REPRESENTASI RUANG HILBERT SEBAGAI JUMLAHAN LANGSUNG

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Di Universitas Sanata Dharma

Disusun Oleh :

SHINTA KUMALA DEWI
NIM : 951414015
NIRM : 950051120501120015

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

REPRESENTASI RUANG HILBERT SEBAGAI JUMLAHAN LANGSUNG

Disusun Oleh:

SHINTA KUMALA DEWI
NIM : 951414015
NIRM :950051120501120015

Telah diperiksa, dibaca dan disetujui oleh:

Pembimbing

(Drs. St. Susento, M.Si.)

tanggal : 22/10 - 2001

S K R I P S I

REPRESENTASI RUANG HILBERT SEBAGAI JUMLAHAN LANGSUNG

Dipersiapkan dan ditulis oleh

SHINTA KUMALA DEWI
NIM : 951414 015
NIRM : 950051120501120015

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
Pada tanggal : 3 Oktober 2001
Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT	
Anggota	: 1. Prof. Drs. R. Soemantri	
	2. Drs. St. Susento, M.Si	
	3. M. Andy Rudhito, S.Pd	

Yogyakarta, Oktober 2001
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
Dekan,

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat hasil karya orang lain, kecuali seperti yang telah disebutkan dalam kutipan atau daftar pustaka, sebagaimana layaknya suatu karya ilmiah.

Yogyakarta, Oktober 2001

Penulis,

Shinta Kumala Dewi

ABSTRAK

REPRESENTASI RUANG HILBERT SEBAGAI JUMLAHAN LANGSUNG

Oleh : Shinta Kumala Dewi

Ruang Hilbert H adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap terhadap metrik pada H. Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari Y dan Z yang merupakan subruang-subruang dari X, ditulis $X = Y \oplus Z$, jika setiap $\underline{x} \in X$ mempunyai representasi tunggal $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$, di mana $\underline{y} \in Y$ dan $\underline{z} \in Z$. Dengan mengingat bahwa ruang Hilbert H juga merupakan ruang vektor, maka H pun dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari subruang-subruangnya. Lebih tepatnya, H dapat direpresentasikan sebagai jumlahan langsung dari subruang-subruang yang saling ortogonal.

REPRESENTATION OF HILBERT SPACE AS DIRECT SUM

By: Shinta Kumala Dewi

The Hilbert space H is a complete inner product to metric on H. The vector space X is said to be the direct sum of two subspaces Y and Z of X, written $X = Y \oplus Z$, if each $\underline{x} \in X$ has a unique representation $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$, where $\underline{y} \in X$ and $\underline{z} \in Z$. Remembering, the Hilbert space H is a vector space too, then H can be expressed to be the direct sum of its subspaces. More exactly, H can be representated as a direct sum of subspaces that orthogonal each other.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat kasih dan perlindunganNya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Representasi Ruang Hilbert sebagai Jumlahan Langsung" . Skripsi ini disusun untuk memenuhi syarat menempuh ujian sarjana pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma

Di dalam karya tulis ini tidak akan ditemui suatu hal yang baru. Hal ini dikarenakan penulis tidak melakukan penelitian terhadap suatu konsep atau teori sehingga menghasilkan suatu konsep dan teori baru yang dapat disumbangkan dalam dunia matematika. Jadi, pada dasarnya karya tulis ini diharapkan dapat membantu para pembaca untuk mengenal konsep Ruang Hilbert dan Representasi Ruang Hilbert sebagai suatu Jumlahan Langsung dari subruang-subruang yang ortogonal. Beberapa materi yang ada dalam karya tulis ini, seperti Ruang Metrik, Ruang Vektor, Ruang Bernorma dan Ruang Hasil Kali Dalam diperkenalkan dalam kerangka untuk memperkenalkan Ruang Hilbert. Dalam pembahasan tiap materi tersebut, tidak semua sifat-sifat yang ada dibahas dalam tulisan ini, tetapi hanya sifat-sifat yang mendukung untuk materi selanjutnya.

Penulis menyadari bahwa penyusunan karya ini tidak dapat selesai tanpa bantuan banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

- Bapak Drs. St. Susento, M.Si selaku pembimbing, yang telah membimbing dan mengoreksi karya tulis ini hingga selesai;
- Bapak Prof. Drs. R. Soemantri, selaku dosen penguji, yang telah banyak memberikan koreksi dan kritikan membangun bagi karya tulis ini.
- Bapak M. Andy Rudhito, S.Pd, selaku dosen penguji, yang telah banyak pula memberikan masukkan-masukkan berharga bagi penulis demi perbaikan isi karya tulis ini.

- Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng, karyawan sekretariat JPMIPA, yang telah banyak membantu penulis dalam hal administasi kemahasiswaan selama berjuang mencari sebagian makna hidup di Universitas Sanata Dharma.
- Karyawan-karyawan UPT Perpustakaan USD, kampus III Paingan.
- Keluarga Bapak Jumadi, Condong Catur, yang telah menerima kehadiran penulis dengan rasa kekeluargaan yang begitu indah.
- Teman-temanku seperjuangan, C. Silverindrayanti, Henny Setyawan, Bowo, Elvie, Yanti, Rm. Herman, Retno Kusmadewi, Trie, Hongkie Julie, S.Pd, dll., serta adik-adik angkatan Mario, Felex, Luy, yang telah memberi semangat dan menggoreskan selarik kenangan dalam kebersamaan bagi penulis selama menempuh studi di Universitas Sanata Dharma.
- Teman baruku Lukas Teguh Jatmiko, yang telah membuka cakrawalaku dalam berpikir dan berkreasi untuk mengisi hidup lebih berarti serta mensyukuri segala sesuatu yang diperoleh dalam hidup.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna, tetapi penulis menjamin bahwa skripsi ini adalah karya asli penulis sendiri. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini berguna bagi perkembangan ilmu matematika dan pembaca.

Yogyakarta, Oktober 2001

Penulis,

Shinta Kumla Dewi

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang Masalah.

Di dalam aljabar linear, kita telah mempelajari pengertian ruang vektor dan subruang vektor secara lebih umum. Ternyata, suatu ruang vektor dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari dua subruangnya. Misal X sembarang ruang vektor dengan Y dan Z sebagai subruang-subruangnya. Berdasarkan definisi jumlahan langsung pada ruang vektor (definisi 5.2.), maka X dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari Y dan Z, ditulis: $Y \oplus Z$.

Ruang hasil kali dalam merupakan suatu ruang vektor bernorma spesial dengan operas hasil kali dalam yang didefinisikan di dalamnya. Dikatakan spesial karena operasi hasil kali dalamnya dapat mendefinisikan sebuah norma pada ruang tersebut. Padahal suatu norma dari ruang vektor bernorma mampu membangkitkan suatu metrik. Dengan demikian, suatu operasi hasil kali dalam dapat mendefinisikan suatu metrik berbentuk norma. Salah satu ruang hasil kali dalam yang demikian adalah ruang Hilbert. Jadi, selain merupakan ruang vektor, ruang Hilbert juga merupakan ruang metrik. Oleh karena itu, konsep-konsep yang terdapat pada ruang metrik dan ruang vektor pun terdapat pula pada ruang Hilbert, misalnya konsep kelengkapan dan jumlahan langsung.

I.2. Tujuan Penulisan

Bertolak dari latar belakang masalah penulisan skripsi ini, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Untuk memahami pengertian dari ruang Hilbert.
2. Mendeskripsikan Teorema Jumlahan Langsung pada ruang Hilbert, yang menerangkan representasi ruang Hilbert sebagai jumlahan langsung dari subruang-subruangnya yang saling ortogonal.

I.3. Ruang Lingkup Pembahasan.

Dalam skripsi ini akan diperkenalkan sebuah ruang, yaitu ruang Hilbert dan representasinya sebagai jumlahan langsung dari dua subruang yang saling ortogonal. Tetapi sebelum masuk ke pembahasan utama akan diulas terlebih dahulu beberapa materi pendukung, antara lain: ruang metrik, ruang vektor, ruang bernorma, dan ruang hasil kali dalam. Mengingat luasnya pembahasan konsep-konsep pada setiap materi pendukung dan ruang Hilbert sendiri, maka diberikan beberapa batasan sebagai berikut:

1. Pengenalan tentang ruang metrik meliputi pengertian metrik, ruang metrik dan subruang dari ruang metrik, kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik serta apa yang dimaksud dengan ruang metrik lengkap.

2. Ruang vektor yang didefinisikan dalam skripsi ini merupakan ruang vektor yang lebih umum atas medan skalar $\mathbb{R}$. Dilanjutkan dengan mengulas secara singkat mengenai norma, yang dibatasi sebagai fungsi pada ruang vektor yang bernilai real, dan ruang bernorma serta keterkaitan antara norma dengan metrik.
3. Pembahasan pada ruang hasil kali dalam meliputi operasi hasil kali dalam, pengertian ruang hasil kali dalam, dan beberapa sifat dasar dari ruang hasil kali dalam seperti: Ketaksamaan Schwarz, ketaksamaan segitiga, dan kekontinuan dari operasi hasil kali dalam.
4. Operasi hasil kali dalam pada suatu ruang vektor X dibatasi hanya sebagai fungsi dari $X \times X \to \mathbb{R}$.
5. Keisomorfisan dan teorema yang menunjukkan bahwa setiap ruang hasil kali dalam mempunyai pelengkap berupa ruang Hilbert tidak dibahas dalam skripsi ini.
6. Konsep keortogonalan dan himpunan konveks dibahas dalam kerangka ruang hasil kali dalam, bukan dalam ruang vektor, karena pembaca dianggap telah memahami konsep tersebut pada ruang vektor.
7. Dalam skripsi ini, penerapan konsep keortogonalan hanya digunakan dalam pendefinisian himpunan komplemen ortogonal dan teorema jumlahan langsung pada ruang Hilbert.
8. Satu sifat penting dari ruang Hilbert adalah bahwa ruang Hilbert merupakan pelengkap dari ruang hasil kali dalam tidak dibahas dalam skripsi ini.

9. Penerapan teorema jumlahan langsung dalam pembahasan ruang Hilbert tidak diulas dalam skripsi ini.

I.4. Metode Penulisan.

Skripsi ini menggunakan metode studi pustaka. Dan, buku yang dipergunakan sebagai acuan utama penulisan skripsi ini adalah buku karangan Erwin Kreyszig yang berjudul *Introductory Functional Analysis with Application*, tahun 1989.

I.5. Sistematika Pembahasan.

Pembahasan mengenai ruang Hilbert dan representasinya sebagai jumlahan langsung memerlukan beberapa materi prasyarat, seperti yang dijelaskan berikut ini:

Pengenalan akan metrik dan ruang metrik dibahas dalam bab II. Definisi metrik dan ruang metrik disertai dengan beberapa contoh dan lemma yang berkaitan dengan contoh-contoh tersebut diulas dalam subbab II.1. Sedangkan, pada subbab II.2. didefinisikan beberapa konsep dasar dalam ruang metrik, yaitu: titik limit, himpunan tertutup, dan penutup himpunan. Masing-masing konsep disertai contoh-contoh.

Kelengkapan ruang metrik diulas dalam bab III. Konsep-konsep yang dibahas pada subbab III.1. adalah konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik. Selain itu, didefinisikan pula ruang metrik lengkap. Sedangkan, definisi tentang subruang metrik, teorema penutup yang dilanjutkan dengan teorema subruang lengkap dari suatu ruang metrik lengkap dibahas pada subbab III.2.

Bab IV membahas tentang ruang hasil kali dalam. Sebelum kita mendefinisikan ruang hasil kali dalam dan membahas beberapa teorema di dalamnya, maka pada subbab IV.1. akan diulas sedikit mengenai ruang vektor dan ruang bernorma, serta hubungan antara norma dan metrik. Selanjutnya, pada subbab IV.2. diberikan definisi dari ruang hasil kali dalam disertai dengan beberapa contoh. Pada subbab ini dibahas pula empat buah teorema, yaitu teorema persamaan jajaran genjang, teorema ketaksamaan Schwarz, teorema ketaksamaan segitiga, dan teorema kekontinuan operasi hasil kali dalam. Konsep keortogonalan pada ruang hasil kali dalam dan himpunan ortogonal diulas pada subbab IV.3. Subbab terakhir menyoroti himpunan konveks, yang akan membahas dua teorema penting, yaitu Teorema 4.5. dan Teorema 4.6..

Pada bab V akan dibicarakan topik utama dari skripsi ini, yaitu Ruang Hilbert. Pengertian ruang Hilbert didefinisikan pada subbab V.1. dengan disertai beberapa contoh. Subbab V.2. membahas jumlahan langsung. Sebelum membahas representasi ruang Hilbert sebagai jumlahan langsung, terlebih dahulu akan didefinisikan konsep jumlahan langsung dari suatu ruang vektor.

Bab VI berisi penutup, yang menguraikan pokok-pokok penting dalam penelitian skripsi ini. Selanjutnya, penulis menyampaikan beberapa saran bagi penelitian selanjutnya, khususnya yang berhubungan dengan materi-materi dalam ruang Hilbert.

BAB II

RUANG METRIK

Dalam bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai untuk mempelajari bab-bab selanjutnya. Definisi-definisi, teorema-teorema, dan beberapa contoh yang ada dibagi dalam dua subbab. Subbab pertama akan membahas tentang pengertian matrik dan ruang metrik. Diulas pula beberapa teorema yang akan membantu kita untuk menyelesaikan contoh-contoh kasus. Subbab kedua mengulas tentang himpunan tertutup dan penutup himpunan.

II.1. Pengertian Ruang Metrik

Dalam aljabar kita telah mengenal pengertian "jarak" $d(x, y)$ antara dua bilangan real x dan y pada garis real $\mathbb{R}$, yaitu $d(x, y) = |x - y|$. Perhatikan bahwa untuk sembarang x dan y, selisih $(x - y)$ ada dan tunggal, sehingga nilai mutlak $|x - y|$ juga ada dan tunggal. Dengan demikian, d merupakan fungsi jarak dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

Dalam analisis fungsional, kita juga akan membahas fungsi jarak seperti di atas. Tetapi sebagai ganti $\mathbb{R}$ kita gunakan himpunan abstrak X. Sehingga fungsinya adalah dari $X \times X$ ke $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1. (Metrik). Misalkan X sembarang himpunan tak kosong. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X, jika untuk setiap $x, y \in X$ dipenuhi syarat-syarat,

(i). $d(x, y) \geq 0$

(ii). $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

(iii). $d(x, y) = d(y, x)$

(iv). $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. ■

Syarat (iii) dalam definisi di atas disebut sifat simetri, sedangkan syarat (iv) biasa dinamakan ketaksamaan segitiga. Selanjutnya berdasarkan definisi metrik tersebut, kita dapat mendefinisikan konsep ruang metrik.

Definisi 2.2. (Ruang Metrik). Andaikan X sembarang himpunan tak kosong. Jika d merupakan metrik pada X, maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik. ■

Jika dalam pembahasan selanjutnya metrik d dari suatu metrik (X, d) sudah tertentu, maka kita akan menyingkat notasi (X, d) menjadi X saja.

Contoh 2.1. Akan diperlihatkan bahwa garis real $\mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

untuk setiap x dan y dalam $\mathbb{R}$.

Untuk itu, cukup ditunjukkan bahwa d memenuhi syarat-syarat metrik (i) sampai (iv) pada definisi 2.1.. Perhatikan penjabaran berikut ini.

(a) Jelas bahwa rumus (1) menunjukkan $d(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ sembarang. Jika $d(x, y) = 0$, maka $|x - y| = 0$, sehingga haruslah $x - y = 0$, atau $x = y$. Sebaliknya, jika $x = y$, maka $x - y = 0$, sehingga $d(x, y) = |x - y| = 0$.

(c) Untuk sembarang $x, y \in \mathbb{R}$, tampak bahwa,

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x).$$

(d) Misalkan x, y, z bilangan-bilangan real sembarang. Berdasarkan ketaksamaan nilai mutlak pada bilangan real, diperoleh hubungan,

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Karena syarat-syarat metrik dipenuhi oleh metrik di atas, maka $\mathbb{R}$ dengan metrik (1) merupakan suatu ruang metrik.

Pada contoh 2.2. dan 2.3. berikut ini, secara berturut-turut akan dibuktikan apakah ruang $\mathbb{R}^n$ dan ℓ^p, p $\geq$ 1, merupakan ruang metrik atau bukan. Untuk membuktikannya, kita memerlukan tiga buah lemma, yaitu : Ketaksamaan Bantu, Ketaksamaan Hölder, dan Ketaksamaan Minkowski. Pembahasan ketiga lemma tersebut sebagai berikut.

Lemma 2.1. (Ketaksamaan Bantu). Misalkan α dan β bilangan-bilangan positif dan p >1, q >1 yang memenuhi syarat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Maka,

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \tag{2}$$

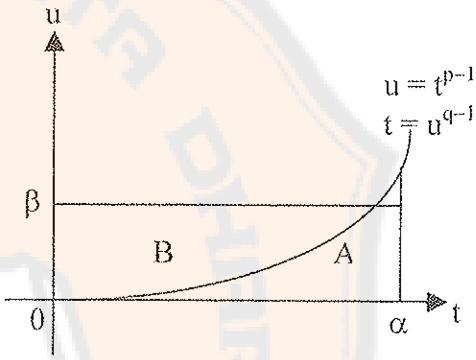
Bukti. Tampak bahwa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow pq = p + q \Leftrightarrow (p-1)(q-1)=1$, sehingga $\frac{1}{p-1} = q-1$. Berdasarkan kesamaan terakhir kita dapat membentuk fungsi-fungsi $u = t^{p-1}$ dan $t = u^{q-1}$. Karena α dan β keduanya bilangan positif, maka $\alpha\beta$ dapat dipandang sebagai luas suatu daerah persegi panjang. Dengan menggunakan integral tentu, kita dapatkan hasil sebagai berikut :

I. Dalam hal $\alpha > \beta$:

$$\alpha\beta \le A + B$$

$$\alpha\beta \le \int_0^{\alpha} t^{p-1}dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}du = \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}.$$

Perhatikan Gambar 1.



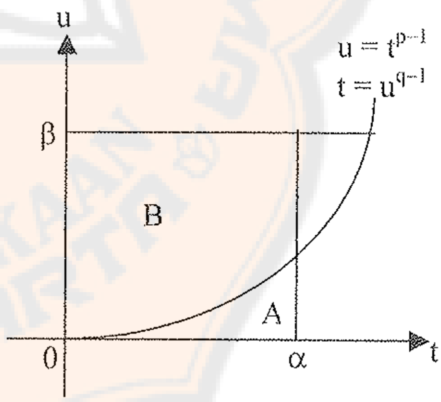
Gambar 1.

II. Dalam hal $\alpha \le \beta$:

$$\alpha\beta \le A + B$$

$$\alpha\beta \le \int_0^{\alpha} t^{p-1}dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}du = \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}.$$

Perhatikan Gambar 2.



Gambar 2.

Bukti selesai. ■

Lemma 2.2. (Ketaksamaan Hölder). Jika p >1, q >1 dengan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dan jika (ξ_j) dan (η_j) barisan-barisan di ℓ^p, maka:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\eta_j\right| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^p\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

Bukti. Diasumsikan bahwa (ξ_j) atau (η_j) bukan barisan nol. Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, berlaku:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\eta_j\right| \leq \left[\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\eta_j\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Andaikan $\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^p$ = R dan $\sum_{j=1}^{n}\left|\eta_j\right|^q$ = S. Ambil $\alpha_j=\frac{\left|\xi_j\right|}{R^{\frac{1}{p}}}$ dan $\beta_j=\frac{\left|\eta_j\right|}{S^{\frac{1}{q}}}$. Dengan ketaksamaan bantu didapat,

$$\alpha_j\beta_j=\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}S^{\frac{1}{q}}}\left|\xi_j\eta_j\right| \leq \frac{1}{p}\left(\frac{\left|\xi_j\right|^p}{R}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{\left|\eta_j\right|^q}{S}\right). \tag{5}$$

Ketaksamaan (5) kita jumlahkan untuk j = 1, 2, 3, ...,n, sehingga diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}S^{\frac{1}{q}}}\left|\xi_j\eta_j\right| \leq \frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^p}{R}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|\eta_j\right|^p}{S}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{R^{\frac{1}{p}}S^{\frac{1}{q}}}\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\eta_j\right| \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j \eta_j\right| \le R^{\frac{1}{p}} S^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Ketaksamaan terakhir ekuivalen dengan (4). Jika n $\to \infty$, maka dengan mengingat (ξ_j), $(\eta_j) \in \ell^p$, ruas kanan (4) menjadi perkalian yang menyangkut deret-deret yang konvergen, sehingga ruas kiri (4) juga menjadi deret yang konvergen. Jadi (3) terbukti. ■

Lemma 2.3. (Ketaksamaan Minkowski). Jika p ≥ 1 dan jika (ξ_j) dan (η_j) merupakan barisan-barisan di ℓ^p, maka :

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j + \eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

Bukti. Untuk p=1, jelas (6) dipenuhi, yaitu berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga pada bilangan real. Sedangkan, dalam hal p>1, kita dapat membuktikan (6) dengan cara sebagai berikut. Misalkan $\omega_j = \xi_j + \eta_j$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga pada bilangan real, untuk j = 1, 2, 3, …, diperoleh:

$$|\omega_j|^p = |\xi_j + \eta_j|\,|\omega_j|^{p-1} \le (|\xi_j| + |\eta_j|)\,|\omega_j|^{p-1}.$$

Dengan demikian, untuk setiap j = 1, 2, 3, …, n, berlaku

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\omega_j\right|^p \le \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right| \left|\omega_j\right|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right| \left|\omega_j\right|^{p-1}. \qquad (7)$$

Dengan menerapkan ketaksamaan Hölder untuk masing-masing suku di ruas kanan (7), diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|\omega_j|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

dan

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|\omega_j|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{9}$$

dengan $q > 0$, di mana $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Perhatikan bahwa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq$ $\Leftrightarrow p = (p-1)\,q$. Oleh karena itu, (8) dan (9) menjadi

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

dan

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Bila (10) dan (11) dijumlahkan bersama-sama akan didapat,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(|\xi_j| |\omega_j|^{p-1}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(|\eta_j| |\omega_j|^{p-1}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^{p-1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \tag{12}$$

Dari (7) dan (12) diperoleh,

$$\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p \le \left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

kemudian kedua ruas dari ketaksamaan terakhir dibagi dengan $\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ dan mengingat $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$, maka

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p}{\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}}=\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

Ketaksamaan (6) terbukti untuk j dari 1 sampai n. Ambil n $\to \infty$, karena (ξ_j) dan (η_j) merupakan barisan-barisan pada ruang ℓ^p, maka ruas kanan (13) menjadi penjumlahan dari dua deret yang konvergen, sehingga ruas kiri (13) pun menjadi deret yang konvergen. Akibatnya (6) terbukti. ∎

Contoh 2.2. Diberikan himpunan $\mathbb{R}^n = \{\, x = (\xi_j) \mid \xi_j \in \mathbb{R}$, j=1,2, …, n$\}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan suatu ruang metrik dengan metrik,

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x=(\xi_j)$ dan $y=(\eta_j)$, j = 1, 2, …, n

Dengan menggunakan definisi 2.1. akan ditunjukkan bahwa d memenuhi syarat-syarat metrik.

(a) Rumus (14) merupakan bentuk akar, sehingga jelas $d(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Diketahui $x = (\xi_j)$ dan $y = (\eta_j)$ anggota $\mathbb{R}^n$ sembarang. Jika $d(x, y) = 0$, maka $\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \eta_j)^2 = 0$, sehingga haruslah $(\xi_j - \eta_j)^2 = 0$, untuk j=1,2, …, n, yang akan dipenuhi jika $\xi_j - \eta_j = 0$ atau $\xi_j = \eta_j$, untuk j=1,2, …,n. Akibatnya $x = y$. Sebaliknya, jika diasumsikan $x = y$, maka untuk j = 1, 2, …, n, berlaku $\xi_j = \eta_j$, sehingga $(\xi_j - \eta_j)^2 = 0$, untuk j = 1, 2, 3, 4, …, n. Akibatnya $\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \eta_j)^2 = 0$, sehingga $d(x, y) = 0$.

(c) Andaikan $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (\xi_j)$ dan $y = (\eta_j)$, j = 1, 2, …, n. Tampak bahwa

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \eta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}(-(\eta_j - \xi_j))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}(\eta_j - \xi_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(y, x).$$

(d) Untuk sembarang $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$, $z = (\zeta_j)$, j = 1, 2, …, n, maka

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \eta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j - \eta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Misalkan $\alpha_j = \xi_j - \zeta_j$ dan $\beta_j = \zeta_j - \eta_j$, untuk j = 1, 2, …, n. Dengan demikiam persamaan terakhir di atas sama artinya dengan

$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j+\beta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Selanjutnya, dengan ketaksamaan Minkowski untuk $\mathbb{R}^n$ didapat,

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j+\beta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\beta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\zeta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\zeta_j-\eta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\zeta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-\eta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z)+d(z,y).$$

Jadi, $\mathbb{R}^n$ dengan rumus fungsi (2) merupakan ruang metrik.

Sekarang kita akan membahas ruang ℓ^p dan membuktikan apakah ruang ℓ^p merupakan ruang metrik atau bukan. Berikut ini diberikan definisi ruang ℓ^p.

Definisi 2.3. (Ruang ℓ^p). Andaikan $p \geq 1$, ℓ^p adalah himpunan semua barisan real tak hingga (ξ_j), sedemikian hingga deret tak hingga $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p$ konvergen. ▩

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa ℓ^p merupakan suatu ruang metrik dengan metrik

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{15}$$

untuk setiap $x, y\in\ell^p$, $x=(\xi_j)$ dan $y=(\eta_j)$.

(a). Jelas bahwa $d(x,y)\geq 0$, untuk setiap $x, y\in\ell^p$.

(b). Misalkan $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$ anggota sembarang di ℓ^p. Jika $d(x, y) = 0$, maka $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j - \eta_j|^p = 0$, sehingga haruslah $|\xi_j - \eta_j| = 0$, untuk j = 1,2,3, ... Hal ini akan dipenuhi jika $\xi_j - \eta_j = 0$ atau $\xi_j = \eta_j$, untuk j = 1,2,3, ... , akibatnya $x = y$. Sebaliknya, jika diasumsikan $x = y$, maka untuk j=1,2,3, ... , berlaku $\xi_j = \eta_j$, sehingga $|\xi_j - \eta_j|^p = 0$. Akibatnya $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j - \eta_j|^p = 0$, sehingga $d(x, y) = 0$.

(c). Andaikan $x, y \in \ell^p$. Tampak bahwa

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j - \eta_j|\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|-(\eta_j - \xi_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j - \xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d(y,x).$$

(d). Andaikan $x, y, z \in \lambda^p$, $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$, $z = (\zeta_j)$. Untuk p = 1, tampak bahwa

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j - \eta_j| = \sum_{j=1}^{\infty}|(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(|\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j|\right) = \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j - \zeta_j| + \sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j - \eta_j| \\ &= d(x, z) + d(x, y). \end{aligned}$$

yang memperlihatkan berlakunya sifat (iv) pada definisi 2.1.

Untuk p>1, kita dapat memanfaatkan ketaksamaan Minkowski. Perhatikan bahwa dengan ketaksamaan segitiga kita mempunyai hubungan

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left| \xi_j - \zeta_j \right| + \left| \zeta_j - \eta_j \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{16}$$

Berkat ketaksamaan Minkowski, (16) menjadi

$$d(x, y) \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j - \zeta_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \zeta_j - \eta_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= d(x, z) + d(z, y).$$

Karena syarat-syarat (i) – (iv) dalam definisi 2.1. dipenuhi oleh ruang ℓ^p dengan metrik (15), maka terbukti bahwa ruang ℓ^p merupakan ruang metrik.

II. 2. Himpunan Tertutup dan Penutup Himpunan

Pembahasan mengenai himpunan tertutup dan penutup himpunan ini diperlukan, karena konsep ini nantinya kita perlukan dalam konsep-konsep pada bab-bab selanjutnya. Sebelum kita mendefinisikan kedua konsep tersebut, kiranya perlu didefinisikan terlebih dahulu konsep titik limit suatu himpunan.

Jika x sembarang titik di dalam ruang metrik X dan r > 0, maka himpunan N(x_0; r) = $\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ disebut sekitar dari x_0 dengan radius r. Sebagai contoh, andaikan $x_0 \in \mathbb{R}$, maka sekitar titik x_0 dengan radius r adalah suatu selang terbuka (x_0 – r, x_0 + r). Sedangkan, jika $x_0 \in \mathbb{R}^3$, maka sekitar x_0 dengan radius ε adalah suatu bola buka B(x_0; ε) = $\{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$.

Definisi 2.4. (Titik Limit). Misalkan M himpunan bagian dari ruang metrik X dan $x_0 \in X$. Jika setiap sekitar dari x_0 memuat paling sedikit satu titik $y \in M$ dan $y \neq x_0$, maka titik x_0 disebut titik limit dari M. ■

Pada kedua contoh berikut ini, kita akan menentukan titik limit dari himpunan bagian suatu ruang metrik.

Contoh 2.3. Diberikan himpunan E = $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ sebagai himpunan bagian dari ruang metrik $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa 0 merupakan titik limit E. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, jika $0 < \varepsilon < 2$, pilihlah x = $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Perhatikan bahwa $0 < \frac{1}{2}\varepsilon < 1$, sehingga $x \in$ E dan pastilah $-\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, sehingga $x \in N(0,\varepsilon)$ juga. Sekarang,

jika $\varepsilon \geq 2$, pilih x = $\frac{1}{\varepsilon}$. Pastilah $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 < \varepsilon$, sehingga $x \in$ E sekaligus $x \in N(0,\varepsilon)$.

Karena syarat titik limit dipenuhi oleh 0, maka 0 merupakan titik limit dari E.

Contoh 2.4. ℓ' adalah ruang metrik dengan metrik $d(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|$ di mana $\xi = (\xi_j)$ dan $\eta = (\eta_j)$, dan $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j| < \infty$. Diberikan himpunan M, dengan M = $\{(\eta_j) \mid \eta_j = 0, \forall\, j > n, n \in \mathbb{N}\}$. Jelas bahwa M $\subset \ell'$. Untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$, pandanglah $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$. Akan diperlihatkan bahwa α merupakan titik limit M, yang berarti memenuhi syarat

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \omega = (\omega_j) \in M, \omega \neq \alpha \ni d(\omega,\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\omega_j - \alpha_j\right| < \varepsilon\right).$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, ambil $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, 0, 0, \ldots)$ dengan $\omega_j = \alpha_j + \frac{\varepsilon}{n+1}$, j = 1, 2, ..., n. Jelas bahwa $\omega \in$M dan $\omega \neq \alpha$.. Ternyata,

$$d(\omega,\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\omega_j - \alpha_j\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\omega_j - \alpha_j\right|$$

$$= \left|\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{n+1} - \alpha_1\right| + \left|\alpha_2 + \frac{\varepsilon}{n+1} - \alpha_2\right| + \ldots + \left|\alpha_n + \frac{\varepsilon}{n+1} - \alpha_n\right| = \frac{n}{n+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa α merupakan titik limit dari M.

Setelah kita tahu dan paham apa yang dimaksud dengan titik limit, berikut ini didefinisikan himpunan tertutup dan penutup himpunan.

Definisi 2.5. (Himpunan Tertutup). Misalkan X sembarang ruang metrik dan M subhimpunan dari X. M disebut himpunan tertutup jika M memuat semua titik limitnya. ■

Dua contoh berikut ini akan memperjelas gambaran mengenai himpunan tertutup.

Contoh 2.5. Ditinjau himpunan L = $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ dalam ruang metrik $\mathbb{R}^2$. Perhatikan bahwa L secara geometris serupa dengan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Untuk memperlihatkan L himpunan tertutup, ambil sembarang titik $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Bila $b = 0$, jelas bahwa titik (a,b) merupakan titik limit dari L, sebab jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, maka $(a + \frac{1}{2}\varepsilon,\ 0) \in N((a,b),\varepsilon) \cap L$. Sedangkan, jika $b \neq 0$, tampak bahwa titik (a, b) bukan merupakan titik limit dari L, sebab $N((a, b), \frac{1}{2}|b|)$ tak memuat satupun elemen L. Jadi, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ merupakan titik limit dari L hanya bila $(a, b) = (a, 0)$. Padahal $(a, 0) \in L$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa L himpunan tertutup.

Contoh 2.6. Di dalam $\mathbb{R}^2$, ditinjau himpunan $M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ambil sembarang $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Bila $p = q$, maka (p, q) jelas merupakan titik limit dari M, sebab jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, maka ada $(p + \frac{1}{4}\varepsilon\sqrt{2},\ q + \frac{1}{4}\varepsilon\sqrt{2}) \in N((p, q), \varepsilon) \cap M$. Sedangkan jika $p \neq q$, maka (p, q) bukan merupakan titik limit dari M, sebab bila $\varepsilon = \frac{1}{2}$ inf $d((p, q), M)$ maka $N((p, q), \frac{1}{2}$ inf $d(p, q))$ tidak memuat satu elemen. Jadi, (p, q) merupakan titik limit dari M hanya bila $p = q$ atau (p, p). Padahal $(p, p) \in M$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa M himpunan tertutup.

Definisi 2.6. (Penutup Himpunan). Jika X suatu ruang metrik, $M \subset X$ dan M' menyatakan himpunan semua titik limit dari M, maka $\overline{M} = M \cup M'$ disebut penutup M. ■

Contoh 2.7. Diberikan himpunan $E \subset \mathbb{R}$ seperti pada contoh 2.3. di atas. Sudah diketahui bahwa 0 merupakan titik limit E. Untuk memperlihatkan bahwa [0,1] penutup E, cukup ditunjukkan bahwa 1 dan semua x_0 yang memenuhi $0 < x_0 < 1$, merupakan titik limit E. Perhatikan pembahasan berikut ini. Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$. Untuk menunjukkan 1 merupakan titik limit, jika $0 < \varepsilon < 2$, pilih $x = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, maka tampak bahwa $0 < 1 - \frac{1}{2}\varepsilon < 1$ dan $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2}\varepsilon < 1 + \varepsilon$, sehingga $x = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ merupakan elemen dari E dan $x \in N(1,\varepsilon)$ juga. Jika $\varepsilon \geq 2$, kita pilih $x = \frac{3}{5}$, jelas bahwa $1 - \varepsilon < 0 < \frac{3}{5} < 1 < 1 + \varepsilon$, maka $x = \frac{3}{5} \in E$, sekaligus $x = \frac{3}{5} \in N(1,\varepsilon)$. Karena syarat titik limit dipenuhi oleh 1, maka 1 merupakan titik limit dari E. Sekarang kita pandang sembarang titik x_0, dengan $0 < x_0 < 1$. Jika $\varepsilon < x_0$, kita pilih $x = x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$. Jelas bahwa $0 < x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon < x_0 < 1$, sehingga $x \in E$. Kita dapat lihat bahwa $-\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon < x_0 + \varepsilon$ benar. Oleh karena itu, $x = x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$ merupakan elemen dari $N(x_0,\varepsilon)$. Selanjutnya, jika $\varepsilon \geq x_0$, pilih $x = \frac{1}{2}x_0$, maka pastilah $0 < \frac{1}{2}x_0 < x_0 < 1$. Sehingga $x \in E$. Disamping itu, $x \in N(x_0,\varepsilon)$ karena $x_0 - \varepsilon \leq 0 < \frac{1}{2}x_0 < x_0 < x_0 + \varepsilon$. Dengan demikian x_0 yang memenuhi $0 < x_0 < 1$ merupakan titik limit E. Jadi $[0,1] = \{0\} \cup (0,1) \cup \{1\}$ adalah penutup E.

Contoh 2.8. Pada contoh 2.4. di atas telah dibuktikan bahwa untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$, semua barisan berbentuk $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)$ merupakan titik limit dari M, di mana M merupakan suatu himpunan bagian dari ruang metrik ℓ^1. Oleh karena itu, untuk menentukan penutup himpunan M, kita cukup membuktikan bahwa semua barisan $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots) \in \ell^1$, dengan $\beta_j \neq 0$, untuk j > m, untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, β merupakan titik limit dari M bila hanya bila dipenuhi

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \omega = (\omega_j) \in M, \omega \neq \beta \ni d(\omega, \beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\omega_j - \beta_j\right| < \varepsilon\right).$$

Ambil sembarang $\beta \in \ell^1$ dengan dengan $\beta_j = 0$, untuk j > m, untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, pastilah $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\beta_j\right| < \infty$. Dengan demikian, karena $\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\beta_j\right|$ merupakan deret sisa dari deret yang konvergen, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\beta_j\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, 0, 0, 0, \dots)$ dengan $\omega_j = \beta_j + \frac{\varepsilon}{2n}$, j = 1, 2, ... ,n. Jelas $\omega \in$ M. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ω memenuhi syarat $d(\omega, \beta) < \varepsilon$. Perhatikan penjabaran berikut ini.

$$d(\omega, \beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\omega_j - \beta_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\omega_j - \beta_j\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\beta_j\right|$$

$$= \left|\beta_1 + \frac{\varepsilon}{2n} - \beta_1\right| + \left|\beta_2 + \frac{\varepsilon}{2n} - \beta_2\right| + \dots + \left|\beta_n + \frac{\varepsilon}{2n} - \beta_n\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\beta_j\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi β merupakan titik limit dari M. Dengan demikian himpunan semua titik limit M terdiri dari dua macam bentuk barisan, yaitu barisan yang berekor nol dan barisan yang tak berekor nol. Oleh karena itu, $M' = \ell^{\,1}$, sehingga $\overline{M} = M \cup M' = M \cup \ell^{\,1} = \ell^{\,1}$.

BAB III

KELENGKAPAN RUANG METRIK

Kelengkapan ruang metrik adalah salah satu sifat dari ruang metrik. Sifat ini nantinya akan diperlukan pada bab V. Pada subbab pertama dibahas mengenai ruang metrik lengkap. Berbicara tentang kelengkapan, maka pada bagian ini akan dibicarakan konep konvergensi barisan dan barisan Cauchy. Subbab kedua membahas subruang dari ruang metrik lengkap.

III.1. Ruang Metrik Lengkap.

Dua konsep yang sudah kita kenal dalam kalkulus, yaitu konvergensi barisan bilangan real dan barisan Cauchy, dengan semestra pembicaraan garis real $\mathbb{R}$, akan kita generalisasikan untuk mendefinisikan konvergensi barisan dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik. Oleh karena itu, dengan mengganti $\mathbb{R}$ menjadi ruang metrik X dan $\lim_{n\to\infty}|x_n - x| = 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ menjadi $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, maka definisi dari kedua konsep di atas adalah sebagai berikut.

Definisi 3.1. (Konvergensi Barisan). Suatu barisan (x_n) di dalam ruang merik X dikatakan konvergen, jika terdapat $x \in X$ dan jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.. x disebut titik limit dari (x_n) dan dapat ditulis $x_n \to x$. ■

Teorema 3.1. Misalkan (x_n) sembarang barisan dalam ruang metrik X. Jika barisan (x_n) konvergen dalam X, maka limit dari (x_n) tunggal.

Bukti. Andaikan barisan (x_n) konvergen ke x dan x'. Diberikan $\varepsilon>0$ sembarang. Karena (x_n) konvergen ke x, maka terdapat bilangan bulat positip P sedemikian hingga untuk n ≥ P berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan, karena (x_n) pun konvergen ke x', maka ada bilangan bulat positip P′ sedemikian hinga untuk n ≥ P′ berlaku $d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. Dengan demikian, untuk setiap n ≥ maks {P, P′} berlaku,

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $0 \leq d(x, x') < \varepsilon$, untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan $d(x_n, x) = 0$, sehingga $x = x'$. ■

Definisi 3.2. (Barisan Cauchy). Suatu barisan (x_n) di dalam ruang merik X disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk m ≥ N dan n ≥ N berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. ■

Sebelum kelengkapan ruang metrik didefinisikan, perhatikan contoh 3.1. di bawah ini.

Contoh 3.1. Kita tinjau barisan $(x_n) = (\frac{1}{n})$ di dalam ruang metrik selang terbuka (0, 2), dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$. Jelas bahwa barisan $(x_n) = (\frac{1}{n})$

adalah barisan Cauchy. Sebab, jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip N, sedemikian hingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Andaikan m, n > N. Jika diambil m ≤ n, berlaku $|x_m - x_n| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Sedangkan, jika m > n, maka $|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Selanjutnya, kita perhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, padahal $0 \notin (0,2)$. Jadi tidak ada bilangan $x \in (0,2)$ yang merupakan limit dari (x_n). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa barisan $(x_n) = (\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy yang tidak konvergen pada ruang metrik $(0, 2)$.

Teorema 3.2. (Konvergensi Barisan). Di dalam sembarang ruang metrik X, setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy.

Bukti. Misalkan (x_n) sembarang barisan dalam ruang metrik X yang konvergen ke x. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk n ≥ N berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, jika m, n ≥ N berlaku,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

yang menunjukkan bahwa (x_n) barisan Cauchy. ▩

Pada contoh 3.1. di atas tampak bahwa suatu barisan Cauchy belum tentu konvergen. Akan tetapi untuk ruang-ruang metrik tertentu, setiap barisan Cauchy-nya selalu konvergen. Oleh karena itu, M. Fréchet (1906) mendefinisikan konsep ruang metrik yang demikian sebagai berikut.

Definisi 3.3. (Kelengkapan Ruang Metrik). Ruang metrik X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen. ∎

Contoh-contoh berikut ini dapat lebih menjelaskan konsep kelengkapan ruang metrik di atas.

Contoh 3.2. Pada contoh 2.1. telah dibuktikan bahwa garis real $\mathbb{R}$ adalah ruang metrik dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang metrik lengkap.

Andaikan (x_n) sembarang barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, dimana $(x_n) = x_1, x_2, x_3, \ldots$. Ambil $\varepsilon = 1$. Menurut definisi 3.2., terdapat bilangan bulat positip M sedemikian hingga untuk m, n $\geq$ M, berlaku $|x_m - x_n| < 1$. Kita punya n $\geq$ M, maka

$$|x_n| = |x_n - x_M + x_M| \leq |x_n - x_M| + |x_M| < 1 + |x_M|,$$

karena itu, untuk n = 1,2,3, ...,

$$|x_n| < \text{maks}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_M|, 1 + |x_M|\}.$$

Tampak bahwa barisan (x_n) terbatas. Sehingga, berdasarkan teorema Bolzano-Weierstrass (Brown, 1970 : 19), barisan (x_n) mempunyai subarisan yang konvergen, ditulis (x_{n_k}), dengan limit x.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan bulat positip k_0 sedemikian hingga untuk $k \geq k_0$, berlaku $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dan ada bilangan bulat positip N sedemikian hingga $|x_m - x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ untuk m, n $\geq$ N. Karena (x_{n_k}) subbarisan dari (x_n), kita punya $n_k \geq N$, untuk k > N. Andaikan K = maks $\{k_0, N\}$. Maka, untuk $n \geq K$, kita dapatkan

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa barisan (x_n) konvergen. Akibatnya ruang metrik $\mathbb{R}$ adalah lengkap.

<u>Contoh 3.3.</u> Diberikan ruang metrik $\mathbb{R}^n$ dengan metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Akan kita buktikan apakah $\mathbb{R}^n$ adalah ruang metrik lengkap atau bukan. Ambil sembarang barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$, misal (x_m), di mana $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$. Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk m, r $\geq$ N berlaku

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

sehingga untuk j = 1,2,3, ..., n, berlaku $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa untuk j tertentu, barisan $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \xi_j^{(3)}, \ldots)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Dari contoh 3.2., masing-masing barisan ini adalah konvergen, katakanlah $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$. Pandang j = 1, 2, 3 ,..., n. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka ada N_j sedemikian hingga untuk $m \geq N_j$, berlaku $\left(\xi_j^{(m)} - \xi_j\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$. Dengan demikian, untuk $m \geq$ maks $\{ N_j \mid j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$, kita memperoleh

$$d(x_m, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Jadi, setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke x, yang memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang metrik lengkap.

<u>Contoh 3.4.</u> ℓ^p adalah ruang metrik dengan metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (18)$$

Untuk membuktikan bahwa ℓ^p lengkap, cukup dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di ℓ^p konvergen. Misalkan (x_n) sembarang barisan Cauchy di ℓ^p, di mana

$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \ldots)$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positip N, sedemikian hingga untuk setiap m, n ≥ N, berlaku

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Akibatnya, untuk j = 1, 2, 3, ..., berlaku

$$| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} | < \varepsilon \ .$$

Dari ketaksamaan terakhir di atas tampak bahwa untuk j tertentu, barisan ($\xi_j^{(1)}$, $\xi_j^{(2)}$, $\xi_j^{(3)}$, ...) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan contoh 3.2., maka barisan ($\xi_j^{(1)}$, $\xi_j^{(2)}$, $\xi_j^{(3)}$,...) konvergen, ditulis, $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$. Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa (x_n) konvergen ke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. Pandang j = 1, 2, ... , k. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka ada bilangan bulat positip M_j sedemikian hingga untuk $n \geq M_j$, berlaku

$$\left| \xi_j^{(n)} - \xi_j \right| < \frac{\varepsilon}{k^{\frac{1}{p}}} \Leftrightarrow \left| \xi_j^{(n)} - \xi_j \right|^p < \frac{\varepsilon^p}{k}.$$

Dengan demikian, untuk n ≥ maks { M_j | j = 1, 2, ..., k}, kita dapatkan

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(n)} - \xi_j \right|^p < k.\frac{\varepsilon^p}{k} = \varepsilon^p,$$

yang setara dengan

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(n)} - \xi_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{19}$$

Perhatikan bahwa $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|^p$ merupakan deret yang konvergen. Ditunjukkan oleh Ketaksamaan Minkowski (6). Jadi, dengan mengambil k→∞, dari (19) diperoleh

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Dengan demikian, setiap barisan Cauchy di λ^p konvergen.

Walaupun $\mathbb{Q}$ (himpunan semua bilangan rasional) merupakan himpunan bagian dari ruang metrik lengkap $\mathbb{R}$, kita tidak dapat mengatakan bahwa $\mathbb{Q}$ juga merupakan ruang metrik yang lengkap. Pada contoh 3.5. akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Q}$ tak lengkap.

Contoh 3.5. Ruang $\mathbb{Q}$ adalah himpunan dari semua bilangan rasional dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$, di mana $x, y \in \mathbb{Q}$. Kita bangun barisan (y_n) dalam $\mathbb{Q}$, di mana untuk setiap n $\in \mathbb{N}$, y_n menyatakan bilangan-bilangan rasional sedemikian hingga $\sqrt{2}+\dfrac{1}{n+1} < y_n < \sqrt{2}+\dfrac{1}{n}$. Perhatikan bahwa untuk setiap n$\in\mathbb{N}$, $y_n - \left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n+1}\right) < \left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}\right) - \left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke $\sqrt{2}$. Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$. Maka terdapat bilangan bulat positip N, sedemikian hingga $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Andaikan n ≥ N, maka berlakulah,

$$\left|y_n - \sqrt{2}\right| = \left|y_n - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}\right) - \sqrt{2}\right| < \left|y_n - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}\right)\right| + \frac{1}{n+1}$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Tampak bahwa barisan (y_n) konvergen ke $\sqrt{2}$. Kekonvergenan ini sekaligus menunjukkan bahwa (y_n) barisan Cauchy di $\mathbb{Q}$. Karena (y_n) barisan Cauchy yang tak konvergen dalam $\mathbb{Q}$, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Q}$ adalah ruang metrik tak lengkap.

III.2. Subruang dari Ruang Metrik Lengkap.

Kita mulai pembahasan sub bab ini dengan mendefinisikan pengertian subruang dari suatu ruang metrik.

Definisi 3.4. (Subruang). Misalkan Y subhimpunan dari ruang metrik (X, d). Maka syarat-syarat untuk d yang harus dipenuhi oleh elemen-elemen dari X pastilah dipenuhi oleh elemen-elemen dari Y, sehingga (Y, d) suatu ruang metrik yang dinamakan subruang dari ruang metrik (X, d). ∎

Sebagai contoh, interval [a, b] dengan a, b$\in\mathbb{R}$ dan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan subruang dari ruang metrik.

Dua teorema yang akan kita bahas berikut ini masih berhubungan dengan konvergensi suatu barisan dan ruang metrik lengkap. Teorema 3.4. mengenai subruang lengkap nantinya akan diperlukan dalam pembahasan pada bab V.

Teorema 3.3. (Penutup Himpunan). Misal M subhimpunan tak kosong dari ruang metrik X, dan $\overline{M}$ penutup himpunan M. Maka $x \in \overline{M}$ jika dan hanya jika ada barisan (x_n) dalam M, sedemikian hingga x_n konvergen ke $x \in X$.

Bukti. Andaikan $x \in \overline{M}$. Jika $x \in M$, maka terdapat barisan konstan $(x, x, x, \ldots)$ yang konvergen ke x. Jika $x \notin M$, maka $x \in M'$ dan x merupakan titik limit dari M. Akibatnya, untuk n =1, 2, 3, …, terdapat bola **B** $(x; \frac{1}{n})$ yang memuat $x_n \in M$. Karena untuk n $\to \infty$, $\frac{1}{n}$ konvergen ke 0, maka pasti (x_n) konvergen ke x.

Sebaliknya, jika (x_n) barisan dalam M dan konvergen ke x, maka $(\forall \varepsilon > 0)$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat positip N $\ni$ n $\geq$ N berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$, dengan kata lain $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Akibatnya $x \in \overline{M}$. ∎

Teorema 3.4. (Subruang Lengkap). Misalkan M subruang dari ruang metrik lengkap X. M adalah lengkap, jika dan hanya jika M tertutup dalam X.

Bukti. Andaikan M lengkap. Akan di tunjukkan M tertutup dalam X. Berdasarkan teorema 3.3. di atas, untuk setiap $x \in \overline{M}$ terdapat barisan (x_n) dalam M, sedemikian hingga (x_n) konvergen ke x, dengan demikian (x_n) barisan Cauchy, dan karena M lengkap, akibatnya $x \in M$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\overline{M} \subset M$. Dilain pihak jelas bahwa $M \subset M \cup M = \overline{M}$. Akibatnya $M = \overline{M}$, yang menunjukkan ketertutupan M.

Sebaliknya, misalkan M himpunan tertutup. Akan dibuktikan M lengkap. Ambil sembarang barisan Cauchy (x_n) dalam M. Karena X lengkap, maka (x_n) konvergen ke suatu elemen di X, katakanlah (x_n) konvergen ke x. Maka menurut teorema 3.3., $x \in \overline{M}$. Mengingat M tertutup, maka $\overline{M} = M$. Jadi $x \in M$, yang memperlihatkan kelengkapan M. ∎

Contoh 3.6. Tinjaulah $Y = \{x \mid x = (\xi_j) \in \lambda^2,\ \xi_{2n} = 0,\ n \in \mathbb{N}\}$ yang merupakan subruang metrik dari λ^2. Untuk membuktikan Y subruang tertutup, cukup ditunjukkan bahwa Y lengkap, seperti yang disarankan oleh Teorema 3.4..

Ambil sembarang barisan Cauchy di Y, misalkan (x_m), di mana $x_m = (\xi_j^{(m)})$, untuk j=1,2,3, …, dan $\xi_{2n} = 0$. Oleh karena itu, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positip P, sedemikian hingga untuk m, r > N berlaku, $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right|^2 < \varepsilon$, sehingga untuk j = 1, 2, 3, 4, … pastilah berlaku $\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right|^2 < \varepsilon$, yang menunjukkan bahwa untuk j tertentu, barisan $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \xi_j^{(3)}, \ldots)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ dan karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \xi_j^{(3)}, \xi_j^{(4)}, \ldots)$ konvergen, katakanlah $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$. Selanjutnya dibuktikan (x_m) konvergen ke $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots)$. Misalkan j=1,2,3, … dan $k \in \mathbb{N}$. Maka terdapat bilangan bulat positip P_j sedemikian hingga untuk $m \geq P_j$ berlaku $\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{k}$. Dengan demikian untuk $m \geq$ maks $\{P_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^2 < k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2 .$$

Perhatikan bahwa $\sum_{j=1}^{k}\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j\right|^2$ merupakan deret yang konvergen, seperti ditunjukkan oleh Ketaksamaan Minkowski. Oleh Karena itu, bila k $\to \infty$, dari ketaksamaan terakhir di atas diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j\right|^2 < \varepsilon^2,$$

yang setara dengan

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(m)}-\xi_j\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Dengan demikian setiap barisan Cauchy di Y konvergen.

BAB IV

RUANG HASIL KALI DALAM

Ruang Hilbert yang menjadi topik dalam skripsi ini, tidak lain adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap (definisi 5.1.). Di lain pihak, ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor dengan hasil kali dalam yang terdefinisi di ruang tersebut. Dan hasil kali dalamnya mendefinisikan sebuah norma.

Ada empat subbab pada bab IV ini. Subbab IV.1, membahas ruang vektor dan pengertian norma. Subbab IV.2. dan IV.3, berturut-turut akan mengulas tentang pengertian ruang hasi kali dalam dan keortogonalan ruang hasil kali dalam. Dan pada subbab terakhir akan dibahas himpunan konveks.

IV.1. Ruang Vektor dan Norma.

Ruang vektor yang banyak dikenal adalah sebuah himpunan yang elemen-elemennya berupa vektor di dalam ruang dimensi tiga dan dimensi dua. Sedangkan dalam pembahasan berikut, konsep ruang vektor didefinisikan secara lebih abstrak dan umum.

Definisi 4.1. (Ruang Vektor). Ruang vektor atas medan $\mathbb{R}$ adalah suatu himpunan tak kosong X, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$ dari unsur-unsur $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$ di X dan operasi perkalian $\alpha.\underline{\mathbf{x}}$ antara unsur $\underline{\mathbf{x}} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, yang memenuhi syarat-syarat sebagai berikut. (untuk setiap $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in X$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

(i) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$;

(ii) $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$;

(iii) Terdapat elemen $\underline{0} \in X$, disebut vektor nol, sedemikian hingga $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$;

(iv) Untuk setiap $\underline{x} \in X$, ada sebuah elemen $(-\underline{x}) \in X$, disebut negatip $\underline{x}$, sedemikian hingga $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$;

(v) $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$;

(vi) $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}$;

(vii) $\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}$;

(viii) $\underline{1}.\underline{x} = \underline{x}$. ■

Contoh 4.1. Ruang Euclides $\mathbb{R}^n$ adalah sebuah ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut :

1) Jika $\underline{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$ dan $\underline{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n)$, maka $\underline{x} + \underline{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n)$.

2) Jika $\underline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka $\alpha\,\underline{x} = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$.

Untuk contoh 4.2. berikut ini, kita ingat kembali definisi 2.3. tentang ruang ℓ^p, p ≥ 1. Bila p = 2, maka ruang ℓ^p adalah himpunan semua barisan-barisan real tak hingga (ξ_j), sedemikian hingga deret tak hingga $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)$ konvergen.

Contoh 4.2. Akan ditunjukkan bahwa ℓ^p, p ≥ 1 adalah ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut. Ambil sembarang $\underline{x} = (\xi_j)$, $\underline{y} = (\eta_j) \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka berlaku :

1) $\underline{x} + \underline{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3, \ldots)$. Karena $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2$ merupakan deret-deret yang konvergen, maka jumlah dari kedua deret tersebut juga konvergan. Dengan memanfaatkan Ketaksamaan Minkowski pada ℓ^p, diperoleh ketaksamaan :

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan teorema uji banding, maka deret pada ruas sebelah kiri dari ketaksamaan di atas merupakan deret yang konvergen. Jadi, $\underline{x} + \underline{y} \in \ell^p$.

2) $\alpha\,\underline{x} = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, \ldots)$. Untuk menunjukkan $\alpha\,\underline{x} \in \ell^p$, perhatikan penjabaran berikut ini,

$$\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right) = \alpha|\xi_1|^p + \alpha|\xi_2|^p + \alpha|\xi_3|^p + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha|\xi_j|^p.$$

$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha|\xi_j|^p$ adalah deret yang konvergen. Jadi $\alpha\,\underline{x} \in \ell^p$.

Selanjutnya, akan diteliti apakah kedua operasi yang telah didefinisikan itu memenuhi syarat-syarat dalam definisi 4.1. Ambil sembarang $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \ell^p$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, di mana $\underline{x} = (\xi_j)$, $\underline{y} = (\eta_j)$, dan $\underline{z} = (\zeta_j)$ dengan $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p$, $\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p$, dan $\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p$ deret-deret konvergen.

(1) $\underline{x}+\underline{y} = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \xi_3+\eta_3, \ldots) = (\eta_1+\xi_1, \eta_2+\xi_2, \eta_3+\xi_3, \ldots) = \underline{y}+\underline{x}$;

(2) $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z} = ((\xi_1+\eta_1)+\zeta_1, (\xi_2+\eta_2)+\zeta_2, (\xi_3+\eta_3)+\zeta_3, \ldots) = (\xi_1+(\eta_1+\zeta_1), \xi_2+(\eta_2+\zeta_2), \xi_3+(\eta_3+\zeta_3), \ldots) = \underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$;

(3) $\exists\ \underline{0} \in \ell^p$, sedemikian hingga $\underline{x}+\underline{0} = (\xi_1+0, \xi_2+0, \xi_3+0, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = \underline{x}$;

(4) Ambil sembarang $-\underline{x} = (-\xi_j)$, yang merupakan negatip dari $\underline{x}$. Pastilah $(-\underline{x}) \in \ell^p$, karena $\sum_{j=1}^{\infty}|-\xi_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p$ adalah deret-deret yang konvergen. Dengan demikian, $\underline{x}+(-\underline{x}) = (\xi_1+(-\xi_1), \xi_2+(-\xi_2), \xi_3+(-\xi_3), \ldots) = \underline{0}$;

(5) $\alpha(\underline{x}+\underline{y}) = (\alpha(\xi_1+\eta_1), \alpha(\xi_2+\eta_2), \alpha(\xi_3+\eta_3), \ldots) = (\alpha\xi_1+\alpha\eta_1, \alpha\xi_2+\alpha\eta_2, \alpha\xi_3+\alpha\eta_3, \ldots) = \alpha\underline{x}+\alpha\underline{y}$;

(6) $(\alpha+\beta)\underline{x} = ((\alpha+\beta)\xi_1, (\alpha+\beta)\xi_2, (\alpha+\beta)\xi_3, \ldots) = (\alpha\xi_1+\beta\xi_1, \alpha\xi_2+\beta\xi_2, \alpha\xi_3+\beta\xi_3, \ldots) = \alpha\underline{x}+\beta\underline{x}$;

(7) $\alpha(\beta\,\mathbf{x}) = (\alpha(\beta\xi_1), \alpha(\beta\xi_2), \alpha(\beta\xi_3), \ldots) = ((\alpha\beta)\xi_1, (\alpha\beta)\xi_2, (\alpha\beta)\xi_3, (\alpha\beta)\xi_4, \ldots) = (\alpha\beta)\underline{x}$;

(8) $\underline{1}\cdot\underline{x} = (1.\xi_1, 1.\xi_2, 1.\xi_3, \ldots) = \underline{x}$.

Syarat –syarat dalam definisi 4.1. dipenuhi oleh operasi 1) dan 2) pada ℓ^p. Jadi ℓ^p adalah sebuah ruang vektor.

Subruang dari suatu ruang vektor X adalah subhimpunan tak kosong Y sedemikian hingga untuk setiap $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in Y$ dan untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y.$$

Norma adalah sebuah konsep yang akan diperlukan dalam pembahasan ruang hasil kali dalam dan ruang Hilbert. Definisi mengenai norma disajikan sebagai berikut.

Definisi 4.2. (Norma). Misalkan X suatu ruang vektor. Norma pada X, adalah subuah fungsi φ pada X yang bernilai real tak negatip, sedemikian hingga untuk setiap $\underline{x}, \underline{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.

(i) $\varphi(\underline{x}) = 0$ bila dan hanya bila $\underline{x} = \underline{0}$;

(ii) $\varphi(\alpha\,\underline{x}) = |\alpha|\varphi(\underline{x})$;

(iii) $\varphi(\underline{x} + \underline{y}) \leq \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y})$. ∎

Nilai fungsi $\varphi(\underline{x})$ selanjutnya ditulis dengan simbol $\| \underline{x} \|$, yang disebut norma dari unsur $\underline{x} \in X$. Dan sebuah ruang vektor X yang dilengkapi dengan norma padanya disebut ruang vektor bernorma.

Aksioma (iii) pada definisi 4.2. di atas biasa disebut ketaksamaan segitiga. Mengingat sifat nilai mutlak pada $\mathbb{R}$, aksioma (iii) secara tidak langsung menyatakan

$$\big|\, \| \underline{x} \| - \| \underline{y} \| \,\big| \leq \| \underline{x} - \underline{y} \| \qquad (20)$$

<u>Contoh 4.3.</u> diberikan ruang Euclides $\mathbb{R}^n$ dengan norma yang didefinisikan dengan rumus $\| \underline{x} \| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Dengan mengecek berlakunya syarat (i) – (iii) pada definisi 4.2., akan ditunjukkan bahwa $\| \underline{x} \|$ adalah norma pada $\mathbb{R}^n$. Andaikan $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ sembarang dan $\alpha \in \mathbb{R}$ sembarang.

(i) Diketahui $\| \underline{x} \| = 0$. Akan ditunjukkan $\underline{x} = \underline{0}$. $\| \underline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 0$, sehingga $|\xi_j|^2 = 0$, untuk j=1,2, …,n. Dengan demikian $\xi_j = 0$, untuk j = 1, 2, …, n, jadi $\underline{x} = \underline{0}$. Demikian pula sebaliknya, bila diketahui $\underline{x} = \underline{0}$, pastilah $\xi_j = 0$, untuk j = 1, 2, …, n. Sehingga $|\xi_j|^2 = 0$ dan diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \| \underline{x} \| = 0.$$

(ii) $$\|\alpha \underline{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha|^2 |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha|^2 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \, \| \underline{x} \|.$$

(iii) $\|\underline{x} + \underline{y}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Dengan ketaksamaan Minkowski untuk $\mathbb{R}^n$, diperoleh,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

Karena $\| \underline{\mathbf{x}} \| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ memenuhi sifat-sifat (i)-(iii) definisi 4.2., maka $\| \underline{\mathbf{x}} \|$ adalah norma pada $\mathbb{R}^n$.

Contoh 4.4. Dari contoh 4.2. telah ditunjukkan bahwa ℓ^p, p ≥1 sebuah ruang vektor. Didefinisikan sebuah norma dengan rumus $\|\underline{\mathbf{x}}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Akan ditunjukkan bahwa $\| \underline{\mathbf{x}} \| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ adalah norma pada ℓ^p.

Andaikan $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \ell^p$ sembarang, di mana $\underline{\mathbf{x}} = (\xi_j)$ dan $\mathbf{y} = (\eta_j)$ dengan $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p$ deret-deret yang konvergen. Dan α sembarang elemen di $\mathbb{R}$.

(i) Bila $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = 0$, sehingga untuk j=1,2,3, …, pastilah $|\xi_j|^p = 0$, sehingga haruslah $\xi_j = 0$, untuk j = 1, 2, 3, …. Akibatnya $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$. Demikian pula sebaliknya, bila diketahui $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$, pastilah $\xi_j = 0$, untuk j = 1, 2, 3, …. Sehingga $|\xi_j|^p = 0$, untuk j =1, 2, 3, …. Akibatnya,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| \underline{\mathbf{x}} \| = 0.$$

(ii) $\|\alpha \underline{\mathbf{x}}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$= |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|.$$

(iii) $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Dengan ketaksamaan Minkowski (lemma 2.3.), diperoleh

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| \underline{\mathbf{x}} \| + \| \underline{\mathbf{y}} \|.$$

Jadi $\| \underline{\mathbf{x}} \| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ adalah norma pada ℓ^p.

Pandang ruang bernorma X. Pada ruang ini, kita definisikan metrik d dengan rumus,

$$d(x, y) = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|, \forall\ \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in X \qquad (21)$$

Dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa rumus (21) memenuhi syarat-syarat metrik. Jadi, dapat disimpulkan bahwa setiap ruang vektor bernorma pasti merupakan suatu ruang metrik.

IV. 2. Pengertian Ruang Hasil Kali Dalam.

Ruang hasil kali dalam X, sebenarnya merupakan ruang vektor bernorma yang khusus. Hal ini dikarenakan, operasi hasil kali dalam pada X mendefinisikan sebuah norma pada X. Hasil kali dalam pada ruang vektor X didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.3. (Hasil Kali Dalam). Andaikan X suatu ruang vektor. Fungsi dari $X \times X \to \mathbb{R}$ yang mengawankan setiap $(\underline{x}, \underline{y}) \in X \times X$ dengan skalar $<\underline{x}, \underline{y}>$ disebut hasil kali dalam pada X, jika untuk setiap $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in X$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, dipenuhi sifat-sifat:

(1) $<\underline{x}, \underline{x}> \geq 0$;

(2) $<\underline{x}, \underline{x}> = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$;

(3) $<\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}> = <\underline{x}, \underline{y}> + <\underline{y}, \underline{z}>$;

(4) $<\alpha\underline{x}, \underline{y}> = \alpha <\underline{x}, \underline{y}>$;

(5) $<\underline{x}, \underline{y}> = <\underline{y}, \underline{x}>$. ■

Berdasarkan definisi hasil kali dalam di atas, selanjutnya dapat didefinisikan ruang hasil kali dalam.

Definisi 4.4. (Ruang Hasil Kali Dalam). Ruang vektor X disebut ruang hasil kali dalam, jika dilengkapi operasi hasil kali dalam. ■

Sebelum kita mendefinisikan norma pada ruang hasil kali dalam X, perhatikan dua contoh berikut ini.

Contoh 4.5. Diberikan ruang Euclides $\mathbb{R}^n$ dan didefinisikan fungsi dari $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$ dengan rumus,

$$<\underline{x}, \underline{y}> = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j \tag{22}$$

(1) di mana $\underline{x} = (\xi_j)$, $\underline{y} = (\eta_j)$ dengan j = 1,2, …, n. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang hasil kali dalam dengan operasi hasil kali dalam (39). Ambil sembarang $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\underline{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$, $\underline{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n)$, dan $\underline{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n)$ dan ambil sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka $< \underline{x}, \underline{x} > = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\,2} \geq 0$, karena suku-suku jumlahan berbentuk kuadrat.

(2) Bila $< \underline{x}, \underline{x} > = 0$, maka $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \xi_j^{\,2} = 0$, untuk j = 1, 2, …, n. Dengan demikian, pastilah $\xi_j = 0$, untuk j =1, 2, …, n, sehingga $\underline{x} = \underline{0}$. Demikian pula sebaliknya, jika diketahui $\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \xi_j = 0$, untuk j =1, 2, …, n. Akibatnya, $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\,2} = < \underline{x}, \underline{x} > = 0$.

(3) $< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} > = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j + \eta_j)\zeta_j = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j\zeta_j + \eta_j\zeta_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\zeta_j + \sum_{j=1}^{n} \eta_j\zeta_j$

$= < \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >$.

(4) $< \alpha\,\underline{x}, \underline{y} > = \sum_{j=1}^{n} \alpha\xi_j\eta_j = \alpha\sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j = \alpha < \underline{x}, \underline{y} >$.

(5) $< \underline{x}, \underline{y} > = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\xi_j = < \underline{y}, \underline{x} >$.

Rumus (22) memenuhi definisi 4.3., maka $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali dalam (22) merupakan suatu ruang hasil kali dalam.

Contoh 4.6. Ruang ℓ^p, p = 2 merupakan ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam

$$< \underline{x}, \underline{y} > = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\eta_j . \tag{23}$$

Karena fungsi dari $\ell^p \times \ell^p$ ke $\mathbb{R}$ dengan rumus (23), di mana $\underline{\mathbf{x}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ dan $\underline{\mathbf{y}} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ elemen-elemen dari ℓ^p, memenuhi sifat-sifat (1)-(5) pada definisi 4.3.. Penjelasannya adalah sebagai berikut. Ambil sembarang $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \in \ell^p$ dengan $\underline{\mathbf{x}} = (\xi_j)$, $\underline{\mathbf{y}} = (\eta_j)$, $\underline{\mathbf{z}} = (\zeta_j)$ untuk j = 1, 2, 3, … dan sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka,

(1) $< \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} > = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \geq 0$, karena suku-suku jumlahan berbentuk kuadrat.

(2) Bila $< \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} > = 0$, maka $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_j^2 = 0$, untuk j = 1,2,3,…. Dengan demikian, pastilah $\xi_j = 0$, untuk j = 1, 2 , 3, …, sehingga $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$. Demikian pula sebaliknya, jika diketahui $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \xi_j = 0$, untuk j = 1, 2, 3, …. Akibatnya $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = < \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} > = 0$.

(3) $< \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} > = \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j + \eta_j)\zeta_j = \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j \zeta_j + \eta_j \zeta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \zeta_j$ $= < \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} > + < \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} >$.

(4) $< \alpha\, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} > = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha \xi_j \eta_j = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j = \alpha < \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} >$.

(5) $< \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} > = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j = < \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} >$.

Operasi hasil kali dalam pada X mendefinisikan sebuah norma pada X dengan rumus

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \sqrt{< \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} >} \tag{24}$$

Dan, dengan mengingat persamaan (21) mengenai metrik yang dibangkitkan oleh norma, maka $\forall\, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in X$ metrik pada X didefinisikan dengan

$$d(x, y) = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| = \sqrt{<\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}>} \tag{25}$$

Sebagai contoh sederhana, hasil kali dalam $<\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}> = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$ pada ruang $\mathbb{R}^n$ (contoh 4.5.) mendefinisikan norma pada $\mathbb{R}^n$ dengan rumus,

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \sqrt{<\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}>} = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Dan hasil kali dalam pada contoh 4.6. pada ruang ℓ^p mendefinisikan norma pada ℓ^p dengan rumus,

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}>} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

<u>Definisi 4.5. (Subruang Hasil Kali Dalam).</u> Misalkan X suatu ruang hasil kali dalam. Himpunan Y merupakan subruang dari X, bila dan hanya bila Y subruang vektor dari X dengan hasil kali dalam yang didefinisikan pada X, tetapi dalam hal ini, terbatas hanya untuk $Y \times Y$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa norma pada ruang hasil kali dalam memenuhi apa yang disebut sifat persamaan jajaran genjang. Disebut persamaan jajaran genjang, karena konsep norma yang merupakan generalisasi dari panjang vektor memenuhi aturan dalam geometri dasar, yaitu jumlah kuadrat diagonal-diagonal suatu jajaran genjang ada hubungan dengan jumlah kuadrat kedua sisi jajaran genjang tersebut.

Teorema 4.1. (Persamaan Jajaran Genjang). Pada sembarang ruang hasil kali dalam X, berlaku

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 + \|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = 2\,(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2), \qquad \forall\ \underline{x}, \underline{y} \in X$$

Bukti. Ambil sembarang $\underline{x}, \underline{y} \in X$, maka berdasarkan (24) diperoleh,

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 + \|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = \langle \underline{x}+\underline{y}, \underline{x}+\underline{y}\rangle + \langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{x}-\underline{y}\rangle$$

$$= \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle + \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle + \langle \underline{y}, \underline{y}\rangle + \langle x, \underline{x}\rangle - \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle - \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle + \langle \underline{y}, \underline{y}\rangle$$

$$= 2\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle + 2\langle \underline{y}, \underline{y}\rangle = 2\,(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2).$$ ■

Berdasarkan teorema 4.1. di atas, jika sebuah norma pada suatu ruang vektor, sebut saja ruang vektor Y, tidak memenuhi persamaan jajaran genjang, maka ruang Y bukan merupakan ruang hasil kali dalam. Sebagai contoh, norma pada ruang $\mathbb{R}^n$ yang didefinisikan dengan rumus (26), dengan mudah dapat diperlihatkan memenuhi teorema 4.1.. Dan contoh 4.7. berikut memperlihatkan penggunaan teorema 4.1.

Contoh 4.7. Dari contoh 4.4. diketahui bahwa ruang ℓ^p, $p \geq 1$ adalah ruang bernorma dengan norma $\|\underline{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Dengan teorema 4.1., akan ditunjukkan bahwa ruang ℓ^p, $p \neq 2$, bukan merupakan ruang hasi kali dalam. Ambil sembarang $\underline{x}, \underline{y} \in \ell^p$, $p \neq 2$, di mana $\underline{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ dan $\underline{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ dengan $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p < \infty$. Perhatikan bahwa,

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 + \|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2 + \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Menurut ketaksamaan Minkowski ungkapan diruas terakhir di atas memenuhi,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}-\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{2}{p}} = 2\ \|\underline{x}\|^2.$$

Jadi, $\| \underline{x} + \underline{y} \|^2 + \| \underline{x} - \underline{y} \|^2 \le 2 \| \underline{x} \|^2 \le 2 (\| \underline{x} \|^2 + \| \underline{y} \|^2)$, sehingga $2 (\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2) < 2 (\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2)$ untuk setiap $\underline{x} \neq \underline{0}$. Dengan demikian, ruang ℓ^p, $p \neq 2$ bukan ruang hasil kali dalam.

Selanjutnya, kita bahas beberapa sifat lain dari ruang hasil kali dalam, yaitu ketaksamaan Schwarz, ketaksamaan segitiga, kekontinuan hasil kali dalam dan pelengkap dari ruang hasil kali dalam.

Teorema 4.2. (Ketaksamaan Schwarz). Andaikan X suatu ruang hasil kali dalam. Untuk semua $\underline{x}, \underline{y} \in X$, berlaku,

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \le \|\underline{x}\|\ \|\underline{y}\|. \tag{28}$$

Bukti. Jika salah satu dari $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ adalah vektor nol, katakanlah $\underline{y} = \underline{0}$, maka ketaksamaan (28) jelas dipenuhi karena kedua ruasnya berharga nol. Andaikan $\underline{y} \neq \underline{0}$. Maka untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$,berlaku:

$$0 \le \|\underline{x} - \alpha\, \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} - \alpha\underline{y}, \underline{x} - \alpha\underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - \alpha \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle - \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \alpha^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle$$

Pilih $\alpha = \dfrac{<\underline{x},\underline{y}>}{\|\underline{y}\|^2}$, maka ketaksamaan di atas menjadi

$$0 \le \|\underline{x}\|^2 - \frac{<\underline{x},\underline{y}>}{\|\underline{y}\|^2} < \underline{y},\underline{x}> - \frac{<\underline{x},\underline{y}>}{\|\underline{y}\|^2} < \underline{x},\underline{y}> + \left(\frac{<\underline{x},\underline{y}>}{\|\underline{y}\|^2}\right)^2 \|\underline{y}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \|\underline{x}\|^2 - \frac{<\underline{x},\underline{y}><\underline{x},\underline{y}>}{\|\underline{y}\|^2} = \|\underline{x}\|^2 - \frac{|<\underline{x},\underline{y}>|^2}{\|\underline{y}\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |<\underline{x},\underline{y}>|^2 \le \|\underline{x}\|^2 \, \|\underline{y}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |<\underline{x},\underline{y}>| \le \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3. (Ketaksamaan Segitiga). Untuk setiap $\underline{x}$, $\underline{y}$ dalam ruang hasil kali dalam X, berlaku

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \le \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

Bukti. Ambil sembarang $\underline{x}, \underline{y} \in X$,

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = <\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}> = <\underline{x}, \underline{x}> + <\underline{y}, \underline{x}> + <\underline{x}, \underline{y}> + <\underline{y}, \underline{y}>$$

$$= \|\underline{x}\|^2 + 2|<\underline{x}, \underline{y}>| + \|\underline{y}\|^2.$$

Mengingat ketaksamaan Schwarz, $|<\underline{x}, \underline{y}>| \le \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|$, sehingga persamaan di atas menjadi,

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 \le \|\underline{x}\|^2 + 2\,\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\| \le \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|. \quad \blacksquare$$

Kedua ketaksamaan pada teorema 4.2. dan teorema 4.3., sangat penting dan akan sering kita gunakan dalam pembuktian teorema dan kasus-kasus selanjutnya. Sifat lain yang sering dipergunakan adalah kekontinuan dari hasil kali dalam.

Teorema 4.4. (Kekontinuan Operasi Hasil Kali Dalam). Misalkan $(\underline{x}_n)$ dan $(\underline{y}_n)$ barisan-barisan dalam X yang masing-masing konvergen ke $\underline{x}$ dan ke $\underline{y}$ dalam X. Maka, barisan $(\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle)$ konvergen ke $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$.

Bukti. Karena $(\underline{x}_n)$ dan $(\underline{y}_n)$ berturut-turut konvergen ke $\underline{x}$ dan ke $\underline{y}$, maka $\|\underline{x}_n - \underline{x}\| \to 0$ dan $\|\underline{y}_n - \underline{y}\| \to 0$, untuk $n \to \infty$. Untuk membuktikan bahwa barisan $(\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle)$ konvergen ke $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$, cukup ditunjukkankan bahwa $|\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \to 0$. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa terdapat $A \in \mathbb{R}$ sehingga $\|\underline{x}_n\| < A$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diberikan $\varepsilon = 1$, karena $(\underline{x}_n)$ konvergen ke $\underline{x}$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\|\underline{x}_n - \underline{x}\| < 1$ untuk $\forall\, n \geq N$. Jadi, $\|\underline{x}_n\| < 1 + \|\underline{x}\|$, untuk $\forall\, n \geq N$. Jika diambil $A = \text{maks}\{\|\underline{x}_1\|, \|\underline{x}_2\|, \|\underline{x}_3\|, \ldots, \|\underline{x}_{N-1}\|, 1 + \|\underline{x}\|\}$, maka pastilah $\|\underline{x}_n\| \leq A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya perhatikan ketaksamaan berikut ini.

$$
\begin{aligned}
|\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| &\leq |\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle - \langle \underline{x}_n, \underline{y} \rangle| + |\langle \underline{x}_n, \underline{y} \rangle - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \\
&= |\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n - \underline{y} \rangle| + |\langle \underline{x}_n - \underline{x}, \underline{y} \rangle| \\
&\leq \|\underline{x}_n\|\,\|\underline{y}_n - \underline{y}\| + \|\underline{y}\|\,\|\underline{x}_n - \underline{x}\| \\
&\leq A\,\|\underline{y}_n - \underline{y}\| + \|\underline{y}\|\,\|\underline{x}_n - \underline{x}\|.
\end{aligned}
$$

Karena diketahui sebelumnya bahwa $||\underline{x}_n - \underline{x}|| \to 0$ dan $||\underline{y}_n - \underline{y}|| \to 0$, maka dari hubungan etaksamaan terakhir di atas diperoleh $| <\underline{x}_n, \underline{y}_n> - <\underline{x}, \underline{y}> | \to 0$. ■

IV. 3. Himpunan Ortogonal.

Dalam aljabar linear, kita pernah mempelajari konsep keortogonalan dalam ruang Euclides $\mathbb{R}^n$. Jika hasil kali titik dari dua vektor dalam ruang $\mathbb{R}^n$ sama dengan nol, maka vektor-vektor itu ortogonal atau saling tegak lurus. Mengacu pada prinsip keortogonalan tersebut, kita definisikan konsep keortogonalan pada ruang hasil kali dalam.

Definisi 4.6. (Keortogonalan). Andaikan X suatu ruang hasil kali dalam dan $\underline{x}, \underline{y} \in X$. $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ dikatakan ortogonal jika $< \underline{x}, \underline{y} > = 0$. ■

Serupa dengan definisi keortogonalan di atas, misalkan A subhimpunan dari ruang hasil kali dalam X dan $\underline{x} \in X$. $\underline{x}$ dikatakan ortogonal terhadap A, ditulis $\underline{x} \perp A$, jika $< \underline{x}, \underline{a} > = 0$ untuk setiap $\underline{a} \in A$. Dua subhimpunan dari ruang metrik X dapat pula saling ortogonal. Berikut ini definisi dari dua himpunan yang saling ortogonal.

Definisi 4.7. (Keortogonalan). Misalkan A dan B subhimpunan-subhimpunan dari ruang hasil kali dalam X. A ortogonal terhadap B, ditulis $A \perp B$, jika untuk setiap $\underline{a} \in A$ dan $\underline{b} \in B$, berlaku $<\underline{a}, \underline{b}> = 0$. ■

Untuk memberi gambaran yang lebih jelas, kita bahas dua contoh berikut ini, yaitu vektor-vektor dalam ruang $\mathbb{R}^n$ dan vektor-vektor dalam ruang ℓ^p.

Contoh 4.8. Dalam $\mathbb{R}^n$, n satuan vektor berbentuk $\underline{v}_1 = (1,0,0, \ldots,0)$, $\underline{v}_2 = (0,1,0, \ldots,0)$, $\underline{v}_3 = (0,0,1, \ldots,0)$, ... , $\underline{v}_m = (0,0,0, \ldots,1,0, \ldots 0)$, ... , $\underline{v}_n = (0,0,0, \ldots,1)$, saling ortogonal, karena menurut definisi 4.6. hasil kali dalam pada $\mathbb{R}^n$ dengan rumus (22) untuk i, j = 1, 2, ..., n, berlaku $< \underline{v}_i, \underline{v}_j > = 0$.

Contoh 4.9. Vektor-vektor $\underline{x} = (-1,0,0,0,\ldots)$, $\underline{y} = (0,0,1,0,0, \ldots)$, dan $\underline{z} = (0,1,0, \ldots)$ dalam ruang ℓ^p saling ortogonal, karena menurut definisi 4.6. operasi hasil kali dalam (23), $< \underline{x}, \underline{y} > = 0$. Demikian pula $< \underline{x}, \underline{z} > = 0$ dan $< \underline{y}, \underline{z} > = 0$.

Pengertian komplemen ortogonal pada ruang hasil kali dalam didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.8. (Komplemen Ortogonal). Misalkan Y sembarang subhimpunan dari ruang hasil kali dalam X. Maka $Y^{\perp} = \{ \underline{x} \in X \mid \underline{x} \perp Y \}$ disebut komplemen ortogonal dari Y. ◼

Teorema berikut ini akan menunjukkan bahwa suatu komplemen ortogonal dari sembarang subruang suatu ruang hasil kali dalam juga merupakan subruang dari ruang hasil kali dalam tersebut.

Teorema 4.5. Jika Y subruang dari ruang hasil kali dalam X, maka $Y^{\perp}$ merupakan subruang dari X.

Bukti. Ambil sembarang $\underline{a}, \underline{b} \in Y^{\perp}$ dan sembarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Karena $\underline{a} \in Y^{\perp}$, maka $\underline{a} \in X$ dan $\underline{a} \perp Y$. Berdasarkan definisi 4.7., untuk setiap $\underline{y} \in Y$ berlaku $< \underline{a}, \underline{y} > = 0$. Demikian pula, karena $\underline{b} \in Y^{\perp}$ maka $\underline{b} \in X$ dan $\underline{b} \perp Y$. Akibatnya, untuk setiap $\underline{y} \in Y$ berlaku $< \underline{b}, \underline{y} > = 0$. Untuk membuktikan bahwa $Y^{\perp}$ subruang dari X, cukup dibuktikan $\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b} \in Y^{\perp}$. Diketahui $\underline{a} \in X$ dan $\underline{b} \in X$. Karena X ruang vektor, maka untuk sembarang $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b} \in X$. Diketahui pula bahwa $\underline{a} \perp Y$ dan $\underline{b} \perp Y$, oleh karena itu untuk setiap $\underline{y} \in Y$ berlaku:

$$\begin{aligned} < \alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b}, \underline{y} > &= < \alpha\, \underline{a}, \underline{y} > + < \beta\, \underline{b}, \underline{y} > \\ &= \alpha < \underline{a}, \underline{y} > + \beta < \underline{b}, \underline{y} > = \alpha.0 + \beta\, 0 = 0, \end{aligned}$$

yang ekuivalen dengan $\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b} \in Y^{\perp}$. Jadi terbukti $Y^{\perp}$ merupakan subruang dari X. ■

Teorema 4.6. di bawah ini menerangkan bahwa irisan dari suatu subruang dari ruang hasil kali dalam dengan komplemen ortogonalnya adalah $\{\underline{0}\}$.

Teorema 4.6. Misalkan Y dan $Y^{\perp}$ subruang-subruang dari ruang hasil kali dalam X, maka irisan dari Y dan $Y^{\perp}$ sama dengan $\{\underline{0}\}$.

Bukti. Ambil sembarang $\underline{a} \in Y \cap Y^{\perp} \Leftrightarrow \underline{a} \in Y$ dan $\underline{a} \in Y^{\perp}$. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $\{\underline{0}\} \subset Y \cap Y^{\perp}$. Jelas $\underline{0} \in Y$ dan $\underline{0} \in Y^{\perp}$ karena Y dan $Y^{\perp}$

merupakan subruang. Jelas bahwa $\underline{\mathbf{0}} \in Y \cap Y^{\perp}$ sehingga terbukti $\{\underline{0}\} \subset Y \cap Y^{\perp}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $Y \cap Y^{\perp} \subset \{\underline{0}\}$. Diketahui $\underline{\mathbf{a}} \in Y^{\perp}$ artinya $< \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}} > = 0$, untuk setiap $\underline{\mathbf{a}} \in Y$. Menurut sifat (2) dari operasi hasil kali dalam $< \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}} > = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{0}}$. Tampak bahwa $\underline{\mathbf{a}} \in \{\underline{\mathbf{0}}\}$. ■

IV. 4. Himpunan Konveks.

Pada geometri analitik ruang telah diketahui bahwa jika $\underline{\mathbf{a}}$ dan $\underline{\mathbf{b}}$ di $\mathbb{R}^3$, maka untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha\, \underline{\mathbf{a}} + (1-\alpha)\underline{\mathbf{b}}$ menyajikan titik yang terletak pada ruas garis penghubung kedua titik tersebut. Himpunan E dalam $\mathbb{R}^3$ dikatakan konveks, jika untuk setiap $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}} \in E$, ruas garis penghubung $\underline{\mathbf{a}}$ dan $\underline{\mathbf{b}}$ terletak pada E. Konsep himpunan konveks tersebut, kita generalisasikan untuk ruang vektor yang lebuh umum dalam definisi berikut ini.

<u>Definisi 4.9. (Himpunan Konveks)</u>. Misalkan M subhimpunan dalam ruang vektor X. M dikatakan konveks, jika untuk setiap $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in M$ dan dan untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku,

$$\alpha\, \underline{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\, \underline{\mathbf{y}} \in M. \qquad ■$$

Sebagai contoh, dalam ruang Euclides $\mathbb{R}^n$, bola buka B = $\{\underline{\mathbf{x}} \mid \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{p}}\| < r\}$ adalah konveks. Hal ini dikarenakan, jika $\underline{\mathbf{a}}$ dan $\underline{\mathbf{b}}$ sembarang titik dalam B, maka untuk sembarang α dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, berlaku

$$\begin{aligned}\|\alpha\,\underline{\mathbf{a}} + (1-\alpha)\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{p}}\| &= \|\alpha(\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{p}}) + (1-\alpha)(\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{p}})\| \\ &\leq \alpha\|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{p}}\| + (1-\alpha)\|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{p}}\| < \alpha r + (1-\alpha) r = r,\end{aligned}$$

yang berarti bahwa, $\alpha\,\underline{\mathbf{a}} + (1-\alpha)\underline{\mathbf{b}} \in$ B.

Teorema 4.7. (Subruang). Sembarang subruang dari ruang vektor X merupakan himpunan konveks.

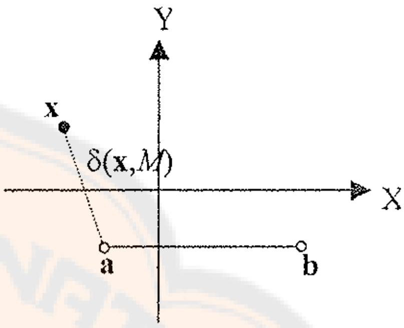
Bukti. Misal Y sembarang subruang dari ruang vektor X dan $\underline{\mathbf{y}}_1, \underline{\mathbf{y}}_2 \in Y$ sembarang. Dengan demikian untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku $\alpha\underline{\mathbf{y}}_1 + \beta\underline{\mathbf{y}}_2 \in Y$, di mana $\alpha + \beta = 1$. Berdasarkan definisi 4.9. dapat disimpulkan bahwa Y merupakan himpunan konveks. ■

Pada ruang bernorma X, konsep "jarak" dari suatu elemen $\underline{\mathbf{x}} \in X$ ke suatu himpunan $M \subset X$, ditulis $\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)$, didefinisikan sebagai

$$\delta(\underline{\mathbf{x}}, M) = \inf\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| \mid \underline{\mathbf{y}} \in M\} \tag{32}$$

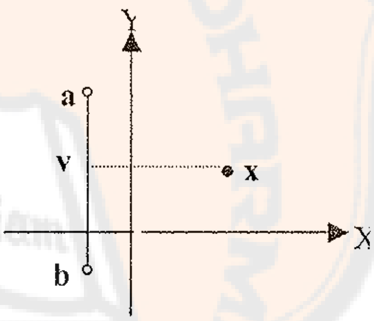
Contoh 4.10. Diberikan himpunan Euclides $\mathbb{R}^2$ dan M subhimpunan dari $\mathbb{R}^2$.

(a) Bila M suatu ruas garis terbuka dan $\underline{x}$ titik di $\mathbb{R}^2$ seperti tampak pada gambar 3, maka, $\delta(\underline{x}, M) = \|\underline{x} - \underline{a}\|$. Namun karena $\underline{a} \notin M$, maka tidak ada $\underline{y} \in M$, sedemikian hingga $\|\underline{x} - \underline{y}\| = \delta(\underline{x}, M)$.



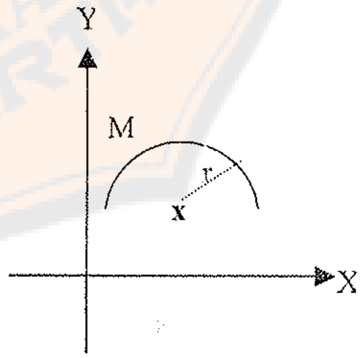
Gambar 3.

(b) Misal M ruas garis terbuka dan $\underline{x}$ titik pada $\mathbb{R}^2$, seperti pada gambar 4. Jika $\underline{y}$ titik di M sedemikian hingga ruas garis penghubung $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ tegak lurus terhadap M, maka dengan meng - gunakan prinsip dalam geometri, maka $\delta(\underline{x}, M) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$.



Gambar 4.

(c) Misalkan M adalah busur setengah lingkaran dengan pusat $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ dan berjari-jari r (lihat gambar 5). Dengan mengingat definisi lingkaran, maka maka $\delta(\underline{x}, M) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = r$, untuk setiap $\underline{y} \in M$.



Gambar 5.

Dua teorema yang akan dibahas berikut ini, nantinya akan diperlukan dalam pembahasan pada bab V.

Teorema 4.8. Misalkan X suatu ruang hasil kali dalam dan M subhimpunan tak kosong yang konveks dan lengkap dari X. Maka, untuk setiap $\underline{\mathbf{x}}\in X$, terdapat tepat sebuah $\underline{\mathbf{i}}\in M$, sedemikian hingga

$$\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{i}}\| = \delta(\underline{\mathbf{x}}, M). \qquad (33)$$

Bukti. Ada dua hal yang harus dibuktikan. Pertama, akan ditunjukkan bahwa ada $\underline{\mathbf{i}}\in M$, sedemikian hingga (33) terpenuhi. Kedua, ditunjukkan bahwa vektor yang demikian tunggal.

(a) Misalkan ambil sembarang $\underline{\mathbf{x}}\in X$ dan $\delta(\underline{\mathbf{x}}, M) = \inf \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|$, $\underline{\mathbf{y}}\in M$. Dengan mengingat pengertian infimum dari suatu himpunan bilangan, terdapat barisan $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ dalam M, sedemikian hingga barisan (δ_n) konvergen ke $\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)$, di mana $\delta_n = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{i}}_n\|$. Akan ditunjukkan bahwa $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ barisan Cauchy. Misalkan $\underline{\mathbf{y}}_n = \underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{x}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Karena M konveks, maka untuk $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{i}}_n + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{i}}_m \in M$, sehingga

$$\|\underline{\mathbf{y}}_n + \underline{\mathbf{y}}_m\| = \|(\underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{x}}) + (\underline{\mathbf{i}}_m - \underline{\mathbf{x}})\| = \|\underline{\mathbf{i}}_n + \underline{\mathbf{i}}_m - 2\underline{\mathbf{x}}\| = 2\,\|\tfrac{1}{2}(\underline{\mathbf{i}}_n + \underline{\mathbf{i}}_m) - \underline{\mathbf{x}}\| \geq 2\delta(\underline{\mathbf{x}}, M).$$

Mengingat δ_n konvergen ke $\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)$, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat positip $N\in\mathbb{N}$, sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\delta_n - \delta < \frac{\varepsilon^2}{4(2\delta+1)} \quad , \quad \delta_n + \delta < 2\delta + 1. \qquad (34)$$

Dengan menggunakan persamaan jajaran genjang dan ketaksamaan (34), maka untuk setiap m, n $\geq$ N diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\|\underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{i}}_m\|^2 = \|\underline{\mathbf{y}}_n - \underline{\mathbf{y}}_m\|^2 &= -\|\underline{\mathbf{y}}_n + \underline{\mathbf{y}}_m\|^2 + 2\left(\|\underline{\mathbf{y}}_n\|^2 + \|\underline{\mathbf{y}}_m\|^2\right) \\
&\leq -(2\delta)^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) = 2\left(\delta_n^2 - \delta^2\right) + 2\left(\delta_m^2 - \delta^2\right) \\
&= 2\left(\delta_n - \delta\right)\left(\delta_n + \delta\right) + 2\left(\delta_m - \delta\right)\left(\delta_m + \delta\right) \\
&< 2\,\frac{\varepsilon^2}{4(2\delta+1)}\,(2\,\delta + 1) + 2\,\frac{\varepsilon^2}{4(2\delta+1)}\,(2\,\delta + 1) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2,
\end{aligned}
$$

yang ekuivalen dengan $\|\underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{i}}_m\| < \varepsilon$. Jadi $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ barisan Cauchy. Dan, karena diketahui M subhimpunan lengkap, maka barisan $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ konvergen di M, misal $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ konvergen ke $\underline{\mathbf{i}} \in M$. Oleh karena $\underline{\mathbf{x}} \in X$ dan $\underline{\mathbf{i}} \in M$, maka

$$\delta(\underline{\mathbf{x}}, M) \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{i}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{i}}_n\| + \|\underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{i}}\| = \delta_n + \|\underline{\mathbf{i}}_n - \underline{\mathbf{i}}\|.$$

Misal diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang.Diketahui δ_n konvergen ke $\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)$ dan $(\underline{\mathbf{i}}_n)$ konvergen ke $\underline{\mathbf{i}}$. Dengan demikian, dari ketaksamaan terakhir di atas didapat $\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{i}}\| = \delta(\underline{\mathbf{x}}, M)$.

(b) Kita asumsikan $\underline{\mathbf{i}}_0 \in M$ dan memenuhi persamaan (33) Dengan persamaan jajaran genjang, maka untuk setiap $\underline{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{i}}_0 \in M$, diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\|\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{i}}_0\|^2 = \|(\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{x}}) - (\underline{\mathbf{i}}_0 - \underline{\mathbf{x}})\|^2 &= 2\,\|\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\,\|\underline{\mathbf{i}}_0 - \underline{\mathbf{x}}\|^2 - \|(\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{x}}) + (\underline{\mathbf{i}}_0 - \underline{\mathbf{x}})\| \\
&= 2\,[\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)]^2 + 2[\delta(\underline{\mathbf{x}}, M)]^2 - 4\,\|\tfrac{1}{2}\,(\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{i}}_0) - \underline{\mathbf{x}}\|^2 \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Karena M konveks, maka $\frac{1}{2}$ $(\underline{i} + \underline{i}_0) \in M$, sehingga $\|\frac{1}{2}$ $(\underline{i} + \underline{i}_0) - \underline{x}\| \geq \delta(\underline{x}, M)$ dan akibatnya $-\|\frac{1}{2}$ $(\underline{i} + \underline{i}_0) - \underline{x}\|^2 \leq [\delta(\underline{x}, M)]^2$. Oleh karena itu, dari hubungan (35) didapat,

$$0 \leq \|\underline{i} - \underline{i}_0\|^2 \leq 2[\delta(\underline{x}, M)]^2 + 2[\delta(\underline{x}, M)]^2 - 4[\delta(\underline{x}, M)]^2 = 0.$$

Akibatnya, $\|\underline{i} - \underline{i}_0\| = 0$, sehingga menurut aksioma (i) pada definisi 4.2. mengenai norma diperoleh, $\underline{i} - \underline{i}_0 = 0$ atau $\underline{i} = \underline{i}_0$. ■

Teorema 4.9. (Keortogonalan). Misal Y subruang lengkap dari ruang hasil kali dalam X, dan $\underline{x} \in X$. Maka $\underline{x} - \underline{y}$ ortogonal terhadap Y untuk setiap $\underline{y} \in Y$.

Bukti. Tulislah $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$. Andaikan $\underline{z}$ tidak ortogonal terhadap Y, maka ada $\underline{y}_1 \in Y$, sedemikian hingga $\langle \underline{z}_1, \underline{y}_1 \rangle = \beta \neq 0$. Dengan demikian, untuk sembarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned}\|\underline{z} - \alpha\,\underline{y}_1\|^2 &= \langle \underline{z} - \alpha\,\underline{y}_1, \underline{z} - \alpha\,\underline{y}_1 \rangle \\ &= \langle \underline{z}, \underline{z} \rangle - \langle \underline{z}, \alpha\,\underline{y}_1 \rangle - \langle \alpha\,\underline{y}_1, \underline{z} \rangle + \langle \alpha\,\underline{y}_1, \alpha\,\underline{y}_1 \rangle \\ &= \langle \underline{z}, \underline{z} \rangle - \alpha\beta - \alpha[\beta - \alpha\langle \underline{y}_1, \underline{y}_1 \rangle]. \qquad (36)\end{aligned}$$

Pilih $\alpha = \dfrac{\beta}{\|\underline{y}_1\|^2}$. Dengan persamaan (33) dari (36) didapat,

$$\|\underline{z} - \alpha\,\underline{y}_1\|^2 = \|\underline{z}\|^2 - \frac{\beta^2}{\|\underline{y}_1\|^2} - \frac{\beta^2}{\|\underline{y}_1\|^2}\left[\beta - \frac{\beta}{\|\underline{y}_1\|^2}\|\underline{y}_1\|^2\right]$$

$$= \| \underset{\sim}{\mathbf{z}} \|^2 - \frac{\beta^2}{\| \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 \|^2} < \| \underset{\sim}{\mathbf{z}} \|^2 = [\delta(\underset{\sim}{\mathbf{x}}, Y)]^2 .$$

Dilain pihak, $\underset{\sim}{\mathbf{z}} - \alpha\, \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{y}}_2$, di mana $\underset{\sim}{\mathbf{y}}_2 = \underset{\sim}{\mathbf{y}} + \alpha\, \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 \in Y$, sehingga $\|\underset{\sim}{\mathbf{z}} - \alpha\, \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1\| = \|\underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{y}}_2\| \geq \delta(\underset{\sim}{\mathbf{x}}, Y)$. Jelas bahwa $[\delta(\underset{\sim}{\mathbf{x}}, Y)]^2 \leq \|\underset{\sim}{\mathbf{z}} - \alpha\, \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1\|^2 < [\delta(\underset{\sim}{\mathbf{x}}, Y)]^2$ tidak mungkin. Akibatnya $< \underset{\sim}{\mathbf{z}}_1, \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 > = \beta \neq 0$, tidak dipenuhi. Jadi benar $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ ortogonal terhadap Y atau $\mathbf{z} \perp Y$. ■

BAB V

RUANG HILBERT

Pada bab IV kita telah mempelajari ruang hasil kali dalam, yang merupakan ruang bernorma spesial. Hal ini dikarenakan operasi hasil kali dalamnya dapat mendefinisikan sebuah norma pada ruang tersebut. Dilain pihak, dijelaskan pula bahwa sebuah norma dari suatu ruang bernorma mampu membangkitkan suatu metrik. Dengan demikian, suatu operasi hasil kali dalam dapat mendefinisikan sebuah metrik berbentuk norma. Salah satu ruang hasil kali dalam yang demikian adalah ruang Hilbert (definisi 5.1.). Nama Hilbert dipakai untuk menghormati seorang matematikawan berkebangsaan Jerman, bernama David Hilbert (1861-1943), yang telah menyumbangkan karya-karya yang hebat pada dunia matematika, khususnya geometri.

Pokok pembahasan pada bab V ini adalah representasi ruang Hilbert sebagai jumlahan langsung. Pertama, akan diperkenalkan terlebih dahulu pengertian ruang Hilbert dan subruang dari ruang Hilbert. Beberapa contoh dihadirkan guna memperjelas konsep tersebut, antara lain ruang Euclides $\mathbb{R}^n$, ruang ℓ^p, dan $\mathbb{Q}$. Kemudian pada subbab V.2., akan didefinisikan konsep jumlahan langsung pada ruang vektor. Pembahasan terakhir pada bab ini mengenai teorema jumlahan langsung pada ruang Hilbert dan disertai beberapa contoh.

V.1. Pengertian Ruang Hilbert.

Ruang Hilbert yang menjadi pusat perhatian dari skripsi ini, didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 5.1. (Ruang Hilbert). Ruang Hilbert H adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap terhadap metrik pada H dengan rumus

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{< \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} >}, \qquad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in H \quad (37) \ ■$$

Contoh 5.1. Ruang Euclides $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Hilbert, karena menurut contoh 3.3., merupakan ruang metrik lengkap dengan metrik (17). Dan, menurut contoh 4.5. $\mathbb{R}^n$ pun merupakan ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam (22). Sehingga, (37) terpenuhi.

Contoh 5.2. Ruang vektor ℓ^p, dengan p = 2, merupakan ruang Hilbert, karena menurut contoh 4.6., ℓ^p merupakan ruang hasil kali dalam. Disamping itu, metrik (18) pada ℓ^p, $p \geq 1$, dan operasi hasil kali dalam (23) memenuhi persamaan (37). Sedangkan, ruang vektor ℓ^p, $p \neq 2$, bukan merupakan ruang Hilbert, karena dari contoh 4.7. diketahui bahwa ℓ^p, $p \neq 2$ bukan ruang hasil kali dalam.

Contoh 5.3. Karena $\mathbb{Q}$ (himpunan bilangan rasional) bukan merupakan ruang metrik yang lengkap (contoh 3.5.), meskipun $\mathbb{Q}$ merupakan ruang hasil kali dalam dengan operasi hasil kali dalam $< \underline{x}, \underline{y} > = \underline{x}\,\underline{y}$, $\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Q}$ dan persamaan (37) terpenuhi. Maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Q}$ bukan ruang Hilbert.

Pada bab IV telah didefinisikan subruang dari ruang hasil kali dalam. Serupa dengan konsep tersebut, jika Y merupakan subruang hasil kali dalam dari ruang Hilbert H, maka Y disebut subruang dari ruang Hilbert H. Sebagai contoh, $\mathbb{Q}$ merupakan subruang hasil kali dalam dari ruang Hilbert $\mathbb{R}$.

V.2. Jumlahan Langsung.

Dalam Subbab ini akan dibahas sebuah teorema mengenai representasi ruang Hilbert sebagai jumlahan langsung. Untuk itu, terlebih dahulu didefinisikan konsep jumlahan langsung dari ruang vektor.

Definisi 5.2. (Jumlahan Langsung). Misalkan X sembarang ruang vektor, dan Y dan Z subruang-subruang dari X. Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari Y dan Z, ditulis,

$$X = Y \oplus Z,$$

jika untuk setiap $\underline{x} \in X$, terdapat tepat sebuah $\underline{y} \in Y$ dan tepat sebuah $\underline{z} \in Z$, sedemikian hingga $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$. ■

Dalam definisi di atas Z disebut komplemen aljabar dari Y dalam X, begitu pula sebaliknya Y disebut komplemen aljabar dari Z dalam X. Disamping itu, Y dan Z disebut pasangan komplementer dalam X.

Sebagai ilustrasi, misal X adalah bidang Euclides $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, dan $Y = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $Z = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Y dan Z ini merupakan subruang-subruang dari X. Sekarang, ambil sembarang $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan jumlahan langsung dari Y dan Z. Jelas bahwa $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$, di mana $(a, 0) \in Y$ dan $(0, b) \in Z$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa representasi tersebut tunggal, misalkan $(a, b) = (a',0) + (0, b')$, di mana $(a', 0) \in Y$ dan $(0, b') \in Z$. Padahal diketahui $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$. Jadi,

$$(a, 0) + (0, b) = (a', 0) + (0, b') \Leftrightarrow (a, b) = (a', b'),$$

yang berarti $a = a'$ dan $b = b'$. Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbb{R}^2 = Y \oplus Z$.

$\mathbb{R}^2$ dapat pula dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari dua subruang yang lain. Pandang subruang-subruang $U = \{(a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ dan $V = \{(0, b-1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$. Ambil sembarang $(p, q)) \in \mathbb{R}^2$, maka

$$(p, q) = (p, 1) + (0, q - 1).$$

Jelas bahwa $(p,1) \in U$ dan $(0,q-1) \in V$. Untuk menunjukkan ketunggalannya, misal berlaku $(p, q) = (p', 1) + (0, q'-1)$, di mana $(p', 1) \in U$ dan $(0, q'-1) \in V$. Dengan demikian,

$$(p, 1) + (0, q - 1) = (p', 1) + (0, q'-1)$$

$$\Leftrightarrow (p, (q - 1) + 1) = (p', (q'-1) + 1)$$

$$\Leftrightarrow (p, q) = (p', q').$$

Ini berarti, p = p′ dan q = q′, yang menunjukkan bahwa uraian (p, q) = (p, 1) + (0, q − 1) bersifat tunggal. Jadi $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$.

Mengingat ruang Hilbert H merupakan suatu ruang vektor, maka menarik untuk diselidiki apakah H merupakan suatu jumlahan langsung dari dua subruangnya.. Inilah yang menjadi pokok pembahasan dalam skripsi ini. Dalam kenyataannya memang demikian, seperti tertuang dalam teorema berikut yang diberi nama Teorema Jumlahan Langsung.

Teorema 5.1. (Jumlahan langsung). Jika Y sembarang subruang tertutup dari ruang Hilbert H, maka

$$H = Y \oplus Y^{\perp} \qquad \blacksquare$$

Bukti. Karena H lengkap dan Y tertutup, maka dengan Teorema 3.4., Y merupakan subruang lengkap. Disamping itu, menurut Teorema 4.7. dapat disimpulkan pula bahwa Y konveks. Ambil sembarang $\underline{x} \in H$ berdasarkan teorema 4.8., maka terdapat tepat sebuah $\underline{y} \in Y$ sedemikian hingga $\| \underline{x} - \underline{y} \| = \delta(\underline{x}, Y)$. Mengingat Y subruang lengkap, maka berdasarkan Teorema 4.9. berlaku $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$ ortogonal terhadap Y, di mana $\underline{y} \in Y$. Dengan demikian, dipenuhi $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$, di mana $\underline{z} \in Y^{\perp}$. Tinggal ditunjukkan uraian dari $\underline{x}$ tersebut tunggal. Untuk itu, kita assumsikan $\underline{x}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan

$$\underline{x} = \underline{y}_1 + \underline{z}_1$$

di mana $\underline{y}_1 \in Y$ dan $\underline{z}_1 \in Y^{\perp}$. Akibatnya, dengan mengingat Y sebagai subruang dari H dan Teorema 4.5., maka dapat disimpulkan bahwa

$$\underline{y} + \underline{z} = \underline{y}_1 + \underline{z}_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y} - \underline{y}_1 = \underline{z}_1 - \underline{z}, \tag{39}$$

di mana $\underline{y} - \underline{y}_1 \in Y$ dan $\underline{z}_1 - \underline{z} \in Y^{\perp}$. Dengan demikian, karena (39) dan mengingat Teorema 4.6., maka $\underline{y} - \underline{y}_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{\underline{0}\}$ dan $\underline{z}_1 - \underline{z} \in Y \cap Y^{\perp} = \{\underline{0}\}$. Akibatnya, $\underline{y} = \underline{y}_1$ dan $\underline{z}_1 = \underline{z}$. ■

Contoh 5.4. Dari contoh 2.4. diketahui bahwa $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ merupakan subruang tertutup. Dengan demikian, untuk menentukan $L^{\perp}$, pandang $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ sedemikian hingga $(p, q) \perp L$. Maka berlaku $<(x, 0), (p, q)> = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x.p = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = 0$. Jadi $L^{\perp} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$. Berdasarkan Teorema 5.1., $\mathbb{R}^2 = L \oplus L^{\perp}$, yang sesuai dengan kenyataan, yaitu bahwa untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, terdapat tepat satu $(a, 0) \in L$ dan tepat satu $(0, b) \in L^{\perp}$ sedemikian hingga $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$.

Contoh 5.5. Diberikan subruang tertutup $M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ dari ruang Hilbert $\mathbb{R}^2$. Untuk mencari $M^{\perp}$, pandang $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ sedemikian hingga $(p, q) \perp M$. Maka berlakulah $<(x, x), (p, q)> = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x\,p + x\,q = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x\,(p + q) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p + q = 0 \Leftrightarrow p = -q$. Jadi $M^{\perp} = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Menurut Teorema 5.1. $\mathbb{R}^2 = M \oplus M^{\perp}$. Hal ini cocok dengan kenyataan bahwa untuk setiap (a, b)$\in\mathbb{R}^2$, terdapat tepat satu $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) \in M$ dan tepat satu $(\frac{1}{2}(a-b), -\frac{1}{2}(a-b)) \in M^{\perp}$, sedemikian hingga

$$(a, b) = (\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) + (\frac{1}{2}(a-b), -\frac{1}{2}(a-b)).$$

Contoh 5.6. Diberikan subruang tertutup $Y=\{\underline{x} \mid \underline{x} = (\xi_j)\in\ell^2, \xi_{2n} = 0, n\in\mathbb{N}\}$ dari ℓ^2. Untuk mencari $Y^{\perp}$, pandanglah $\underline{a} = (\alpha_j)\in\ell^2$ sedemikian hingga $\underline{a} \perp Y$. Maka haruslah dipenuhi,

$$<\underline{a}, \underline{b}> = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\beta_j = \alpha_1\beta_1 + 0\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + ... + 0\beta_{2n} + \ldots = 0\,, \quad \forall\, \underline{b} \in\ell^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_3 + ... + \alpha_{2n-1}\beta_{2n-1} + \ldots = 0\,, \quad \forall\, \underline{b} \in\ell^2.$$

Supaya hubungan persamaan terakhir di atas terpenuhi, maka dipilih $\underline{b} = (\beta_j)\in\ell^2$, $\beta_{2n-1} = 0$, n$\in\mathbb{N}$. Jadi, $Y^{\perp} = \{\underline{y} \mid \underline{y} = (\eta_j)\in\ell^2, \eta_{2n-1} = 0, n\in\mathbb{N}\}$. Menurut Teorema 5.1., $\lambda^2 = Y \oplus Y^{\perp}$. Hal ini sesuai dengan kenyataan bahwa untuk setiap $(\zeta_j)\in\ell^2$, terdapat tepat satu $(\xi_j)\in Y$, dengan $\xi_j = 0$, $\forall$j = 2n dan $\xi_j = \zeta_j$, $\forall$j = 2n -1, n$\in\mathbb{N}$. Dan tepat satu $(\eta_j)\in Y^{\perp}$, dengan $\eta_j = 0$, $\forall$j = 2n $-$ 1 dan $\xi_j = \zeta_j$, $\forall$j = 2n, n$\in\mathbb{N}$. Sehingga berlaku,

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, ... ,\zeta_n, \ldots) = (\xi_1, 0, \xi_3, \ldots, \xi_{2n-1}, 0, \ldots) + (0, \eta_2, 0, \ldots, 0, \eta_{2n}, \ldots).$$

BAB VI

PENUTUP

VI.1. Kesimpulan.

Berdasarkan penelitian mengenai representasi Ruang Hilbert sebagai Jumlahan Langsung yang tertuang dalam skripsi ini, maka dapat disimpulkan beberapa pokok penting dan menarik sebagai berikut:

1. Sebuah norma dari suatu ruang bernorna X mampu membangkitkan sebuah metrik berbentuk norma, dengan rumus $d(x, y) = \| \underline{x} - \underline{y} \|, \forall\ \underline{x}, \underline{y} \in X$, sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap ruang vektor bernorma pasti merupakan suatu ruang metrik.
2. Suatu operasi hasil kali dalam dari suatu ruang vektor X dapat mendefinisikan sebuah norma, dengan rumus $\|\underline{x}\| = \sqrt{<\underline{x}, \underline{x}>}$, untuk setiap $\underline{x} \in X$. Dan mengingat sebuah norma mampu mendefinisikan sebuah metrik, maka untuk setiap $\underline{x}, \underline{y} \in X$, berlaku $d(x, y) = \| \underline{x} - \underline{y} \| = \sqrt{<\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y}>}$.
3. Ruang Hilbert H adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap terhadap metrik pada H. Dengan demikian suatu ruang dapat dikatakan sebagai ruang Hilbert bila ruang tersebut merupakan suatu ruang hasil kali dalam sekaligus ruang metrik yang lengkap.

4. Sebuah ruang vektor X dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari dua subruangnya, Y dan Z, ditulis $X = Y \oplus Z$, jika untuk setiap $\underline{\mathbf{x}} \in X$ terdapat tepat tepat sebuah $\underline{\mathbf{y}} \in Y$ dan tepat sebuah $\underline{\mathbf{z}} \in Z$, sedemikian hingga $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}$.
5. Karena Ruang Hilbert merupakan ruang vektor, maka Ruang Hilbert pun dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari subruang- subtuangnya. Lebih tepatnya lagi, berdasarkan Teorema 5.1. ruang Hilbert dapat direpresentasikan sebagai jumlahan langsung dari subruang-subruang yang saling tegak lurus.

VI.2. Saran-saran.

Dengan selesainya penelitian dan skripsi ini, penulis mengajukan beberapa saran yang dapat dipergunakan untuk penelitian selanjutnya, khususnya penelitian yang berhubungan dengan hal-hal yang terdapat dalam skripsi ini.

1. Penggunaan himpunan yang komponen-komponennya berupa bilangan kompleks atau himpunan barisan dengan suku-suku bilangan kompleks perlu untuk diteliti lebih lanjut dalam pembahasan ruang metrik, ruang vektor, ruang bernorma, ruang hasil kali dalam, maupun ruang Hilbert.
2. Suatu sifat penting dari ruang Hilbert, yaitu bahwa ruang Hilbert merupakan pelengkap dari ruang hasil kali dalam tidak dibahas di dalam skripsi ini. Hal ini dikarenakan topik utama dari skripsi ini adalah menyoroti tentang representasi

ruang Hilbert dalam bentuk jumlahan langsung. Oleh karena itu, sifat ini menarik untuk dijadikan. topik pembahasan yang menarik untuk diteliti.

3. Dalam skripsi ini, konsep keortogonalan dan komplemen ortogonal suatu ruang vektor hanya dipergunakan dalam rangka pembuktian Teorema Jumlahan Langsung pada ruang Hilbert. Padahal, di dalam beberapa konsep pada ruang Hilbert, konsep ini banyak diperlukan. Sebagai contoh konsep keortogonalan diperlukan dalam pembuktian Teorema Himpunan Rapat dan Teorema Ketotalan pada himpunan ortonormal total. Hal-hal tersebut dapat dijadikan topik penelitian selanjutnya.
4. Penerapan Teorema Jumlahan Langsung pada pembuktian beberapa teorema lain dalam ruang Hilbert, tidak digali dalam penelitian ini. Oleh karena itu, baik untuk diteliti dan dikembangkan lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Kreyszig, Erwin. (1989), ***Introductory Functional Analysis with Applications***, Florida : Robert E. Krieger Publishing Company.

Choudhary, B. & Nandan, S. (1989), ***Functional Analysis with Applications***, New York : John Wiley & Sons.

Soemantri, R. (1988), ***Analisis Real II***, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Universitas Terbuka.

Brukner, Andrew, M., dkk. (1997), ***Real Analysis***, New Jersey : Prentice-Hall International, INC.

Griffel, D.A. (1981), ***Applied Functional Analysis***, New York : Ellis Horwood Limited. John Wiley & Sons.

Brown, A.L. & Page, A. (1979), ***Elements of Functional Analysis***, London : Van Nostrand Reinhold Company.

Aliprantis, Charalambos, D. & Burkinshaw, O. (1990), ***Principles of Real Analysis***, 2nd edition, New York : Academic Press, Inc.

Mostow, George D. & Sampson, Joseph H. (1969), ***Linear Algebra***, New York : McGraw-Hill, Inc.

Lang, Serge. (1986), ***Introduction to Linear Algebra***, 2nd edition, New York : Springer-Verlag, Inc.

White, Paul, A. (1966), ***Linear Algebra***, California: Dickenson Publishing Company, Inc.