian komplementernya adalah

$$x_{2_c} = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} \qquad (3.39)$$

dan penyelesaian partikularnya adalah $x_{2_p} = 6t-13$. Sehingga penyelesaian umum x_2 adalah

$$x_2 = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} + 6t - 13.$$

Subtitusi ke dalam persamaan pertama akan menghasilkan

$$x_1 + (D^2+D+3)(c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} + 6t - 13) = 4t$$
$$x_1 = -(D^2+D+3)(c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} + 6t - 13) + 4t$$
$$= -[4c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} - 2c_3e^{-t} + c_3te^{-t} + 0 + 0 - 2c_1e^{-2t} - c_2e^{-t} + c_3e^{-t} - c_3te^{-t} - 6 + 0$$
$$+ 3c_1e^{-2t} + 3c_2e^{-t} + 3c_3te^{-t} + 18t + 39] + 4t$$
$$= -\left[5c_1e^{-2t} + 3c_2e^{-t} - c_3e^{-t} + 3c_3te^{-t} + 18t + 33\right] + 4t$$
$$= -5c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-t} + c_3e^{-t} - 3c_3te^{-t} - 18t - 33 + 4t$$

$$x_1 = -5c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-t} + c_3(1-3t)e^{-t} - 14t - 33 \qquad (3.40)$$

Jadi (3.39) dan (3.40) adalah bentuk penyelesaian umum dari sistem persamaan (3.36).

Contoh 3.12:

Temukan penyelesaian umum dari sistem yang terdiri dari tiga fungsi tak diketahui

$$\begin{aligned}&(D^2-3D)x+(2D-1)y=0\\&(D+1)x-Dy=e^{\frac{1}{2}t}\end{aligned} \qquad (3.41)$$

Penyelesaian :

Koefisien dari y di dalam persamaan pertama adalah operator dengan order terendah. Oleh karena itu kita akan mengeliminasi fungsi y dengan mengoperasikan persamaan kedua dengan 2, kemudian hasilnya digunakan untuk menjumlahkan persamaan pertama maka diperoleh

$$\begin{aligned}&(D^2-D+2)x-y=2e^{\frac{1}{2}t}\\&(D+1)x-Dy=e^{\frac{1}{2}t}\end{aligned}$$

Dengan mengalikan persamaan pertama dengan operator diferensial D,maka hasilnya

$(-D^3+D^2-2D)x+Dy=-2De^{\frac{1}{2}t}$ dan hasilnya ini digunakan untuk mengurangi persamaan kedua, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}&(D^2-D+2)x-y=2e^{\frac{1}{2}t}\\&(-D^3+D^2-D+1)x=-2De^{\frac{1}{2}t}+2e^{\frac{1}{2}t}\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}&(D^2-D+2)x-y=2e^{\frac{1}{2}t}\\&(-D^3+D^2-D+1)x=e^{\frac{1}{2}t}\end{aligned}$$

Bentuk di atas merupakan bentuk triangular dan sistem determinate, maka sistem tersebut diselesaikan dengan mencari fungsi tak diketahui x. Persamaan kedua dapat diselesaikan persamaan umumnya adalah

$$(-D^3+D^2-D+1)x=e^{\frac{1}{2}t} \qquad (3.42.a)$$

$$(D-1)(-D^2-1)x=e^{\frac{1}{2}t} \qquad (3.42.b)$$

Kita lihat persamaan(3.42.b), kemudian persamaan diferensial linear nonhomogen tersebut mempunyai penyelesaian komplementer, yaitu

$$x_c=c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t$$

dan mempunyai penyelesaian

$$x_p = \frac{8}{11} e^{\frac{1}{2}t}.$$

Jadi penyelesaian untuk x adalah $x = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{8}{11} e^{\frac{1}{2}t}$.

Untuk mencari fungsi y dengan mensubtitusikan x ke dalam persamaan pertama (3.42,a) dalam sistem , sehingga

$$\begin{aligned}
y &= (D^2 - D + 2)x - 2e^{\frac{1}{2}t} \\
&= (D^2 - D + 2)(c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \tfrac{8}{11} e^{\frac{1}{2}t}) - 2e^{\frac{1}{2}t} \\
&= c_1 e^t - c_2 \cos t - c_3 \sin t + \tfrac{8}{44} e^{\frac{1}{2}t} \\
&\qquad - (c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t + \tfrac{8}{22} e^{\frac{1}{2}t}) \\
&\qquad\qquad + 2c_1 e^t + 2c_2 \cos t + 2c_3 \sin t + \tfrac{16}{11} e^{\frac{1}{2}t} - 2e^{\frac{1}{2}t} \\
&= 2c_1 e^t + (c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + c_3)\sin t + \tfrac{72}{44} e^{\frac{1}{2}t} - 2e^{\frac{1}{2}t} \\
&= (c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + c_3)\sin t + 2c_1 e^t - \tfrac{16}{44} e^{\frac{1}{2}t} \\
&= (c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + c_3)\sin t + (2c_1 - \tfrac{16}{44}) e^{\frac{1}{2}t} v
\end{aligned}$$

jadi penyelesaian umumnya adalah

$$\begin{aligned}
x &= c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \tfrac{8}{11} e^{\frac{1}{2}t} \\
y &= (c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + c_3)\sin t + (2c_1 - \tfrac{16}{44}) e^{\frac{1}{2}t}.
\end{aligned}$$

3.4 Sistem Persamaan Diferensial Linear Homogen

Sebuah sistem yang merupakan reduksi dari bentuk dasar, andaikan sistem tersebut mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}
L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 &= f_1(t) \\
L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 &= f_2(t)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ketika $f_1(t)$, $f_2(t)$ semua sama dengan nol, maka sistem akan disebut homogen sedangkan sebaliknya sistem akan disebut nonhomogen. Kita selanjutnya akan membahas tentang sistem homogen dengan kasus-kasus yang mungkin terjadi pada sistem tersebut. Kita mencari penyelesaian partikular dari sistem yang digunakan untuk membangun sistem persamaan. Kita juga telah membahas pada bab sebelumya tentang penyelesaian dari persamaan diferensial orde kedua dengan penyelesaian $x = e^{\lambda t}$, kita gunakan penyelesaian itu yaitu dengan fungsi berbentuk $e^{\lambda t}$, untuk λ adalah konstanta.

Sistem persamaan homogen dari sistem (3.43) adalah

$$\begin{aligned} L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 &= 0 \\ L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Karena sistem yang mempunyai dua fungsi tak diketahui, maka sistem tersebut akan mempunyai penyelesaian yang terdiri dari dua fungsi memenuhi sistem. Andaikan penyelesaian dari sistem persamaan(3.44), mempunyai bentuk

$$x_1 = ae^{\lambda t}, \qquad x_2 = be^{\lambda t} \tag{3.45}$$

dimana a, b adalah konstanta. Subtitusikan (3.45) ke dalam sistem(3.44) sehingga diperoleh sistem berbentuk

$$\begin{aligned} L_{11}(D)ae^{\lambda t} + L_{12}(D)be^{\lambda t} &= 0 \\ L_{21}(D)ae^{\lambda t} + L_{22}(D)be^{\lambda t} &= 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dalam pembahasan kita hanya akan membahas tentang sistem persamaan berorde dua, jadi kita dapat mengandaikan bahwa operator diferensial L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} polinom operator diferensial berorde dua, sehingga persamaan(3.46) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} (k_2D^2 + k_1D + k_0)ae^{\lambda t} + (l_2D^2 + l_1D + l_0)be^{\lambda t} &= 0 \\ (m_2D^2 + m_1D + m_0)ae^{\lambda t} + (n_2D^2 + n_1D + n_0)be^{\lambda t} &= 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

atau

$$\begin{aligned} (k_2\lambda^2 + k_1\lambda + k_0)ae^{\lambda t} + (l_2\lambda^2 + l_1\lambda + l_0)be^{\lambda t} &= 0 \\ (m_2\lambda^2 + m_1\lambda + m_0)ae^{\lambda t} + (n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0)be^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}&\left[(k_2\lambda^2+k_1\lambda+k_0)a+(l_2\lambda^2+l_1\lambda+l_0)b\right]e^{\lambda t}=0\\&\left[(m_2\lambda^2+m_1\lambda+m_0)a+(n_2\lambda^2+n_1\lambda+n_0)b\right]e^{\lambda t}=0\end{aligned}.$$

Karena $e^{\lambda t}$ tidak pernah sama dengan nol, maka sistem terpenuhi untuk semua nilai λ pembuat nol. Ini berarti sistem di atas dapat diselesaikan dengan mencari

$$\begin{aligned}&(k_2\lambda^2+k_1\lambda+k_0)a+(l_2\lambda^2+l_1\lambda+l_0)b=0\\&(m_2\lambda^2+m_1\lambda+m_0)a+(n_2\lambda^2+n_1\lambda+n_0)b=0\end{aligned}. \tag{3.48}$$

Sistem ini ada untuk pesamaan linear homogen *a, b* , penyelesaian lain sistem mempunyai satu penyelesaian nontrivial $a = 0$, $b = 0$ sehingga menghasilkan tepat bilamana determinan dari koefisien adalah nol, yaitu

$$\begin{vmatrix}k_2\lambda^2+k_1\lambda+k_0 & l_2\lambda^2+l_1\lambda+l_0\\ m_2\lambda^2+m_1\lambda+m_0 & n_2\lambda^2+n_1\lambda+n_0\end{vmatrix}=0. \tag{3.49}$$

Bentuk persamaan di atas dapat disebut *persamaan karakteristik* dari sistem persamaan (3.43) dan akar-akarnya disebut sebagai *akar-akar karakteristik.* Persamaan karakteristik dari sistem akan mempunyai beberapa kemungkinan yaitu :

1. real dan berbeda.
2. real dan berulang.
3. kompleks.

Kasus I

Akar-akar real dan berbeda.

Andaikan dua akar dari persamaan (3.49) adalah λ_1, λ_2 merupakan real dan berbeda. Hubungan dari akar λ_1, kita dapat menemukan himpunan dari nilai-nilai a_1, b_1(tidak semua nol) yang memenuhi (3.48) sedemikian hingga dua

$$x_{1_1} \equiv a_1 e^{\lambda_1 t}, x_{2_1} \equiv b_1 e^{\lambda_1 t}$$

adalah penyelesaian dari persamaan (3.43). Dengan cara yang sama, untuk tiap akar λ_2 memberikan penyelesaian.

Dua rangkap penyelesaian bebas linear dan yang cocok adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2 &= c_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 b_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{3.50}$$

memberikan penyelesaian umum sistem persamaan (3.43). Untuk memeriksa bebas linear, hanya dengan menunjukkan bahwa konstanta-konstanta c_1, c_2 dapat kita memilih supaya x_1, x_2 di dalam(3.50) direduksi kepada identik nol hanya jika $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Jika x_1, x_2 boleh direduksi kepada nol, sedemikian hingga karena mereka bebas linear dari fungsi-fungsi $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$c_1 a_1 = 0, \quad c_2 a_2 = 0, \quad c_1 b_1 = 0, \quad c_2 b_2 = 0$$

Jika $c_1 \neq 0$, maka $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, yang mana adalah kebalikan dari pada jalan memilih sebarang, sebab itu c_1 harus sama dengan nol. Dengan cara yang sama untuk $c_2 = 0$. Sedemikian hingga keduanya adalah bebas linear.

Kasus II

Akar-akar real berulang

Dalam kasus kedua ini adalah dimana akar-akar dari persamaan karakteristik adalah real dan berulang. Andaikan akar-akar λ_1, λ_2 adalah sama, maka $\lambda_1 = \lambda_2$. Kita sekarang menunjukkan bahwa penyelesaian dapat ditemukan . Untuk mencari hampir sama dengan mencari penyelesaian dalam persamaan linear, maka terdapat kombinasi linear dari $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$. Hal ini seperti pada kasus dari satu persamaan diferensial linear orde dua.

Contoh 3.13:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini

$$
\begin{aligned}
&-x'' - 5x + 4y' + y = 0 \\
&-x' + x + y' - y = 0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan kita mengubah ke dalam bentuk operator diferensial yaitu

$$
\begin{aligned}
&(-D^2 - 5)x + (4D + 1)y = 0 \\
&(-D + 1)x + (D - 1)y = 0
\end{aligned}
\qquad (3.51)
$$

Sistem persamaan di atas mempunyai persamaan karakteristik yaitu

$$\begin{vmatrix} -\lambda^2 - 5 & 4\lambda + 1 \\ -\lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Kita selesaikan bentuk determinant tersebut sehingga persamaan karakteristik tersebut mempunyai bentuk

$$
\begin{aligned}
&(-\lambda^2 - 5)(\lambda - 1) - (-\lambda + 1)(4\lambda + 1) = 0 \\
&(-\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 5 - (-4\lambda^2 + 4\lambda - \lambda + 1) = 0 . \\
&-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0
\end{aligned}
$$

Persamaan homogen tersebut mempunyai akar-akar 2, 2, 1. Subtitusikan penyelesaian $x = ae^{2t}, y = be^{2t}$ ke dalam persamaan akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
&-4ae^{2t} - 5ae^{2t} + 4.2be^{2t} + be^{2t} = 0 \\
&-2ae^{2t} + ae^{2t} + 2be^{2t} - be^{2t} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-9ae^{2t} + 9be^{2t} = 0 \\
&-ae^{2t} + be^{2t} = 0
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
&-9a + 9b = 0 \\
&-a + b = 0
\end{aligned}
\qquad (3.52)
$$

Kita mempunyai penyelesaian $a = k, b = k$, dimana k adalah sebarang dengan k = 1 , kita mempunyai penyelesaian

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = e^{2t}$$

tetapi tidak dapat diperoleh dua penyelesaian bebas linear dari bentuk ae^{2t}, be^{2t}.

Untuk memperoleh dua penyelesaian, kita bentuk

$$x = e^{2t}(a_1 t + a_2), \qquad y = e^{2t}(b_1 t + b_2) \tag{3.53}$$

subtitusi ke dalam sistem persamaan awal maka diperoleh

$$-2e^{2t}(2a_1 t + 2a_1 + 2a_2) - 5e^{2t}(a_1 t + a_2) + 4e^{2t}(2b_1 t + b_1 + 2b_2) + e^{2t}(b_1 t + b_2) = 0$$
$$-e^{2t}(2a_1 t + a_1 + 2a_2) + e^{2t}(a_1 t + a_2) + e^{2t}(2b_1 t + b_1 + 2b_2) - e^{2t}(b_1 t + b_2) = 0$$

$$e^{2t}(-9a_1 t - 4a_1 - 9a_2) + e^{2t}(9b_1 t + 4b_1 + 9b_2) = 0$$
$$e^{2t}(-a_1 t - a_1 - a_2) + e^{2t}(b_1 t + b_1 + b_2) = 0$$

Karena e^{2t} tidak pernah nol, maka sistem tersebut dapat diselesaikan dengan menyelesaikan

$$(-9a_1 t - 4a_1 - 9a_2) + (9b_1 t + 4b_1 + 9b_2) = 0$$
$$(-a_1 t - a_1 - a_2) + (b_1 t + b_1 + b_2) = 0$$

$$(-9a_1 + 9b_1)t - 4a_1 - 9a_2 + 4b_1 + 9b_2 = 0$$
$$(-a_1 + b_1)t - a_1 - a_2 + b_1 + b_2 = 0$$

Dari sistem dapat ditemukan empat persamaan

$$-9a_1 + 9b_1 = 0, \qquad \qquad -a_1 + b_1 = 0 \tag{3.54.a}$$
atau
$$-4a_1 - 9a_2 + 4b_1 + 9b_2 = 0, \qquad -a_1 - a_2 + b_1 + b_2 = 0 \tag{3.54.b}$$

persamaan (3.54.a) sama dengan bentuk (3.52) jadi penyelesaiannya adalah $a_1 = k_1, b_1 = k_1$, dimana k_1 adalah konstanta sebarang. Persamaan (3.54.b) dipenuhi oleh $a_2 = k_2, b_2 = k_2$, dimana k_2 adalah konstanta sebarang. Kita temukan $k_1 = 1$, dan $k_2 = 0$, maka penyelesaian (3.53) adalah

$$x_2 = e^{2t}t, \qquad y_2 = e^{2t}t$$

dan untuk akar λ = 1, subtitusikan $x_3 = a_3e^t, y_3 = b_3e^t$ ke dalam persamaan sehingga diperoleh

$$-a_3e^t - 5a_3e^t + 4b_3e^t + b_3e^t = 0$$
$$-a_3e^t + a_3{}^t + b_3e^t - b_3e^t = 0$$

Akan diperoleh persamaan $-6a_3e^t + 5b_3e^t = 0$. Dengan demikian yang memenuhi persamaan adalah $a_3 = k_3, b_3 = \frac{6}{5}k_3$, dengan mengambil k_3 = 1, kita memperoleh penyelesaian

$$x_3 = e^t, \quad y_3 = \tfrac{6}{5}e^t.$$

Karena bentuk penyelesaian umumnya mempunyai bentuk

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$
$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

dengan demikian penyelesaian umumnya adalah

$$x = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^t$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3\tfrac{6}{5}e^t$$

atau

$$x = (c_1 + c_2t)e^{2t} + c_3e^t$$
$$y = (c_1 + c_2t)e^{2t} + c_3\tfrac{6}{5}e^t.$$

Kasus III

Akar-akar kompleks

Dalam kasus terakhir ini jika akar-akar dari persamaan karakteristik adalah berupa akar-akar kompleks. Jika akar λ_1, λ_2 dari persamaan karakteristik (3.43) adalah bilangan kompleks sekawan $a + bi$ dan $a - bi$, maka kita memperoleh dua penyelesaian berbeda

$$x_1 = A_1^* e^{(a+bi)t} \quad \text{dan} \quad x_1 = A_2^* e^{(a-bi)t}$$
$$x_2 = B_1^* e^{(a+bi)t} \qquad\quad x_2 = B_2^* e^{(a-bi)t} \tag{3.55}$$

dari bentuk (3.44). Bagaimanapun, penyelesaian(3.55) adalah penyelesaian kompleks, maka bagaimana kita mengubah ke dalam penyelesaian real, di dalam kasus kita menganggap dua penyelesaian(3.55) dengan memulai sebagai berikut: Pertama kita perlihatkan konstanta kompleks A_1^* dan B_1^* di dalam penyelesaian di dalam bentuk $A_1^* = A_1 + iA_2$ dan $B_1^* = B_1 + iB_2$, dimana A_1, A_2, B_1, B_2 adalah real . Kita lalu gunakan rumus **Euler** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dan perhatikan penyelesaian pertama (3.55) di dalam bentuk

$$x_1 = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$$
$$x_2 = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$$

atau bisa ditulis sebagai

$$x_1 = e^{at}\left[(A_1\cos bt - A_2\sin bt) + i(A_2\cos bt + A_1\sin bt)\right]$$
$$x_2 = e^{at}\left[(B_1\cos bt - B_2\sin bt) + i(B_2\cos bt + B_1\sin bt)\right] \tag{3.56}$$

Dapat ditunjukkan pasangan $[f_1(t) + if_2(t), g_1(t) + ig_2(t)]$ dari fungsi kompleks adalah penyelesaian dari sistem (3.43). Jika dan hanya jika kedua pasangan $[f_1(t), g_1(t)]$ mereka terdiri dari bagian real dan pasangan $[f_2(t), g_2(t)]$ terdiri dari bagian imajiner dari penyelesaian (3.43). Jadi kedua pasangan tersebut mempunyai bagian real

$$x_1 = e^{at}(A_1\cos bt - A_2\sin bt)$$
$$x_2 = e^{at}(B_1\cos bt - B_2\sin bt) \tag{3.57}$$

dan bagian imajinernya adalah

$$x_1 = e^{at}(A_2\cos bt - A_1\sin bt)$$
$$x_2 = e^{at}(B_2\cos bt - B_1\sin bt) \tag{3.58}$$

Penyelesaian (3.58) dari sistem (3.43) juga penyelesaian dari (3.43). Selanjutnya, penyelesaian dari (3.57) dan (3.58) bebas linear. Kita memeriksa dengan menunjukkan determinan dari penyelesaian, dan kita menemukan

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \begin{vmatrix} e^{at}(A_1\cos bt - A_2\sin bt) & e^{at}(A_2\cos bt + A_1\sin bt) \\ e^{at}(B_1\cos bt - B_2\sin bt) & e^{at}(B_2\cos bt - A_2\sin bt) \end{vmatrix} \\ &= e^{2at}(A_1B_2 - A_2B_1).\end{aligned} \tag{3.59}$$

Sekarang konstanta B_1^* adalah kelipatan non real dari konstanta A_1^*. Jika kita asumsikan $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, maka mengikuti B_1^* adalah kelipatan real dari A_1^*, yang mana kontradiksi dengan hasil yang ditetapkan di dalam kalimat sebelumnya. Jadi $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ dan demikian determinan Δ(t) di dalam (3.59) adalah tidak sama dengan nol. Jadi dengan teorema kebebasan linear penyelesaian (3.57) dan (3.58) tentu saja bebas linear. Sedemikian hingga kombinasi linear dari dua penyelesaian terdiri dari real, dalam kasus ini penyelesaian umum dari sistem(3.43) sehingga penyelesaiannya tidak membutuhkan kedua penyelesaian (3.55).

Dari yang diperoleh (3.57) dan (3.58) maka dapat dibentuk penyelesaian umum dari kedua penyelesaian tersebut. Syarat bahwa kedua penyelesaian tersebut bebas linear telah ditunjukkan dengan (3.59), maka penyelesaian umumnya adalah

$$\begin{aligned} x &= e^{at}\left[c_1(A_1\cos bt - A_2\sin bt) + c_2(A_1\cos bt + A_2\sin bt)\right] \\ y &= e^{at}\left[c_1(B_1\cos bt - B_2\sin bt) + c_2(B_1\cos bt + B_2\sin bt)\right] \end{aligned}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang.

Contoh 3.14:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini

$$\begin{aligned} (D^2-4)x_1 - (2D-1)x_2 &= 0 \\ (2D+1)x_1 + D^2x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan sistem tersebut kita asumsikan bahwa λ merupakan akar dari sistem tersebut sehingga salah satu penyelesaian adalah $x = Ae^{\lambda t} y = Be^{\lambda t}$ dan dengan mensubtitusikan penyelesaian ke dalam sistem(3.60) akan diperoleh

$$\begin{aligned} &(D^2 - 4)Ae^{\lambda t} - (2D-1)Be^{\lambda t} = 0 \\ &(2D+1)Ae^{\lambda t} + D^2 Be^{\lambda t} = 0 \end{aligned} \qquad (3.61)$$

$$\begin{aligned} &\left[(D^2 - 4)A - (2D-1)B\right]e^{\lambda t} = 0 \\ &\left[(2D+1)A + D^2 B\right]e^{\lambda t} = 0 \end{aligned}$$

Karena $e^{\lambda t}$ tidak pernah nol, maka sistem dapat diselesaikan dengan mencari λ pembuat nol. Atau sistem dapat diselesaikan dengan menyelesaikan sistem

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 4)A - (2\lambda - 1)B = 0 \\ &(2\lambda + 1)A + \lambda^2 B = 0 \end{aligned} \qquad (3.62)$$

Sistem persamaan mempunyai penyelesaian non trivial untuk *A*, *B* bilamana

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 4 & -(2\lambda - 1) \\ 2\lambda + 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.63)$$

Persamaan ini adalah persamaan karakteristik dari sistem linear(3.60). Persamaan karakteristik dalam λ mempunyai orde empat, yaitu

$$\begin{aligned} &\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda - 1 = 0 \\ &\lambda^4 - 1 = 0 \end{aligned}$$

atau

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 .$$

Persamaan ini mempunyai akar-akar $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -1$ Dengan akar-akar ini kita akan memperoleh empat penyelesaian yang bebas linear dengan bentuk dasar $Ae^{\lambda t}$, $Be^{\lambda t}$. Kita mengambil untuk λ = i, kemudian subtitusikan ke dalam(3.62) akan diperoleh

$$(i^2-4)A-(2i-1)=0$$
$$(2i+1)A+i^2B=0$$

$$(-1-4)A-(2i-1)B=0$$
$$(2i+1)A-B=0$$

Dengan sistem tersebut dapat diperoleh nilai untuk A dan B yaitu

$$B=2i+1$$
$$A=1$$

Penyelesaian dasar sistem dengan $A=1$, $B=2i+1$, akan diperoleh penyelesaian bernilai kompleks

$$x_{1_c}=e^{it}$$
$$x_{2_c}=(2i+1)e^{it}$$

dari sistem(3.60).

Dengan menggunakan rumus **Euler's** , penyelesaian tersebut menjadi bentuk

$$x_{1_c}=(\cos t+i\sin t)$$
$$x_{2_c}=(2i+1)(\cos t+i\sin t)$$

atau

$$x_{1_c}=(\cos t+i\sin t)$$
$$x_{2_c}=-2\sin t+\cos t+i(2\cos t+\sin t)$$

Penyelesaian tersebut terdiri dari bilangan real dan imaginer dari penyelesaian(3.60). Kita memperoleh dua pasang penyelesaian real yaitu

$$\begin{aligned}x_{1_c}&=\cos t\\ x_{2_c}&=-2\sin t+\cos t\end{aligned}\qquad(3.64)$$

dan
$$\begin{aligned}x_{1_c}&=\sin t\\ x_{2_c}&=2\cos t+\sin t\end{aligned}\qquad(3.65)$$

Sekarang kita lihat untuk akar λ = 1 dan λ = -1. Kedua akar ini adalah real dan berbeda sehingga diperoleh penyelesaian

$$\begin{aligned} x_{1_c} &= e^t \\ x_{2_c} &= -3e^t \end{aligned} \tag{3.66}$$

dan
$$\begin{aligned} x_{1_c} &= e^{-t} \\ x_{2_c} &= e^{-t} \end{aligned}. \tag{3.67}$$

Dari empat penyelesaian (3.64), (3.65), (3.66), dan (3.67) dan mereka saling bebas linear maka dapat kita tulis bahwa penyelesaian umum dari sistem (3.60) adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} \\ x_2 &= c_1(-2\sin t + \cos t) + c_2(2\cos t + \sin t) - 3c_3 e^t + c_4 e^{-t} \end{aligned}$$

atau

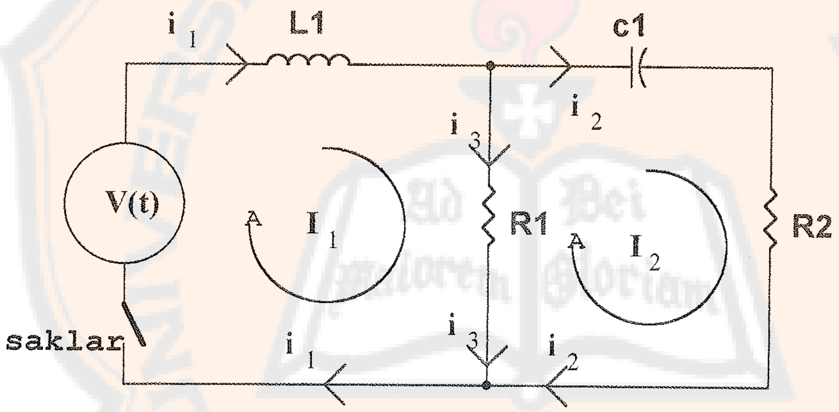
$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} \\ x_2 &= (-2c_1 + c_2)\sin t + (c_1 + 2c_2)\cos t - 3c_3 e^t + c_4 e^{-t} \end{aligned}.$$

BAB IV

PENERAPAN

4.1 Rangkaian listrik

Dalam skripsi ini yang menjadi permasalahan adalah penyelesaian sistem persamaan linear simultan dalam bentuk operator diferensial. Serta penerapan sistem persamaan diferensial linear dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam rangkaian listrik seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.1

Dimana V(t) adalah fungsi yang disebut voltase

L adalah konstanta yang disebut induktan

R adalah konstanta yang disebut tahanan ohm

C adalah konstanta yang disebut kapasitor

Dalam rangkaian tertutup atau loop terdapat arus yang mengalir, arus ini akan menghasilkan perbedaan tegangan pada tiap-tiap resistor, kapasitor dan induktor. Beberapa hubungan antara arus dan tegangan V(t) yang melewati pada masing-masing komponen adalah sebagai berikut:

1. Pada resistor, hubungannya diberikan oleh rumus

$$E_R = Ri(t) \tag{4.1}$$

Dimana E_R adalah beda potensial pada tahanan dan i adalah arus yang melewati tahanan tersebut.

2. Pada kapasitor, hubungan diberikan oleh rumus

$$E_c = C^{-1}q .$$

Dimana E_c adalah beda potensial pada kapasitor dan q adalah muatan kapasitor. Karena $i(t) = q'$, maka

$$E_c = C^{-1}\int_{t_0}^{t} i(t)dt . \qquad (4.2)$$

3. Pada induktor, hubungan diberikan oleh rumus

$$E_L = Li'(t) . \qquad (4.3)$$

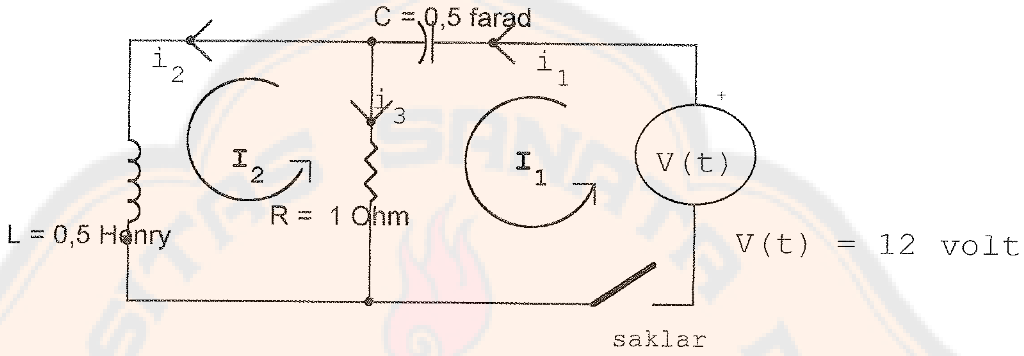
Dimana E_L adalah beda potensial pada kapasitor dan I adalah arus yang melewati induktor.

Sebuah rangkaian yang terdiri dari tahanan, induktan yang disusun seperti pada gambar, akan berlaku hukum kirchoff's kedua yang berbunyi bahwa *jumlah aljabar tegangan turun dalam sebuah loop tertutup adalah nol*. Hubungan antara i_1 , i_2, i_3 seperti pada gambar adalah *jumlah antara* i_1, i_2, i_3 *adalah sama dengan nol*, atau dapat ditulis sebagai $i_1 = i_2 + i_3$. Pada gambar terdapat 2 loop yaitu loop kiri yang dinotasikan sebagai loop I_1 dan loop kanan yang dinotasikan sebagai loop I_2 . Kita lihat loop I_1 ada beberapa arus yang melewati rangkaian pada loop I_1 , yaitu i_1 adalah arus yang melewati L_1 dan i_3 adalah arus yang melewati tahanan R_1. Jadi pada loop kiri ada dua arus yaitu i dan i_1 .

Sekarang lihat loop kanan yang merupakan rangkaian tertutup ada dua arus yang mengelilingi loop I_2 yaitu i_2 yang melewati kapasitor C_1 dan melewati tahanan tahanan R_2. Sedangkan arus yang melewati pada R_1 adalah berlawanan dengan arus yang melewati R_1 pada loop kiri dan besarnya sama, jadi arus yang melewati R_1 adalah $-i_3$.

Contoh 4.1 :

Sebuah rangkaian listrik yang dapat digambarkan oleh gambar berikut ini



Gambar 4.2

dari gambar di atas jika saklar ditutup maka terdapat arus yang mengalir dalam rangkaian. Pada saat saklar ditutup yaitu pada t = 0, maka akan mengalir arus pada rangkaian. bentuklah model matematikanya dan selesaikan untuk mencari arus I_1 dan I_2 .

Penyelesaian :

Pertama kita tentukan model matematikanya. Dengan hukum Kirchoff's kita menentukan bahwa $i_1 = I_1$, $i_2 = I_2$ dan $i_3 = I_1 - I_2$. Kita lihat bahwa Loop sebelah kanan arus I_1 melewati kapasitor dan arus ($I_1 - I_2$) melewati induktan, maka dari Loop sebelah kanan menghasilkan model matematika

$$C^{-1}\int^{t} I_1(t) + R(I_1(t) - I_2(t)) = 12$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{0,5}\int^{t} I_1(t) + I_1(t) - I_2(t) = 12$$

$$\Leftrightarrow 2\int^{t} I_1(t) + I_1(t) - I_2(t) = 12$$

persamaan ini kita diferensialkan, maka

$$\Leftrightarrow 2I_1(t) + I_1'(t) - I_2'(t) = 0\,.$$

Dari Loop sebelah kiri arus I_2 melewati resistor dan arus yang melewati tahanan adalah (I_2 – I_1), karena berlawanan dengan arus Loop kanan, maka diperoleh model matematika

$$R(I_2(t) - I_1(t)) + LI_2'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -I_1(t) + I_2(t) + 0{,}5\,I_2'(t) = 0$$

kalikan persamaan dengan dua , maka diperoleh

$$\Leftrightarrow -2\,I_1(t) + 2I_2(t) + I_2'(t) = 0\,.$$

Dengan menuliskan hasil dari kedua Loop yaitu

$$2I_1(t) + I_1'(t) - I_2'(t) = 0 \qquad (4.4)$$

$$-2\,I_1(t) + 2I_2(t) + I_2'(t) = 0\,. \qquad (4.4)$$

Bentuk di atas adalah sistem dari dua persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dengan dua fungsi tak diketahui. Sistem tersebut diselesaikan dengan metode yang telah di bahas pada bab sebelumnya yaitu menggunakan operator diferensial. Untuk menyelesaikan sistem tersebut kita mengubah dalam bentuk operator diferensial dengan variabel terikatnya t, yaitu

$$\begin{aligned} &(D+2)I_1(t) - DI_2(t) = 0 \\ &-2I_1(t) + (D+2)I_2(t) = 0 \end{aligned} \qquad (4.5)$$

persamaan kedua variabel dari $I_1(t)$ merupakan order terendah, kita gunakan untuk mereduksi persamaan lain. Persamaan kedua dikalikan dengan $\frac{1}{2}D$, maka diperoleh $-DI_1(t) + (\frac{1}{2}D^2 + D)I_2(t) = 0$ kemudian jumlahkan dengan persamaan pertama, maka diperoleh

$$\begin{aligned} &2I_1(t) - (\tfrac{1}{2}D^2 + 2)I_2(t) = 0 \\ &-2I_1(t) + (D+2)I_2(t) = 0 \end{aligned}$$

Jumlahkan kedua persamaan maka diperoleh sistem persamaan bentuk triangular yaitu

$$2I_1(t) - (\tfrac{1}{2}D^2 + 2)I_2(t) = 0$$
$$0I_1(t) + (-\tfrac{1}{2}D^2 + D + 2)I_2(t) = 0$$

Persamaan kedua adalah persamaan linear homogen, yang mempunyai persamaan karakteristik $(\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda + 2)I_2 = 0$. Persamaan karakteristik tersebut mempuyai akar-akar karakteristik yaitu

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\tfrac{1}{2}\sqrt{12}.$$

Sehingga penyelesaian persamaan homogen adalah

$$I_2(t) = e^{-t}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t).$$

Kita subtitusikan hasil ini pada persamaan pertama pada bentuk triangular, maka diperoleh

$$2I_1(t) - (\tfrac{1}{2}D^2 + 2)(e^{-x}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t)) = 0$$
$$2I_1(t) = (\tfrac{1}{2}D^2 + 2)(e^{-x}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t))$$
$$I_1(t) = (\tfrac{1}{4}D^2 + 1)(e^{-x}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t))$$

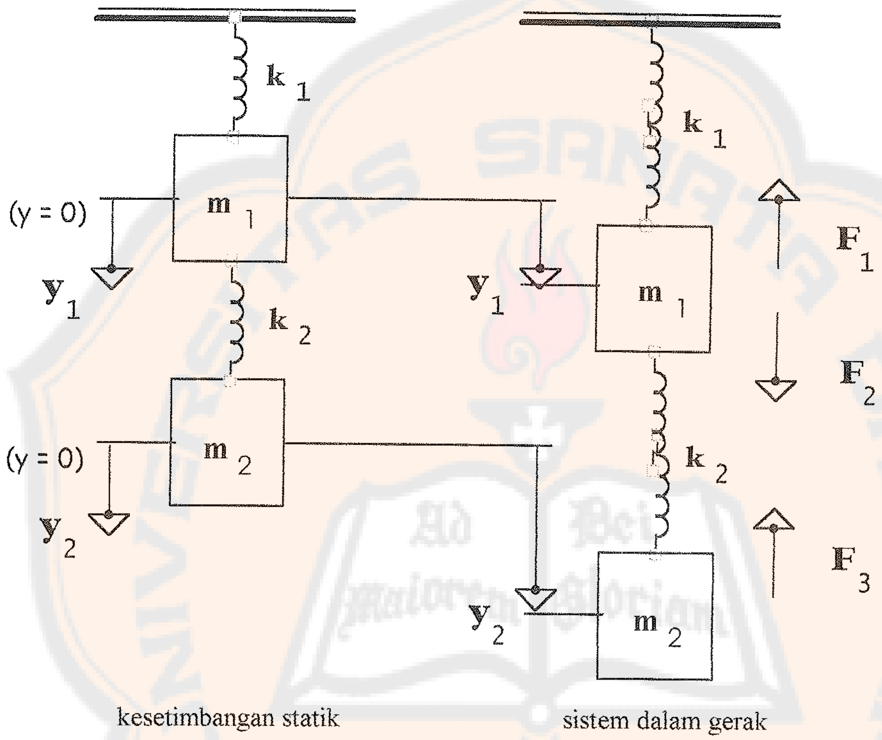
Jadi arus yang mengalir pada kedua Loop adalah

$$I_2(t) = e^{-t}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t)$$

$$I_1(t) = (\tfrac{1}{4}D^2 + 1)(e^{-x}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t + \sin\tfrac{1}{2}\sqrt{12}t)).$$

4.2 Mekanika

Dalam bidang mekanika yang dalam penyelesaiannya menggunakan sistem persamaan diferensial linear simultan adalah gaya pegas pada dua buah benda. Pegas yang bersifat melawan tegangan dan regangan. Pegas dan benda tersebut kita susun seperti gambar(4.3) berikut.



Gambar 4.3

dimana k_1 : merupakan konstanta pegas 1

k_2 :merupakan konstanta pegas 2

m_1 : massa 1

m_2 : massa 2

Kita dapat mengabaikan massa pegas, karena massa pegas dibandingkan massa benda jauh lebih kecil. Kalau benda tersebut kita tarik sampai jarak tertentu kemudian kita lepaskan , maka benda tersebut mengalami suatu gerakan yang geraknya arah vertikal sempurna.

Sebelum kita menganalisis gaya-gaya untuk tiap-tiap benda selama geraknya kita perhatikan hukum yang berlaku untuk susunan benda tersebut.

Menurut Hukum Newton kedua pada benda adalah

$m.a = F$, dimana a adalah percepatan dari gerak benda tersebut, sehingga

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} = F . \tag{4.6}$$

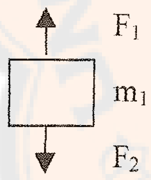
Menurut hukum Hooke, *tiap-tiap pegas mendesak atau merenggang gaya yang tersimpan kembali yang arahnya berlawanan dengan arah pemanjangan pegas tersebut, sebanding dengan jumlah pemanjangan* s , atau

$$F = k.s \tag{4.7}$$

dimana s menyatakan pergeseran benda.

Dalam susunan gambar(4.3) kita menganggap bahwa nilai positif ditunjukkan oleh arah ke atas dan gaya ke atas begitu pula untuk nilai negatif ditunjukkan oleh arah ke bawah dan gaya ke bawah.

1).Kita perhatikan gaya yang bekerja pada m_1 pada saat t ≥ 0.



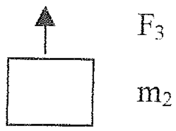
Menurut Hukum Hooke

$$F_1 = -k_1 y_1 \tag{4.8}$$

$$F_2 = k_2(y_2 - y_1) \tag{4.9}$$

dimana $y_2 - y_1$ adalah selisih pergeseran kedua benda dari kesetimbangannya atau perubahan panjang pegas kedua.

2). Perhatikan gaya yang bekerja pada pada m_2 pada saat t ≥ 0.



Menurut hukun Hooke pada benda kedua adalah

$$F_3 = -k_2(y_2 - y_1). \tag{4.9}$$

Dari (4.7), (4.8)dan (4.9), maka dapat dicari nilai untuk y_1 dan y_2 dengan membentuk tiga persamaan tersebut menjadi sistem persamaan diferensial. Sistem tersebut kita buat dengan menjadikan satu gaya pada masing-masing benda yaitu,

$$m_1\, a = F_1 + F_2$$

$$m_2\, a = F_3$$

dengan menguraikan sistem tersebut maka kita memperoleh sistem dengan bentuk

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k_2(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dalam bentuk tersebut kita tinggal menyelesaikan sistem persamaan dengan metode operator diferensial. Untuk lebih jelasnya kita mencoba menyelesaikan contoh berikut ini.

Contoh 4.2 :

Dua buah benda yaitu m_1 dan m_2 yang masing–masing mempunyai berat 2 Kg dan 1 Kg, kedua benda tersebut disusun dengan menggantungkan pada papan. Antara benda dengan papan dan antara kedua benda tersebut kita hubungkan dengan pegas yaitu k_1 dan k_2 , sedangkan $k_1 = 4$ dan $k_2 = 2$. Susunan benda dan pegas tersebut dapat dilihat pada gambar 4.3.

Temukan model matematikanya dan tentukan penyelesaian umumnya?

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan masalah tersebut kita lihat beban pertama yaitu m_1 maka dapat diperoleh hubungan

$$m_1 \,.\, a = F_1 + F_2$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_1 + F_2$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k_1\, y_1 + k_2\,(y_2 - y_1\,).$$

Dengan memasukkan konstanta pada persamaan diperoleh persamaan

$$2\,\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\,4\,.\; y_1 + 2\,(y_2 - y_1\,)$$

$$2y_1'' = -4y_1 + 2y_2 - 2y_1$$

$$y_1'' + 3y_1 - y_2 = 0\,.$$

Langkah kedua kita lihat beban kedua yaitu m_2 diperoleh hubungan

$$m_2 \,.\, a = F_3$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\,k_2\,(y_2 - y_1\,)$$

dengan memasukkan konstanta pada persamaan maka diperoleh

$$y_2'' = -2(y_2 - y_1)$$

$$y_2'' - 2y_1 + 2y_2 = 0\,.$$

Maka diperoleh sebuah sistem persamaan dari kedua massa tersebut yaitu

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1 - y_2 &= 0 \\ -2y_1 + y_2'' + 2y_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Kemudian kita selesaikan sistem persamaan tersebut dengan metode operator diferensial, dengan mengubah ke dalam bentuk operator diferensial

$$\begin{aligned} (D^2 + 3)y_1 - y_2 &= 0 \\ -2y_1 + (D^2 + 2)y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dengan metode eliminasi maka akan didapatkan sistem persamaan untuk $y_1(t)$ dan $y_2(t)$

$$\begin{aligned} (D^2+1)(D^2+4)y_1 &= 0 \\ (D^2+1)(D^2+4)y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Persamaan karakteristik $(\lambda^2+1)(\lambda^2+4)=0$, yang mempunyai akar-akar $i,-i,2i,-2i$. Penyelesaian umum dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1\cos t + a_2\sin t + b_1\cos 2t + b_2\sin 2t \\ y_2(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t + d_1\cos 2t + c_2\sin 2t \end{aligned} \tag{4.14}$$

Karena determinan operator diferensial adalah order empat, penyelesaian dalam empat konstanta sebarang. Dengan kita mensubtitusikan (4.14) ke dalam persamaan pertama (4.11), akan diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' + 3y_1 - y_2 \\ &= (-a_1\cos t - a_2\sin t - 4b_1\cos 2t - 4b_2\sin 2t) \\ &\qquad + 3(a_1\cos t + a_2\sin t + 4b_1\cos 2t + 4b_2\sin 2t) \\ &\qquad\qquad - (c_1\cos t + c_2\sin t + 4d_1\cos 2t + 4d_2\sin 2t) \end{aligned}$$

Jadi

$$0 = (2a_1 - c_1)\cos t + (2a_2 - c_2)\sin t + (b_1 - d_1)\cos 2t + (-b_2 - d_2)\sin 2t$$

Karena $\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t$ adalah bebas linear, maka dapat disimpulkan bahwa

$$c_1 = 2a_1, \quad c_2 = 2a_2, \quad d_1 = -b_1, \quad \text{dan } d_2 = -b_2$$

Jadi penyelesaian umum dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1\cos t + a_2\sin t + b_1\cos 2t + b_2\sin 2t \\ y_2(t) &= 2a_1\cos t + 2a_2\sin t + -b_1\cos 2t - b_2\sin 2t \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3 Masalah Campuran

Di dalam penerapan ketiga kita akan membahas tentang masalah campuran yang menggunakan sistem persamaan diferensial untuk mencari jumlah isi dalam suatu wadah. Pembahasan masalah campuran ini berkaitan dengan banyaknya campuran S dalam sebuah wadah, campuran tersebut berupa cairan yang mengalir ke dalam dan keluar dari wadah.

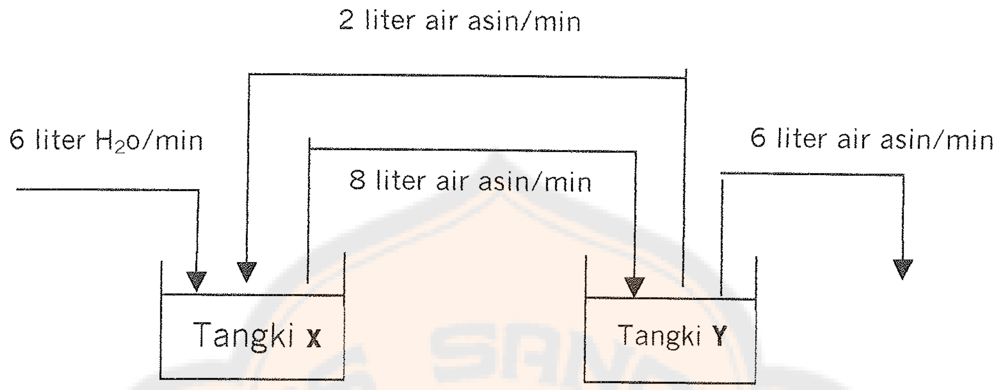
Di sini kita akan membahas tentang masalah yang mengenai dua wadah. Kita menganggap campuran S dalam dua wadah yang terhubung, sedemikian hingga alirannya dibuat ke dalam dan ke luar dari wadah tersebut. Campuran S dalam salah satu wadah berguna untuk menjaga keseragaman gerakan dan kita mencari masalah untuk menetapkan banyaknya isi S yang ada dalam salah satu tempat dalam waktu t, dimana $t \geq 0$.

Pembahasan persoalan kita mulai dengan mengambil bahwa x menunjukkan banyaknya S yang ada dalam tangki **X** dalam waktu t, dan y menunjukkan jumlah dari S yang ada dalam tangki **Y** dalam waktu t. Kita menggunakan dasar persamaan dalam kasus satu bilangan yang tak diketahui x dan y. Sekarang bagaimanapun, masukan dan keluaran, istilah dalam salah satu hasil persamaan bergantung hanya bagaimana dua tempat terhubungkan.

Untuk lebih jelas akan dikerjakan soal berikut.

Contoh 4.3 :

Gambar berikut adalah bagaimana menyusun dua tangki dan aliran-aliranya.



Gambar 4.4

Air asin yang ada dalam larutan 2 Kg garam, mulai waktu t = 0.

1) Air bersih mengalir dalam tangki **X** dengan rata-rata kecepatan 6 liter/ menit.
2) Air asin mengalir dari tangki **X** ke dalam tangki **Y** dengan rata-rata kecepatan 8 liter/menit.
3) Air asin dipompa kembali dari tangki **Y** ke dalam tangki **X** dengan rata-rata kecepatan 2 liter/menit, dan
4) Aliran air asin ke luar dari tangki **Y** dan ke luar dari sistem dengan kecepatan rata-rata 6 liter/menit.

Campuran dalam masing-masing tangki berguna untuk menjaga keseragaman dalam gerakan. Berapa banyak garam dalam masing–masing tangki dalam waktu $t \geq 0$?

Perumusan:

Andaikan x = jumlah garam dalam tangki **X** dalam waktu t, dan y = jumlah garam dalam tangki **Y** dalam waktu t, masing-masing ukuran dalam Kg. Masing-masing tangki ini pada awalnya berisi 100 liter cairan, dan aliran cairan keduanya ke dalam dan ke luar dari masing-masing tangki rata-rata yang sama yaitu 8 liter/menit, maka masing-masing tangki selalu berisi 100 liter cairan. Oleh karena itu kosentrasi dari garam dalam waktu t dalam tangki **X** adalah $\frac{x}{100}$ (Kg/liter) dan yang ada dalam tangki **Y** adalah $\frac{y}{100}$ (Kg/liter).

Hanya garam yang masuk dalam tangki **X** dalam larutan air asin yang dipompa dari tangki **Y** kembali ke tangki **X**. Oleh karena masuknya larutan air asin 2 liter/menit berisi $\frac{y}{100}$ (Kg/liter), rata-rata garam yang masuk ke dalam tangki **X** adalah $\frac{2y}{100}$(Kg/liter). Dengan cara yang sama hanya garam yang tertinggal(sisa) dalam tangki **X** dalam larutan air asin yang mengalir dari tangki **X** ke dalam tangki **Y** . Oleh karena itu sisa-sisa dalam kecepatan rata-rata 8 liter/menit dan berisi $\frac{x}{100}$ (Kg/liter), rata-rata kecepatan dalam garam yang tersisa dalam tangki **X** adalah $\frac{8x}{100}$. Kita membuat dalam bentuk persamaan diferensial,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{8x}{100} \qquad (4.16)$$

Untuk jumlah garam dalam tangki **X** dalam waktu t. Dengan jalan yang sama, kita mendapatkan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8x}{100} - \frac{8y}{100} \qquad (4.17)$$

untuk jumlah garam dalam tangki **Y** dalam waktu t. Oleh karena itu pada awalnya ada 5 Kg garam dalam tangki **X** dan 2 Kg garam dalam tangki **Y**, kita mempunyai kondisi awal.

$$x(0) = 5,\ y(0) = 2 \qquad (4.18)$$

Oleh sebab itu kita mempunyai sistem linear yang terdiri dari persamaan(4.16) dan (4.17) dan kondisi awal(4.18)

Penyelesaian :

Kita gunakan notasi operator dan menulis persamaan diferensial (4.16) dan (4.17) ke dalam rumus

$$\begin{aligned} &\left(D+\frac{8}{100}\right)x-\frac{2}{100}y=0, \\ &-\frac{8}{100}x+\left(D+\frac{8}{100}\right)y=0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Kita aplikasikan operator $\left(D+\frac{8}{100}\right)$ ke dalam persamaan pertama dari (4.19), kalikan persamaan kedua dengan $\frac{2}{100}$, dan jumlahkan dan diperoleh

$$\left[\left(D+\frac{8}{100}\right)\left(D+\frac{8}{100}\right)-\frac{16}{(100)^2}\right]x=0$$

yang mana direduksi dengan cepat

$$\left[D^2+\frac{16}{100}D+\frac{48}{(100)^2}\right]x=0 \tag{4.20}$$

kita sekarang menyelesaikan persamaan diferensial homogen (4.20) untuk x. persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2+\frac{16}{100}\lambda+\frac{48}{(100)^2}=0$$

atau

$$\left(\lambda+\frac{4}{100}\right)\left(\lambda+\frac{12}{100}\right)=0$$

yang mana kedua akarnya real yaitu $\frac{(-1)}{25}$ dan $\frac{-3}{25}$.

Jadi penyelesaian untuk persamaan (4.20) adalah

$$x(t) = c_1 e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t} \tag{4.21}$$

Sekarang aplikasikan penyelesaian tersebut pada sistem(4.19) sebuah relasi yang tidak rumit dengan yang tak diketahui y tetapi bukan turunan Dy. Sistem (4.19) adalah begitu sederhana dan istimewa maka persamaan pertama dari sistem ini adalah berupa relasi. Pemecahan dari y, kita akan memperoleh

$$y(t) = 50Dx + 4x \tag{4.22}$$

dari(4.21), kita menemukan

$$\mathrm{D}x(t) = -\frac{c_1}{25} e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} - \frac{3c_2}{25} e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t}$$

subtitusikan ke(4.22), kita memperoleh

$$\mathrm{y(t)} = 2c_1 e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} - 2c_2 e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t}$$

jadi pemecahan umum dari sistem (4.19) adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{x(t)} &= c_1 e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t} \\ \mathrm{y(t)} &= 2c_1 e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} - 2c_2 e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Kita sekarang aplikasikan kondisi awal(4.18). kita pernah menghasilkan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 5 \\ 2c_1 - 2c_2 &= 2 \end{aligned}$$

dari yang kita temukan

$c_1 = 3$, $c_2 = 2$

Jadi pemecahan sistem linear (4.19), yang memenuhi kondisi awal(4.18) adalah

$$\mathrm{x(t)} = 3e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} + 2e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t}$$

$$\mathrm{y(t)} = 6e^{-\left(\frac{1}{25}\right)t} - 4e^{-\left(\frac{3}{25}\right)t}$$

Ini akan memberikan ekspresi jumlah dari garam x dalam tangki **X** dan jumlah y didalam tangki **Y** berturut-turut dalam ukuran Kg, sebarang waktu $t(\min) > 0$. Jadi untuk contoh setelah 25 menit, kita mendapatkan

$$x(25) = 3e^{-1} + 2e^{-3} \approx 1{,}203(\mathrm{Kg})$$
$$y(25) = 6e^{-1} - 4e^{-3} \approx 2{,}008(\mathrm{Kg})$$

Catatan : $t \to \infty$, keduanya mendekati nol ($x(t)$, $y(t) \to 0$). Ini adalah sesuai dengan kenyataan bahwa semua garam (satu-satunya air murni) aliran ke dalam dan ke luar sistem.

BAB V
PENUTUP

Dalam kehidupan sehari-hari persamaan diferensial banyak sekali dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu masalah yang sudah dimodelkan ke dalam bentuk matematika.

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan dalam bentuk operator diferensial mempunyai bentuk:

$$L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 = f_1(t)$$
$$L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 = f_2(t)$$

dimana $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ adalah polinom operator diferensial dengan koefisien konstan. Untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan dengan metode operator diferensial yang dapat digunakan dua teknik yaitu eliminasi dan triangular, yang keduanya menggunakan sistem dalam bentuk operator diferensial. Dalam menggunakan metode eliminasi perlu diingat bahwa konstanta yang digunakan sebanyak orde dari bentuk $\Delta = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$. Dengan metode triangular tidak perlu mempermasalahkan seberapa banyak konstanta yang harus digunakan, karena konstantanya sudah pasti.

Sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan disebut homogen jika $f_1(t) \equiv 0$ dan $f_2(t) \equiv 0$, sedangkan jika $f_1(t) \neq 0$ dan $f_2(t) \neq 0$ disebut nonhomogen.

Dalam mencari sistem homogen dan nonhomogen kita gunakan metode tersebut, kemudian dicari penyelesaian komplementernya dan untuk nonhomogen dicari penyelesaian komplementer dan partikularnya.

Dalam mengunakan metode eliminasi, langkah pertama kita eliminasi salah satu variabel bebasnya sehingga terdapat persamaan linear dengan satu variabel, kemudian persamaan tersebut mempunyai penyelesaian dengan konstanta sebarang. Langkah kedua variabel yang lain kita eliminasi dari sistem sehingga juga terdapat persamaan lain yang mempunyai penyelesaian lain dengan konstanta yang berbeda dengan penyelesaian pertama. Langkah ketiga kedua beberapa penyelesaian tersebut kita buat dalam satu konstanta bebas dengan mensubtitusikan kedua penyelesaian tersebut ke dalam salah satu persamaan, sehingga dapat di cari salah satu konstanta menjadi konstanta bebas dari konstanta yang lain.

Langkah pertama metode Triangular adalah mengubah sistem menjadi bentuk Triangular, dengan teorema ekuivalen. Langkah kedua adalah persamaan dengan satu variabel bebas dicari penyelesaiannya. Langkah ketiga penyelesaian dari langkah kedua disubtitusikan ke dalam persamaan lain, sehingga ditemukan penyelesaian lain.

Untuk sistem dari dua persamaan diferensial linear simultan homogen orde dua dapat dicari persamaan karakteristiknya yaitu

$\begin{vmatrix} k_2\lambda^2 + k_1\lambda + k_0 & l_2\lambda^2 + l_1\lambda + l_0 \\ m_2\lambda^2 + m_1\lambda + m_0 & n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0 \end{vmatrix} = 0$. Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik λ_1, λ_2 ini dapat dibentuk penyelesaiannya. Akar-akar persamaan karakteristik mempunyai tiga kemungkinan yaitu real berbeda, real berulang, dan kompleks.

Untuk Sistem persamaan diferensial simultan orde lebih dari tiga akan lebih mudah digunakan metode lain, karena dengan metode eliminasi akan terasa rumit dan panjang prosesnya dalam mencari penyelesaiannya.

Sistem persamaan diferensial linear simultan dengan koefisien konstan dengan operator diferensial mempunyai penerapan dalam kehidupan sehari-hari dalam bidang rangkaian listrik, mekanika, dan masalah campuran.

DAFTAR PUSTAKA

Bernard, J.R. & Jerry, D.S. (1986). *Ordinary Differential Equations with Applications*. California: Brooks Publishing Company.

Edwards, C.H.Jr. (1993). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. New Jersey: Prentice-Hall International. Inc.

Finizio, N. & Ladas, G. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. terj Dra. Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.

Golomb, M. & Merill, S. (1965). *Elements of Ordinary Differential Equation secon edition*. New york: Mc. Graw-Hill Book Company.

Kreyszig, E. (1993). *Matematika Tehnik Lanjutan*. Jakarta: PT. Gramedia.

Miller, R.K. (1991). *Introduction to Differential*. New Jersey: Prentice-Hall.

Rabenstein, A.L. (1992). *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*. Fort Worth: Saunders Collega Publishing.

Roy, H. (1995). *Kamus Matematika*. Jakarta: Erlangga.

Sheply, L.R. (1974). *Introduction to Ordinary Differential Equation*. New York: John Wiley & Sons.

Kaplan, W. (1960). *Ordinary Differential Equation*. U.S.A: Addison-Wesley Publishing Company. Inc.