TEOREMA TITIK TETAP BANACH

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

RETNO KUSUMADEWI

NIM : 951414018
NIRM : 950051120501120018

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

TEOREMA TITIK TETAP BANACH

disusun oleh :

RETNO KUSUMADEWI

NIM : 951414018

NIRM : 950051120501120018

Telah diperiksa, dibaca dan disetujui oleh:

Pembimbing :

Drs. St. Susento, M.Si.

Tanggal, 30 Agustus 2001

S K R I P S I

TEOREMA TITIK TETAP BANACH

Dipersiapkan dan ditulis oleh

RETNO KUSUMADEWI

NIM : 951414018

NIRM : 950051120501120018

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 22 Agustus 2001

Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Ketua	:	Drs. R. Rohandi, M. Ed	....
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiharto, M. T	....
Anggota	:	Drs. St. Susento, M. Si	....
Anggota	:	Prof. Drs. R. Soemantri	....

Yogyakarta, 22 Agustus 2001

Fakultas Keguruan dan Ilmu Kependidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. A. M. Slamet Soewandi

Muliakanlah Tuhan dengan hartamu dan dengan hasil pertama dari segala penghasilanmu. Maka lumbung-lumbungmu akan diisi penuh sampai melimpah, dan bejana pemerahanmu akan meluap dengan air buah anggurmu (Amsal 2: 9 –10).

Marilah kepadaKu, semua yang letih lesu dan berbeban berat, Aku akan memberi kelegaan kepadamu. Pikullah kuk yang kupasang dan belajarlah padaKu, karena Aku lemah lembut dan rendah hati dan jiwamu akan mendapat ketenangan. Sebab kuk yang Kupasang itu enak dan bebanKupun ringan (Matius 11: 28-30).

Kupersembahkan skripsi ini untuk:

- Bapak dan ibu
- Kakak-kakakku beserta segenap keluarganya masing-masing:
Mas Sihmara, Mas Kintoko, Mbak Nur, Mas Buntoro
- Mas Rumpoko dan Biworo adikku
- Mas Kasimir
Terima kasih atas doa, dukungan dan cinta kasihnya.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 30 Agustus 2001

Penulis

Retno Kusumadewi

ABSTRAK

TEOREMA TITIK TETAP BANACH

Retno Kusumadewi
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta

Konsep kontraksi pada suatu ruang metrik lengkap dan keberadaan titik tetapnya dihubungkan dalam suatu teorema yang disebut Teorema Titik Tetap Banach sebagai berikut: Bila T suatu kontraksi pada ruang metrik lengkap maka T mempunyai tepat sebuah titik tetap. Teorema tersebut sering pula disebut Teorema Kontraksi, karena teorema ini memberikan syarat perlu bagi suatu fungsi yang diketahui menjadi suatu kontraksi.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Bapa, Allah Maha Bijaksana, karena rahmat-Nya lah, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi dengan judul **Teorema Titik Tetap Banach** ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa karya tulis ini dapat selesai berkat bantuan berbagai pihak, perkenankanlah penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tulus kepada:

1. Bapak Drs. St. Susento. Msi, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah dengan sabar, teliti dan penuh pengertian dalam membimbing penulis selama penyusunan skripsi ini. Demikian pula sebagai dosen penasihat akademik yang telah dengan sabar memberi masukan dan saran dalam perencanaan studi penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma ini.
2. Bapak Drs. T. Sugiarto. M. T, selaku dosen pembimbing akademik terakhir ketika penulis menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri selaku dosen penguji skripsi ini.
4. Bapak-Ibu dosen yang telah membimbing, mendidik dan memberi kemudahan penulis dalam belajar di Universitas Sanata Dharma ini.

5. Segenap karyawan Universitas Sanata Dharma, khususnya karyawan sekretariat JPMIPA dan perpustakaan yang dengan sabar telah membantu penulis selama kuliah hingga menyelesaikan skripsi ini.
6. Teman-teman seperjuangan, khususnya dari Program Studi Pendidikan Matematika angkatan '95 dan '96, terlebih Triyatiningsih, T.Triwuryani dan Bertha Indrayanti yang senantiasa membesarkan semangat penulis dalam menyelesaikan karya tulis ini.
7. Teman-teman anggota Paduan Suara Mahasiswa 'Cantus Firmus' Universitas Sanata Dharma, khususnya angkatan '95, '96, '97, '99 yang telah memberi semangat dan hiburan penulis selama ini.
8. Sahabat-sahabat anggota Paduan Suara 'Gandrung' Yogyakarta, yang telah setia mendampingi dan menguatkan hati penulis selama ini.

Menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, maka dengan senang hati penulis menerima masukan dan kritikan yang sifatnya membangun demi perbaikan selanjutnya. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat berguna pada siapa saja yang peduli terhadap Matematika terutama mengenai Fungsi Analisis.

Yogyakarta, 30 Agustus 2001

Penulis,

Retno Kusumadewi

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang Masalah

Dalam Kalkulus sering dijumpai fungsi real $f : \Re \to \Re$ dimana terdapat $x \in \Re$ yang nilai fungsinya sama dengan x itu sendiri, yaitu $f(x) = x$. x yang demikian dinamakan titik tetap dari f. Misalnya fungsi konstan $f(x) = c$ mempunyai tepat sebuah titik tetap yaitu c. Sedangkan titik tetap dari fungsi identitas $f(x) = x$ tak hingga banyaknya. Di lain pihak fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - x + 5$ tidak mempunyai titik tetap sama sekali. Keberadaan titik tetap fungsi sangat penting karena titik tetap tersebut merupakan solusi dasar dari bentuk persamaan $x - f(x) = 0$ dan persamaan-persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk tersebut, misalnya dalam Persamaan Aljabar Linier, Persamaan Diferensial dan Persamaan Integral.

Dalam Aljabar jarak antara dua bilangan real x dan y didefinisikan sebagai $|x - y|$ (Zuckerman, 1985: 77). Konsep tersebut digeneralisasikan menjadi konsep baru yang dibahas dalam skripsi ini, yakni konsep 'metrik'. Berdasarkan konsep metrik ini didefinisikan konsep 'ruang metrik', dimana himpunan semua bilangan real $\Re$ merupakan kasus khususnya.

Pandanglah suatu fungsi f : $\left(0, \frac{1}{4}\right) \to \Re$, dengan $f(x) = x^2$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Untuk sembarang a, b $\in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ dipenuhi hubungan $a + b < \frac{1}{2}$, sehingga $|f(a) - f(b)| = |b^2 - a^2| = |b - a|\,(b + a) \leq \frac{1}{2}|b - a|$. Jadi untuk sembarang a, b $\in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ jarak antara nilai fungsi keduanya lebih kecil atau sama dengan setengah jarak a ke b. Tampaklah seperti terjadi 'penyusutan' jarak antara dua nilai fungsi jika dibandingkan dengan jarak antara dua elemen di daerah asal yang berpasangan dengan nilai fungsi tersebut. Fungsi dengan syarat seperti itu merupakan contoh dari konsep 'kontraksi' yang diperkenalkan dalam skripsi ini.

Teorema Titik Tetap Banach menghubungkan konsep kontraksi pada suatu ruang metrik tertentu dengan keberadaan titik tetapnya. Sesuai dengan namanya, teorema ini sangat penting sebagai alat untuk mengetahui keberadaan titik tetap suatu kontraksi. Penerapannya antara lain pada berbagai masalah Matematika, seperti Persamaan Aljabar Linier, Persamaan Diferensial dan Persamaan Integral. Penerapan di tingkat yang lebih lanjut lagi adalah dalam apa yang disebut Ruang Banach, yang merupakan pengembangan dari konsep ruang metrik (Kreyszig, 1978: 307 – 319). Bahkan teorema di atas dipergunakan pula dalam Geometri Fraktal (Soemantri, 1998: 18). Mengingat penerapannya yang begitu luas, Teorema Titik Tetap Banach perlu dipelajari. Namun untuk itu diperlukan pemahaman yang baik tentang teorema tersebut yang menjadi pokok perhatian skripsi ini.

I.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendiskripsikan secara jelas Teorema Titik Tetap Banach.

I.3 Pembatasan Masalah

Mengingat luasnya cakupan dan penerapan Teorema Titik Tetap Banach, maka dalam penelitian ini dilakukan beberapa pembatasan sebagai berikut:

1. Dalam penelitian ini semua fungsi yang dikaji didefinisikan dalam ruang metrik, sedangkan fungsi pada ruang Banach tidak diteliti.
2. Contoh-contoh ruang metrik dalam skripsi ini meliputi himpunan-himpunan $\Re$, $\Re^2$, $\Re^3$, $\Re^n$ dan C[a,b]. Himpunan lain yang lebih rumit, seperti ℓ^P tidak dikemukakan.
3. Dalam penelitian ini hanya membahas ruang metrik lengkap beserta contoh-contohnya, sedangkan ruang metrik tidak lengkap dan pelengkap ruang metrik tidak dibahas.
4. Penerapan Teorema Titik Tetap Banach yang dibahas hanya untuk mengetahui keberadaan titik tetap dari suatu kontraksi. Sedangkan penerapannya pada Persamaan Aljabar Linier, Persamaan Diferensial dan Geometri Fraktal tidak digali dalam penelitian ini.

I.4 Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dipetik manfaat sebagai berikut:

1. Mempermudah pembaca dalam memahami Teorema Titik Tetap Banach dibandingkan dengan membaca langsung dari buku-buku sumber.
2. Menjadi dasar untuk mempelajari masalah-masalah dalam Analisis Fungsional yang berkaitan dengan penerapan Teorema Titik Tetap Banach, misalnya dalam Ruang Banach, Persamaan Aljabar Linier, Persamaan Diferensial, Persamaan Integral dan Geometri Fraktal.
3. Sebagai motivasi bagi penulis untuk berani menggali dan mengembangkan konsep matematika, baik yang telah dipelajari maupun yang belum pernah dipelajari.

I.5 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian pustaka. Buku dengan judul *Introductory Functional Analysis with Applications* karangan Erwin Kreyszig sebagai acuan pokok, dengan dukungan buku-buku lain sebagai pelengkap.

I.6 Sistematika Pembahasan

Pembahasan pertama Bab II diawali dengan memperkenalkan konsep metrik dan ruang metrik beserta contoh-contohnya. Selanjutnya untuk membahas ruang metrik lengkap diperkenalkan dahulu konsep barisan, barisan konvergen dan Barisan Cauchy dalam ruang metrik. Pembahasan tersebut memuat definisi dan contoh-contohnya.

Dalam Bab III dibahas Teorema Titik Tetap Banach beserta contoh-contoh pemakaiannya. Untuk sampai pada pembahasan tersebut, dibahas dahulu tentang konsep iterasi dan kontraksi disertai contoh-contohnya.

Bab IV merupakan penutup yang menguraikan tentang pokok-pokok penting dalam penelitian ini. Selain itu dikemukakan saran bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

RUANG METRIK LENGKAP

Pembahasan bab ini terbagi dalam tiga bagian. Diawali dengan memperkenalkan konsep baru tentang metrik dan ruang metrik yang memuat definisi dan contohnya. Selanjutnya pada bagian kedua bab ini membahas konsep Barisan Cauchy dalam ruang metrik, dengan didahului mengenalkan konsep barisan dan barisan konvergen dalam ruang metrik. Adapun pembahasannya meliputi definisi dan contohnya. Ruang metrik yang setiap Barisan Cauchynya konvergen disebut ruang metrik lengkap dibahas dalam bagian terakhir bab ini. Konsep terakhir inilah yang menjadi salah satu syarat berlakunya Teorema Titik Tetap Banach, yang akan dibahas dalam Bab III kemudian.

II.1 Ruang Metrik

Definisi II.1(Metrik). Diberikan E sembarang himpunan tidak kosong. Suatu metrik dari E adalah suatu fungsi d : $E \times E \rightarrow \mathfrak{R}$, yang untuk setiap $x,y,z \in E$ memenuhi sifat-sifat:

$$d(x,y) \geq 0 \tag{2.1}$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{2.2}$$

$$d(x,y) = d(y,x) \tag{2.3}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \tag{2.4}$$

Sifat (2.3) disebut Sifat Simetris, sedangkan Sifat (2.4) disebut Sifat Ketaksamaan Segitiga. Metrik dari E dalam Defini II.1 disebut juga sebagai fungsi jarak dari E (Thilman, 1959: 57).

Contoh II.1 Fungsi $d : \mathfrak{R}x\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ dengan rumus :

$$d(x,y) = |x - y|, \text{ untuk } x,y \in \mathfrak{R}. \tag{2.5}$$

merupakan salah satu metrik dari himpunan semua bilangan real $\mathfrak{R}$. Hal ini disebabkan karena d tersebut memenuhi Sifat (2.1)–(2.4), seperti yang diperlihatkan berikut ini :

1). Dari rumus d, jelas bahwa $d(x,y) \geq 0$ untuk sembarang $x, y \in \mathfrak{R}$.

2). Misalkan $x, y \in \mathfrak{R}$. Jika $d(x,y) = 0$, maka $|x - y| = 0$, sehingga $x - y = 0$ atau $x = y$. Sekarang jika $x = y$, maka $x - y = 0$, sehingga jelas bahwa $|x - y| = 0$ atau $d(x,y) = 0$.

3). Untuk sembarang $x, y \in \mathfrak{R}$ berlaku $d(x,y) = |-(x - y)| = |y - x| = d(y,x)$.

4). Misalkan $x, y, z \in \mathfrak{R}$. Berdasarkan Sifat Ketaksamaan Segitiga dari harga mutlak bilangan real, maka untuk sembarang $x, y \in \mathfrak{R}$ berlaku:

$d(x,y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y)$,

sehingga $|(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$ atau $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Contoh II.2 Akan diperlihatkan bahwa fungsi $d : \mathfrak{R}^2 \text{ x } \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ dengan rumus sebagai berikut:

$$d(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \qquad (2.6)$$

dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \Re^2$ merupakan metrik bagi himpunan semua pasangan terurut $\Re^2$.

1). Karena rumus d berupa bentuk akar, maka jelas bahwa $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in \Re^2$.

2). Andaikan $d(x,y) = 0$ dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dimana $x, y \in \Re^2$. Ini berarti berlaku $\left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} = 0$, yang mengakibatkan $\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 = 0$. Sehingga haruslah $(x_1 - y_1)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$. Jadi tampak bahwa $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$ yang menunjukkan bahwa $x = y$.

3). Untuk sembarang $x, y \in \Re^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ berlaku:

$$d(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{2} \{-(x_i - y_i)\}^2 \right]^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i)^2 \right\}^{1/2} = d(y,x).$$

4). Diberikan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $x, y, z \in \Re^2$. Perhatikan bahwa:

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=1}^{2} (z_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{2} (z_i - y_i)^2 + 2\left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i)^2 \sum_{i=1}^{2} (z_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{2} (z_i - y_i)^2 + 2\left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - z_i)^2 \sum_{i=1}^{2} (z_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2}\left\{(x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2\right\} + 2\sum_{i=1}^{2}(x_i - z_i)(z_i - y_i) \le \sum_{i=1}^{2}\left\{(x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2\right\} +$$

$$2\left\{\sum_{i=1}^{2}(x_i - z_i)^2 \sum_{i=1}^{2}(z_i - y_i)^2\right\}^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2}(x_i - z_i)(z_i - y_i) \le \left\{(x_1 - z_1)^2(z_2 - y_2)^2 + (x_2 - z_2)^2(z_1 - y_1)^2 + \sum_{i=1}^{2}(x_i - z_i)^2(z_i - y_i)^2\right\}^{1/2}$$

Tulislah $p = (x_1 - z_1)(z_1 - y_1)$, $q = (x_2 - z_2)(z_2 - y_2)$ dan $r^2 = (x_1 - z_1)^2(z_2 - y_2)^2 + (x_2 - z_2)^2(z_1 - y_1)^2$, sehingga ketaksamaan terakhir menjadi:

$$p + q \le \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \qquad (2.7)$$

Jelas bahwa $p + q \le \sqrt{(p + q)^2}$, yang ekuivalen dengan

$$p + q \le \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq} \qquad (2.8)$$

Dengan membandingkan Ketaksamaan (2.7) dan (2.8), tampak bahwa Ketaksamaan (2.7) akan dipenuhi bila :

$$2pq \le r^2 \qquad (2.9)$$

Ketaksamaan (2.9) ekuivalen dengan:

$$2(x_1 - z_1)(z_2 - y_2)(x_2 - z_2)(z_1 - y_1) \le (x_1 - z_1)^2(z_2 - y_2)^2 + (x_2 - z_2)^2(z_1 - y_1)^2 \qquad (2.10)$$

Jika kita tuliskan $s = (x_1 - z_1)(z_2 - y_2)$, $t = (x_2 - z_2)(z_1 - y_1)$, Ketaksamaan (2.10) ekuivalen dengan $2st \le s^2 + t^2$ yang berarti $s^2 + t^2 - 2st \ge 0$ atau $(s - t)^2 \ge 0$, yang jelas merupakan suatu identitas. Akibatnya, Ketaksamaan (2.9) dan (2.10) juga merupakan identitas, sehingga Persamaan (2.5) berlaku, dan dengan demikian Ketaksamaan Segitiga (2.4) juga berlaku.

Hubungan antara suatu himpunan tak kosong dengan metriknya dituangkan dalam definisi berikut ini.

Definisi II.2 (Ruang Metrik). Diberikan sembarang himpunan tak kosong E dan suatu fungsi d yang merupakan metrik dari E. Pasangan (E,d) disebut ruang metrik.

Apabila metrik dari suatu himpunan tak kosong E sudah tertentu, katakanlah d, maka untuk selanjutnya kita akan menyingkat tulisan (E,d) sebagai E saja.

Mengingat $\mathfrak{R}$ dan $\mathfrak{R}^2$ berturut-turut telah ditunjukkan dalam Contoh II.1 dan Contoh II.2 mempunyai metrik tertentu, maka $\mathfrak{R}$ dan $\mathfrak{R}^2$ merupakan ruang metrik.

Contoh II.3 Untuk sembarang $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathfrak{R}, i = 1,2,\ldots,n\}$ merupakan ruang metrik dengan metrik :

$$d(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \tag{2.11}$$

dengan $x,y \in \mathfrak{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Hal ini akan diperlihatkan sebagai berikut:

1). Metrik $d(x,y)$ tersebut berbentuk akar, sehingga pasti bahwa $d(x,y) \geq 0$ untuk $x,y \in \mathfrak{R}^n$.

2). Ambil sembarang $x,y \in \mathfrak{R}^n$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Bila $d(x,y) = 0$, hal ini berarti $\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} = 0$, sehingga $(x_1 - y_1)^2 = 0$, $(x_2 - y_2)^2 = 0,\ldots$, $(x_n - y_n)^2 = 0$, dan ini terjadi hanya bila $(x_1 - y_1) = 0$, $(x_2 - y_2) = 0,\ldots$, $(x_n - y_n) = 0$ atau $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2,\ldots$, $x_n = y_n$, sehingga dapat disimpulkan $x = y$. Sebaliknya jika $x = y$, maka $(x_1 - y_1) = 0$, $(x_2 - y_2) = 0,\ldots$, $(x_n - y_n) = 0$, sehingga $(x_1 - y_1)^2 = 0$, $(x_2 - y_2)^2 = 0,\ldots$, $(x_n - y_n)^2 = 0$, yang membuat $d(x,y) = 0$.

3). Untuk sembarang $x,y \in \mathfrak{R}^n$ dengan $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, berlaku :

$$d(x,y) = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n}\{-(x_i - y_i)\}^2\right]^{1/2} = \left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right\}^{1/2} = d(y,x).$$

4). Misalkan $x,y \in \mathfrak{R}^n$ dimana $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dan $z = (z_1,z_2,\ldots,z_n)$. Dengan memanfaatkan Ketaksamaan Minskowski (Bruckner, 1997: 372): $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{1/p}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i + z_i - y_i|^2\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2 \right\}^{1/2}$$

$$= d(x,y) + d(z,y).$$

Telah diberikan contoh ruang metrik yang dibangun dari himpunan bilangan real yaitu $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2$ maupun $\mathfrak{R}^n$. Selanjutnya akan ditunjukkan contoh ruang metrik yang dibangun dari himpunan semua fungsi real dengan sifat khusus yaitu Ruang fungsi C[a,b].

Contoh II.4 Ruang fungsi C[a,b] merupakan suatu ruang metrik yang terdiri dari semua fungsi real kontinu dan terbatas dalam interval tertutup $\mathfrak{I}$ = [a,b]. Metrik C[a,b] dirumuskan sebagai :

$$d(f,g) = \underset{t \in \mathfrak{I}}{\text{maks}} \; | f(t) - g(t) | \qquad (2.16)$$

Keberadaan hagra maks pada Persamaan (2.16) dijamin oleh Teorema Eksistensi Maksimum dan Minimum (Purcell, 1996: 176). Adapun pembuktiannya sebagai ruang metrik sebagai berikut:

1) Dari Rumus (2.16), jelas bahwa $d(f,g) \geq 0$ untuk sembarang $f,g \in C[a,b]$.

2) Ambil sembarang fungsi $f,g \in C[a,b]$. Jika $d(f,g) = 0$, maka

$$d(f,g) = \underset{t \in \mathfrak{I}}{\text{maks}} \; |f(t) - g(t)| = 0,$$

sehingga $|f(t) - g(t)| = 0$ untuk setiap $t \in \Im$. Ini berarti $f(t) = g(t)$ untuk setiap $t \in \Im$. Sebaliknya bila $f = g$ maka jelas bahwa $d(f,g) = 0$.

3) Untuk sembarang fungsi $f, g \in C[a,b]$ dengan $t \in \Im$ berlaku :

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |f(t) - g(t)| \\ &= \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |g(t) - f(t)| \\ &= d(g,f) \end{aligned}$$

4). Misalkan fungsi $f,g,h \in C[a,b]$ dimana $t \in \Im$. Karena $f(t)$, $g(t)$ dan $h(t)$ merupakan nilai fungsi real maka berlaku :

untuk setiap $t \in [a,b]$, $|f(t) - g(t)| = |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)|$

$$\leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|,$$

sehingga $d(f,g) = \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |f(t) - g(t)| \leq \underset{t \in \Im}{\text{maks}} \left[|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \right]$

$$= \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |f(t) - h(t)| + \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |h(t) - g(t)|.$$

Jadi $\underset{t \in \Im}{\text{maks}} |f(t) - g(t)| \leq \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |f(t) - h(t)| + \underset{t \in \Im}{\text{maks}} |h(t) - g(t)|$,berarti:

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

II.2 Barisan Cauchy

Untuk membahas konsep barisan Cauchy dalam ruang metrik diperlukan konsep barisan dan barisan konvergen dalam ruang metrik. Konsep-konsep tersebut digeneralisasikan dari konsep barisan dalam himpunan bilangan reai. Adapun contoh-contoh yang diberikan sesuai dengan ruang metrik yang telah dibahas dalam Sub bab II.1. Kelengkapan suatu ruang metrik ditentukan oleh kekonvergenan setiap barisan Cauchynya. Maka dari itu pemahaman tentang konsep barisan, barisan konvergen dan Barisan Cauchy dalam ruang metrik sangat diperlukan pada sub bab ini.

Definisi II.3(Barisan) Barisan di sembarang ruang metrik E adalah pemetaan dari himpunan bilangan asli **N** ke E.

Misalkan T: **N** $\rightarrow$E suatu barisan di ruang metrik E, jika T(n)= $\eta_n, \forall_n \in \mathbf{N}$ maka barisan T selanjutnya dinotasikan dengan $\{\eta_n\}$.

Contoh II.5 Diberikan suatu barisan $\{\eta_k\}$ dalam suatu ruang metrik $\Re^n$ dimana $\eta_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)$, untuk k = 1, 2, 3, … .

Telah dibahas dalam Sub bab II.1 bahwa $\Re$ merupakan ruang metrik, konsep barisan konvergen yang berlaku pada barisan bilangan real berlaku pula pada ruang metrik $\Re$. Hal ini juga berlaku pada ruang metrik secara umum, hanya saja definisinya menggunakan konsep metrik *d* seperti berikut ini.

Definisi II.4(Kekonvergenan Barisan) Suatu barisan $\{\eta_n\}$ dalam ruang metrik (E,d) dikatakan konvergen dalam E bila terdapat $\eta \in E$ sedemikian hingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan positip N, yang memenuhi $d(\eta,\eta_n) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Elemen η dinamakan limit barisan $\{\eta_n\}$.

Contoh II.6 Tinjaulah kembali ruang metrik [0,1] dengan metrik $d(x,y)$ dan $x,y \in [0,1]$. Barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergen dalam [0,1] ke 0, karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip $N > \frac{1}{\varepsilon}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku :

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa meskipun $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergen ke 0 tetapi tidak konvergen dalam ruang metrik (0,1) atau (0,1].

Contoh II.7 Pandang kembali Contoh II.5. Barisan $\{\eta_k\}$ konvergen dalam $\mathfrak{R}^n$ ke $\eta = (0,0,0,\ldots,0)$ karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif $N > \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq N$ berlaku

$$d(\eta,\eta_k) = \sqrt{\underbrace{(0-\frac{1}{k})^2 + (0-\frac{1}{k})^2 + \ldots + (0-\frac{1}{k})^2}_{\text{n suku}}}$$

$$= \sqrt{n(\frac{1}{k})^2}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{k} < \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$$

Suatu barisan dalam sembarang ruang metrik (E,*d*) dengan sifat tertentu disajikan dalam definisi berikut ini.

Definisi II.5 (Barisan Cauchy). Suatu barisan $\{\eta_n\}$ pada suatu ruang metrik (E,*d*) disebut barisan Cauchy bila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga $d(\eta_m, \eta_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m,n \geq N$.

Contoh II.8 Diberikan suatu barisan $\{\eta_n\}$ dalam ruang metrik $\Re$ dengan $\eta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Barisan tersebut merupakan barisan Cauchy. Bila diberikan $\varepsilon > 0$, kita pilih bilangan bulat positip N sedemikian hingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Ambil $m,n, \geq N$, jika $m \leq n$ maka $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}$ sehingga berlaku:

$$|\eta_m - \eta_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

$$< \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Sebaliknya bila bila $m > n$ maka $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ sehingga berlaku bahwa:

$$|\eta_n - \eta_m| = |\eta_n - \eta_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sehingga berlaku $|\eta_m - \eta_n| < \varepsilon$ untuk m,n $\geq$ N, yang memperlihatkan bahwa barisan di atas memang barisan Cauchy.

Contoh II.9 Lihat kembali barisan pada Contoh II.5. Akan diperlihatkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy dalam ruang metrik $\Re^n$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, kita pilih bilangan bulat positip $N > \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}$.

Kemudian diandaikan p,q $\geq$ N. Bila $p \leq q$ maka $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q}$, sehingga berlaku:

$$d(\eta_p, \eta_q) = \sqrt{\underbrace{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2 + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2 + \ldots + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2}_{n \text{ suku}}}$$

$$= \sqrt{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2}$$

$$= \sqrt{n}\ (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < \sqrt{n}\ \frac{1}{p} < \sqrt{n}\frac{1}{N} < \sqrt{n}\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$$

Selanjutnya bila $p > q$ maka $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$, sehingga berlaku :

$$d\left(\eta_p - \eta_q\right) = \sqrt{\underbrace{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2 + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2 + \ldots + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2}_{n \text{ suku}}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^2 + (\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^2 + \ldots + (\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^2}_{n \text{ suku}}}$$

$$= \sqrt{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^2}$$

$$= \sqrt{n}\ (\frac{1}{q}-\frac{1}{p}) \ < \ \sqrt{n}\ \frac{1}{q} \ < \ \sqrt{n}\frac{1}{N} \ < \ \sqrt{n}\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa barisan di atas merupakan barisan Cauchy dalam $\mathfrak{R}^n$

II.3 RUANG METRIK LENGKAP

Dapat ditunjukkan (misalnya dalam Kreyszig, 1978: 29) bahwa setiap barisan yang kovergen dalam suatu ruang metrik selalu merupakan barisan Cauchy. Akan tetapi kebalikannya belum tentu benar. Contohnya barisan $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ merupakan barisan Cauchy dalam ruang metrik **Q** tetapi tidak konvergen pada **Q** (Thielman, 1959: 82). Akan tetapi terdapat ruang metrik yang di dalamnya setiap barisan Cauchy konvergen pada ruang tersebut, seperti yang akan diperkenalkan pada definisi berikut.

Definisi II.6 (Ruang Metrik Lengkap). Diberikan E suatu ruang metrik. Jika setiap barisan Cauchy dalam E konvergen dalam E, maka E dikatakan lengkap.

Contoh II.10 Kita tinjau kembali Contoh II.1. Telah diteliti dalam contoh tersebut bahwa $\Re$ mempunyai metrik yang dirumuskan dengan Persamaan (2.5). Hal ini menunjukkan $\Re$ suatu ruang metrik. Akan diperlihatkan ruang metrik tersebut lengkap dengan cara memperlihatkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $\Re$ kovergen.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $\Re$ terbatas. Diberikan $\{\eta_p\}$ barisan Cauchy dalam $\Re$. Menurut Definisi II.5, untuk $\varepsilon = 1$, kita pilih bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk $m,n \geq N$ berlaku $|\eta_m - \eta_n| < 1$. Akibatnya untuk $n \geq N$ berlaku $|\eta_n - \eta_N| < 1$. Padahal $||\eta_n| - |\eta_N|| \leq |\eta_n - \eta_N|$. Jadi $||\eta_n| - |\eta_N|| < 1$ yang ekuivalen dengan $-1 < |\eta_n| - |\eta_N| < 1$, sehingga akibatnya $|\eta_n| < 1 + |\eta_N|$. Jadi untuk setiap $p \in \mathbf{N}$ berlaku:

$$|\eta_n| < \text{maks}\, \{|\eta_1|, |\eta_2|, |\eta_3|, \ldots, |\eta_{N-1}|, 1+|\eta_N|\}$$

Pertidaksamaan terakhir menunjukkan $\{\eta_p\}$ merupakan barisan terbatas. Sebagai akibatnya, berdasarkan Teorema Bolzano Weierstraes (Brown, 1970: 19) maka barisan $\{\eta_p\}$ mempunyai sub barisan $\{\eta_{pn}\}$ yang konvergen, katakanlah konvergen ke $\eta \in \Re$. Dengan demikian jika diambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka tedapat bilangan-bilangan bulat positip L dan M, sedemikian hingga berlaku:

$$|\eta_{np} - \eta| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ untuk } p \geq L \text{ dan}$$

$$|\eta_m - \eta_n| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ untuk } m,n \geq M.$$

Tulislah K = maks { L, M }. Maka untuk setiap $p \geq K$ berlaku $|\eta_{np}-\eta| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Disamping itu berlaku pula $p \geq M$, sehingga $n_p \geq p \geq M$, yang mengakibatkan $|\eta_p-\eta_{np}| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $p \geq K$ berlaku:

$$|\eta_{np}-\eta| \leq |\eta_p-\eta_{np}| + |\eta_{np}-\eta| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Terbuktilah bahwa barisan $\{\eta_p\}$ konvergen dalam $\mathfrak{R}$. Jadi $\mathfrak{R}$ merupakan ruang metrik lengkap.

<u>*Contoh II.11*</u> Ruang metrik $\mathfrak{R}^n$ dengan metrik yang telah disajikan dalam Persamaan (2.11) pada Contoh II.3, merupakan ruang metrik lengkap. Adapun pembuktiannya sebagai berikut. Andaikan $\{\eta_p\}$ suatu barisan Cauchy di $\mathfrak{R}^n$ dimana untuk setiap p = 1,2,3,... dengan $\eta_p = (\eta_{p1}, \eta_{p2},\ldots, \eta_{pn})$. Berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk $p,q \geq N$ berlaku:

$$d(\eta_p,\eta_q) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_{pi} - \eta_{qi}\right)^2\right\}^{1/2} < \varepsilon \tag{2.17}$$

Akibatnya untuk i = 1,2,...,n berlaku:

$$|\eta_{pi} - \eta_{qi}| < \varepsilon \tag{2.18}$$

Jadi tampaklah bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk $p,q > N$ berlaku ketaksamaan (2.18). Hal ini menunjukkan bahwa untuk i = 1, 2, 3, ... , n, barisan $\{\eta_{pi}\}$ merupakan barisan

Cauchy di $\Re$. Berdasarkan Contoh II.10, setiap barisan Cauchy tersebut konvergen dalam $\Re$, katakanlah masing-masing konvergen ke x_i. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{\eta_p\}$ konvergen ke $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pandang $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Karena $\{\eta_{pi}\}$ konvergen ke x_i, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ dapat kita pilih bilangan-bilangan bulat positip N_i sedemikian hingga jika $p \geq N_i$ maka $d(\eta_{pi}, x_i) = |\eta_{pi} - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Tetapkan $N = \text{maks}\ \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$. Akibatnya jika $p \geq N$ maka berlaku:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} (\eta_{pi} - x_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\eta_{pi} - x_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\eta_{pi} - x_i| < n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \tag{2.19}$$

Dengan demikian terbukti bahwa untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga berlaku Ketaksamaan (2.19), yang menunjukkan kekonvergenan barisan Cauchy di $\Re^n$. Ketaksamaan pertama pada (2.19) didasarkan pada sifat penjumlahan bentuk kuadrat $\sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ yang buktinya cukup mudah.

<u>Contoh II.12</u> Akan diperlihatkan bahwa ruang metrik pada Contoh II.4 merupakan ruang metrik lengkap. Misal $\{f_p\}$ merupakan barisan Cauchy di C [a,b]. Berdasarkan metrik pada Persamaan (2.16) hal ini berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk $p,q \geq N$ berlaku:

$$d(f_p, f_q) = \underset{t \in \Im}{\text{maks}} \left| f_p(t) - f_q(t) \right| < \varepsilon \qquad (2.20)$$

dimana $\Im = [a,b]$, karena itu untuk sembarang $t \in \Im$ tertentu, misalkan t_0, berlaku:

$$\left| f_p(t) - f_q(t) \right| < \varepsilon \qquad (2.21)$$

untuk $p,q \geq N$. Tampaklah bahwa untuk t_0 tersebut di atas, barisan $\{f_p(t_0)\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathfrak{R}$, katakanlah konvergen ke $y_0 \in \mathfrak{R}$. Jadi untuk setiap $t_0 \in \Im$, terdapat $y_0 \in \mathfrak{R}$, yang merupakan limit dari $\{f_p(t_0)\}$. Hal ini menentukan suatu fungsi dari $\Im$ ke $\mathfrak{R}$, fungsi itu dinamakan f. Dari sini jelas bahwa $\{f_p\}$ konvergen titik demi titik dalam interval $\Im$. Tinggal ditunjukkan bahwa f kontinu pada interval $\Im$. Perhatikan bahwa Ketaksamaan (2.20) berlaku untuk setiap $q \geq N$. Berarti jika $q \to +\infty$ dan mengingat $\underset{q \to +\infty}{\text{Lim}} f(t) = f(t)$ maka diperoleh $\underset{t \in \Im}{\text{maks}} \left| f_p(t) - f(t) \right| < \varepsilon$. Sehingga untuk setiap $t \in \Im$ berlaku $|f_p(t) - f(t)| < \varepsilon$. Ini berarti untuk setiap $t \in \Im$ dan untuk sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip yaitu N sedemikian hingga untuk $p \geq N$ didapat $|f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon$. Jadi $\{f_p\}$ konvergen seragam ke f dalam $\Im$, akibatnya f kontinu pada $\Im$, yaitu berdasarkan Teorema Kekonvergenan Seragam (Apostol, 1982 : 221).

BAB III

TEOREMA TITIK TETAP BANACH

Ruang metrik lengkap yang telah dibahas dalam Bab II selanjutnya akan dipergunakan untuk membahas Teorema Titik Tetap Banach yang menjadi masalah utama penelitian ini. Tetapi sebelum itu akan dibahas konsep iterasi, kontraksi dan titik tetap fungsi dalam ruang metrik yang dilengkapi contoh-contohnya dalam ruang metrik yang telah dibahas dalam Bab II. Konsep iterasi digunakan untuk membuktikan Teorema Titik Tetap Banach, yang akan dibahas pada sub bab terakhir dalam bab ini. Sedangkan konsep kontraksi dan titik tetap fungsi merupakan masalah utama yang diungkapkan dalam Teorema Titik Tetap Banach.

Selain ruang metriknya lengkap, berlakunya Teorema Titik Tetap Banach juga mensyaratkan bahwa terdapat suatu fungsi dengan rumus tertentu yang memetakan ruang metrik tersebut ke dirinya sendiri.

III.1 Iterasi

Dengan menentukan sembarang elemen dari suatu ruang metrik, ternyata suatu fungsi dalam ruang metrik dapat menentukan adanya suatu barisan. Masalah ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi III.1 (Iterasi). Misalkan E suatu ruang metrik dan $\eta_0 \in E$. Jika $T: E \rightarrow E$ sembarang fungsi, maka barisan $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$, yang memenuhi:

$$\eta_{n+1} = T(\eta_n), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

disebut iterasi dari T untuk η_0. Suku η_n dari barisan tersebut dinamakan iterasi ke-n dari T untuk η_0.

Dengan induksi matematika dapat ditunjukkan bahwa berdasarkan Persamaan (3.1) berlaku persamaan:

$$\eta_n = T^n(\eta_0), \ \forall_n \in \mathbf{N}$$

dimana T^n merupakan komposisi dari fungsi T secara berulang n kali.

Contoh III.1 Pandang fungsi $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, dengan $f(x) = x^2 + 5$, $x \in \mathfrak{R}$. Iterasi dari f untuk $\eta_0 = 1$ adalah: 1, 6, 41, 1686, … . Sedangkan iterasi dari f untuk $\eta_0 = 0$ adalah: 0, 5, 30, 905, … .

Dari definisi iterasi di atas terlihat bahwa barisan yang terbentuk ditentukan oleh rumus fungsi dan η_0 yang diketahui, bukan oleh metrik *d*. Berikut ini diberikan contoh iterasi yang setiap suku barisannya adalah η_0.

Contoh III.2 Misalkan fungsi $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ didefinisikan dengan rumus $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (2x_1^2, 2x_2^2, 2x_3^2, \ldots, 2x_n^2)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$. Iterasi dari g untuk $\eta_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ adalah : $\eta_0, \eta_0, \eta_0, \ldots$.

Ternyata suku-suku barisan yang dibentuk oleh suatu iterasi dalam suatu ruang metrik tidak selalu merupakan bilangan real, seperti yang diperlihatkan pada contoh berikut ini.

Contoh III. 3 Pandang fungsi T : C[a,b] → C[a,b] dengan $T(f) = \frac{1}{2}f + 3$, $\forall f \in C[a,b]$ dan fungsi $f_0 \in C$ dengan rumus $f_0(x) = x^2 \in [a,b]$. Iterasi dari T untuk f_0 adalah barisan fungsi: x^2, $\frac{1}{2}x^2 + 3$, $\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{2}$, $\frac{1}{8}x^3 + \frac{21}{4}$, ...

III.2 Kontraksi

Suatu konsep tentang fungsi dengan sifat khusus, yang merupakan masalah utama yang diungkapkan dalam Teorema Titik Tetap Banach dan juga menjadi jembatan dalam membuktikan masalah utama penelitian ini adalah kontraksi, yang didefinisikan berikut ini.

Definisi III.2 (Kontraksi) Diketahui (E,d) suatu ruang metrik sembarang. Fungsi T: E→ E disebut kontraksi pada E, bila terdapat bilangan positip $\alpha < 1$ sedemikian hingga untuk setiap $x,y \in E$ berlaku :

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \tag{3.2}$$

Bilangan α dalam definisi terakhir disebut konstanta kontraksi (Soemantri, 1998 : 17). Dari Definisi III.2 terlihat bahwa hubungan antara metrik yang merupakan jarak antara dua elemen sembarang ruang metrik lengkap E dengan rumus fungsi T yang diketahui menentukan fungsi tersebut kontraksi atau bukan.

<u>*Contoh III.4*</u> Pada Contoh III.1, fungsi $f(x) = x^2 + 5$ bukan suatu kontraksi pada $\mathfrak{R}$. Hal ini disebabkan, untuk x = 3, y = 1 maka untuk setiap $\alpha > 0$ dengan $\alpha<1$, berlaku : $d(f(x),f(y)) = |f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = 8 > 2\alpha = \alpha|x-y| = \alpha\, d(x,y)$.

<u>*Contoh III.5*</u> Jelas bahwa interval $[1,\infty)$ merupakan ruang metrik dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$, $x,y \in [1,\infty)$. Pandang fungsi $T : [1,\infty) \to [1,\infty)$ dengan rumus $T(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{x}$. T merupakan kontraksi pada $[1,\infty)$ karena untuk setiap $x,y \in [1,\infty)$ berlaku:

$$d(T(x),T(y)) = |T(x)-T(y)| = \left|\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{y}\right)\right| = \left|\frac{(xy-2)(x-y)}{2xy}\right|$$

$$\Leftrightarrow d(T(x),T(y)) = \left|\frac{1}{xy}-\frac{1}{2}\right||x-y| \qquad (3.3)$$

Perhatikan bahwa mengingat $x \geq 1$, $y \geq 1$, maka $\frac{1}{xy} \leq 1$, sehingga $\frac{1}{xy}-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Di lain pihak karena $x > 0$, $y > 0$ maka $\frac{1}{xy} > 0$, sehingga $\frac{1}{xy}-\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$. Akibatnya untuk $x = y = 1$ berlaku $\left|\frac{1}{xy}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, sedangkan untuk $x > 1$, $y > 1$ berlaku

$\left|\frac{1}{xy} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Jadi untuk setiap x,y $\in [1,\infty)$ berlaku $\left|\frac{1}{xy} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$, sehingga

Persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi $d(T(x),T(y)) \leq \frac{1}{2} d(x,y)$.

<u>*Contoh III.6*</u> Fungsi pada Contoh III.2, yaitu g : $\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ didefinisikan dengan rumus $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (2x_1^2, 2x_2^2, 2x_3^2, \ldots, 2x_n^2)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ bukan suatu kontraksi pada $\mathbf{R}^n$, karena jika diambil x = (2, 2, 2, …, 2) dan y = (0, 0, 0, …, 0), maka berlaku :

$$d(g(x),g(y)) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(y_i))^2 \right\}^{½}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} 4(x_i^2 - y_i^2)^2 \right\}^{½} = 8\sqrt{n} \qquad (3.4)$$

$$\text{dan } d(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{½} = 2\sqrt{n} \qquad (3.5)$$

Untuk setiap $\alpha > 0$ dengan $\alpha < 1$, Persamaan (3.4) dan (3.5) menghasilkan hubungan :

$$d(g(x),g(y)) = 8\sqrt{n} > \alpha\, 2\sqrt{n} = \alpha\, d(x,y)$$

<u>*Contoh III.7*</u> Fungsi pada Contoh III.3 yaitu T : C[a,b] $\to$ C[a,b] dengan $T(f) = \frac{1}{2}f + 3$, $\forall f \in C[a,b]$ merupakan kontraksi, sebab untuk sembarang fungsi f,g $\in$ [a,b] berlaku :

$$d\big(T(f),T(g)\big) = \underset{x\in[a,b]}{\text{maks}} \left| \frac{1}{2}f(x)+3-(\frac{1}{2}g(x)+3) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\underset{x\in[a,b]}{\text{maks}} \left| f(x)-g(x) \right| = \frac{1}{2}d(f,g)$$

III.3 Teorema Titik Tetap Banach

Dalam sub bab ini akan dibahas Teorema Titik Tetap Banach yang menjadi masalah utama dalam bab ini. Selanjutnya perlu diperkenalkan dahulu pengertian titik tetap fungsi.

Definisi III.3 (Titik Tetap Fungsi). Diberikan E sembarang ruang metrik dan fungsi T: E $\rightarrow$ E. Yang dimaksud titik tetap dari T adalah x $\in$ E, dimana T(x) = x.

Contoh III.8 Titik tetap fungsi T: $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, dengan $T(x) = x^2$ adalah 0 dan 1.

Contoh III.9 Fungsi f : $\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$, dengan $f(x) = x^2 + 5$, $x \in\mathfrak{R}$ pada Contoh III.1 tidak mempunyai titik tetap, sebab persamaan T(x) = x yang ekuivalen dengan $x^2 - x + 5 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian real.

Contoh III.10 Pada Contoh III.5, fungsi T: $[1,\infty) \rightarrow [1,\infty)$ dengan rumus $T(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ tersebut mempunyai titik tetap $\sqrt{2} \in [1,\infty)$.

Contoh III.11 Titik tetap fungsi g: $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ yang didefinisikan dengan rumus $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (2x_1^2, 2x_2^2, 2x_3^2, \ldots, 2x_n^2)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ pada Contoh III.2 adalah $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ dan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$.

Contoh III.12 Titik tetap fungsi $T : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ dengan $T(f) = \frac{1}{2}f + 3$, $\forall f \in C[a,b]$ pada Contoh III.3 merupakan fungsi konstan $f(x) = 6$, $\forall x \in [a,b]$.

Dari lima contoh terakhir yang diberikan terlihat bahwa terdapat fungsi yang titik tetapnya tunggal yaitu fungsi pada Contoh III.10 dan III.12. Ternyata ketunggalan titik tetap suatu fungsi dalam ruang metrik lengkap dapat diketahui secara pasti bila fungsi yang diberikan merupakan suatu kontraksi. Hal ini disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema III.1 (Titik Tetap Banach). Bila T suatu kontraksi pada ruang metrik lengkap (E,d), maka T mempunyai tepat sebuah titik tetap.

Bukti: Akan ditunjukkan dahulu keberadaan titik tetap dari T sebagai berikut. Ambil sembarang $\eta_0 \in E$, kemudian dibentuk barisan $\{\eta_n\}$ yang merupakan iterasi dari T untuk η_0 yaitu :

$$\eta_0,\ \eta_1 = T(\eta_0),\ \eta_2 = T^2(\eta_0) = T(\eta_1)\ , \ldots ,\ \eta_m = T^m(\eta_0) = T(\eta_{m-1})\ ,\ \eta_{m+1} = T^{m+1}(\eta_0) = T(\eta_m)\ ,\ \ldots\ ,\ \eta_n = T^n(\eta_0) = T(\eta_{n-1})\ ,\ \ldots \quad (3.6)$$

Akan ditunjukkan bahwa $\{\eta_n\}$ merupakan Barisan Cauchy. Karena T kontraksi maka terdapat bilangan positip $\alpha < 1$ sedemikian hingga untuk setiap x, y $\in$ E berlaku $d(T(x),T(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$, sehingga dari (3.6) diperoleh untuk setiap

$p \in \mathbf{N}$:

$$
\begin{aligned}
d(\eta_{p+1},\eta_p) &= d(T(\eta_p),T(\eta_{p-1})) \\
&\leq \alpha\, d(\eta_p,\eta_{p-1}) = \alpha\, d(T(\eta_{p-1}),T(\eta_{p-2})) \\
&\leq \alpha^2 d(\eta_{p-1},\eta_{p-2}) = \alpha^2 d(T(\eta_{p-2}),T(\eta_{p-3})) \\
&\leq \alpha^3 d(\eta_{p-2},\eta_{p-3}) = \alpha^3 d(T(\eta_{p-3},\eta_{p-4})) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq \alpha^p d(\eta_1,\eta_0) \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Sekarang untuk sembarang m $\in$ **N,** n $\in$ **N,** dengan n > m kita selidiki sebagai berikut (sedangkan untuk n < m penyelidikan dilakukan secara analog). Menurut Sifat ketaksamaan segitiga dari metrik dan Ketaksamaan (3.7) didapat:

$$
\begin{aligned}
d(\eta_m,\eta_n) &\leq d(\eta_m,\eta_{m+1}) + d(\eta_{m+1},\eta_{m+2}) + d(\eta_{m+2},\eta_{m+3}) + \ldots + d(\eta_{n-1},\eta_n) \\
&\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1})\ d(\eta_0,\eta_1) \\
&= \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1-\alpha}\ d(\eta_0,\eta_1). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Dari ketaksamaan (3.8) diperoleh hubungan:

$$d(\eta_m,\eta_n) \le \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1-\alpha} d(\eta_0,\eta_1) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(\eta_0,\eta_1).$$

Karena $0 < \alpha < 1$ maka bila diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga berlaku $\frac{\alpha^N d(\eta_0,\eta_1)}{1-\alpha} < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $n \ge N$ dan $m \ge N$ berlaku $d(\eta_m,\eta_n) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(\eta_0,\eta_1) \le \frac{\alpha^N}{1-\alpha} d(\eta_0,\eta_1) < \varepsilon$, yang berarti bahwa barisan $\{\eta_n\}$ suatu Barisan Cauchy.

Berikutnya mengingat E lengkap, maka Barisan Cauchy $\{\eta_n\}$ konvergen, katakanlah konvergen ke $\eta \in E$. Kemudian akan diperlihatkan bahwa η merupakan titik tetap dari T. Karena kekonvergenan tersebut, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan-bilangan bulat positip N_1, N_2 sedemikian hingga untuk setiap $n \ge N_1$ berlaku :

$$d(\eta,\eta_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

dan untuk setiap $n \ge N_2$ berlaku :

$$d(\eta,\eta_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Dengan demikian untuk setiap $n \ge$ maks $\{N_1, N_2\}$ berlaku:

$$d(\eta,T(\eta)) \le d(\eta,\eta_n) + d(\eta_n,T(\eta_n)) \le d(\eta,\eta_n) + \alpha\, d(\eta_{n-1},\eta)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon.$$

Mengingat nilai metrik selalu positip maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq d(\eta, T(\eta)) < \varepsilon$, sehingga haruslah $d(\eta, T(\eta)) = 0$. Mengingat Sifat (2.2), ini berakibat $\eta = T(\eta)$, yang menunjukkan η adalah titik tetap dari T.

Sekarang tinggal menunjukkan bahwa η merupakan satu-satunya titik tetap T. Misalkan ψ adalah titik tetap yang lain pada kontraksi T. Maka dengan mengingat ketaksamaan (3.7) maka berlaku :

$$d(\eta,\psi) = d(T(\eta),T(\psi)) \leq \alpha\, d(\eta,\psi).$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\, d(\eta,\psi) \leq 0.$$

Karena $1-\alpha > 0$,maka haruslah $d(\eta,\psi) \leq 0$. Padahal ada syarat $d(\eta,\psi) \geq 0$. Jadi $d(\eta,\psi) = 0$. Menurut Sifat (2.2), hal tersebut berakibat $\eta = \psi$. Bukti selesai. ♦

<u>Contoh III.13</u> Telah diselidiki bahwa fungsi $T : [1,\infty] \to [1,\infty]$, dengan $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ pada Contoh III.5 merupakan kontraksi pada $[1,\infty)$, menurut Teorema III.1 hal ini berakibat T mempunyai tepat sebuah titik tetap. Adapun titik tetap yang dimaksud yaitu $\sqrt{2}$, seperti yang telah diungkapkan pada Contoh III.10 .

<u>Contoh III.14</u> Menurut penyelidikan dalam Contoh III.7, fungsi $T : C[a,b] \to C[a,b]$ dengan $T(f) = \frac{1}{2}f + 3$, $\forall f \in C[a,b]$ merupakan kontraksi. Berdasarkan Teorema III.1 maka pastilah T mempunyai tepat sebuah titik tetap. Hal ini telah diungkapkan pada Contoh III.12.

Teorema Titik Tetap Banach sering pula disebut Teorema Kontraksi karena teorema ini merupakan syarat perlu bagi suatu fungsi yanga diketahui menjadi kontraksi. Hal ini berarti untuk membuktikan T suatu fungsi pada ruang metrik lengkap (E,*d*) merupakan kontraksi atau bukan, perlu dengan menyelidiki keberadaan titik tetap T .

<u>*Contoh III.15*</u> Fungsi T : $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ pada Contoh III.8 dan fungsi g : $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ pada Contoh III.11 masing-masing telah diselidiki mempunyai lebih dari satu titik tetap, sehingga dari Teorema III.1 dapat disimpulkan bahwa kedua fungsi tersebut bukan kontraksi.

<u>*Contoh III.16*</u> Fungsi f : $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, dengan $f(x) = x^2 + 5$, $x \in \mathfrak{R}$ tidak mempunyai titik tetap, seperti yang telah ditunjukkan dalam Contoh III.9. Akibatnya, berdasarkan Teorema III.1, fungsi f bukan kontraksi pada $\mathfrak{R}$.

Dari Teorema III.1 dapat pula diartikan sebagai berikut. Bila T bukan kontraksi pada suatu ruang metrik lengkap maka titik tetap T belum tentu tunggal. Hal ini terlihat pada contoh-contoh berikut ini. Telah diteliti dalam Contoh III.4 bahwa fungsi $f(x) = x^2 + 5$ bukan suatu kontraksi pada $\mathfrak{R}$, menurut Teorema III.1 titik tetap fungsi tersebut belum tentu tunggal karena fungsi tersebut tidak mempunyai titik tetap seperti yang telah ditunjukkan pada Contoh III.9. Sedangkan fungsi g : $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ yang didefinisikan dengan rumus $g(x_1, x_2, x_3,$

$\ldots,x_n) = (2x_1^2, 2x_2^2, 2x_3^2, \ldots, 2x_n^2)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ telah ditunjukkan pada Contoh III.6 bukan suatu kontraksi pada $\mathbf{R}^n$, sehingga menurut Teorema III.1 titik tetap fungsi tersebut belum tentu tunggal karena fungsi tersebut mempunyai dua buah titik tetap seperti yang telah ditunjukkan pada Contoh III.11. Berikut ini akan ditunjukkan contoh suatu fungsi yang bukan kontraksi tetapi titik tetapnya tunggal.

<u>*Contoh III.17*</u> Fungsi T: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, dengan $T(x) = x^2 - x + 1$ bukan kontraksi karena untuk $x = 10$, $y = 11$ maka untuk setiap $\alpha > 0$ dengan $\alpha < 1$, berlaku: $|d(T(x),T(y))| = |100 - 10 + 1 - (121 - 11 + 1)| = 20 > \alpha 1 = \alpha |d(x,y)|$.Menurut Teorema III.1 fungsi ini titik tetapnya belum tentu tunggal, ternyata titik tetapnya tunggal yaitu 1.

BAB IV

PENUTUP

Dalam Bab ini dikemukakan tentang kesimpulan yang merupakan hasil penelitian ini dan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

IV.1 Kesimpulan

Dari pembahasan di muka dapat disimpulkan pokok-pokok sebagai berikut:

1. Pada umumnya Barisan Cauchy dalam suatu ruang metrik belum tentu konvergen. Jika dalam ruang metrik setiap Barisan Cauchynya konvergen maka ruang metrik itu dikatakan lengkap.
2. Kontraksi adalah suatu fungsi yang mempunyai sifat 'penyusutan', dalam arti jika diambil dua elemen sembarang dalam daerah asalnya, maka nilai metrik dari bayangan elemen-elemen itu adalah lebih kecil dari nilai metrik kedua elemen tersebut.
3. Teorema Titik Tetap Banach menghubungkan konsep kontraksi pada suatu ruang metrik lengkap dengan keberadaan titik tetapnya. Lebih jauh lagi teorema ini memberikan syarat cukup bagi ketunggalan titik tetap itu. Disamping itu teorema itu juga memberikan syarat perlu bagi suatu fungsi menjadi suatu kontraksi.
4. Pembuktian Teorema Titik Tetap Banach menggunakan konsep iterasi fungsi untuk membangun Barisan Cauchy, yang konvergen karena berada pada ruang

metrik lengkap. Limit barisan ini merupakan titik tetap kontraksi yang dimaksud dalam teorema ini.

IV. 2 Saran

Dengan skripsi ini, diajukan saran-saran untuk penelitian selanjutnnya sebagai berikut:

1. Pembahasan Teorema Titik Tetap Banach dalam skripsi ini baru dibatasi pada ruang-ruang metrik seperti $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$,$\mathfrak{R}^n$ dan C[a,b]. Pembahasan untuk ruang-ruang metrik lain yang lebih rumit, dan untuk ruang-ruang lain seperti Ruang Banach dan Ruang Hilbert dapat menjadi topik penelitian selanjutnya.
2. Dalam skripsi ini belum dibahas penerapan Teorema Titik Tetap Banach, padahal penerapan tersebut sangat luas, seperti pada persamaan aljabar linier, persamaan diferensial dan Geometri Fraktal. Hal ini menarik untuk dijadikan bahan penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, T.M. (1982). *Matematica Analysis.* Reading, Ma: Addison-Wesley.

Brown, A. L & Page, A. (1970). *Element of Functional Analysis.* London: Van Nostrand Reinhold Company.

Bruckner, M & dkk. (1997). *Real Anaysis.* New Jersly: Prentice-Hall, Upper Saddle River.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Application.* New York: John Wiley & Sons.

Purcell, E.J & Varberg, D. (1984). *Calculus with Analytics Geometri.*4th edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Soemantri, R. (1998). *Analisis Real III.* Naskah yang didokumentasikan.

Thielman, P.H. (1959).*Theory of Functions of Real Variables.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Zukerman, M.M. (1985). *Algebra and Trigonometry.* A Straightforward Approach. 2th edition. New York: John Wiley & Sons.