SPIRAL EMAS

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

ALPHIUS UDYA PRABOWO

NIM : 95 1414 009
NIRM : 950051120501120009

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
JOGJAKARTA

2002

HALAMAN PERSETUJUAN

S K R I P S I

SPIRAL EMAS

Oleh

ALPHIUS UDYA PRABOWO

NIM : 95 1414 009

NIRM : 950051120501120009

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hw., MA.

tanggal: 13 September 2002

HALAMAN PENGESAHAN

S K R I P S I

SPIRAL EMAS

Dipersiapkan dan disusun oleh:

ALPHIUS UDYA PRABOWO

NIM : 95 1414 009

NIRM : 950051120501120009

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 13 September 2002 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M. Si.	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	
Anggota	: Prof. Dra. Mocharti Hw., MA.	
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	
Anggota	: M. Andy Rudhito S.Pd.	

Jogjakarta, 13 September 2002
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Apapun juga yang kamu perbuat,

perbuatlah dengan segenap hatimu

seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia.

(Kolose 3 : 23)

Kupersembahkan untuk yang terkasih dan tercinta

Bapak, Ibu, adikku Erna,

dan tunanganku Enok

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Jogjakarta, 13 September 2002

Penulis

(Alphius Udya Prabowo)

ABSTRAK

Tulisan ini membahas tentang kurva "Spiral Emas" dengan mengingat topik-topik dalam geometri Euclides seperti sistem koordinat kutub, segilima beraturan dan bidang duapuluh beraturan, transformasi terutama similaritas spiral atau rotasi dilatif.

Kurva Spiral Emas adalah suatu kurva yang berbentuk spiral pada rumah kerang Nautilus. Pembentukan kurva spiral emas secara matematik berhubungan dengan perbandingan segmen garis menurut pembagi ujung dan tengah. Perbandingan segmen garis yang dimaksudkan dapat ditunjukkan pada diagonal-diagonal segilima beraturan yang berpotongan dan saling membagi menurut irisan emas. Jika a merupakan bagian yang panjang dan b merupakan bagian yang pendek maka perbandingan emas tersebut dapat dinyatakan dengan $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ yang dikenal sebagai pembagi ujung dan tengah (dan rasio ini adalah $\tau : 1$, dengan $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618033987\ldots$).

Segiempat emas adalah suatu persegi panjang yang sisi-sisinya berbanding sebagai pembagi ujung dan tengah, sehingga segiempat emas terbagi dalam sebuah persegi dan sebuah segiempat emas yang lebih kecil. Dari segiempat emas-segiempat emas ini dapat dibentuk suatu kurva spiral yang disebut sebagai Spiral Emas.

Dengan mempelajari Spiral Emas ini, kita akan belajar tentang rasio emas atau irisan emas $\tau : 1$ yang terdapat dalam kehidupan nyata, seperti untuk mendapatkan perbandingan terbaik pada karya-karya pahatan, perbandingan proporsional pada pigura/lukisan atau kotak kemasan suatu produk makanan, keindahan suatu bangunan dan lain sebagainya.

ABSTRACT

This is a study about a curve called the "Golden Spiral" refering to topics in Euclidean geometry such as the polar coordinate system, the regular pentagon and icosahedron and transformations, especially the spiral similarity and the dilative rotation.

The Golden Spiral is a curve in spiral form similar to that on a nautillus shell. Mathematically the construction of the golden spiral is related to the devision of a line segment according to the golden section in extreme and mean ratio. The ratio of the line segment can be observed when two diagonals of a regular pentagon intersect and divide each other according to the golden section. If a were the larger part and b the smaller part of the section then the golden ratio can be written as $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Which is called the extreme and mean ratio (and this ratio is τ = 1, with $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618033987...$).

A golden rectangle is a rectangle whose sides are in the ratio τ : 1, so that the golden rectangle can be divided in to a square and a smaller golden rectangle. Which the aids of these golden rectangles, a spiral curve called the Golden Spiral can be constructed.

By studying this golden spiral, we can learn about the golden ratio or τ : 1 which can be found in real life, such as getting the best proportion in sculptures, in pictures or in food boxes, in a beauty of a building, etc.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.

Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata 1 (S1) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Namun demikian perlu disadari bersama bahwa tanpa bantuan dari semua pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, pengarahan, petunjuk-petunjuk, kerjasama, dukungan, kritikan maupun saran.

Pada kesempatan ini pula, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Prof. Dra. Moeharti Hw., MA selaku dosen pembimbing I yang dengan kesabarannya telah membimbing dan memberikan saran-saran kepada penulis selama proses penulisan tugas akhir ini.
2. Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan dukungan atas penulisan tugas akhir ini.
3. Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis selama kuliah.

4. Edi, Wiwik, Ririn yang telah membantu penulis selama proses pembuatan tugas akhir ini baik secara moril maupun materil.
5. Hanes, Lina yang telah memberikan motivasi dan telah bersedia mendengarkan keluh kesah penulis selama ini.
6. Buat teman-teman P.Mat'95 yang telah memberikan dukungan moril terimakasih atas kebersamaan selama menjalani masa kuliah bersama-sama. Serta teman-teman P.Mat'97, kost 99, kost 100 Paingan dan semua teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan sumbangsih saran, kritik, serta dukungan moril dan materil mulai dari awal hingga akhir penyusunan tugas akhir ini.

Penulis juga menyadari keterbatasan kemampuan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik, sehingga harapan penulis, kiranya semua pihak dapat memberikan kritik dan saran yang membangun untuk kebaikan penulis di masa yang akan datang. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jogjakarta, 13 September 2002

Penulis

(Alphius Udya Prabowo)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

1.	A, B, C, …	: titik-titik
2.	a, b, …, l, m, …	: garis-garis
3.	$P(r,\theta)$	: koordinat kutub $P(r,\theta)$
4.	$\overleftrightarrow{AB}$	: garis-garis melalui A dan B
5.	$\overrightarrow{AB}$	: sinar garis AB dengan pangkal A
6.	$\overline{AB}$	: ruas garis atau segmen AB
7.	AB	: panjang ruas garis AB
8.	Δ ABC	: segitiga ABC
9.	$\angle$ ABC	: sudut ABC
10.	m $\angle$ ABC	: besar sudut ABC
11.	$\cong$	: kongruen
12.	~	: sebangun
13.	$\perp$	: tegak lurus
14.	$\parallel$	: sejajar
15.	$\langle s,t \rangle$	: jarak garis s terhadap garis t
16.	m $\angle$ (s,t)	: besar sudut (sudut dalam) titik potong garis s terhadap garis t
17.	[ABC]	: titik ABC segaris dan B terletak diantara A dan C

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Ketika kita belajar matematika di sekolah, sering kali kita diperkenalkan dengan tokoh-tokoh matematika dan penemuan-penemuannya yang sangat mendukung dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Salah satu contoh; pada abad V sebelum masehi, orang-orang Yunani menemukan suatu bentuk spiral dari rumah kerang Nautilus, yang merupakan keajaiban arsitektur alam seiring dengan fungsi dan keindahannya. Kerang Nautilus membentuk kulitnya dalam tahapan-tahapan, yaitu setiap tahap terdiri dari penambahan satu ruang pada kulit kerang yang ada, sampai diperoleh bentuk spiral pada bagian dalamnya. Bentuk spiral tersebut dapat dirumuskan secara matematik sebagai suatu kurva spiral yang disebut kurva "Spiral Emas".

Pembentukan kurva spiral emas secara matematik ini berhubungan dengan perbandingan segmen garis dalam geometri Euclides. Menurut pandangan Fra Luca Paciolli (1416-1492) dalam bukunya yang berjudul "De divina Proportione", perbandingan segmen garis ada yang dapat dinyatakan dalam pembagi ujung dan tengah yaitu $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \tau$. Pembagian segmen garis tersebut dapat kita lihat pada suatu segilima beraturan dalam geometri Euclides, yaitu setiap dua diagonal segilima beraturan saling membagi menurut pembagi ujung dan tengah yang kemudian dikenal dengan istilah irisan emas. Penyebutan ini terjadi karena setiap diagonal sejajar pada dua segilima beraturan yang berhadapan dalam bidang duapuluh beraturan akan berbentuk segiempat emas yang sisi-sisinya dinyatakan dengan rasio $\tau : 1$. Dari segiempat emas inilah "spiral emas" dapat dihasilkan.

Dengan ditemukannya perbandingan segmen garis dalam rasio emas, orang-orang Yunani kuno kemudian menggabungkan rasio emas ini ke dalam seni arsitekturnya secara sistematik. Beberapa diantara mereka menggunakan rasio emas untuk mendapatkan perbandingan terbaik pada karya-karya pahatan, perbandingan proporsional pada pigura/lukisan atau kotak kemasan suatu produk makanan, keindahan suatu bangunan, dan lain sebagainya. Karena manfaat dari rasio emas ini sangat nyata, maka penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam dan mempelajari lebih lanjut tentang "Spiral Emas".

B. Perumusan Masalah

Pokok perumusan masalah yang akan ditulis adalah :

1. Apakah yang dimaksud dengan pembagi ujung dan tengah pada irisan emas?
2. Bagaimanakah suatu segiempat emas dapat dilukiskan?
3. Bagaimanakah keterkaitan spiral emas dengan segiempat emas ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dalam skripsi ini adalah :

1. Mengetahui hubungan antara pembagi ujung dan tengah dengan irisan emas.
2. Mempelajari segiempat emas yang dimaksudkan.
3. Mengenal lebih lanjut keterkaitan spiral emas dengan segiempat emas.

D. Manfaat Penulisan

Beberapa topik geometri yang akan kita temui dalam mempelajari spiral emas, antara lain: pembagi ujung dan tengah, segiempat emas, transformasi dalam geometri Euclides dan topik-topik geometri penting lainnya seperti koordinat kutub, segilima beraturan dan bidang duapuluh beraturan. Dengan mempelajari "spiral emas" kita dapat mendalami topik-topik geometri yang lain sehingga berguna dalam pengajaran geometri nantinya.

E. Pembatasan Masalah

Sebagai dasar untuk mempelajari spiral emas dalam geometri Euclides, akan dibahas irisan emas yaitu tentang pembagian segmen garis dalam pembagi ujung dan tengah. Irisan emas yang kita pelajari ini terdapat dalam macam-macam hal seperti terdapat pada deret Fibonacci. Akan tetapi pokok pembicaraan kali ini kita batasi pada irisan emas dalam pembagi ujung dan tengah pada bidang duapuluh beraturan dengan rasio $\tau : 1$, sedangkan deret Fibonacci hanya sedikit disinggung sebagai materi pendukung dalam pemahaman spiral emas.

F. Metode Penulisan

Penulisan skripsi menggunakan metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari sumber pustaka diperpustakaan yang berkaitan dengan spiral emas dan menggunakan pengetahuan yang diperoleh selama mengikuti perkuliahan. Jenis-jenis sumber pustaka yang dipelajari tercantum dalam daftar pustaka.

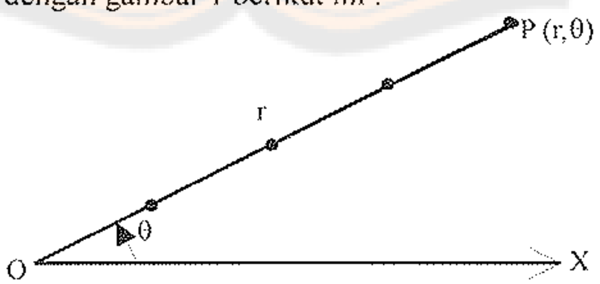
BAB II

LANDASAN TEORI

A. Koordinat Kutub Titik Dalam Bidang

Ada bermacam-macam sistem koordinat dalam geometri, salah satunya adalah sistem koordinat Cartesius orthogonal. Sistem koordinat Cartesius orthogonal dalam bidang adalah salah satu cara bagaimana menyatakan tempat suatu titik pada bidang dengan menentukan jaraknya dari dua garis yang sudah ditentukan, yaitu sumbu x (sb.x) dan sumbu y (sb.y) yang saling tegak lurus. Sistem koordinat Cartesius orthogonal merupakan sistem koordinat yang paling penting dan paling sering digunakan dalam pembahasan kalkulus dan geometri, sehingga kita tidak perlu membahas sistem koordinat Cartesius orthogonal lebih lanjut dengan harapan pembaca sudah mengenalnya dengan baik. Akan tetapi, sistem koordinat yang akan sering kita jumpai dalam pembahasan *Spiral Emas* adalah sistem koordinat kutub.

Sistem koordinat kutub dalam bidang adalah suatu sistem yang koordinat-koordinat titiknya merupakan jarak titik tersebut dari titik pusat dan besar sudut yang dinyatakan diukur dari garis sumbu. Pernyataan tersebut dapat dijelaskan dengan gambar 1 berikut ini :



Gambar 1
Koordinat kutub P (r,θ)

- O : titik pusat / titik kutub.
- r : jari-jari arah, dalam hal ini $\overrightarrow{OP}$.
- θ : sudut arah, dalam hal ini $\angle XOP$.
- $P(r,\theta)$: titik P dengan jari-jari arah r dan sudut arah θ.
- $\overrightarrow{OX}$: sumbu kutub.

Berdasarkan gambar 1, titik P yang mempunyai pasangan koordinat (r, θ), menyatakan bahwa r adalah jarak titik O ke titik P dan θ adalah sudut XOP dengan arah berlawanan perputaran jarum jam.

Ditetapkan bahwa:

$\theta > 0$, jika sudut diukur dari $\overrightarrow{OX}$ ke $\overrightarrow{OP}$ dengan arah berlawanan perputaran jarum jam.

$\theta < 0$, jika sudut diukur dari $\overrightarrow{OX}$ ke $\overrightarrow{OP}$ dengan arah searah perputaran jarum jam.

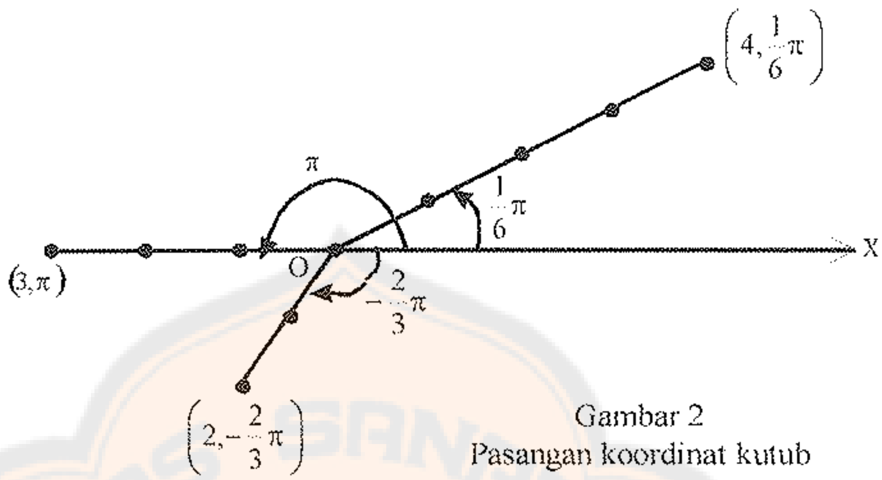
Perbandingan satuan sudut antara derajat dan radian dapat kita ketahui dengan cara menyatakan besar sudut keliling lingkaran sebagai berikut:

$$2\pi \text{ radian} = 360° \quad \text{atau} \quad \pi \text{ radian} = 180°$$

Kita peroleh : 1 radian $= \dfrac{180}{\pi}$ derajat dan 1 derajat $= \dfrac{\pi}{180}$ radian.

Contohnya, jika besar sudut θ adalah 60°, kita tulis $m\theta = 60$.

Pada gambar 2 dibawah ini, ditunjukkan titik-titik yang mempunyai pasangan koordinat $(4, \frac{1}{6}\pi)$; $(3, \pi)$; $(2, -\frac{2}{3}\pi)$.



Gambar 2
Pasangan koordinat kutub

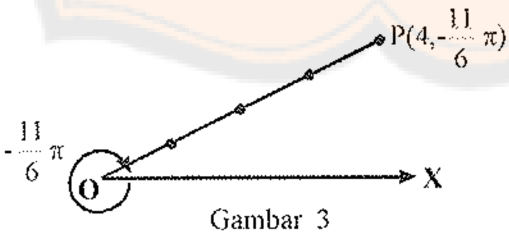
Ketika masing-masing pasangan koordinat di atas menunjukkan suatu titik tertentu, ada pasangan koordinat lainnya yang menunjukkan titik yang sama. Hal ini terbukti karena sudut sebesar 360° dapat ditambahkan atau dikurangkan secara berulang tanpa mempengaruhi letak titik yang ditunjukkan.

Titik P yang berkoordinat $(4, \frac{1}{6}\pi)$ juga mempunyai koordinat yang sama

dengan: $P(4, -\frac{11}{6}\pi)$, ditunjukkan dengan gambar 3.

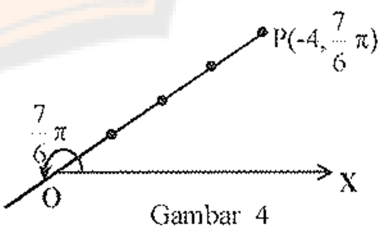
$P(-4, \frac{7}{6}\pi)$, ditunjukkan dengan gambar 4.

$P(-4, -\frac{5}{6}\pi)$, ditunjukkan dengan gambar 5.



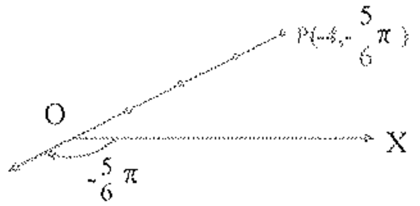
Gambar 3

Koordinat Kutub $P(4, \frac{1}{6}\pi)$



Gambar 4

Koordinat Kutub $P(-4, \frac{7}{6}\pi)$



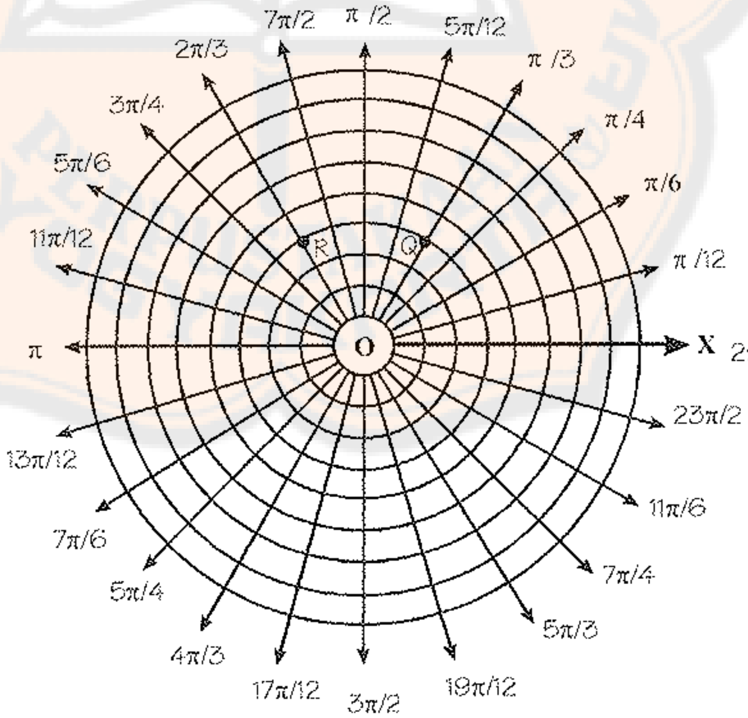
Gambar 5
Koordinat Kutub $P(-4, -\frac{5}{6}\pi)$

Dengan demikian, kita dapat menuliskan rumus umum sebagai berikut :

$$(r, \theta) = (-r, \theta \pm 180°) = (-r, \theta \pm \pi)$$

$$= (r, \theta \pm 360° \, n), \; n = \text{sebarang bilangan bulat.}$$

Rumus-rumus tersebut di atas memberikan cara yang berlainan dalam menunjukkan letak suatu titik, akan tetapi biasanya lebih sering digunakan rumus dengan $r > 0$. Penempatan titik-titik dengan koordinat kutub dibantu dengan menggunakan kertas koordinat kutub. Kertas ini dibentuk dengan garis-garis yang berasal dari pusat lingkaran dengan lingkaran-lingkaran yang konsentris, seperti ditunjukkan pada gambar 6 di bawah ini:



Gambar 6
Kertas koordinat kutub

Contoh 1. Jika: $r = 4$, $m\theta = 60$ dan $n = 1$, dengan menggunakan rumus umum (r, θ) kita peroleh: $Q(4, 60°) = Q(-4, 60° + 180°) = Q(-4, 240°)$ atau

$= Q(-4, 60° - 180°) = Q(-4, -120°)$ atau

$= Q(4, 60° + 360°) = Q(4, -300°)$.

Titik Q ditunjukkan pada gambar 6.

Contoh 2. Jika: $r = -4$, $m\theta = -60$ dan $n = 1$, dengan menggunakan rumus umum (r, θ) kita peroleh: $R(-4, -60°) = R(4, -60° + 180°) = R(4, 120°)$ atau

$= R(4, -60° - 180°) = R(4, -240°)$ atau

$= R(-4, -60° + 360°) = R(-4, 300°)$.

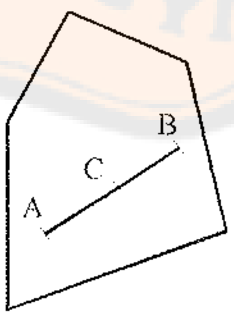
Titik R ditunjukkan pada gambar 6.

B. Segilima Beraturan Dan Bidang Duapuluh Beraturan

Definisi II.B.1

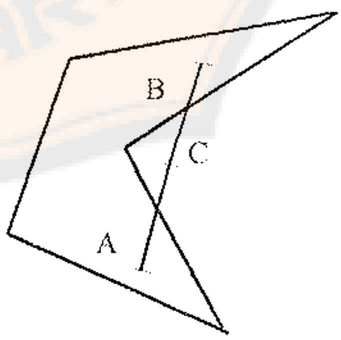
Suatu daerah dikatakan konveks jika himpunan titik-titik pada semua segmen garis dalam daerah tersebut merupakan anggota dari himpunan titik-titik daerah itu sendiri.

Contoh:



$C \in \overline{AB} \in V$

Gambar 7. V daerah segilima sebarang yang konveks



$C \in \overline{AB} \notin V$

Gambar 8. V daerah segilima sebarang yang tidak konveks

Definisi II.B.2

Suatu segibanyak disebut beraturan bila dan hanya bila daerahnya konveks, dan semua sudut dan sisinya kongruen.

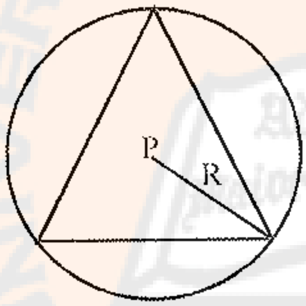
Berikut ini merupakan sekumpulan gambar segi-n beraturan.

Misal: a_n = sisi segi-n tali busur beraturan

b_n = besar sudut segi-n beraturan = $\dfrac{(n-2)180°}{n}$

c_n = banyak diagonal segi-n beraturan = $\dfrac{1}{2}n(n-3)$

a. Untuk n = 3 (segitiga samasisi)

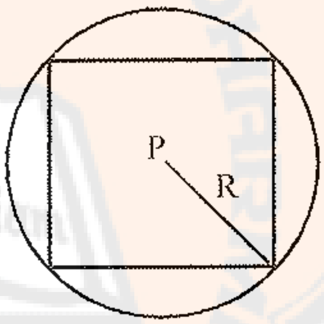


$a_3 = R\sqrt{3}$

$b_3 = 60°$, $c_3 = 0$

Gambar 9

b. Untuk n = 4 (persegi)

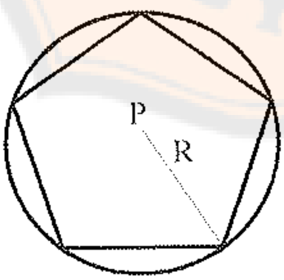


$a_4 = R\sqrt{2}$

$b_4 = 90°$, $c_4 = 2$

Gambar 10

c. Untuk n = 5 (segilima beraturan)

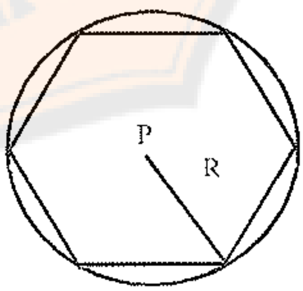


$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$b_5 = 108°$, $c_5 = 5$

Gambar 11

d. Untuk n = 6 (segienam beraturan)

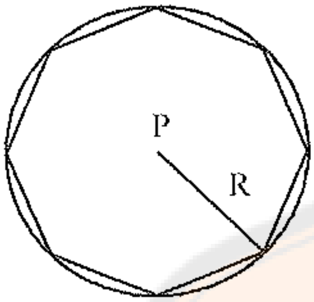


$a_6 = R$

$b_6 = 120°$, $c_6 = 9$

Gambar 12

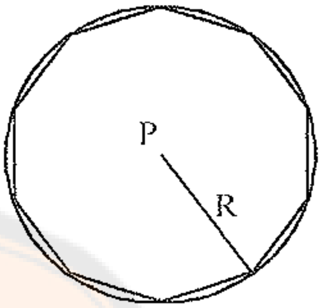
e. Untuk n = 8 (segidelapan beraturan) f. Untuk n = 10 (segisepuluh beraturan)



$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$b_8 = 135°$, $c_8 = 40$

Gambar 13



$a_{10} = \frac{1}{2}R\left(-1+\sqrt{5}\right)$

$b_{10} = 144°$, $c_{10} = 35$

Gambar 14

Segilima Beraturan

Untuk menghitung a_5, kita hitung lebih dulu a_{10}.

Kita perhatikan gambar 15 berikut:

Misal: P titik pusat lingkaran, AP jari-jari lingkaran satuan dan $\overline{AB} \perp \overline{DP}$.

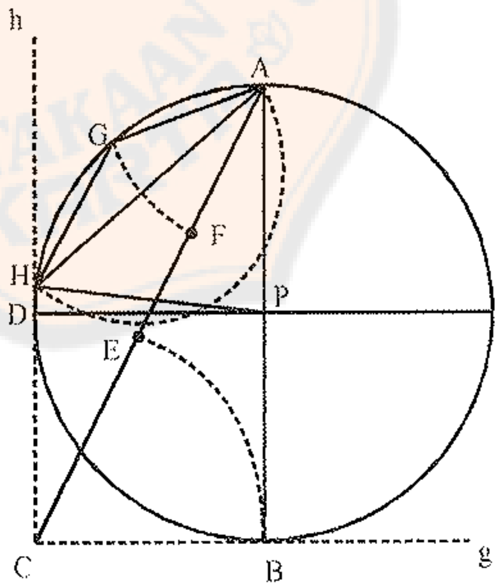
Ditarik garis g melalui B ⊥ AB dan h melalui D ⊥ DP, maka garis g dan h berpotongan di C.

Dipandang ΔABC, dengan rumus Pythagoras kita peroleh:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Jika CE = CB, maka $EA = \sqrt{5}-1$. Ditentukan F titik tengah EA sehingga:

$$AF = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right).$$

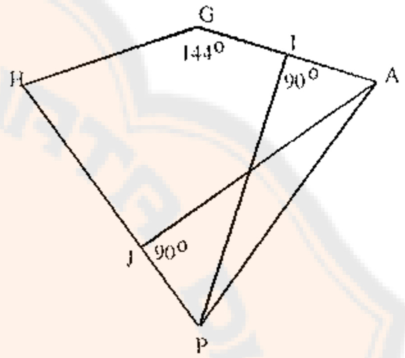


Gambar 15. GA = a_{10}

Melalui A sebagai pusat rotasi, dirotasikan titik F memotong lingkaran di titik G, sehingga $AG = AF = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right) = a_{10}$.

Melalui G sebagai pusat rotasi, dirotasikan titik A memotong lingkaran di titik H, maka GH = GA = a_{10} sehingga m∠AGH = 144°.

Dari P dibuat $PI \perp AG$, maka $AI = \frac{1}{2}a_{10}$.



Gambar 16. ΔPJA ≅ ΔPIA

Dipandang ΔPJA dan ΔPIA.

Diperoleh : $\overline{PA} = \overline{PA}$

$\angle PJA = \angle PIA = 90°$

$\angle JPA = \angle IAP = 72°$

Maka menurut dalil ss. sd. sd.: ΔPJA ≅ ΔPIA.

Sehingga: $\overline{PJ} = \overline{AI} = \frac{1}{2}a_{10}$. Menurut dalil kosinus pada ΔAPH, maka

$AH^2 = AP^2 + PH^2 - 2AP \cdot PH \cdot \cos APH$. Karena AP = PH = R, maka:

$$a_5^2 = R^2 + R^2 - 2RR\frac{1}{2}a_{10} = 2R^2 - R^2\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right] = 2R^2 - \frac{1}{2}R^2\left(-1+\sqrt{5}\right)$$

$$= 2R^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2\sqrt{5} = 2\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2\sqrt{5} = \frac{1}{2}R^2\left(5-\sqrt{5}\right)$$

$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Untuk lingkaran satuan R = 1, maka $a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

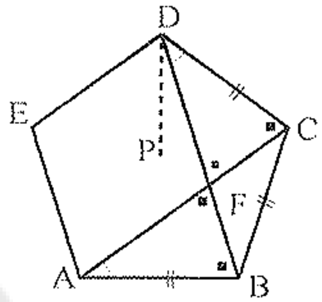
Teorema II.B.1

Setiap dua diagonal suatu segilima beraturan yang tidak mempunyai ujung persekutuan, saling membagi dalam pembagi ujung dan tengah, serta bagian terbesar setiap diagonal sama dengan sisi segilima.

Diketahui: Segilima beraturan ABCDE.

Diagonal AC dan BD berpotongan di F.

Dibuktikan: AF : FC = CA : AF



Gambar 17

Bukti: $m\angle ABC = 108$, dan ΔABC sama kaki.

$m\angle BAC = m\angle BCA = 36 = m\angle CBF$.

$m\angle ABF = m\angle AFB = 72$.

ΔBFC dan ΔBAF sama kaki, maka FC = FB dan AB = AF

karena: $\left.\begin{aligned} m\angle ACB = m\angle FCB \\ m\angle ABC = m\angle BFC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta BFC \sim \Delta ABC$

sehingga CB : FC = CA : BC atau AF : FC = CA : AF

Misal : a = CB = AB = AF, b = FC

maka: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$. □

Definisi II.B.3

Suatu bidang banyak (polyhedron) ialah gabungan daerah segibanyak-segibanyak yang berhingga banyaknya sedemikian sehingga:

a. Setiap sisi segibanyak adalah sisi dari tepat satu segibanyak yang lain.

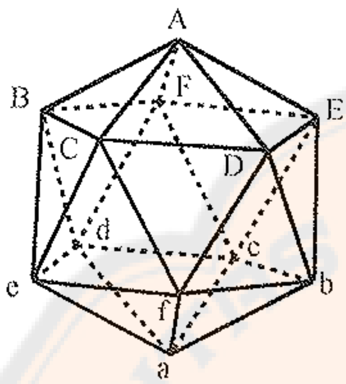
b. Jika sisi dua segibanyak berimpit, maka mereka bersekutu pada satu sisi.

Definisi II.B.4

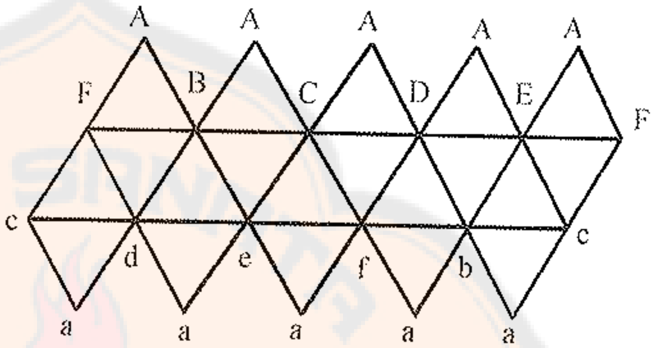
Suatu bidang banyak beraturan adalah suatu bidang banyak konveks yang bidang sisinya terdiri dari sejumlah daerah segibanyak beraturan yang kongruen. Setiap titik sudutnya merupakan titik temu sejumlah daerah segibanyak beraturan yang sama jumlahnya dengan sudut yang sama besarnya.

"Regular icosahedron" adalah suatu bidang duapuluh beraturan dengan bidang sisinya berupa daerah segitiga samasisi.

Contoh:



Gambar 18
Bidang Duapuluh Beraturan
("Regular Icosahedron")



Gambar 19
Jaring-jaring Bidang Duapuluh Beraturan

Beberapa pengertian yang perlu kita ketahui dalam bidang banyak beraturan khususnya bidang duapuluh beraturan "regular icosahedron" adalah:

1. Bidang sisi bidang duapuluh beraturan berbentuk daerah segitiga samasisi.

   Contohnya ΔABC, ΔACD, ΔADE, ... , dan seterusnya; yang dapat kita lihat dalam jaring-jaring bidang duapuluh beraturan pada gambar 19.

   Jadi terdapat 20 bidang sisi.

2. Sudut bidang sisinya merupakan sudut-sudut datar dalam selimut bidang duapuluh beraturan.

   Contohnya $\angle FAB$, $\angle ABF$, $\angle BFA$, ... , dan seterusnya; yang dapat kita lihat dalam jaring-jaring bidang duapuluh beraturan pada gambar 19.

   Karena bidang sisinya terdiri dari 20 daerah segitiga samasisi yang masing-masing daerah segitiga samasisi terdiri dari 3 titik sudut maka titik sudut bidang sisinya sebanyak $20 \times 3 = 60$ titik sudut datar.

3. Sudut bidang duapuluh beraturan merupakan sudut-sudut ruang, yaitu titik temu sudut datar dari 5 daerah segitiga samasisi.

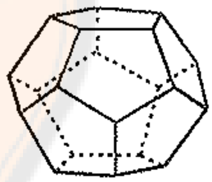
   Dipandang limas segilima beraturan A.BCDEF pada gambar 18.

   Titik sudut A merupakan titik temu dari ΔBAC, ΔCAD, ΔDAE, ΔEAF, ΔFAB. Karena titik sudutnya merupakan titik temu sudut datar dari 5 daerah segitiga samasisi dan karena titik sudut bidang sisinya sebanyak 60 titik sudut, maka titik sudutnya ada $\frac{60}{5} = 12$ titik sudut ruang.

Apabila titik pusat setiap bidang sisinya dihubungkan akan terbentuk suatu bidang duabelas beraturan dengan bidang sisinya berupa daerah segilima beraturan yang sama besar. Bangun tersebut disebut "regular dodecahedron" (bidang duabelas beraturan).

Demikian juga sebaliknya, apabila titik pusat setiap bidang sisi bidang duabelas beraturan dihubungkan akan terbentuk suatu bidang duapuluh beraturan dengan bidang sisinya berupa daearh segitiga samasisi.

Hubungan yang demikian merupakan hubungan dual antara "Regular Icosahedron" dan "Regular Dodecahedron".



Gambar 20
"Regular Dodecahedron"

C. Transformasi Dalam Geometri

Definisi II.C.1.a

Pengawanan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B disebut suatu fungsi, seperti fungsi f dari himpunan A kedalam (into) himpunan B.

Bila $P \in A$ dipasangkan dengan $P^1 \in B$ maka pengawanan tersebut ditulis dalam fungsi $f(P) = P^1 \in B$.

Dalam pembahasan ini kita ambil semesta berupa himpunan titik dalam bidang dan istilah fungsi sering digantikan dengan istilah pemetaan atau transformasi. Dengan demikian transformasi titik P dinotasikan dengan F(P).

Transformasi yang dibicarakan adalah korespondensi satu-satu $P \rightarrow P^1$ antara semua titik dalam bidang ke titik dalam bidang itu sendiri. Transformasi dipandang sebagai suatu aturan untuk menyatakan pasangan titik-titik dengan catatan bahwa:

a. Setiap pasangan titik mempunyai anggota pertama P dan anggota kedua P^1.

b. Setiap titik hanya satu kali menjadi anggota pertama P dan satu kali menjadi anggota kedua P^1 yang dinyatakan dalam pasangan terurut (P, P^1).

Jika kedua anggota pasangan terurut (P, P^1) berimpit, yaitu $P = P^1$, maka P disebut titik invariant/tetap oleh transformasi tersebut.

Transformasi identitas (I) adalah suatu transformasi yang memasangkan setiap titik dengan titik itu sendiri. Dengan demikian, transformasi identitas mempertahankan semua titik, sehingga semua titik adalah titik tetap. Titik tetap adalah titik yang invariant terhadap transformasi F. Jika hasilkali dua transformasi sama dengan identitas, maka transformasi yang satu adalah invers dari yang lain.

Definisi II.C.1.b

Suatu transformasi disebut kolineasi bila hasil transformasi suatu garis akan berupa garis lagi, sehingga bila terdapat titik P pada garis g dan hasil transformasinya dinyatakan dengan $F(P) = P^1$ maka P^1 terletak pada garis g^1.

1. Isometri

Definisi II.C.1

Isometri ialah suatu transformasi U yang tidak mengubah jarak (mempertahankan jarak) antara dua titik sehingga jika terdapat titik P dan Q, maka $PQ = P^1Q^1$ dengan $P^1 = U(P)$ dan $Q^1 = U(Q)$.

Isometri kita lambangkan dengan U. Karena transformasi identitas memasangkan setiap titik dengan titik itu sendiri, maka transformasi identitas merupakan suatu isometri. Invers suatu isometri kita lambangkan dengan U^{-1}. Kecuali untuk mempertahankan jarak antara dua titik, isometri juga memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

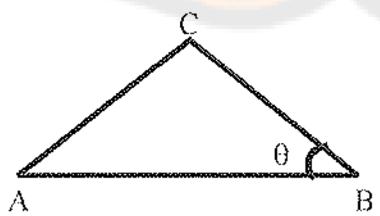
1). Bila U isometri dan g garis maka $U(g) = g^1$ akan berupa garis lagi.

Dengan demikian isometri memetakan garis menjadi garis, sehingga isometri merupakan suatu kolineasi.

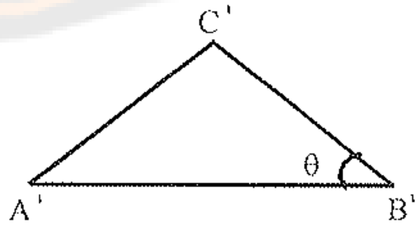
2). Isometri mempertahankan besar sudut.

Diketahui ΔABC dengan hasil transformasinya $\Delta A^1B^1C^1$

$A^1 = U(A)$, $B^1 = U(B)$, $C^1 = U(C)$



Gambar 21. $\theta = \angle ABC$



Gambar 22. $\theta = \angle A^1B^1C^1$

$$\left.\begin{array}{r} A^1B^1 = AB \\ B^1C^1 = BC \\ C^1A^1 = CA \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A^1B^1C^1 \cong \Delta ABC$$

Jadi $m\angle A^1B^1C^1 = m\angle ABC$. □

3). Isometri mempertahankan kesejajaran

Diketahui: $g \parallel h$

Dibuktikan: $g^1 \parallel h^1$

Bukti: $g^1 = U(g)$, $h^1 = U(h)$

$A \in g \Rightarrow A^1 = U(A) \in g^1$, $B \in g \Rightarrow B^1 = U(B) \in g^1$.

$C \in h \Rightarrow C^1 = U(C) \in h^1$, $D \in h \Rightarrow D^1 = U(D) \in h^1$

Diambil: ABCD jajar genjang maka $AB = CD$ dan $AB \parallel CD$.

Jika P titik potong AD dan BC maka: $AP = PD$.

$$\text{Karena: } \left.\begin{array}{r} AB = CD \\ m\angle APB = m\angle CPD \\ AP = PD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APB \cong \Delta CPD$$

Karena isometri maka $A^1P^1 = P^1D^1$

$$\text{Karena: } \left.\begin{array}{r} A^1B^1 = C^1D^1 \\ m\angle A^1P^1B^1 = m\angle C^1P^1D^1 \\ A^1P^1 = P^1D^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A^1P^1B^1 \cong \Delta C^1P^1D^1$$

Sehingga $\Delta APB \cong \Delta CPD \cong \Delta A^1P^1D^1 \cong \Delta C^1P^1D^1$

Karena: $AP + PD = AD$, $A^1P^1 + P^1D^1 = A^1D^1$

$AB = A^1B^1$, $CD = C^1D^1$.

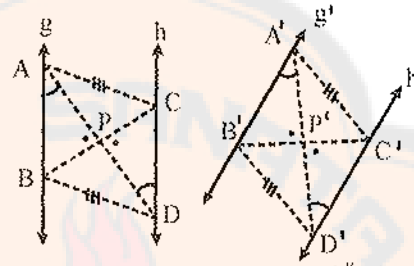
$$BD = B^1D^1$$

Diperoleh $m\angle ADC = m\angle A^1D^1C^1$ maka:

$$AD = A^1D^1$$

ABCD dan $A^1B^1C^1D^1$ masing-masing merupakan jajar genjang.

Jadi $g^1 \parallel h^1$. □



Gambar 23. $g \parallel h \rightarrow g^1 \parallel h^1$

Transformasi yang merupakan isometri adalah translasi, refleksi, rotasi, transformasi identitas, dan refleksi geser.

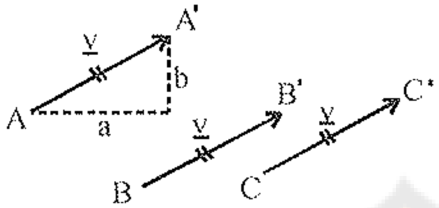
a). Translasi (geseran)

Definisi II.C.2

Suatu translasi adalah suatu transformasi yang mentransformasikan titik P(x, y) ke $P^1(x^1, y^1)$ dengan persamaan $\begin{cases} x^1 = x + a \\ y^1 = y + b \end{cases}$; dengan a dan b sebarang bilangan.

Dapat ditulis pula sebagai $\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut vektor translasi (ditunjukkan oleh himpunan ruas garis berarah yang panjangnya $\sqrt{a^2 + b^2}$ dan arahnya ditentukan oleh $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

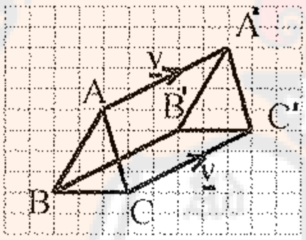


Gambar 24. Translasi dengan Vektor $\underset{\sim}{v}$

Karena suatu translasi dipandang sebagai suatu transformasi titik-titik dalam bidang, maka translasi dapat kita nyatakan sebagai berikut: $T_{\underset{\sim}{v}}(P) = P^1$ dengan PP^1 wakil dari $\underset{\sim}{v}$.

Contoh: misal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Kita pandang translasi berikut:



Gambar 25
Translasi Titik A, B, dan C dengan $\underset{\sim}{v}$

$$T_{\underset{\sim}{v}}(A(x_1, y_1)) = A^1(x_1 + 5, y_1 + 3)$$

$$T_{\underset{\sim}{v}}(B(x_2, y_2)) = B^1(x_2 + 5, y_2 + 3)$$

$$T_{\underset{\sim}{v}}(C(x_3, y_3)) = C^1(x_3 + 5, y_3 + 3)$$

Jika $\underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka ΔABC ditranslasikan ke $\Delta A^1B^1C^1$ dengan $\overline{AA^1} = \overline{BB^1} = \overline{CC^1}$. Kita peroleh:

$AB = A^1B^1$, $BC = B^1C^1$, $AC = A^1C^1$, sehingga $\Delta ABC \cong \Delta A^1B^1C^1$.

Jika $T_{\underset{\sim}{v}} \neq I$, maka hasil translasi suatu titik dengan vektor $\underset{\sim}{v}$ adalah titik lain sehingga tidak ada titik tetap atau titik invariant.

Jika $T_{\underset{\sim}{v}} = I$, maka hasil translasi suatu titik dengan vektor $\underset{\sim}{v}$ adalah titik tetap (titik invariant), sehingga translasi $T_{\underset{\sim}{v}} = I$ disebut transformasi identitas dengan $\underset{\sim}{v} = o$, ditulis $T_0 = I$.

Karena $T_{\underline{w}} \cdot T_{\underline{v}} = T_{\underline{v}+\underline{w}}$, maka jika $T_{\underline{v}+\underline{w}} = I = T_{\underline{0}}$.

$$\underline{v} + \underline{w} = 0$$

$$\underline{w} = -\underline{v}$$

sehingga invers translasi $T_{\underline{v}} = (T_{\underline{v}})^{-1} = T_{-\underline{v}}$

b). Refleksi (Pencerminan)

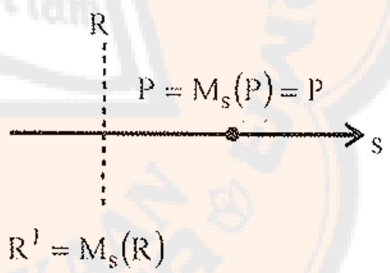
Definisi II.C.3

Suatu pencerminan (refleksi) terhadap sebuah garis s adalah suatu pemetaan M_s yang memenuhi:

1). Jika $P \in s$ maka $M_s(P) = P^1 \in s$

2). Jika $R \notin s$ maka $M_s(R) = R^1 \notin s$ sedemikian hingga garis s adalah sumbu $\overline{RR^1}$, $s \perp \overline{RR^1}$.

Pencerminan M terhadap garis s di atas kita lambangkan dengan M_s, dengan s disebut sumbu refleksi. Pemahaman definisi II.C.3 di atas dapat dinyatakan pada gambar 26.



Gambar 26. Titik R dan P dicerminkan terhadap cermin s

Teorema II.C.1

Pencerminan adalah suatu isometri.

Hal ini berarti bahwa jarak antara dua titik sama dengan jarak antara dua titik hasil refleksinya.

Diketahui: $M_s(A) = A^1$, $M_s(B) = B^1$.

Dibuktikan: $AB = A^1B^1$

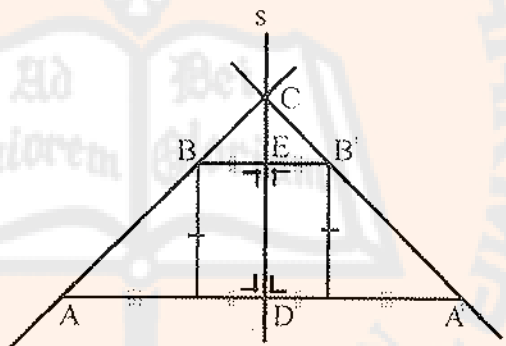
Bukti: Misal $\overline{AB}$ memotong s di C.

Jika D titik tengah $\overline{AA^1}$ dan E titik tengah $\overline{BB^1}$, maka D dan E pada s. Ditarik $\overleftrightarrow{A^1C}$ dan $\overleftrightarrow{B^1C}$.

Kita peroleh: $\Delta CDA \cong \Delta CDA^1 \Rightarrow m\angle DCA = m\angle DCA^1$.

$\Delta CEB \cong \Delta CEB^1 \Rightarrow m\angle ECB = m\angle ECB^1$.

karena A, B, C segaris maka $m\angle ECB = m\angle DCA$, sehingga $m\angle ECB^1 = m\angle DCA^1$.



Gambar 27
Ruas garis AB dicerminkan terhadap cermin s

Jadi A^1, B^1, C segaris dan karena: $\left.\begin{array}{l} BC = B^1C \\ AC = A^1C \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A^1B^1$. □

Teorema II.C.2 berikut ini menunjukkan hasilkali dua pencerminan terhadap sumbu s dan t yang berlainan.

Teorema II.C.2

Jika t dan s dua garis yang sejajar dengan jarak $\frac{1}{2}AB$ maka $M_t \cdot M_s = T_{\underline{v}}$

Diketahui: $t \parallel s$ dengan jarak $< s,t > = \frac{1}{2} AB$

$$T_v(A) = B,\ \overrightarrow{AB} \text{ wakil dari } \underline{v}$$

Dibuktikan: $M_t M_s = T_v$

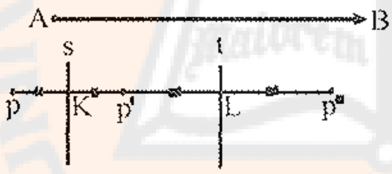
Bukti: Misal: $\left.\begin{array}{l} M_s(P) = P^1 \\ M_t(P^1) = P^{11} \end{array}\right\} \Rightarrow M_t M_s(P) = P^{11}$

K dan L adalah titik potong s dan t dengan PP^{11}

karena: $\left.\begin{array}{l} PK = KP^1 \\ P^1L = LP^{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} PP^{11} = 2(KP^1 + P^1L) \\ \qquad\ = 2\,(KL) \end{array}$

$$M_t M_s = T_{\overrightarrow{2KL}}$$

Jika: $T_v(P) = P^{11}$ *maka* $\overrightarrow{PP^{11}} = \overrightarrow{AB}$



$PP^{11} = 2\,(KL)$, sehingga $AB = 2\,(KL)$

$T_v = T_{2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})} = T_{\overrightarrow{AB}}$.

Gambar 28

sehingga $M_t M_s = T_v$. □

Suatu refleksi menunjukkan bahwa titik-titik pada sumbu refleksi adalah titik-titik tetap, sehingga hanya ada 1 garis tetap. Garis-garis yang tegak lurus sumbu refleksi adalah garis-garis tetap, tetapi tidak titik per-titik, sehingga titik-titik pada garis itu bukan titik-titik invariant,kecuali titik potongnya yaitu K dan L.

c). Rotasi (Putaran)

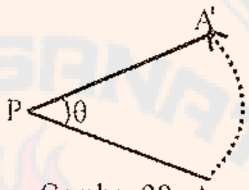
Misalkan P sebagai pusat rotasi dan θ sebagai sudut rotasi, maka dapat dinyatakan definisi II.C.4 berikut ini :

Definisi II.C.4

Rotasi dengan titik pusat P dan sudut rotasinya θ, dengan lambang $R_{P,\theta}$ ialah pemetaan yang memenuhi:

1). $R_{P,\theta}(P) = P$

2). $R_{P,\theta}(A) = A^1$, dengan $PA = PA^1$, $m\angle APA^1 = \theta$.



Gambar 29

Rotasi titik A dengan titik pusat P dan sudut θ

Seperti yang dinyatakan dalam bab sebelumnya bahwa:

- $\theta > 0$, jika arah rotasi sudut berlawanan perputaran jarum jam.

- $\theta < 0$, jika arah rotasi sudut searah perputaran jarum jam.

Dengan demikian, jika $\theta = 0$ maka $R_{P,\theta} = I$ dan jika k = bilangan bulat maka $R_{P,k360^\circ} = I$.

Teorema II.C.3

Jika t dan s dua garis yang berpotongan di P dan jika sudut antara garis t dan s adalah θ maka $R_{P,2\theta} = M_s\, M_t$

Diketahui: t dan s dua garis yang berpotongan di P dengan sudut θ.

Dibuktikan: $R_{P,2\theta} = M_s\, M_t$

Bukti: Misal A sebarang titik yang direfleksikan terhadap garis t kemudian direfleksikan lagi terhadap garis s.

$M_t(A) = A^1$

$M_s(A^1) = M_s(M_t(A)) = M_s M_t(A) = A^{11}$

Misalkan : T titik tengah $\overline{AA^1}$ $\Rightarrow T \in t$

Q titik tengah $\overline{A^1A^{11}}$ $\Rightarrow Q \in s$

Karena $m\angle TPA = m\angle TPA^1$, $m\angle QPA^1 = m\angle QPA^{11}$, $\theta = m\angle(s, t)$

maka: $m\angle APA^{11} = 2m\angle APT + 2m\angle QPA^1$

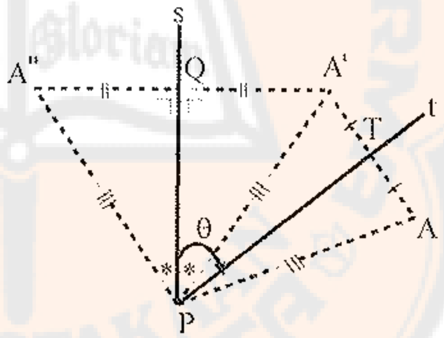
$= 2m\angle TPA^1 + 2m\angle A^1PQ$

$= 2m\angle TPQ$

$= 2\angle(t, s)$

$= 2\theta$

Karena $PA^{11} = PA^1 = PA$ maka hasilkali dua pencerminan (terhadap t dan s) memberikan $PA^{11} = PA$ dan $m\angle APA^{11} = 2m\angle(t, s) = 2\theta$.



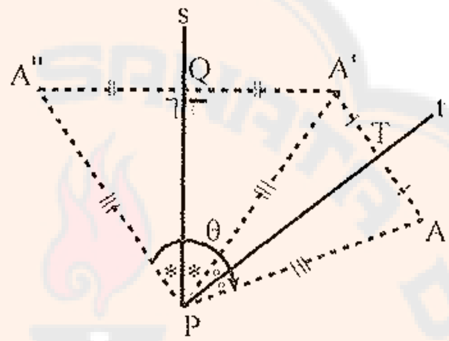
Gambar 30

Jadi terbukti bahwa hasilkali dua pencerminan (M_t dan M_s) dengan t tidak sejajar s adalah suatu rotasi $R_{P,\,2\theta}$. □

Kebalikan dari teorema II.C.3 juga berlaku dan dinyatakan dalam teorema II.C.4 berikut:

Teorema II.C.4

Sebarang rotasi $R_{P,\theta}$ selalu dapat dianggap sebagai hasilkali dua pencerminan, satu terhadap t dan satu terhadap s dengan P titik potong garis t dan s dan $m\angle(t, s) = \frac{1}{2}\theta$.



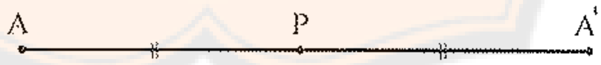
Gambar 31

Dengan pembuktian yang serupa dengan teorema II.C.3 dan karena $\theta = m\angle APA''$ maka $m\angle(t, s) = \frac{1}{2}\theta$.

Setengah Putaran

Setengah putaran merupakan kejadian khusus dari rotasi dengan sudut 180°.

Contoh:



Gambar 32
Refleksi titik A terhadap titik P

Oleh setengah putaran, A ditransformasikan ke A^1, sehingga setengah putaran juga dapat dinamakan sebagai pencerminan terhadap suatu titik yaitu titik pusat (dilihat gambar 32 di atas).

Teorema II.C.5

Untuk sebarang garis g dan setengah putaran H maka H(g) || g.

Diketahui: H(g) || g.

Dibuktikan: $\overline{AB} \parallel \overline{A^1B^1}$

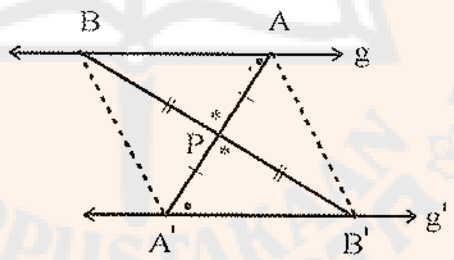
Bukti: Diambil A,B,P tak segaris dengan P pusat setengah putaran.

$A \in g \Rightarrow H_P(A) = A^1 \in g^1$

$B \in g \Rightarrow H_P(B) = B^1 \in g^1$

Diperoleh: $\left.\begin{aligned} BP &= B^1P \\ AP &= A^1P \\ m\angle BPA &= m\angle B^1PA^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABP \cong \Delta A^1B^1P$

karena $\left.\begin{aligned} \angle BAP &\cong \angle B^1A^1P \\ BA &= A^1B^1 \\ AA^1 &= AA^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ABA^1B^1$ suatu jajar genjang



Gambar 33.Setengah putaran dengan titik pusat P

Jadi: $H_P(g) \parallel g$. □

Teorema II.C.6

Hasilkali dua setengah putaran adalah suatu translasi.

Diketahui: Dua setengah putaran dengan titik pusat P dan Q.

Dibuktikan: $H_QH_P = T_{2a}$

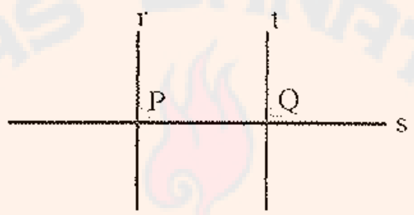
Bukti: Setengah putaran dapat dipandang sebagai hasilkali dua refleksi terhadap dua cermin yang saling tegak lurus.

Melalui P dan Q dibuat cermin $s \perp r$, $s \perp t$.

Misal: P = titik potong garis r dengan cermin s.

Q = titik potong garis t dengan cermin s.

Jika $\overline{PQ}$ wakil dari vektor $\underline{a}$ maka $H_Q H_P = (M_t M_s)(M_s M_r)$



Gambar 34. Hasilkali dua setengah putaran

$= M_t(M_s M_s)M_r$

$= M_t \, I \, M_r$

$= T_{2a}$

Jadi hasilkali dua setengah putaran adalah suatu translasi dengan vektor translasi yang besarnya dua kali jarak kedua titik pusat setengah putaran. □

d). Refleksi Geser

Definisi II.C.5

Suatu refleksi geser G adalah hasilkali dari translasi dengan vektor $\underline{v}$ dan suatu refleksi dengan cermin s yang sejajar dengan $\underline{v}$, sehingga $G = M_s \cdot T_{\underline{v}}$

Kita namakan garis s sebagai sumbu refleksi geser.

Berdasarkan definisi II.C.5 dikatakan bahwa refleksi geser merupakan hasilkali refleksi dan translasi, maka hasilkali tersebut memenuhi sifat komutatif seperti yang ditunjukkan dalam teorema II.C.7 berikut ini:

Teorema II.C.7

Jika garis s || $\underline{v}$ maka $G = M_s T_{\underline{v}} = T_{\underline{v}} M_s$

Diketahui: s || $\underline{v}$

Dibuktikan: $G = M_s T_{\underline{v}} = T_{\underline{v}} M_s$

Bukti: $T_{\underline{v}}$ dapat dianggap sebagai hasilkali refleksi terhadap dua cermin sejajar r dan t. Garis r ⊥ s dan t ⊥ s.

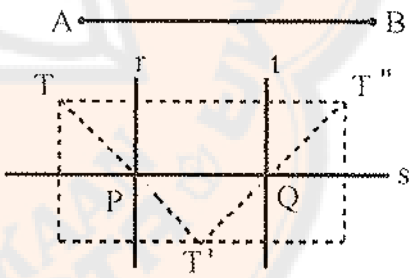
Jarak garis r terhadap garis t sama dengan $\frac{1}{2}\overline{AB}$

P = titik potong garis r terhadap cermin s

Q = titik potong garis t terhadap cermin s

Misal: $\overrightarrow{AB}$ wakil dari $\underline{v}$

$\overrightarrow{PQ}$ wakil dari $\underline{a}$



Gambar 35. Hasilkali refleksi dan translasi

Maka: $M_s T_{\underline{v}} = M_s T_{2\underline{a}}$

$= M_s H_Q H_P$

$= M_s(M_s M_t)(M_r M_s)$

$= (M_s M_s)(M_t M_r) M_s$

$= I \cdot T_{\underline{v}} M_s$

sehingga $G = M_s T_{\underline{v}} = T_{\underline{v}} M_s$. □

Teorema II.C.8

Translasi dengan vektor $\underline{v}$ yang tidak tegak lurus pada s maka $T_{\underline{v}}M_s$ suatu refleksi geser.

Diketahui: $\underline{v}$ tidak tegak lurus s, dengan s disebut cermin.

Dibuktikan: $T_{\underline{v}}\,M_s$ suatu refleksi geser, dengan $\overrightarrow{AB}$ wakil dari $\underline{v}$.

Bukti: Diambil $\underline{v}$ mewakili $\overrightarrow{AB}$.

Ditentukan E sedemikian hingga $\overrightarrow{AE} \perp s$ dan $\overrightarrow{EB} \parallel s$, maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$. Karena $T_{\underline{v}} = T_{\underline{a}} + T_{\underline{b}}$, dengan $\overrightarrow{AE}$ wakil dari $\underline{a}$, $\overrightarrow{EB}$ wakil dari $\underline{b}$

maka $T_{\underline{v}}M_s = T_{\underline{b}}T_{\underline{a}}M_s$

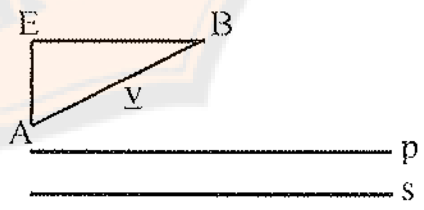
$= T_{\underline{b}}(M_pM_s)M_s$

$= T_{\underline{b}}M_p(M_sM_s)$, dengan $\langle p, s\rangle = \frac{1}{2}EA$.

$= T_{\underline{b}}M_p$

= suatu refleksi geser karena p sejajar $\overrightarrow{EB}$.

Jadi untuk $\underline{v}$ tidak tegak lurus cermin s, hasilkali pencerminan terhadap s dan translasi $\underline{v}$ selalu berupa refleksi geser. □



Gambar 36
Refleksi Geser

Teorema II.C.9

Apabila ada garis r, s dan t tidak berpotongan pada satu titik dan tidak ada pasangan yang sejajar, maka setiap hasilkali refleksi-refleksi M_r, M_s dan M_t adalah suatu refleksi geser.

Diketahui: r, s, dan t saling berpotongan dan titik potongnya membentuk suatu segitiga ABC.

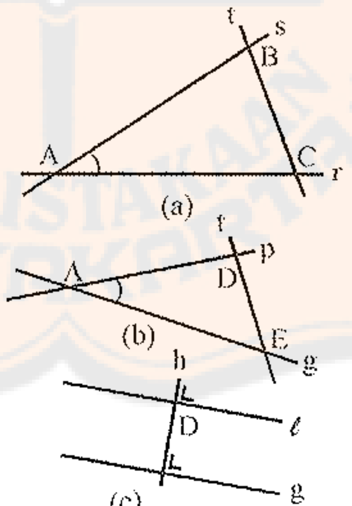
Dibuktikan: $M_t \cdot M_s \cdot M_r$ merupakan refleksi geser.

Bukti: $M_t M_s M_r = M_t M_p M_g$

m∠BAC = m∠DAE, dengan p ⊥ t dan memotong t di D.

$M_t M_p M_g = M_h M_l M_g$

Melalui D dibuat l ⊥ h dan l || g, maka $M_h M_l M_g = M_h T_{2d}$ dengan d merupakan jarak antara garis l terhadap garis g, merupakan suatu refleksi geser. □



Gambar 37. Hasilkali refleksi-refleksi terhadap t, s dan r

Dengan jalan serupa dapat kita cari hasilkali beberapa refleksi.

2. Dilatasi

Definisi II.C.6

Dilatasi adalah suatu transformasi D yang mentransformasikan setiap garis ke garis yang sejajar dengan garis semula. Jika g garis maka berlaku $D(g) = g^1$, g^1 suatu garis dan $g^1 \parallel g$.

Dua buah bangun disebut homotetik (seletak) jika mereka sebangun dan penempatannya sesuai, yaitu jika mereka dihubungkan oleh suatu Dilatasi.

Teorema II.C.10

Setiap dua segmen garis $\overline{AB}$ dan $\overline{A^1B^1}$ dihubungkan oleh dilatasi yang tunggal jika $\overline{AB} \parallel \overline{A^1B^1}$.

Suatu dilatasi tertentu oleh dua buah titik yang dipengaruhinya atau oleh akibatnya pada dua buah titik.

1. $AB \rightarrow AB$

   Dilatasi ini suatu transformasi identitas.

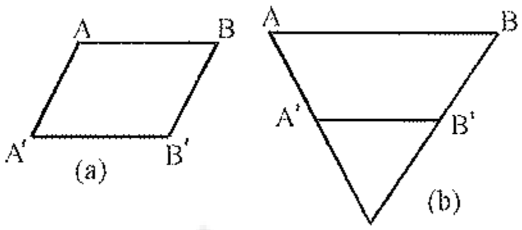
2. $AB \rightarrow BA$

   Dilatasi ini suatu setengah putaran dengan titik pusat titik tengah AB

3. Invers dari dilatasi $AB \rightarrow A^1B^1$ ialah dilatasi $A^1B^1 \rightarrow AB$.

4. Jika ABB^1A^1 suatu jajar genjang maka $AB \rightarrow A^1B^1$ adalah suatu translasi (dilihat gambar 38(a)).

5. Suatu dilatasi yang bukan translasi mempunyai titik invariant O (dilihat gambar 38(b)).



Gambar 38

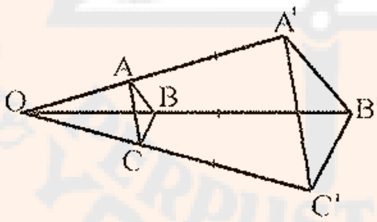
Definisi II.C.7

Jika O titik pusat dilatasi dan faktor skalarnya k, dilatasi dinyatakan dengan [O,k], dengan sifat $k \neq 0$, dilatasi ini disebut "dilatasi sentral". Jadi yang termasuk dilatasi adalah translasi dan dilatasi sentral.

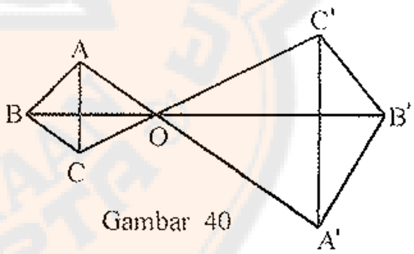
Jika diberikan 3 titik tak segaris A,B,C ditransformasikan dengan titik pusat O dan jika $D(A) = A^1$, $D(B) = B^1$, $D(C) = C^1$, maka dilatasi sentral dengan:

a. $|k| > 1$, akan terjadi perbesaran

Contoh: 1. Untuk $k = 3$ 2. Untuk $k = -2$



Gambar 39



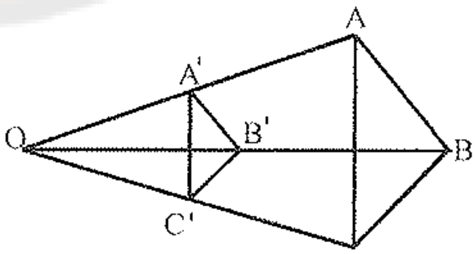
Gambar 40

Maka ΔABC mengalami perbesaran.

b. $|k| < 1$, akan terjadi pengecilan

Contoh 3. Untuk $k = \frac{1}{2}$

Maka ΔABC mengalami pengecilan.



Gambar 41

c. Untuk $k = -1$ menunjukkan setengah putaran

d. $k = 1$ menunjukkan suatu transformasi identitas.

Contoh 1, 2, dan 3 di atas menunjukkan bahwa suatu dilatasi sentral mempunyai satu titik invariant.

3. Rotasi Dilatif (Similaritas Spiral)

Definisi II.C.8

Suatu transformasi L adalah suatu similaritas bila terdapat bilangan positif k sehingga untuk setiap segmen AB dipenuhi $A^1B^1 = k\ AB$ dengan $A^1 = L(A)$ dan $B^1 = L(B)$.

Bilangan k merupakan bilangan positif konstan yang disebut faktor similaritas atau faktor kesebangunan, sehingga similaritas dengan faktor k dilambangkan dengan L_k.

Jika $k=1$, maka similaritas merupakan isometri dan jika $k \neq 1$ maka similaritas mempunyai invers yang juga berupa similaritas dengan faktor $\frac{1}{k}$.

Selain isometri, similaritas lainnya adalah dilatasi dengan $O(+\ k)$, rotasi dilatif, dan refleksi dilatif.

Teorema II.C.11

Similaritas mempertahankan besar sudut.

Diketahui: ΔABC dengan $m\angle\ ABC = \theta$

Dibuktikan: $m\angle ABC = m\angle A^1B^1C^1$

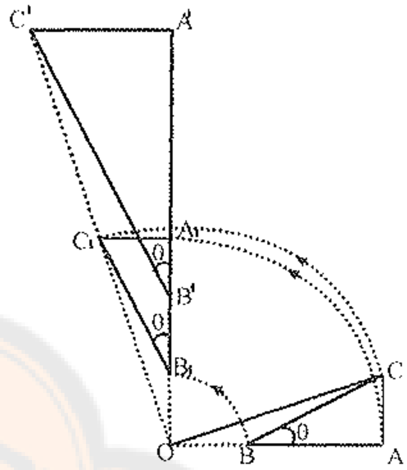
Bukti: Diambil $k = 2$, O titik pusat rotasi.

Kita peroleh: $\overline{A^1B^1} = k\overline{AB} = 2\overline{AB}$

$\overline{B^1C^1} = k\overline{BC} = 2\overline{BC}$

$\overline{C^1A^1} = k\overline{CA} = 2\overline{CA}$

Karena sifat kesebangunan dua segitiga terpenuhi maka $\Delta ABC \sim \Delta A^1B^1C^1$ sehingga $m\angle ABC = m\angle A^1B^1C^1$. □



Gambar 42. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A^1B^1C^1$

Similaritas spiral ialah hasilkali suatu dilatasi sentral O(k) dengan suatu rotasi yang titik pusat O, sehingga disebut juga sebagai rotasi dilatif. Hasilkali suatu dilatasi O(k) dan suatu rotasi $R_{O,\alpha}$ sama dengan hasilkali dilatasi O(-k) dan rotasi $R_{O,\alpha+\pi}$.

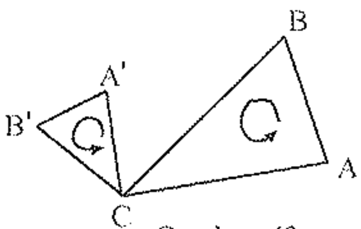
Similaritas dapat dibedakan menjadi:

a). Similaritas langsung

Similaritas langsung adalah suatu similaritas yang tidak mengubah arah. Tidak mengubah arah berarti tidak membalik arah urutan titik sudut segitiga.

Jika ΔABC dan $\Delta A^1B^1C^1$ sebangun dan dihubungkan oleh similaritas langsung yang tunggal $ABC \rightarrow A^1B^1C^1$ maka arah $A^1B^1C^1$ = arah ABC

Contoh: Rotasi dilatif ΔABC dengan titik pusat C



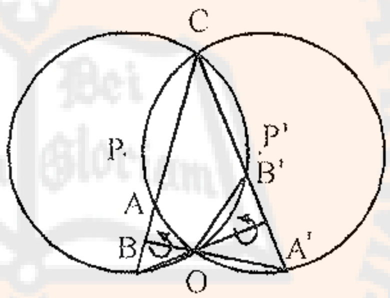
Gambar 43

Hal-hal penting yang perlu kita ketahui:

1. Yang termasuk similaritas langsung adalah dilatasi, translasi, rotasi, dan rotasi dilatif.
2. Setiap similaritas langsung yang bukan translasi mempunyai titik invariant.

Bukti: Jika similaritas langsung itu dilatasi sentral, maka tentu mempunyai titik invariant. Jika similaritas langsung itu bukan suatu dilatasi mengakibatkan ada garis yang tidak sejajar dengan hasil transformasinya.

Misalkan C titik potong garis-garis tersebut.



Gambar 44. Similaritas langsung dengan titik pusat O

Tampak dari gambar 44 bahwa ΔABO dan ΔA^1B^1O dihubungkan oleh rotasi dilatif dengan pusat O atau similaritas spiral dengan pusat O.

Dengan melukis lingkaran-lingkaran luar ΔAA^1C dan ΔBB^1C terdapat titik potong kedua lingkaran itu, misalnya O.

Berikut ini akan dibuktikan bahwa: $\Delta ABO \sim \Delta A^1B^1O$

Bukti:

Dipandang ΔOAB dan ΔOA^1B^1

$m\angle OBC + m\angle OB^1C = 180$

$m\angle OB^1A^1 + m\angle OB^1C = 180$

maka $m\angle OBC = m\angle OB^1A^1$ atau $m\angle OBA = m\angle OB^1A^1$

$m\angle OA^1C + m\angle OAC = 180$

$m\angle OAB + m\angle OAC = 180$

maka $m\angle OAB = m\angle OA^1C$ atau $m\angle OAB = m\angle OA^1B^1$

sehingga $\Delta OAB \sim \Delta OA^1B^1$ dan $\dfrac{A^1B^1}{AB} = k$

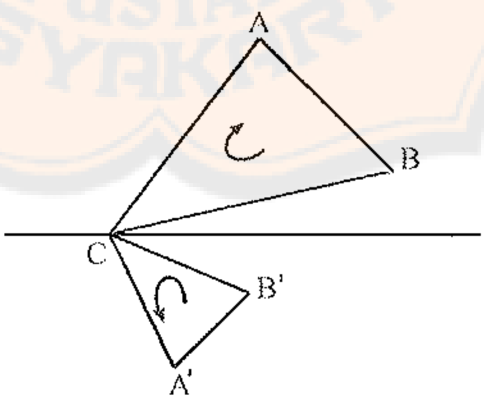
Jadi similaritas langsung yang merupakan rotasi dilatif mempunyai titik invariant O. □

b). Similaritas berlawanan

Similaritas berlawanan adalah similaritas yang mengubah arah. Mengubah arah berarti membalik arah urutan titik sudut segitiga.

Jika ΔABC dan ΔA^1B^1C sebangun dan dihubungkan oleh similaritas tunggal $ABC \rightarrow A^1B^1C$ maka arah A^1B^1C berlawanan dengan arah ABC.

Contoh: Refleksi dilatif ΔABC dengan C terletak pada cermin



Gambar 45

Perlu kita ketahui bahwa:

1. Yang termasuk similaritas berlawanan adalah refleksi, refleksi geser dan refleksi dilatif.

   Suatu refleksi dilatif ialah hasilkali suatu refleksi dan suatu dilatasi sentral yang titik pusatnya terletak pada cermin (seperti tampak pada gambar 45).

2. Similaritas berlawanan yang bukan refleksi geser mempunyai titik invariant.

Karena similaritas berlawanan hanya sebagai faktor pendukung penulisan ini maka pembahasan similaritas berlawanan tidak ditulis lebih lanjut.

Suatu similaritas dapat dikatakan mengubah arah atau tidak mengubah arah jika terdapat paling sedikit tiga titik atau tiga titik sudut suatu segitiga yang diketahui.

BAB III

IRISAN EMAS

A. Pembagi Ujung Dan Tengah

Definisi III.A.1

Segmen garis lurus dikatakan telah dibagi dalam pembagi ujung dan tengah jika perbandingan segmen garis keseluruhan (utuh) dengan bagian segmen garis yang lebih besar sama dengan perbandingan segmen yang lebih besar dengan yang lebih kecil.

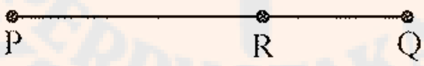
Untuk lebih jelasnya, definisi III.A.1 di atas dapat dinyatakan dengan kalimat lain dalam definisi III.A.2.

Definisi III.A.2

Segmen PQ dikatakan telah dibagi dalam pembagi ujung dan tengah oleh titik R (dengan PR segmen yang lebih besar), jika:

$$PQ : PR = PR : RQ$$

Contoh:



Gambar 46

$\overline{PQ}$ = segmen garis keseluruhan (utuh).

$\overline{PR}$ = segmen garis yang lebih besar .

$\overline{RQ}$ = segmen garis yang lebih kecil.

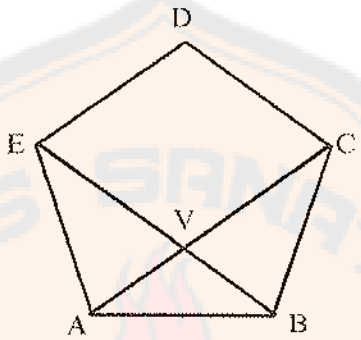
Maka, pembagi ujung dan tengahnya:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}$$

Definisi III.A.1 dan III.A.2 dapat kita nyatakan dalam segilima beraturan ABCDE, dengan V titik potong diagonal AC dan EB.

V membagi AC dan EB dalam pembagi ujung dan tengah.

Contoh:



Gambar 47

Perbandingan yang ditunjukkan dalam definisi III.A.1 dapat kita nyatakan dalam bentuk : $\frac{AC}{VC} = \frac{VC}{AV}$, untuk diagonal AC

atau

$\frac{EB}{EV} = \frac{EV}{VB}$, untuk diagonal EB

misal : a = bagian yang lebih besar.

b = bagian yang lebih kecil.

a + b = bagian keseluruhan (utuh).

sehingga pembagi ujung dan tengah setiap diagonal segilima ABCDE dapat dinyatakan dalam perbandingan sebagai berikut:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Pada tahun 1416-1492, perbandingan tersebut dinotasikan dalam notasi τ oleh Fra Luca Paccioli dalam bukunya yang berjudul "De divina

Proportione", sehingga $\frac{AC}{VC} = \frac{VC}{AV} = \tau = \frac{AC}{ED} = \frac{ED}{AV}$, dan pada pertengahan tahun pertama abad 19, perbandingan tersebut dinamakan dengan istilah "irisan emas". Notasi τ, menunjukkan bahwa perbandingan dalam pembagi ujung dan tengah tidak pernah berhenti pada suatu angka tertentu karena berhubungan dengan angka-angka Fibonacci yang menunjukkan pecahan angka yang terus-menerus, yaitu τ = 1,618033987... .

Bilangan Fibonacci adalah sebagai berikut:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... ,$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$, ...,

dengan $U_1 = 1$ dan $U_2 = 1$.

Bilangan tersebut dikenal dengan istilah deret Fibonacci, sesuai dengan nama penemunya "Leonardo Fibonacci" dari Pisa yang lahir tahun 1175.

Perbandingan yang terus-menerus pada bilangan Fibonacci diperoleh dari pecahan yang terus-menerus pada bilangan sebagai berikut:

$\frac{1}{1} = 1{,}0$; $\frac{2}{1} = 2{,}0$; $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{5}{3} = 1{,}66$; $\frac{8}{5} = 1{,}6$; $\frac{13}{8} = 1{,}625$; $\frac{21}{13} = 1{,}6154...$;

$\frac{34}{21} = 1{,}61905...$; $\frac{55}{34} = 1{,}61765...$; $\frac{89}{55} = 1{,}61818...$; $\frac{144}{89} = 1{,}61798...$;

$\frac{233}{144} = 1{,}618055...$; $\frac{377}{233} = 1{,}618025...$; $\frac{610}{377} = 1{,}618037...$;

$\frac{987}{680} = 1{,}618033...$; ...dan seterusnya.

Angka-angka tersebut semakin mendekati angka 1,618033987... yang nilainya sama dengan $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pada irisan emas, yang dapat kita peroleh dari perbandingan pembagi ujung dan tengah sebagai berikut:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \text{x} \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

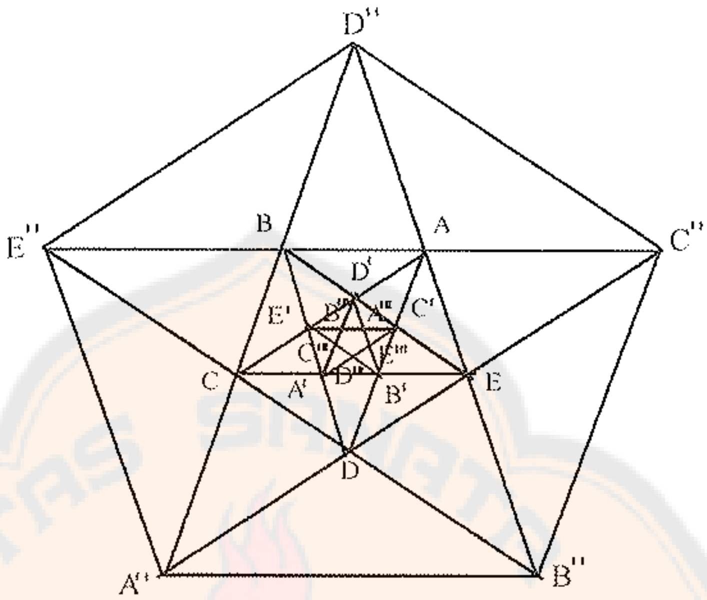
$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ atau } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Karena angka-angka Fibonacci merupakan angka-angka pecahan positif maka $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sehingga $\tau = 1{,}618033987\ldots$

Perbandingan pada pembagi ujung dan tengah yang terjadi secara terus-menerus dapat ditunjukkan dengan membandingkan segmen-segmen dalam segilima beraturan ABCDE terhadap segmen-segmen dalam segilima beraturan lainnya yang lebih kecil atau segmen-segmen dalam segilima beraturan lainnya yang lebih besar, seperti penjelasan berikut ini:



Gambar 48

$$ABCDE \sim A^{1}B^{1}C^{1}D^{1}E^{1} \sim A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11} \sim A^{111}B^{111}C^{111}D^{111}E^{111}$$

Sebelum membahas lebih lanjut, akan ditunjukkan sifat kesebangunan pada gambar 48.

Diketahui: segilima ABCDE beraturan.

Dibuktikan: segilima beraturan ABCDE ~ segilima beraturan $A^{1}B^{1}C^{1}D^{1}E^{1}$ ~ segilima beraturan $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$.

Bukti:

Karena segilima ABCDE beraturan maka:

$m\angle BAE = m\angle AED = m\angle EDC = m\angle DCB = m\angle CBA = 108$

Dipandang jajar genjang $BAEA^{1}$, maka $m\angle BAE = m\angle BA^{1}E$.

Dipandang jajar genjang $AEDE^{1}$, maka $m\angle AED = m\angle AE^{1}D$.

Dipandang jajar genjang $EDCD^{1}$, maka $m\angle EDC = m\angle ED^{1}C$.

Dipandang jajar genjang $DCBC^{1}$, maka $m\angle DCB = m\ \angle DC^{1}B$.

Dipandang jajar genjang $CBAB^{1}$, maka $m\angle CBA = m\ \angle CB^{1}A$.

karena $\frac{A^1B^1}{AB} = \frac{B^1C^1}{BC} = \frac{C^1D^1}{CD} = \frac{D^1E^1}{DE} = \frac{E^1A^1}{EA}$

maka segilima ABCDE ~ segilima $A^1B^1C^1D^1E^1$.

Dipandang jajar genjang $E^{11}AB^{11}A^{11}$, maka $m\angle E^{11}AB^{11} = m\angle E^{11}A^{11}B^{11}$.

Dipandang jajar genjang $A^{11}BC^{11}B^{11}$, maka $m\angle A^{11}BC^{11} = m\angle A^{11}B^{11}C^{11}$.

Dipandang jajar genjang $B^{11}CD^{11}C^{11}$, maka $m\angle B^{11}CD^{11} = m\angle B^{11}C^{11}D^{11}$.

Dipandang jajar genjang $C^{11}DE^{11}D^{11}$, maka $m\angle C^{11}DE^{11} = m\angle C^{11}D^{11}E^{11}$.

Dipandang jajar genjang $D^{11}EA^{11}E^{11}$, maka $m\angle D^{11}EA^{11} = m\angle D^{11}E^{11}A^{11}$.

karena $\frac{AB}{A^{11}B^{11}} = \frac{BC}{B^{11}C^{11}} = \frac{CD}{C^{11}D^{11}} = \frac{DE}{D^{11}E^{11}} = \frac{EA}{E^{11}A^{11}}$

maka segilima ABCDE ~ segilima $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$.

Jadi : segilima beraturan ABCDE ~ segilima beraturan $A^1B^1C^1D^1E^1$ ~ segilima beraturan $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$. □

1. Perbandingan pada pembagi ujung dan tengah pada segmen-segmen dalam segilima beraturan ABCDE terhadap segmen-segmen dalam segilima beraturan $A^1B^1C^1D^1E^1$ yang lebih kecil.

   a. Dipandang segilima ABCDE.

   Diketahui: $CD = CB^1 = CD^1$

   $CE = CB^1 + B^1E$, merupakan diagonal segilima beraturan ABCDE yang mewakili diagonal-diagonal yang lain.

   Misal : a = bagian terbesar segmen CE (dalam hal ini CB^1)

   b = bagian terkecil segmen CE (dalam hal ini B^1E)

Berdasarkan definisi III.A.2 kita peroleh bahwa:

$$\frac{CB^1}{B^1E} = \frac{CE}{CB^1} = \tau = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

b. Dipandang segilima $A^1B^1C^1D^1E^1$

Diketahui: $C^1D^1 = C^1B^{111} = C^1B^1$

$C^1E^1 = C^1B^{111} + B^{111}E^1$, merupakan diagonal segilima beraturan $A^1B^1C^1D^1E^1$ yang mewakili diagonal-diagonal yang lain.

Misal: p = bagian terbesar segmen C^1E^1 (dalam hal ini C^1B^{111})

q = bagian terkecil segmen C^1E^1 (dalam hal ini $B^{111}E^1$)

Berdasarkan definisi III.A.2 kita peroleh bahwa:

$$\frac{CE}{CB^1} = \frac{C^1E^1}{C^1B^{111}} = \tau = \frac{p}{q} = \frac{p+q}{p}$$

2. Perbandingan pada pembagi ujung dan tengah pada segmen-segmen dalam segilima beraturan ABCDE terhadap segmen-segmen dalam segilima beraturan $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$ yang lebih besar.

a. Dipandang segilima ABCDE

Analisis pembahasan sama dengan analisis pembahasan no. 1.a.

b. Pandang segilima $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$

Diketahui: $C^{11}D^{11} = C^{11}B = C^{11}D$

$C^{11}E^{11} = C^{11}B + BE^{11}$, merupakan diagonal segilima beraturan $A^{11}B^{11}C^{11}D^{11}E^{11}$ yang mewakili diagonal-diagonal yang lain.

misal: r = bagian terbesar segmen $C''E''$ (dalam hal ini $C''B$)

s = bagian terkecil segmen $C''E''$ (dalam hal ini BE'')

Berdasarkan definisi III.A.2 kita peroleh bahwa:

$$\frac{C''B}{BE''} = \frac{C''E''}{C''B} = \tau = \frac{r}{s} = \frac{r+s}{s}$$

Berdasarkan perbandingan pada segmen-segmen dalam segilima beraturan di atas, maka dapat kita misalkan:

$d_0 = C'''A'''$ (diagonal segilima beraturan $A'''B'''C'''D'''E'''$).

$d_1 = C'A'$ (diagonal segilima beraturan $A'B'C'D'E'$).

$d_2 = CA$ (diagonal segilima beraturan ABCDE).

$d_3 = C''A''$ (diagonal segilima beraturan $A''B''C''D''E''$).

•
•
•

d_i, i = 0, 1, 2, 3, … .

$a_0 = D'''E'''$ (sisi segilima beraturan $A'''B'''C'''D'''E'''$).

$a_1 = D'E'$ (sisi segilima beraturan $A'B'C'D'E'$).

$a_2 = DE$ (sisi segilima beraturan ABCDE).

$a_3 = D''E''$ (sisi segilima beraturan $A''B''C''D''E''$).

•
•
•

a_j, j = 0, 1, 2, 3, … .

Karena $AE' = AD' + D'E' = C'A' + D'E'$, maka $a_2 = d_1 + a_1$

$AC = AD' + D'E' + E'C$

$= AD^1 + E^1C + D^1E^1$

$= AD^1 + AD^1 + D^1E^1$

$= 2AD^1 + D^1E^1$

$= 2C^1A^1 + D^1E^1$, maka $d_2 = 2d_1 + a_1$

Karena $C^{11}D = C^{11}E + ED = AC + ED$, maka $a_3 = d_2 + a_2$

$C^{11}A^{11} = C^{11}E + ED + DA^{11}$

$= C^{11}E + DA^{11} + ED$

$= AC + AC + ED$

$= 2AC + ED$, maka $d_3 = 2d_2 + a_2$

Sehingga dapat kita rumuskan: $a_{i+1} = d_i + a_i$

$d_{i+1} = 2d_i + a_i$

Dimulai dengan $a_0 = 1$ dan $d_0 = 1$, kita peroleh:

i	0	1	2	3	4	5	...
a_i	1	2	5	13	34	89	...
d_i	1	3	8	21	55	144	...

Tabel 1. Sisi dan diagonal pada segilima beraturan

Berdasarkan tabel 1 di atas, ditunjukkan bahwa pembagi ujung dan tengah pada diagonal-diagonal suatu segilima beraturan terjadi secara periodik tanpa henti seperti yang dinyatakan dalam bilangan Fibonacci dengan:

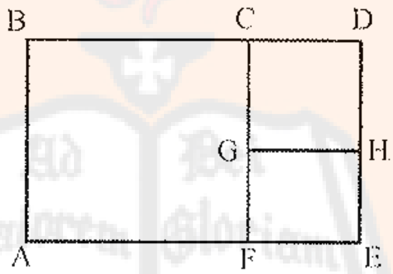
$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618033987\ldots$$

B. Segiempat Emas

Pada abad 5 sebelum masehi, orang-orang Yunani menghubungkan bentuk spiral dari rumah kerang dengan bentuk spiral yang diperoleh dari segiempat emas. Disebut segiempat emas karena mempunyai perbandingan dalam pembagi ujung dan tengah sebagai bentuk perluasan dari pembagi ujung dan tengah dalam segilima beraturan.

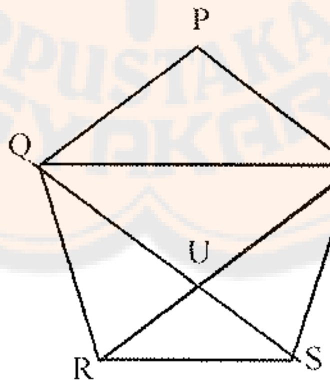
Contoh segiempat emas ABDE.

Pembagi ujung dan tengahnya : $\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{DE} = \tau = \frac{DH}{HE} = \frac{DE}{DH}$



Gambar 49

Hubungan segilima beraturan dengan segiempat emas dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 50

$$\frac{QU}{US} = \frac{QS}{QU} = \tau$$

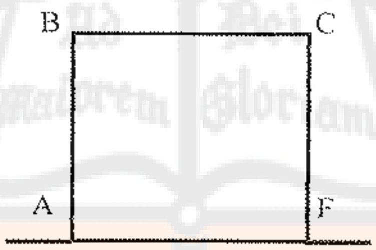
1. Dipandang gambar 50

   Segilima PQRST mempunyai panjang sisi satu satuan dan panjang diagonal τ. Diagonal QS berpotongan dengan diagonal RT di U. Dalam pembahasan pembagi ujung dan tengah dalam subbab sebelumnya, diagonal-diagonal tersebut saling membagi menurut irisan emas yaitu:

   $\frac{QU}{US} = \frac{QS}{QU}$ atau $\frac{UT}{RU} = \frac{RT}{UT}$

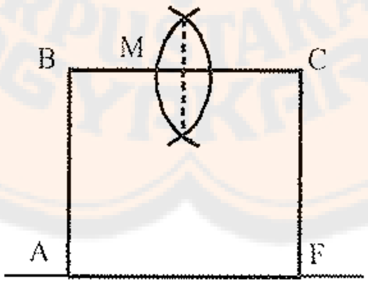
2. Untuk memperoleh segiempat emas dalam perbandingan pembagi ujung dan tengah seperti yang dinyatakan dalam gambar 49, maka kita gunakan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. Dibentuk persegi ABCF



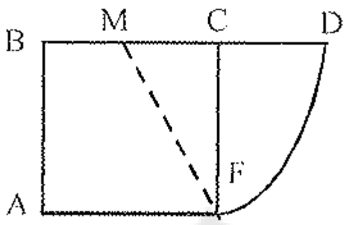
Gambar 51

   b. Dilukis titik M sebagai titik tengah BC sehingga BM = MC



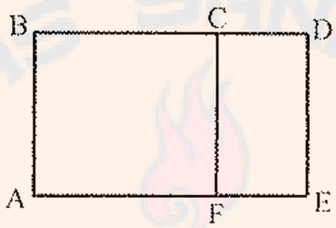
Gambar 52

   c. Dengan M sebagai titik pusat dan MF sebagai radius, dibuat suatu lingkaran yang memotong perpanjangan BC di D.



Gambar 53

d. Melalui D ditarik garis yang tegak lurus dengan BD dan berpotongan dengan perpanjangan garis AF di E.

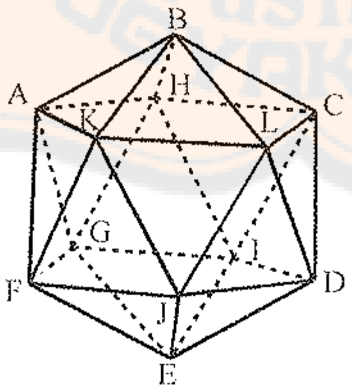


Gambar 54

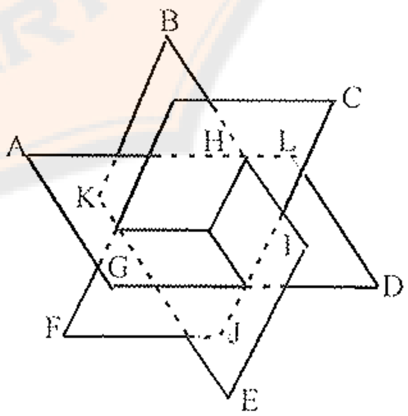
Kita peroleh segiempat ABDE sebagai segiempat emas, yang oleh CF telah dibagi dalam sebuah persegi ABCF dan sebuah segiempat CDEF yang juga merupakan segiempat emas, sehingga:

$$\tau = \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{BA}$$

Keberadaan daerah segiempat emas secara nyata dapat kita lihat pada suatu bidang duapuluh beraturan (gambar 55) berikut ini:



Gambar 55
Bidang Duapuluh Beraturan
("Regular Icosahedron")



Gambar 56. Tiga daerah segiempat emas yang saling tegaklurus

Keterangan: berdasarkan pengamatan gambar 55 dan gambar 56 di atas dapat kita peroleh:

1. Limas B.AKLCH mempunyai alas daerah segilima beraturan AKLCH dan titik puncaknya B. Dengan demikian, melalui bidang duapuluh beraturan ini terdapat 12 limas dengan masing-masing alasnya berbentuk daerah segilima beraturan.

   Jadi terdapat 12 daerah segilima.

2. Setiap dua rusuk yang sejajar, misal AF dan CD membentuk segiempat AFDC, karena sisi yang lebih panjang AC dan FD berturut-turut merupakan diagonal dari segilima AKLCH dan FJDIG, dan AF, CD mempunyai panjang yang sama dengan sisi segilima AKLCH dan FJDIG, maka berdasarkan perbandingan pada pembagi ujung dan tengah, kita peroleh:

   $\frac{x}{y} = \tau \Rightarrow x = \tau\, y$, dengan x = diagonal segilima

   y = sisi segilima

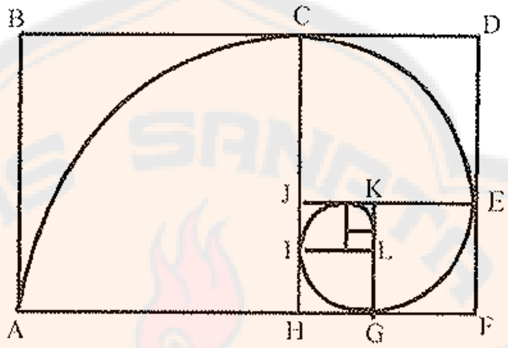
Karena diagonal segilima adalah τ kali sisi-sisinya, maka segiempat tersebut AFDC merupakan "segiempat emas" yang perbandingan sisi-sisinya adalah τ : 1.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa bidang duapuluh beraturan dapat terbentuk dari tiga daerah segiempat emas yang saling tegak lurus (dipandang gambar 56).

C. Spiral Emas

Spiral Emas adalah suatu kurva berbentuk spiral yang menyinggung sisi-sisi segiempat emas dalam pembagi ujung dan tengah.

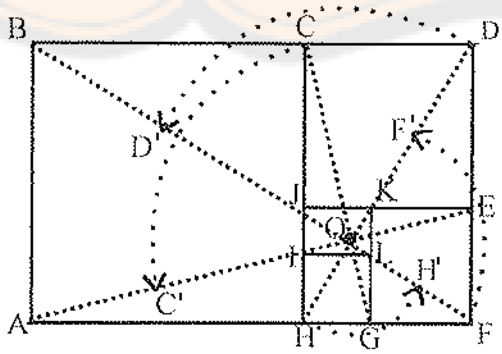
Spiral emas ini dapat kita lihat dalam gambar 57 berikut ini:



Gambar 57
Spiral Emas dalam Segiempat Emas

Kurva spiral emas dalam gambar 57 sebenarnya merupakan pendekatan matematik dari kurva spiral yang sesungguhnya, karena kurva spiral sesungguhnya memotong sisi-sisi segiempat emas dalam pembagi ujung dan tengah pada sudut-sudut yang sangat kecil dan bukan menyinggungnya. (dikutip dari buku "THE LANGUAGE OF MATHEMATICS").

Dalam gambar 57 tampak bahwa spiral emas tersebut menyinggung sisi-sisi segiempat emas yang diketahui dititik: A, C, E, G, I, ...; dengan: $\frac{BC}{CD} = \tau = \frac{DE}{EF} = \frac{FG}{GH} = \frac{HI}{IJ} = \ldots$



Gambar 58. [O, τ] (O, $\frac{1}{4}\pi$)

Dalam gambar 58 tampak bahwa O adalah titik potong BF dan DH yang saling tegak lurus dan masing-masing segmen merupakan diagonal segiempat emas ABDF dan CDFH.

Berikut ini akan ditunjukkan BF $\perp$ DH dan m$\angle$BOD = 90 (siku-siku).

Diketahui: Δ BDF ~ ΔDFH, maka $\angle$FBD = $\angle$HDF = α.

ΔHCD ~ ΔDFH, maka $\angle$CDH = $\angle$FHD = β.

Dibuktikan: BF $\perp$ DH

Bukti:

Diperoleh: $\angle$BFD = $\angle$DHF = β.

Karena $\angle$CDF = $\angle$DFH, maka m$\angle$CDF = m$\angle$CDH + m$\angle$FDH

$$90 = \beta + \alpha$$

Dipandang ΔBOD.

Karena $\alpha + \beta = 90°$

maka $\angle BOD + \angle OBD + \angle BDO = 180°$

$$\angle BOD + \alpha + \beta = 180°$$

$$\angle BOD + 90° = 180°$$

karena $\angle$BOD = 90° (siku-siku), maka BF $\perp$ DH.

Karena C membagi BD dalam pembagi ujung dan tengah dan karena OC membagi dua sudut ($\perp$) BOD, maka ditunjukkan bahwa:

$$\frac{OB}{OD} = \tau = \frac{BC}{CD}$$

Bukti: BF $\perp$ DH $\Rightarrow$ m$\angle$BOD = m$\angle$BOH = m$\angle$HOF = m$\angle$FOD = 90

Oleh rotasi (O,90°) $\Rightarrow$ CDFH $\rightarrow$ $C^1D^1F^1H^1$, sehingga kita peroleh:

$OD = OD^1, OC = OC^1, OH = OH^1, OF = OF^1$

Karena $BC : CD = \tau : 1$

maka oleh dilatasi $O(\tau) \Rightarrow C^1D^1F^1H^1 \rightarrow ABDF$

sehingga: $\tau \,.\, OD^1 = OB \Rightarrow \tau \,.\, OD = OB$

$\tau \,.\, OC^1 = OA \Rightarrow \tau \,.\, OC = OA$

$\tau \,.\, OH^1 = OF \Rightarrow \tau \,.\, OH = OF$

$\tau \,.\, OF^1 = OD \Rightarrow \tau \,.\, OF = OD$

Jadi $\tau = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OF}{OH} = \dfrac{OD}{OF} = \dfrac{BC}{CD}$. □

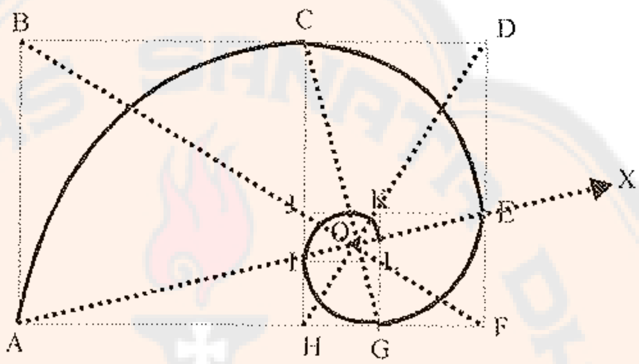
Berdasarkan pembuktian di atas dapat kita katakan bahwa: cara mendapatkan segiempat emas ABDF (yang lebih besar) dari segiempat emas CDFH (yang lebih kecil), kita dapat menggunakan rotasi dilatif dengan titik pusat O, k = τ dan sudut rotasi 90°.

Rotasi dilatif di atas mentranformasikan berturut-turut titik K ke J, J ke H, H ke F, F ke D, D ke B, dan berturut-turut titik I ke G, G ke E, E ke C, C ke A. Dengan kata lain, segiempat emas CDFH (yang lebih kecil) oleh rotasi dilatif dengan $\frac{1}{4}$ putaran positif dengan titik pusat O dan dilatasi $[O, \tau]$ ditransformasikan menjadi segiempat emas ABDF (yang lebih besar).

Sebaliknya dengan cara yang sama, segiempat emas ABDF (yang lebih besar) oleh rotasi dilatif dengan $\frac{1}{4}$ putaran negatif (titik pusatnya O) dan dilatasi $[O, \tau^{-1}]$ atau $\left[O, \frac{1}{\tau}\right]$ ditransformasikan menjadi segiempat emas CDFH (yang lebih kecil).

Kita tuliskan bahwa:

Dipandang gambar 59



Gambar 59

OE = Garis Kutub

Misal: E(r,θ) dengan r = OE = 1

$$\theta = \angle XOE = 0$$

OX merupakan sumbu kutub, dengan O titik kutubnya (titik pusat).

Dipandang E(r,θ) sebagai titik awal pengukuran atau perhitungan. Dengan rotasi dilatif oleh $\frac{1}{4}$ putaran positif dan dilatasi O(τ) yang memetakan E ke C, berarti mentransformasikan setiap titik (r, θ) ke (τr, $\theta + \frac{1}{2}\pi$). Karena E(r,θ) = E(1,0°) kita peroleh kordinat-koordinat titik sebagai berikut:

1. Arah rotasi berlawanan perputaran jarum jam.

Maka $C(\tau, \frac{1}{2}\pi)$

$$\theta = \frac{1}{2}\pi n \Rightarrow \left.\begin{aligned} n &= \frac{2\theta}{\pi} \\ r &= \tau^{n} \end{aligned}\right\} r = \tau^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

Maka titik-titik tersebut berada dalam kurva spiral dengan r = μ^{θ}, dengan $\mu = \tau^{\frac{2}{\pi}}$ yang menyinggung segiempat emas dalam pembagi ujung dan tengah secara terus menerus (kontinu).

Selain kurva "Spiral Emas", bentuk spiral pada rumah kerang Nautilus yang dapat dirumuskan secara matematika juga terdapat kurva spiral lain yang disebut dengan kurva "Spiral Logaritma".

Pembentukan kurva "Spiral Logaritma", secara matematika lain dengan pembentukan kurva "Spiral Emas". Nama "Spiral Emas" diberikan pada suatu kurva spiral yang mengalami perubahan radius sebesar $r = \tau^{n}$ (untuk setiap $\frac{1}{4}$ putaran), sedangkan nama "Spiral Logaritma" diberikan pada suatu kurva spiral yang mengalami perubahan radius sebesar

$r = e^{\theta.\cot k}$ (untuk k = 79,5°, yang merupakan sudut khas spiral ini)

atau

$r = 10^{\frac{A}{360^{\circ}} \bullet {}^{10}\log 3{,}20}$ (untuk setiap putaran penuh, dengan A=57,3 θ).

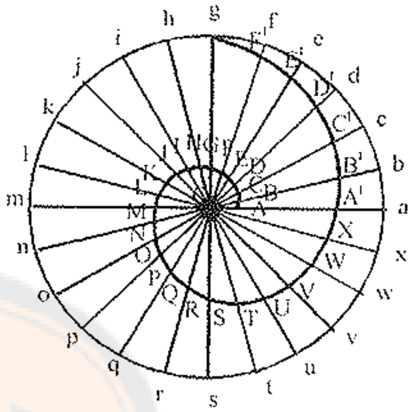
Pembentukan kurva "Spiral Logaritma" dapat kita lihat pada gambar 60 berikut ini:

1. m∠AOB = m∠BOC = … = 15°
2. Jika OA = 1,00 ⇒ OB = 1,06

   ⇒ OC = 1,12

$\Rightarrow$ … dst.

3. Jika memutar 1 putaran penuh, maka radius spiral menjadi 3,20 kali lipat.
4. Sudut khas Spiral Logaritma adalah 79,5°.



Gambar 60

Karena 3,20 = $10^{0,5051}$ atau ${}^{10}\log 320 = 0,5051$, maka jika kita memutari kurva secara putaran penuh (360°) dengan penambahan radius sebesar A°, kita peroleh:

$$r = 10^{\frac{A}{360}\cdot {}^{10}\log 320}$$

$$r = 10^{\frac{A}{360}\cdot 0,5051}$$

$$r = 10^{0,0014\cdot A}$$

$$r = e^{2,3026\cdot 0,0014\cdot A} \text{ (ingat: } 10 = e^{2,3026}\text{)}$$

$$r = e^{2,3026\cdot 0,0014\cdot 57,3\cdot\theta} \text{ (untuk A = 57,3}\theta\text{)}$$

$$r = e^{0,185\cdot\theta}$$

$$r = e^{\theta\cdot\cot\cdot k} \text{ (untuk k = 79,5°)}$$

Berdasarkan rumus tersebut, kita peroleh tabel berikut:

A (dalam derajat)	0	20	40	60	80	…	360	380	400	420	…
0,0014 x A	0	0,028	0,056	0,058	0,112	…	0,504	0,532	0,560	0,588	…
r = $10^{0,0014\cdot A}$	1	1,067	1,14	1,21	1,29	…	3,19	3,40	3,63	3,87	…
	(A)			(Q)			(B)			(P)	

Tabel 2. Panjang jari-jari untuk setiap titik–titik kurva spiral logaritma.
(dikutip dari buku "THE LANGUAGE OF MATHEMATICS" hal.142)

$A(\tau^2, \pi)$

•

•

•

$(\tau^n, \frac{n}{2}\pi)$, n = 1, 2, 3, ...

Dengan rotasi dilatif oleh $\frac{1}{4}$ putaran negatif dan dilatasi $\left[O, \frac{1}{\tau}\right]$ yang memetakan E ke G, berarti mentransformasikan setiap titik (r, θ) menjadi $(\frac{1}{\tau}r,\ \theta - \frac{1}{2}\pi)$, sehingga jika E(r,θ) = E(1,0°) kita peroleh koordinat-koordinat titik kutub sebagai berikut:

2. Arah rotasi searah perputaran jarum jam.

Maka $G(\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{2}\pi)$

$I(\frac{1}{\tau^2}, -\pi)$

•

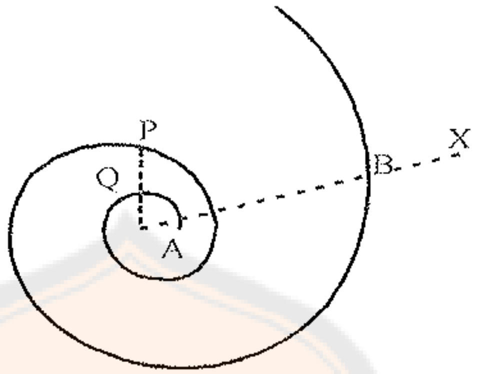
•

•

$(\frac{1}{\tau^n}, -\frac{n}{2}\pi)$, n = 1, 2, 3, ... atau $(\tau^n, \frac{n}{2}\pi)$, n = -1, -2, -3, ...

Untuk setiap $\frac{1}{4}$ putaran yang terjadi, kita peroleh:

$$r = \tau^n \text{ dan } \theta = \frac{1}{2}\pi\, n, \text{ untuk } n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$



Gambar 61

Dengan demikian, dapat kita ketahui bahwa spiral emas bukan satu-satunya kurva spiral dari rumah kerang Nautilus yang dapat dirumuskan secara matematika, tetapi terdapat kurva spiral lain yang sering disebut dengan "Spiral Logaritma".

Jadi, dengan kurva Spiral Emas dan kurva Spiral Logaritma tidak menutup kemungkinan adanya kurva spiral lain yang dapat dihitung secara matematika pada rumah kerang Nautilus.

Kurva spiral lain yang dapat dirumuskan secara matematika juga ada pada selimut tabung yang kita kenal dengan sebutan "Helix" atau "Spiral Archimedes". Akan tetapi, kurva spiral yang kita bahas disini hanya kurva spiral dari rumah kerang Nautilus saja, khususnya "Spiral Emas".

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Ruas garis lurus dikatakan telah dibagi menurut pembagi ujung dan tengah jika perbandingan ruas garis keseluruhan (utuh) dengan ruas garis (segmen) yang lebih besar sama dengan perbandingan ruas garis yang lebih besar dengan ruas garis yang lebih kecil.

Jika: a = bagian yang besar.

b = bagian yang kecil.

a + b = bagian keseluruhan (utuh).

maka pembagi ujung dan tengah dinyatakan dengan $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Perbandingan demikian dapat ditunjukkan oleh dua diagonal segilima beraturan yang berpotongan dan saling membagi menurut irisan emas. Perbandingan dalam pembagi ujung dan tengah tersebut tidak pernah berhenti pada suatu angka tertentu karena berhubungan dengan bilangan Fibonacci yang menunjukkan pecahan angka yang terus-menerus, yaitu $\tau = 1{,}618033987...$ yang kemudian dinamakan dengan "irisan emas". Karena bilangan Fibonacci merupakan bilangan pecahan positif maka $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, sehingga $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Selain ditunjukkan oleh dua diagonal segilima beraturan yang saling berpotongan, pembagi ujung dan tengah juga dapat ditunjukkan dalam persegi panjang yang mempunyai sisi-sisi dalam rasio $\tau : 1$, yang kemudian dikenal dengan istilah "segiempat emas".

Segiempat emas terbagi dalam sebuah persegi dan sebuah segiempat emas yang lebih kecil.

Untuk mentransformasikan suatu segiempat emas ke segiempat emas lainnya yang lebih kecil atau lebih besar, kita dapat menggunakan rotasi dilatif dengan titik pusat O. Setiap titik dari segiempat emas-segiempat emas yang diperoleh dapat ditransformasikan dengan menggunakan hasilkali rotasi dan dilatasi.

Dengan rotasi oleh $\frac{1}{4}$ putaran positif dan dilatasi $O(\tau)$ dapat ditransformasikan suatu segiempat emas ke segiempat emas lainnya yang lebih besar. Dengan rotasi oleh $\frac{1}{4}$ putaran negatif dan dilatasi $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ dapat ditransformasikan suatu segiempat emas ke segiempat emas lainnya yang lebih kecil. Jika titik-titik hasil transformasi tersebut dihubungkan oleh busur $\frac{1}{4}$ lingkaran, akan diperoleh kurva spiral dengan $r = \mu^{\theta}$ dan $\mu = \tau^{\frac{2}{\pi}}$, sehingga kurva spiral tersebut menyinggung setiap titik pada segiempat emas-segiempat emas dalam pembagi ujung dan tengah secara terus menerus (kontinu).

Kurva spiral yang diperoleh tersebut kita namakan dengan istilah "Spiral Emas".

Kurva spiral emas yang sesungguhnya dapat kita lihat pada rumah kerang Nautilus bagian dalam.

B. Implikasi Dan Saran

Dengan mempelajari kurva spiral emas ini, penulis dapat mengenal dan mendalami topik-topik geometri Euclides. Selain itu diperoleh hal menarik yaitu perbandingan emas pada suatu segmen garis yang sangat bermanfaat bila diterapkan dalam kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Alexander, Daniel C and Kooberlein, Geralyn M, 1992. *Geometry*. Copyright © by Wm C. Brown Publishers.

Artmann, Benno, 1999. *Euclid-The Creation Of Mathematics*. New York. Springer, Inc.

Boyer, Carl, 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Coxeter, H. S. M, 1961, *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley and Sons, Inc.

Jacobs, Harold R, 1974. *Geometri*. San Francisco. W. H. Freeman and Co.

Land, Frank, 1960. *The Language of Mathematics*. New York: Doubleday & Company, Inc.

Moeharti, H. W, 1975. *Ilmu Ukur Vektor dan Tranformasi Untuk Sekolah Menengah*. Yogyakarta: Penerbit Yayasan Pembina FKIE – IKIP.

Moeharti, H. W, 1996. *Sistem-sistem Geometri*. Universitas Terbuka.

Rawuh, 1992. *Geometri Transformasi*. Depdikbud Dirjen Dikti, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi.

Smart, Middlemiss M, 1940. *Analytic Geometry*. Third edition. New York. McGraw-Hill Book Co.

Susanta, B, 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Fakultas MIPA, UGM.

Tannenbaum, Peter and Arnold, Robert, 1992. *Excursions In Modern Mathematics*. California: Prentice-Hall, Inc.