GRUP TRANSFORMASI GEOMETRI EUCLIDES

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

TERESIA TRIWURYANI
NIM : 95 1414 030
NIRM : 950051120501120028

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2002

HALAMAN PERSETUJUAN

SKRIPSI

GRUP TRANSFORMASI GEOMETRI EUCLIDES

Oleh :

TERESIA TRIWURYANI

NIM : 95 1414 030

NIRM : 950051120501120028

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Prof. Dra Moeharti Hw.,MA

tanggal : 26 September 2002

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

GRUP TRANSDORMASI GEOMETRI EUCLIDES

Dipersiapkan dan disusun oleh :

TERESIA TRIWURYANI
NIM : 95 1414 030
NIRM : 950051120501120028

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 26 September 2002 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, MSi	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw.,MA.	
Anggota	: Dr.St. Suwarsono	
Anggota	: Wanty Widjaja, MEd.	

Yogyakarta, 26 September 2002
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi,M.Pd.

Setiap hari baru adalah hadiah dari Dia yang memberi hidup

Skripsi ini kupersembahakan pada :

Kedua orang tuaku : Bpk F. Soeyono dan Ibu Ch. Suparmi

Mas Pran, Mbak Yanti, Mas Shet, Dhik Endar dan *Mas Adi Wiratna*

Juga untuk Si kecil Fidel dan Arsi

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang telah saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 26 september 2002

Penulis

Teresia Triwuryani

ABSTRAK

Grup transformasi geometri Euclides merupakan himpunan dari transformasi – transformasi dalam bidang Euclides yang memenuhi sifat-sifat grup. Grup transformasi geometri Euclides adalah grup similaritas. Grup similaritas memuat grup dilatasi dan grup isometri. Grup isometri memuat grup translasi, grup rotasi dengan titik pusat sama, grup yang memuat translasi dan rotasi, grup yang memuat translasi dan setengah putaran. Jika suatu transformasi mengubah arah tetapi hasil kalinya tidak mengubah arah atau sebaliknya maka himpunan transformasi tersebut tidak membentuk grup. Misalnya himpunan refleksi dan himpunan refleksi geser. Himpunan rotasi yang sepusat membentuk grup tetapi himpunan rotasi yang tidak sepusat tidak membentuk grup.

Persamaan – persamaan transformasi geometri Euclides antara lain sebagai berikut.

Persamaan dilatasi sentral dengan titik pusat 0 dan faktor skala $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} x' = \mu x \\ y' = \mu y \end{cases} \text{, dengan } \mu \neq 0$$

Persamaan dilatasi sentral dengan pusat $P(h,k)$ dan faktor skala μ.

$$\begin{cases} x' = \mu x + h - \mu h \\ y' = \mu y + k - \mu k \end{cases}$$

Persamaan isometri

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \quad \text{dengan } a^2 + b^2 = 1$$

(+) untuk isometri yang searah.

(-) untuk isometri yang berlawanan.

Suatu similaritas merupakan komposisi dilatasi dengan isometri sehingga didapatkan persamaan similaritas sebagai berikut :

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \quad \text{dengan } a^2 + b^2 \neq 0$$

(+) untuk similaritas searah.

(-) untuk similaritas berlawanan.

Dari persamaan – persamaan tersebut dapat dilihat adanya hubungan antara geometri dengan aljabar.

ABSTRACT

The transformation group of Euclidean Geometry is a set of transformations in the Euclidean plane that forms a group. It is the set of similarities and is called the similarity group. It has as subgroups the group of isometries and the group of dilatations. The group of isometries has as subgroups the group of translations, the group of concentric rotation, the group of rotations and translations and the group of translations and half-truns. If a transformation reverses sense, then the composition of two of these preserves sense. So the set of such transformations does not form a group, for example the set of reflections and the set of glide reflections. The set of concentric rotations form a group, but the set of rotations with different centers does not (form a group):

Here are some equations of the transformations of Euclidean Geometry.

The equation of a central dilatation with center 0 and scale factor $\mu,\mu\neq0$

$$\begin{cases} x' = \mu x \\ y' = \mu y \end{cases}, \text{ with } \mu \neq 0$$

The equation of a central dilatation with center $P(h,k)$ and scale factor μ.

$$\begin{cases} x' = \mu x + h - \mu h \\ y' = \mu y + k - \mu k \end{cases}$$

The equation of an isometry

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \quad \text{with } a^2 + b^2 = 1$$

(+) is for an isometry that preserves sense.

(-) is for an isometry that reverses sense.

A similarity is a composition of a dilatation and an isometry and it's equation is as follows

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \quad \text{with } a^2 + b^2 \neq 0$$

(+) is for a similarity that preserves sense.

(-) is for a similarity that reserves sense.

Form the equations above we can see that there is a relation between geometry and algebra.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan bimbinganNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "GRUP TRANSFORMASI GEOMETRI EUCLIDES".

Skripsi ini disusun dalam rangka melengkapi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan , Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Dalam pembuatan Skripsi ini penulis menyadari banyak bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu dengan kerendahan hati, penulis menyampaikan rasa terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Prof. Dra . Moeharti Hadiwidjoyo, M.A., dosen pembimbing I dengan penuh kesabarannya membantu dan memberikan pengarahan serta saran-saran sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T. , selaku ketua program studi dan pembimbing akademik.
3. Pihak pengajaran dan segenap dosen MIPA/PMIPA Universitas Sanata Dharma Yogyakarta yang telah banyak membantu saya sewaktu saya masih duduk di bangku kuliah.
4. Staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta atas segala bantuan dan fasilitas yang telah diberikan.
5. Bapak dan Ibu yang telah membantu saya melalui dukungan dan doa-doanya.
6. Kakak dan adhik penulis yang telah banyak memberikan dukungan.

7. Kakakku P.S. Dwi Wiratno Nugroho,S.T. atas bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Yulius Toto Sukmanto,S.T., Puji Iswiyanto, F.X. Andesta Triharpinto, dan teman-temanku terkasih Endang, Ika, Trikosa, Tri, Kristin, Ria, Yuli, Nani dan seluruh angkatan 95 yang selama ini bersama-sama menuntut ilmu.
9. Bpk Saman dan ibu Susi, terima kasih atas dukungan dan doanya.

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB II LANDASAN TEORI

DAFTAR LAMBANG

A,B	: Titik-titik.
g,h	: Garis-garis.
$\overrightarrow{AB}$	: Ruas garis berarah dengan titik pangkal A dan titik akhir B.
$\overline{AB}$	: Ruas garis AB.
AB	: Panjang ruas garis $\overline{AB}$.
$\angle$ ABC	: Sudut ABC.
m$\angle$ABC	: Besar sudut ABC dengan satuan derajat.
$\cong$	: Kongruen.
$\sim$	: Sebangun (similar).
Δ ABC	: Segitiga ABC.
//	: Sejajar.
$\not\parallel$	: Tidak sejajar.
$\overleftrightarrow{AB}$	: Garis yang melalui titik A dan titik B.
$\perp$	: Tegak lurus.
$T_{\mathbf{v}}$	: Translasi dengan vektor translasi **v.**
M_c	: Refleksi dengan sumbu refleksi c.
R (P,θ)	: Rotasi dengan pusat P dan sudut rotasi θ.
G	: Refleksi geser.
S	: Similaritas.
[0,μ]	: Dilatasi dengan pusat 0 dan faktor skala μ.

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah.

Geomertri Euclides diperkenalkan kira-kira pada abad 300 S.M, geometri Euclides menjadi dasar perkembangan geometri-geometri lain. Geometri adalah suatu ilmu yang terus berkembang sampai saat ini. Di dalam Struktur Aljabar atau sering juga disebut Aljabar Modern kita mengenal teori tentang grup dan sifat-sifatnya. Sedangkan transformasi kita dapatkan pada salah satu topik dalam geometri. Teori tentang grup dan transformasi sudah diperkenalkan sejak Sekolah Menengah Umum hingga tingkat Perguruan Tinggi sehingga teori tentang grup dan transformasi bukanlah teori yang asing bagi mahasiswa jurusan pendidikan matematika. Mahasiswa perlu mengembangkan pengetahuan mengenai grup dalam lingkup yang luas. Aljabar Modern yang terus berkembang khususnya teori tentang grup memberikan kemungkinan pula untuk memandang geometri dari sudut yang berbeda.

Felix Klein (1849 - 1925) dari Jerman mempunyai pandangan lain mengenai geometri. Dalam Erlanger programnya yang disampaikan di Erlangen pada tahun 1872 ia memberikan definisi Geometri sebagai berikut: Suatu Geometri didefinisikan oleh suatu grup G dari transformasi-transformasi, yang membiarkan invarian definisi dan dalil-dalilnya yang berlaku untuk sifat dari bangun - bangun dalam Geometri itu, tetapi tidak invarian oleh transformasi dari grup lain yang mana saja yang memuat G.

Macam-macam transformasi yang sudah kita kenal antara lain transformasi identitas, translasi, refleksi, rotasi dan refleksi geser. Kita dapat mempelajari transformasi dalam teori grup. Pada pembicaraan lebih lanjut akan disampaikan mengenai grup transformasi geometri Euclides dan hubungan antara geometri Euclides dengan aljabar.

B. Perumusan Masalah.

Pokok perumusan masalah yang akan ditulis di sini adalah :

1. Apa yang dimaksud dengan grup transformasi geometri Euclides?.
2. Transformasi apa yang menjadi anggota grup transformasi geometri Euclides itu?.
3. Sifat-sifat apa yang berlaku untuk anggota grup transformasi itu?.
4. Bagaimana persamaan anggota grup transformasi geometri Euclides?.

C. Tujuan Penulisan.

Tujuan penulisan grup transformasi dalam geometri Euclides di sini adalah :

1. Mengetahui lebih dalam tentang grup transformasi geometri Euclides.
2. Mempelajari transformasi apa saja yang menjadi anggota grup transformasi geometri Euclides.
3. Mempelajari lebih banyak transformasi – transformasi dalam grup transformasi geometri Euclides.

4. Mengetahui lebih lanjut anggota grup transformasi Geometri Euclides dilihat dari persamaan secara aljabar.

D. Pembatasan Masalah.

Untuk membicarakan grup transformasi geometri Euclides terlebih dahulu diberikan konsep-konsep, teorema-teorema yang mendukung. Konsep tersebut antara lain konsep grup dan konsep transformasi. Pada transformasi penulis membatasi pada masalah isometri, dilatasi, komposisi dua transformasi dan persamaan transformasi. Sedangkan pada grup dibahas tentang sifat-sifat grup, grup abelian, grup berhingga, grup tak hingga dan sub grup.

Pada grup transformasi penulis batasi pada grup transformasi pada bidang Euclides. Grup transformasi bidang Euclides memuat antara lain grup translasi, grup rotasi, grup simetri, grup similaritas, grup isometri. Dalam skripsi ini penulis tidak mengulas tentang operasi simetri lebih lanjut hanya memberikan definisi secara singkat. Untuk pembahasan lebih lanjut tentang grup transformasi penulis juga menyertakan tentang persamaan transformasi dalam geometri Euclides.

E. Manfaat Penulisan.

Melalui pendalaman grup transformasi geometri Euclides akan ditemukan sifat-sifat grup yang berlaku pada grup transformasi. Sifat-sifat grup yang berlaku pada grup transformasi antara lain sifat tertutup, sifat assosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemen dalam himpunan tersebut mempunyai invers. Dengan mengetahui sifat-sifat grup yang berlaku dalam grup transformasi akan memudahkan kita untuk memahami geometri Euclides. Mempelajari hubungan grup dan transformasi tersebut dapat menambah wawasan bagi calon guru khususnya guru bidang studi matematika.

F. Metode Penulisan.

Metode yang digunakan untuk membicarakan grup transformasi geometri Euclides adalah metode studi pustaka dari buku-buku yang tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Sebelum membahas tentang grup transformasi geometri Euclides terlebih dahulu akan dibicarakan tentang grup.

A. Grup

Definisi 2.A.1

Suatu himpunan G disebut suatu grup apabila di dalam G didefinisikan suatu operasi "#" yang mempunyai sifat sebagai berikut

i. Sifat tertutup

$a \# b \in G,\ \forall\, a, b \in G$

ii. Sifat assosiatif

$(a \# b) \# c = a \# (b \# c), \forall\ a,b,c \in G$

iii. Ada elemen identitas e sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku

$a \# e = e \# a = a$

iv. Jika untuk setiap $a \in G$ dan $q \in G$ berlaku $a \# q = q \# a = e$ unsur q ini ditulis sebagai a^{-1}. Jadi $a \# a^{-1} = a^{-1} \# a = e$.

a^{-1} dinamakan invers dari a terhadap operasi "#".

Himpunan G dengan operasi "#" ini ditulis (G, #)

Definisi 2.A.2

Bila (G, #) grup dan masih dipenuhi sifat $a \# b = b \# a$ untuk semua $a,b \in G$ maka G disebut grup Abelian atau grup komutatif.

Contoh 2.A.1.

Misalkan B merupakan himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.

i. sifat tertutup dipenuhi

   $a + b \in B, \forall\ a, b \in B$

ii. sifat assosiatif dipenuhi

   $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall\ a,b,c \in B$

iii. ada elemen identitas 0 sehingga untuk setiap $a \in B$ berlaku $0+a = a+0 = a$.

iv. untuk setiap $a \in B$, ada $-a \in B$ sehingga $a+(-a) = (-a) + a=0$. Invers dari a terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat adalah $-a$.

Jadi (B,+) merupakan suatu grup , karena masih dipenuhi sifat $a+b = b+a$ maka grup di atas merupakan grup kumutatif .

Definisi 2.A.3.

Banyaknya elemen dalam suatu grup G disebut order dari grup G. G disebut grup berhingga bila order G berhingga (finite) dan disebut grup tak hingga bila order grup G tak hingga.

Contoh 2.A.2

Grup bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan adalah grup tak hingga.

Contoh 2.A.3.

Himpunan bilangan-bilangan bulat modulo 4, ialah : H={$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$}

Apabila dalam H diberikan operasi penjumlahan modulo 4, sifat tertutup dan sifat asosiatif terpenuhi.

Sekarang akan diselidiki apakah setiap elemen H memiliki invers, karena elemen identitas H adalah $\bar{0}$ maka,

$\bar{0} +_4 \bar{0} = \bar{0} +_4 \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{0}$ invers dari $\bar{0}$

$\bar{1} +_4 \bar{3} = \bar{3} +_4 \bar{1} = \bar{0}$, $\bar{3}$ invers dari $\bar{1}$

$\bar{2} +_4 \bar{2} = \bar{2} +_4 \bar{2} = \bar{0}$, $\bar{2}$ invers dari $\bar{2}$

$\bar{3} +_4 \bar{1} = \bar{1} +_4 \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{1}$ invers dari $\bar{3}$

Jadi H adalah sebuah grup, grup ini berhingga karena H hanya memuat 4 elemen atau berorder 4.

Teorema 2.A.1.

Apabila (G, $\bullet$) sebuah grup maka berlaku :

i. elemen identitas tunggal

ii. setiap $x \in$ G memiliki invers tunggal

iii. $(\forall x, y, z \in \text{G})\, x \bullet y = x \bullet z \Rightarrow y = z$ [hukum kanselasi kiri]

iv. $(\forall x, y, z \in \text{G})\, y \bullet x = z \bullet x \Rightarrow y = z$ [hukum kanselasi kanan]

v. untuk setiap $x \in G, \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

vi. untuk $\forall x, y \in G, (x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$

Bukti :

i. Diandaikan e_1 dan e_2 merupakan elemen-elemen identitas G dan

$e_1 \neq e_2$

$e_1 \bullet e_2 = e_2$ ……………………………………………………………1)

$e_1 \bullet e_2 = e_1$ ……………………………………………………………2)

dari 1) dan 2) didapat bahwa $e_1 = e_2$, ini bertentangan dengan pengandaian semula.

Jadi terbukti bahwa elemen identitas di G tunggal.

ii. Diambil sebarang $x \in G$.

Andaikan x^{-1} dan a^{-1} keduanya invers dari x dengan $x^{-1} \neq a^{-1}$.

$x^{-1} = x^{-1} \bullet e$, e adalah elemen identitas (G, $\bullet$)

$= x^{-1} \bullet \left(x \bullet a^{-1}\right)$ (a^{-1} invers dari x)

$= \left(x^{-1} \bullet x\right) \bullet a^{-1}$ (assosiatif dalam G)

$= e \bullet a^{-1}$ (x^{-1} invers dari x)

$= a^{-1}$, terjadi kontradiksi dengan pengandaian.

Jadi invers dari x adalah tunggal.

iii. Diambil sebarang $x, y, z \in G$ sedemikian sehingga $x \bullet y = x \bullet z$ karena $x \in G$ maka $x^{-1} \in G$ dan x^{-1} tunggal.

$x^{-1} \bullet (x \bullet y) = x^{-1} \bullet (x \bullet z)$ (sifat tertutup)

$(x^{-1} \bullet x) \bullet y = (x^{-1} \bullet x) \bullet z$ (sifat assosiatif)

$e \bullet y = e \bullet z$ (sifat invers)

$y = z$

Jadi terbukti bahwa $(\forall x, y, z \in G)\ x \bullet y = x \bullet z \Rightarrow y = z$

iv. Diambil sebarang $x, y, z \in G$ sedemikian sehingga $y \bullet x = z \bullet x$

Karena $x \in G$ maka $x^{-1} \in G$ dan x^{-1} tunggal.

$(y \bullet x) \bullet x^{-1} = (z \bullet x) \bullet x^{-1}$ (sifat tertutup dalam G)

$y \bullet (x \bullet x^{-1}) = z \bullet (x \bullet x^{-1})$ (sifat assosiatif dalam G)

$y \bullet e = z \bullet e$ (sifat invers)

$y = z$

Jadi terbukti bahwa $(\forall x, y, z \in G) y \bullet x = z \bullet x \Rightarrow y = z$

v. Diambil sebarang $x \in G$, karena $x \in G$ maka $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x \bullet x^{-1} = e$ ……………………………………………1)

Karena $x^{-1} \in G$ maka $(x^{-1})^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $(x^{-1})^{-1} \bullet x^{-1} = e$ ……………………………………………2)

dari 1) dan 2) didapatkan $x = (x^{-1})^{-1}$.

Jadi terbukti bahwa $(\forall x \in G)(x^{-1})^{-1} = x$

vi. Diambil sebarang $x, y \in G$ maka $x^{-1}, y^{-1} \in G$

Karena $x^{-1}, y^{-1} \in G$ maka $y^{-1} \bullet x^{-1} \in G$

$(x \bullet y) \bullet (y^{-1} \bullet x^{-1}) = x \bullet (y \bullet y^{-1}) \bullet x^{-1}$ (sifat tertutup di G)

$= x \bullet e \bullet x^{-1}$

$= x \bullet x^{-1}$

$= e$ ……………………………………………..1)

$(y^{-1} \bullet x^{-1}) \bullet (x \bullet y) = y^{-1} \bullet (x^{-1} \bullet x) \bullet y$ (sifat tertutup di G)

$= y^{-1} \bullet e \bullet y$

$= y^{-1} \bullet y$

$= e$ ……………………………………………..2)

$(x \bullet y) \bullet (x \bullet y)^{-1} = e$

Dari 1) dan 2) dapat disimpulkan $y^{-1} \bullet x^{-1}$ merupakan invers dari $x \bullet y$ atau $(x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$

Jadi terbukti bahwa $(\forall x, y \in G)(x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$.

Teorema 2.A.2.

Diketahui sebuah grup (G, $\bullet$), jika $a \in$ G,b$\in$ G maka :

i. persamaan $a \bullet x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G

$(\forall a, b \in G)(\exists! \, x \in G) \; a \bullet x = b$

ii. persamaan $y \bullet a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G

$(\forall a, b \in G)(\exists !\, y \in G)\ y \bullet a = b$

Bukti

i. Kita perlihatkan bahwa persamaan $a \bullet x = b$ oleh karena $a \in$ G maka didapatkan $a^{-1} \in G$ sehingga dipenuhi

$a^{-1} \bullet (a \bullet x) = a^{-1} \bullet b$

$(a^{-1} \bullet a) \bullet x = a^{-1} \bullet b$ (sifat assosiatif di G)

$e \bullet x = a^{-1} \bullet b$

$x = a^{-1} \bullet b$

Hal ini dapat diartikan bahwa persamaan $a \bullet x = b$ memiliki jawaban $x = a^{-1} \bullet b$. Karena $a^{-1} \in G$, $b \in$ G maka $a^{-1} \bullet b \in G$ dan $a^{-1} \bullet b$ tunggal.

$a \bullet (a^{-1} \bullet b) = (a \bullet a^{-1}) \bullet b$ (sifat assosiatif di G)

$= e \bullet b$

$= b$

Jadi $\exists !\, x = a^{-1} \bullet b \in G$ sedemikian sehingga $a \bullet x = b$

$(\forall a, b \in G)(\exists !\, x \in G) a \bullet x = b$

ii. Sekarang akan dibuktikan untuk $y \bullet a = b$ oleh karena $a \in G$ maka didapatkan $a^{-1} \in G$ sehingga dipenuhi :

$(y \bullet a) \bullet a^{-1} = b \bullet a^{-1}$

$y \bullet (a \bullet a^{-1}) = b \bullet a^{-1}$ (sifat assosiatif di G)

$$y \bullet e = b \bullet a^{-1}$$

$$y = b \bullet a^{-1}$$

Hal ini dapat diartikan bahwa persamaan $y \bullet a = b$ memiliki jawaban $y = b \bullet a^{-1}$.Karena $a^{-1} \in G, b \in G$ maka $b \bullet a^{-1} \in G$ dan $b \bullet a^{-1}$ tunggal

$$\left(b \bullet a^{-1}\right) \bullet a = b \bullet \left(a^{-1} \bullet a\right) \qquad \text{(sifat assosiatif di G)}$$

$$= b \bullet e$$

$$= b$$

Jadi $\exists!\, y = b \bullet a^{-1}$ sedemikian sehingga $y \bullet a = b$ jadi $(\forall a, b \in G)(\exists!\, y \in G)\, y \bullet a = b$

Definisi 2.A.4.

Misalkan G suatu grup, apabila H $\subset$ G, maka H disebut subgrup dari G jika H merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G

Teorema 2.A.3.

Diketahui $(G, \bullet)$ grup dan $H \subset G$, maka $(H, \bullet)$ merupakan subgrup dari grup G bila dan hanya bila :

i. $H \neq \phi$

ii. $(\forall a, b \in H)\, a \bullet b \in H$

iii. $(\forall a \in H) a^{-1} \in H$

Bukti

$(\Rightarrow)$ Dimisalkan H adalah subgroup.

i. $H \neq \phi$, karena sekurang-kurangnya memuat elemen identitas.

ii. Karena sifat tertutup dari grup H maka sifat (ii) dapat dipenuhi.

iii. Karena H adalah suatu grup maka definisi grup (definisi 2.A.1) dipenuhi. Jika $a \in$ H maka $a^{-1} \in H$

$(\Leftarrow)$ Diketahui i), ii) dan iii) akan dibuktikan H subgrup G

- Sifat tertutup dipenuhi pada H sebab ii) dipenuhi.
- Sifat assosiatif dipenuhi karena $H \subseteq G$, sehingga didapatkan

  $(\forall a, b, c \in H) a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

  karena setiap elemen H juga merupakan elemen dari G.
- Diambil $y \in$ H (karena diketahui bahwa $H \neq \phi$) dengan menggunakan sifat (iii) maka ada $y^{-1} \in H$ sehingga $y \bullet y^{-1} \in H$ (ii)

  Karena $y \bullet y^{-1} = e$ maka $e \in H$

  H mempunyai elemen identitas. Elemen identitas termuat di dalam H.

Teorema 2.A.4.

Jika H sebuah himpunan bagian yang tak kosong dan berhingga dari sebuah grup G sedangkan H tertutup terhadap operasi yang berlaku di G maka H suatu subgrup dari G

Bukti

Diambil sebarang $a \in H$ maka $a \bullet a = a^2 \in H$

$$a^2 \bullet a = a^3 \in H$$

Sehingga $a, a^2, a^3, \ldots\ldots$ merupakan elemen-elemen H

e=$a^{\circ} \in H$ sebab H sebuah himpunan bagian yang tak kosong dan berhingga dari grup G.

Diketahui bahwa H berhingga, sehingga terdapat r,s $\in Z^+$ sedemikian sehingga $a^s = a^r$.

Misalkan 0<r<s maka $a^{s-r} = e$

Karena r,s$\in Z^+$ dan s-r >0 maka s-r-1 $\geq$ 0 sehingga $a^{s-r-1} \in H$

$a \bullet a^{s-r-1} = a^1 \bullet a^{s-r-1} = a^{1+s-r-1} = a^{s-r} = e$

$a^{s-r-1} \bullet a = a^{s-r-1} \bullet a^1 = a^{s-r-1+1} = a^{s-r} = e$

Jadi $a^{s-r-1} = a^{-1}, a^{-1} \in H$

Terbukti bahwa untuk setiap $a \in H, a^{-1} \in H$

Jadi H sebuah subgrup G

B. Transformasi

Sebelumnya diulang beberapa definisi tentang macam-macam fungsi.

Definisi 2.B.1

Andaikan A dan B adalah himpunan yang tidak kosong, suatu relasi f yang mengawankan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu $f(x) \in B$ disebut fungsi dari A ke B dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$.

Himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan semua nilai y yang dihasilkan dinamakan daerah hasil (range) dari f. Fungsi juga sering disebut pemetaan.

Definisi 2.B.2.

Suatu fungsi f disebut fungsi injektif bila dan hanya bila untuk sebarang x dan y yang berlainan dalam A diperoleh $f(x) \neq f(y)$ dalam B.

Jadi suatu anggota didalam B hanya mempunyai satu kawan di A.

Definisi 2.B.3.

Suatu fungsi f disebut surjektif bila dan hanya bila untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.

Jadi semua anggota B mempunyai kawan di A.

Definisi 2.B.4.

Suatu fungsi f yang injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif. Suatu fungsi f yang bijektif akan menghasilkan korespodensi satu-satu antara anggota-anggota A dan anggota-anggota B.

Definisi 2.B.5.

Fungsi f : A→B mempunyai fungsi invers g: B→A jika setiap anggota B adalah kawan dari tepat satu anggota A dan setiap anggota A adalah kawan dari tepat satu anggota B.

Ini berarti bahwa f: A→B mempunyai invers g: B→A jika A dan B berada dalam korespondensi satu-satu. Jadi jika dapat ditemukan fungsi g yang mengawankan himpunan B ke himpunan A atau x= g(y) dikatakan f dan g fungsi-fungsi yang saling invers. Jika g ada maka g dinyatakan dengan tanda f^{-1} dan dibaca "f invers". Daerah hasil f adalah daerah asal f^{-1}. daerah asal f adalah daerah hasil f^{-1}. Fungsi f yang bijektif akan mengakibatkan bahwa f mempunyai invers.

Definisi 2.B.6.

Hasil kali (komposisi) dua fungsi.

Andaikan f:A→B dan g:B→C fungsi, yang dimaksud dengan komposisi fungsi f dan g yaitu $g \circ f$ ialah suatu fungsi dengan domain sama dengan domain f, kodomain sama dengan kodomain g, dan untuk semua $x \in A$ berlaku

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Jadi jika $f: A \to B$ fungsi dan $g: B \to C$ fungsi maka $(g \circ f): A \to C$adalah fungsi dari A ke C.

Definisi 2.B.7.

Transformasi dalam geometri bidang adalah fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada bidang ke bidang itu sendiri.

Dalam hal ini yang dimaksudkan adalah bidang Euclides.

Semua transformasi merupakan suatu korespondensi satu-satu antara semua titik dalam bidang, dengan kata lain bila α suatu transformasi maka berlaku bahwa untuk setiap titik A akan terdapat dengan tunggal titik B sedemikian hingga $\alpha(A) = B$ dan sebaliknya untuk setiap titik P terdapat dengan tunggal titik Q sedemikian hingga $\alpha(Q) = P$.

Definisi 2.B.8.

Suatu transformasi disebut suatu kolineasi bila bayangan sebuah garis (lurus) oleh transformasi itu akan berupa garis lurus lagi.

Jadi bila l garis lurus maka α adalah suatu koliniasi bila dan hanya bila $\alpha(l) = l'$, dengan l' garis lurus.

Berikut ini akan dibahas tentang macam-macam transformasi dalam bidang Euclides.

1. Isometri.

Definisi 2.B.9

Transformasi α disebut suatu isometri bila untuk setiap pasang titik P dan Q terdapat $P'Q' = PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$

Akan ditunjukkan transformasi yang termasuk isometri :

a. Refleksi (pencerminan)

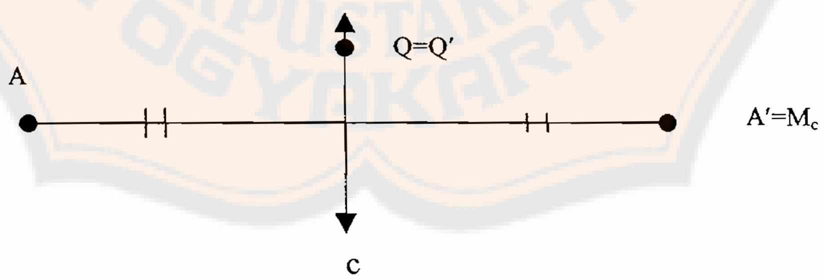
Definisi 2.B.10

Suatu refleksi (pencerminan) terhadap suatu garis adalah suatu transformasi M_c yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang V sebagai berikut.

i. jika $P \in c$ maka $M_c(P) = P$

ii. jika $P \notin c$ maka $M_c(P) = P'$ sehingga garis c adalah sumbu $\overline{PP'}$.

Pencerminan M pada c selanjutnya kita lambangkan dengan M_c . Garis c dinamakan sumbu refleksi atau sumbu pencerminan.

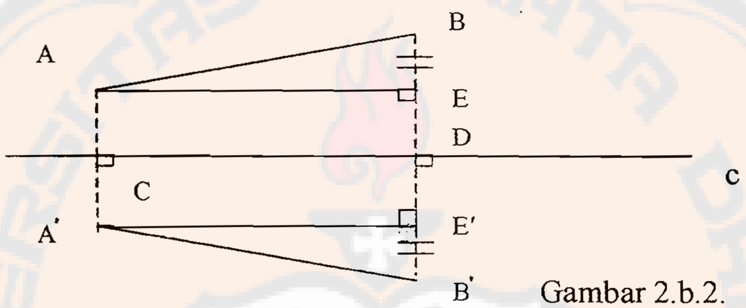


Gambar 2.b.1

Untuk memperjelas definisi di atas dapat dilihat gambar 2.b.1. sumbu $\overline{AA'}$ ialah garis yang membagi dua sama $\overline{AA'}$ dan tegak lurus dengan kata lain titik A dan titik A' berjarak sama dari c. Oleh pencerminan suatu titik A akan tertentu dengan tunggal titik A' bila sumbu refleksi diketahui.

Teorema 2.B.1.

Refleksi (pencerminan) adalah suatu isometri.



Gambar 2.b.2.

Bukti

Misalkan $A' = M_c(A)$ dan $B' = M_c(B)$

Dari A dan A' ditarik garis yang tegak lurus pada BB' dan memotong BB' berturut-turut di E dan E', $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$

$\overline{AC} \cong \overline{DE}$ karena $\overline{CA} \cong \overline{CA'}$ maka

$\overline{CA'} \cong \overline{DE'}$

$\overline{BD} \cong \overline{DB'}$

$\overline{DE} \cong \overline{DE'}$, sehingga $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$

karena

$\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$

$\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$

$m < AEB = m < A'E'B'$ maka $\Delta\ ABE \cong \Delta\ A'B'E'$

Jadi $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ maka $A'B' = AB$

Terbukti bahwa M_c adalah suatu isometri

Untuk membahas lebih lanjut tentang transformasi perlu diperkenalkan unsur-unsur invarian (bertahan/tetap) terhadap transformasi tersebut.

Definisi 2.B.11.

Titik Q disebut invarian terhadap transformasi α bila dipenuhi $Q = \alpha(Q)$.

Definisi 2.B.12.

Garis l disebut garis invarian terhadap transformasi α bila dipenuhi $l = \alpha(l)$

Definisi 2.B.13.

Sebaliknya α dikatakan mempertahankan titik Q bila dan hanya bila $\alpha(Q) = Q$ sedangkan transformasi α mempertahankan garis l bila dan hanya bila $\alpha(l) = l$.

Titik invarian pada refleksi M_c adalah titik-titik pada sumbu refleksi.

Definisi 2.B.14.

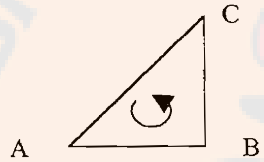
Arah perputaran dari titik-titik A,B,C yang tidak segaris adalah

(+) jika arah perputaran dari titik A,B,C searah jarum jam

(-) jika arah perputaran dari titik A,B,C berlawanan dengan arah jarum jam.

Contoh 2.B.1.

Diketahui ΔABC seperti pada gambar berikut ini :



Gambar 2.b.3

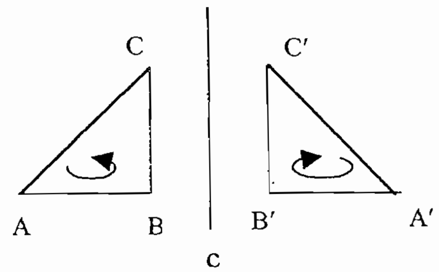
Arah titik A,B,C arahnya (-) atau berlawanan dengan arah jarum jam.

Suatu transformasi dikatakan mengubah arah jika mentransformasikan ΔABC ke $\Delta A'B'C'$ sedemikian sehingga kedua segitiga berlawanan arah.

Contoh 2.B.2

Segitiga ABC direfleksikan terhadap sumbu c

$M_c(\Delta ABC) = \Delta\, A'B'C'$



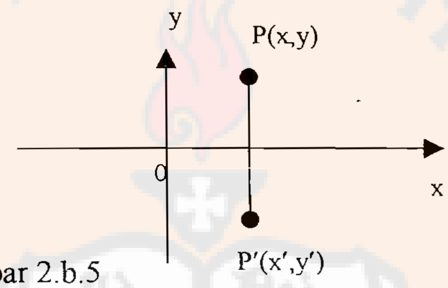
Gambar 2.b.4

ΔABC arah perputarnya berlawanan dengan arah jarum jam sedangkan $\Delta\ A'B'C'$ arah perputarannya searah dengan jarum jam. Jadi suatu refleksi mengubah arah.

Untuk pembahasan lebih lanjut akan diperkenalkan persamaan refleksi.

- Persamaan refleksi dengan sumbu refleksi sumbu –x.

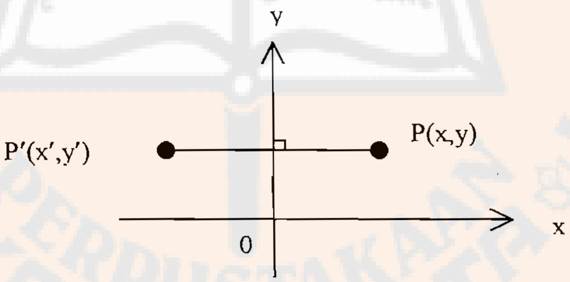
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Gambar 2.b.5

- Persaman refleksi dengan sumbu refleksi sumbu –y

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



Gambar 2.b.6

- Persamaan refleksi dengan sumbu refleksi c yang persamaannya :

  Ax + By + C = 0, dan p(x,y)

  M_c(P) = $P'(x', y')$ dengan P di luar sumbu refleksi c maka harus dipenuhi

  $\overleftrightarrow{PP'} \perp c$

jadi $\left(\frac{y' - y}{x' - x}\right) = \frac{B}{A}$ ....1)

Titik tengah $\overline{PP'}$, Q$\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right)$ terletak pada c.

Jadi A$\left(\frac{x + x'}{2}\right) + B\left(\frac{y + y'}{2}\right) + C = 0$ ....2)

Sesudah dijabarkan diperoleh dua persamaan dalam x' dan y', dari persamaan 1) diperoleh :

$$(y' - y)A = (x' - x)B$$

$$Ay' - Ay = Bx' - Bx$$

$$Bx' - Ay' = Bx - Ay \quad \text{.. 3)}$$

dari persamaan 2) diperoleh

$$A\left(\frac{x + x'}{2}\right) + B\left(\frac{y + y'}{2}\right) + C = 0$$

$$\frac{Ax + Ax'}{2} + \frac{By + By'}{2} + C = 0$$

$$Ax + Ax' + By + By' + 2C = 0$$

$$Ax' + By' = -Ax - By - 2C \quad \text{...4)}$$

dari persamaan 3 dan 4 didapatkan persamaan x' dan y' sebagai berikut

$$x' = \frac{(B^2 - A^2)x - 2ABy - 2AC}{A^2 + B^2} \quad \text{..5)}$$

$$y' = \frac{(A^2 - B^2)y - 2ABx - 2BC}{A^2 + B^2} \quad \ldots\ldots 6)$$

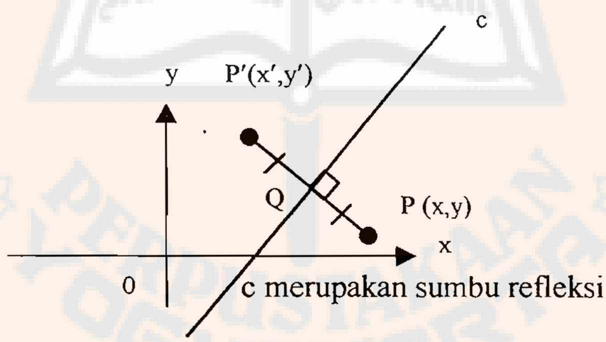
Persamaan 5) dan 6) dapat diubah sebagai berikut :

$$x' = x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}$$

$$y' = y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}$$

Jadi persamaan refleksi terhadap sumbu c yang persamaannya Ax+By+C=0

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$$



Gambar 2.b.7

b. Translasi (geseran)

Sebelum membahas translasi diperkenalkan terlebih dahulu pengertian vektor.

Definisi 2.B.15

Suatu ruas garis berarah adalah sebuah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan titik pangkal dan ujung yang lainnya dinamakan titik akhir.

Misalkan A titik pangkal dan B titik akhir, $\overrightarrow{AB}$ adalah suatu ruas garis berarah.

Definisi 2.B.16

Himpunan semua ruas garis berarah yang panjang dan arahnya sama disebut vektor geometrik.

Masing-masing ruas garis berarah tadi disebut wakil dari vektor tersebut. Vektor dapat ditulis **v** atau dalam bentuk komponen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Definisi 2.B.17

Himpunan ruas garis berarah yang besar dan arahnya sama membentuk klas ekuivalensi dan menunjukkan suatu translasi. Klas ekuivalensi dari ruas garis berarah disebut suatu vektor. Setiap ruas garis berarah mewakili vektor.

Definisi 2.B.18

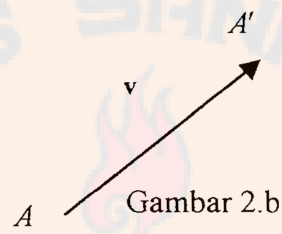
Vektor yang panjangnya nol dinamakan vektor nol, dengan menggunakan lambang **o**

Definisi 2.B.19

Suatu transformasi α dengan vektor translasi **v**, dapat dinyatakan dengan T**v**, jika T**v** : $P \rightarrow P'$, dengan $\overline{PP'}$ wakil dari **v**

Contoh 2.B.3

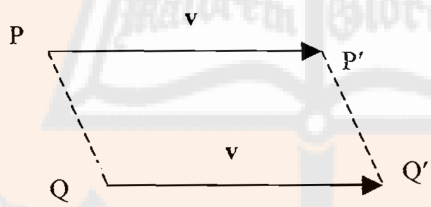
T**v** : $A \rightarrow A'$, $\overrightarrow{AA}$ adalah wakil dari **v**



Gambar 2.b.8

Teorema 2.B.3

Translasi adalah suatu isometri



Gambar 2.b.9

Bukti :

Misalkan,

T**v** : $P \rightarrow P'$, $\overline{PP'}$, adalah wakil dari **v**

$Q \rightarrow Q'$, $\overline{QQ'}$ adalah wakil dari **v**

Berarti $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$, sehingga T**v**: $\overline{PQ} \rightarrow \overline{P'Q'}$

$QPP'Q'$ membentuk suatu jajar genjang maka

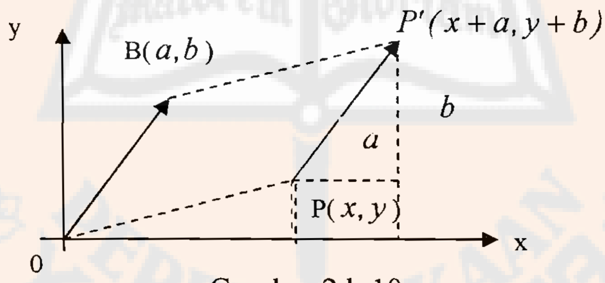
$P'Q' = PQ$. Jadi translasi (geseran) suatu isometri.

Pada suatu translasi tidak ada titik invarian karena dari definisi untuk semua titik P, T**v** $(P) = P', P \neq P'$, kecuali jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $T_{\mathbf{0}} = I$. Translasi juga tidak mengubah arah.

Persamaan translansi

Dengan menggunakan susunan sumbu koordinat X0Y

Andaikan diketahui titik $B(a,b)$



Gambar 2.b.10

Suatu translasi T**v** : $0 \rightarrow B, \overrightarrow{0B}$ adalah wakil dari **v**

Misalkan T**v** : $P \rightarrow P', \overrightarrow{PP'}$ wakil dari **v** dengan $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{0B}$

Maka

$P'(x', y') = P'(x + a, y + b)$

Translasi merupakan pemetaan $P(x,y)$ ke $P'(x',y')$ maka didapatkan persamaan translasi sebagai berikut :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Dengan menggunakan vektor

Tv dengan v = $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

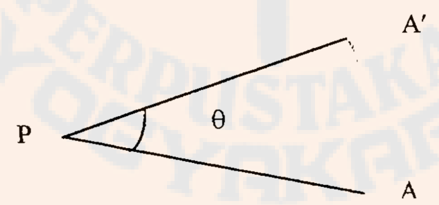
c. Rotasi (perputaran)

Definisi 2.B.20

Rotasi terhadap P dengan sudut θ, lambang $R(P,\theta)$ ialah pemetaan yang memenuhi

i. $R(P,\theta)(P) = P$

ii. $R(P,\theta)(A) = A'$, dengan $PA' = PA, m\angle APA' = \theta$

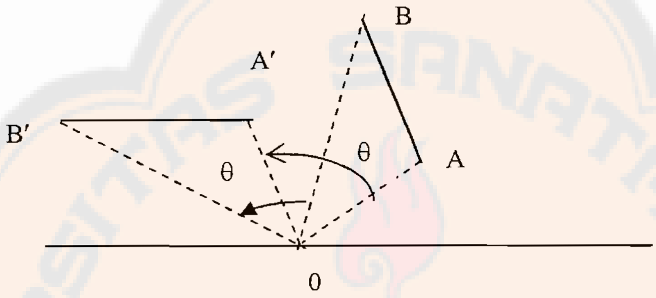


Gambar 2.b.11

Titik P disebut titik pusat rotasi dan θ disebut sudut rotasi, sudut θ positif bila arah rotasi berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. $R(P,k.360°) =$ I dengan k bilangan bulat, sedangkan untuk $R(P,\theta) \neq$ I satu-satunya titik invarian ialah titik pusat rotasi atau titik P, sebab titik-titik selain P akan dipetakan ke titik-titik lain.

Teorema 2.B.4

Rotasi adalah suatu isometri



Gambar 2.b.12

Bukti

Dimisalkan ada dua titik sebarang A,B dan $\overline{AB}$ dirotasikan dengan titik pusat 0 dan sudut rotasi θ maka $0A = 0A'$, $0B = 0B'$

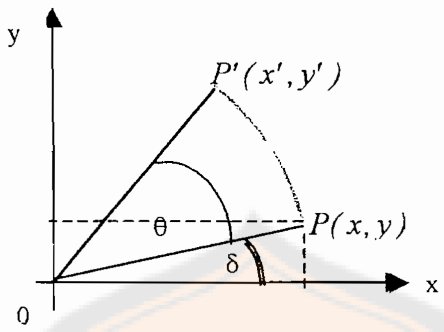
$\angle A0B \cong \angle A'0B'$ maka $\Delta 0AB \cong \Delta 0A'B'$ jadi $AB = A'B'$

terbukti bahwa rotasi adalah suatu isometri.

Rotasi tidak mengubah arah, karena $\Delta 0AB$ dipetakan ke $\Delta 0A'B'$ sedemikian sehingga kedua arah segitiga tidak berlawanan.

Persamaan rotasi

Jika diketahui titik $P(x, y)$ dan pada titik ini diadakan rotasi dengan titik pusat 0(0,0) dan sudut rotasi θ maka persamaan rotasinya dapat dicari sebagai berikut:



Gambar 2.b.13

dimisalkan :

$x = OP \cos\delta$

$y = 0P \sin\delta$

$x' = 0P' \cos(\theta + \delta)$

$= 0P'(\cos\theta \cos\delta - \sin\theta \sin\delta)$

Karena $OP' = OP$, maka

$x' = OP \cos\delta . \cos\theta - OP \sin\delta \sin\theta$

$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$

Akan dicari y'

$y' = OP \sin(\theta + \delta)$

$= OP' \left(\sin\theta \cos\delta + \cos\theta \sin\delta\right)$

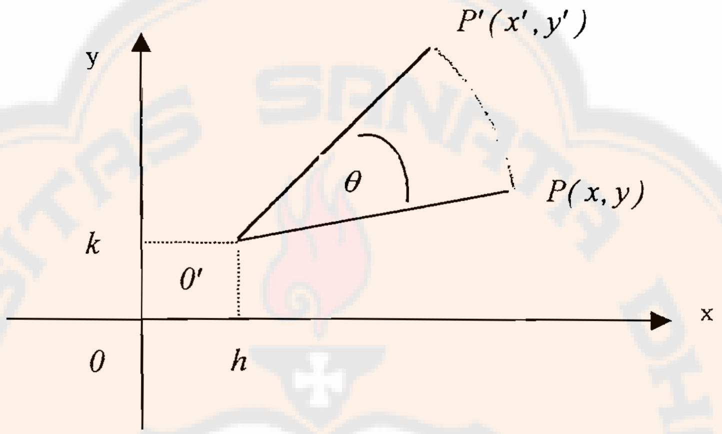
$y' = OP \cos\delta . \sin\theta + OP \sin\delta \cos\theta$

$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$

Jadi persamaan rotasi $R(0,\theta)$ adalah

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Jika pusat rotasi $0'(h,k)$ sebarang dan sudut rotasi θ



Gambar 2.b.14

$P'(x',y')$ merupakan bayangan dari $P(x,y)$

$x'-h = (x-h)\cos\theta - (y-k)\sin\theta$

$y'-k = (x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta$

Persamaan rotasi $R(0',\theta)$ dengan pusat $0'(h,k)$

$$\begin{cases} x' = (x-h)\cos\theta - (y-k)\sin\theta + h \\ y' = (x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta + k \end{cases}$$

d. Transformasi Identitas

Definisi 2.B.21.

I disebut transformasi identitas bila dan hanya bila I(Q)=Q untuk setiap Q pada bidang.

Mengingat definisi di atas, transformasi identitas memetakan setiap titik kedirinya sendiri I : Q$\rightarrow$Q

Persamaan transformasi identitas

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

e. Refleksi geser

Definisi 2.B.22.

Suatu refleksi geser adalah komposisi (hasil kali) suatu refleksi dan suatu translasi yang sejajar dengan sumbu refleksi.

Pembahasan lebih lanjut dapat dilihat pada subpokok bahasan d. *Komposisi translasi dan refleksi hal 46.*

Teorema 2.B.5.

Refleksi geser adalah suatu isometri

Bukti

Sudah diketahui bahwa suatu refleksi adalah suatu isometri dan translasi juga suatu isometri. Karena refleksi geser merupakan komposisi isometri dengan translasi, hasil dari komposisi tersebut suatu isometri. Jadi refleksi geser juga suatu isometri.

2. Dilatasi

Definisi 2.B.23

Suatu dilatasi adalah transformasi yang mentrasformasikan garis ke garis yang sejajar dengan garis semula. Jika α suatu dilatasi dan $\alpha : g \rightarrow g'$ maka $g' // g$.

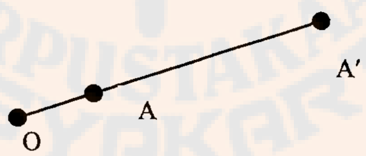
Yang termasuk dilatasi adalah :

a. translasi

b. dilatasi sentral

Definisi 2.B.24

Suatu dilatasi sentral ialah suatu dilatasi yang mempunyai titik pusat 0, dan faktor skala μ yang dapat dinyatakan dengan $[0, \mu]$.



Gambar 2.b.15

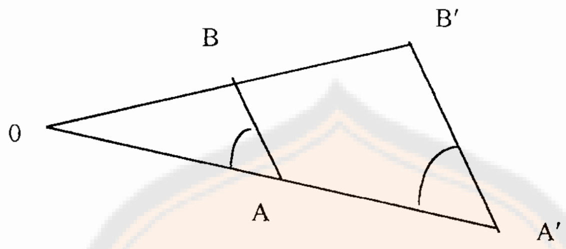
$[0, \mu] : 0 \rightarrow 0$

$[0, \mu] : A \rightarrow A'$, dengan $\overrightarrow{0A'} = \mu \overrightarrow{0A}$

$(0, A, A'$ segaris) 0 disebut titik pusat dilatasi dan 0 merupakan titik invarian. Untuk pembahasan dilatasi lebih lanjut dinyatakan dengan $[0, \mu]$.

Akan ditunjukkan jika α suatu dilatasi $[0, \mu]$ dan α : $\overline{AB} \to \overline{A'B'}$

maka $\overline{A'B'} // \overline{AB}$



Gambar 2.b.16

$[0, \mu]$: $A \to A'$, maka $\overrightarrow{0A'} = \mu\, \overrightarrow{0A}$.

$B \to B'$, maka $\overrightarrow{0B'} = \mu\, \overrightarrow{0B}$.

Didapat $0A' : 0A = 0B' : 0B = \mu$.

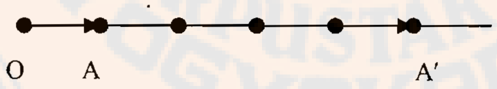
Jadi $A'B' // AB$.

Setiap titik A ditransformasikan ke titik A' pada $\overleftrightarrow{0A}$ dengan

$\overrightarrow{0A'} = \mu\, \overrightarrow{0A}$.

i). Jika $\mu > 0$ maka $\overrightarrow{0A'} = \mu\, \overrightarrow{0A}$

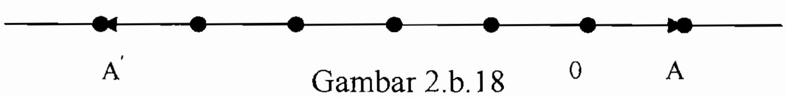
misalkan $\mu = 5$ maka $\overrightarrow{0A'} = 5\, \overrightarrow{0A}$



Gambar 2.b.17

$\mu < 0$ maka $\overrightarrow{0A'} = \mu\, \overrightarrow{0A}$

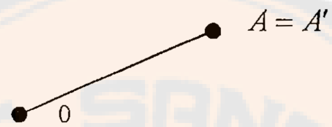
μ = -5 maka $\overrightarrow{0A'} = -5\,\overrightarrow{0A}$



Gambar 2.b.18

Jika $\mu > 0$, titik dan bayangannya terletak pada pihak yang sama terhadap 0. Sedangkan jika $\mu < 0$ titik dan bayangannya terletak pada pihak yang berlawanan terhadap 0.

ii). Jika $\mu = 1$, maka [0,1] menunjukkan suatu transformasi identitas.



Gambar 2.b.19

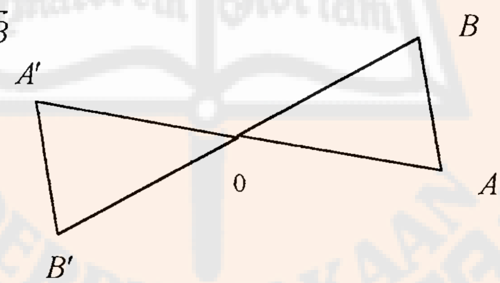
$\overrightarrow{0A'} = 1.\ \overrightarrow{0A}$

$\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A}$

iii). Jika $\mu = -1$, maka [0,-1] menunjukkan suatu setengah putaran.

$\overrightarrow{0A'} = -\ \overrightarrow{0A}$

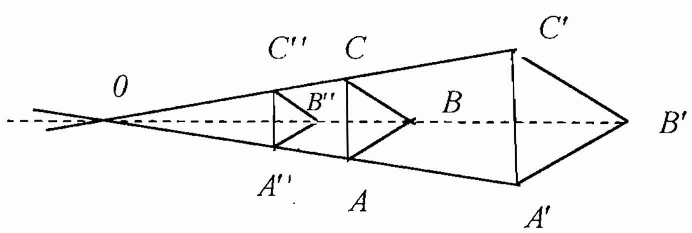
$\overrightarrow{0B'} = -\overrightarrow{0B}$



Gambar 2.b.20

iv). Jika $|\mu| > 1$, maka akan terjadi perbesaran

Misalkan $[0, \mu] : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$



Gambar 2.b.21

$\overrightarrow{A'B'} = \mu\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{B'C'} = \mu\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{C'A'} = \mu\ \overrightarrow{CA}$

$\therefore\ \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

ΔABC mengalami perbesaran

$|\mu| < 1$, maka akan terjadi perkecilan.

$[0, \mu] : \Delta ABC \rightarrow \Delta A''B''C''$

$\therefore\ \Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$

$\overrightarrow{A''B''} = \mu\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{B''C''} = \mu \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{C''A''} = \mu \overrightarrow{CA}$

ΔABC mengalami perkecilan.

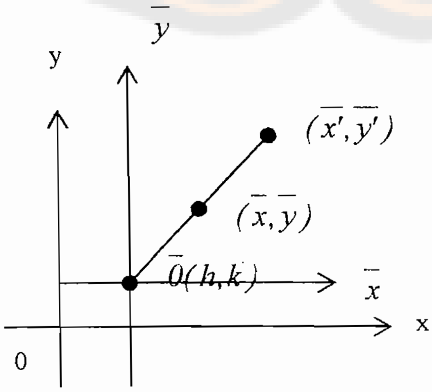
Dilatasi yang juga suatu isometri selain translasi ialah setengah putaran.

Persamaan dilatasi.

Persamaan dilatasi sentral dengan pusat 0 adalah :

$$\begin{cases} x' = \mu x \\ \qquad\qquad \text{dengan } \mu \neq 0 \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Persamaan dilatasi sentral dengan pusat $\bar{0}$ (h,k) dapat dicari sebagai berikut:



Gambar 2.b.22

$$\begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}' = \mu\bar{x} \\ \bar{y}' = \mu\bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}' = \mu(x - h) \\ \bar{y}' = \mu(y - h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - h = \mu(x - h) \\ y' - k = \mu(x - k) \end{cases}$$

Jadi persamaan dilatasi dengan pusat $\bar{O}$ (h,k) adalah

$$\begin{cases} x' - h = \mu(x - h) \\ y' - k = \mu(x - k) \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} x' = \mu(x - h) + h \\ y' = \mu(x - k) + k \end{cases}$$

C. Komposisi dua transformasi

Pembahasan lebih lanjut tentang komposisi dua transformasi

Definisi 2.C.1.

Misalkan α dan β dua transformasi dengan,

α : V→V

β : V→V

Komposisi dari α dan β yang ditulis $\beta \circ \alpha$ didefinisikan sebagai berikut: $(\beta \circ \alpha)(A) = \beta(\alpha(A)), \forall A \in V$

Macam – macam komposisi transformasi antara lain

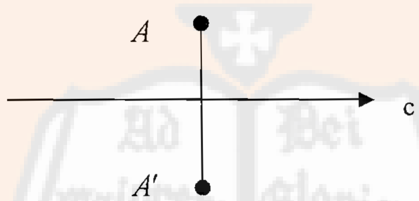
1. Komposisi dua refleksi

   Untuk mempermudah pemahaman, komposisi dua refleksi dijelaskan kedalam tiga hal sebagai berikut :

   a. Jika kedua sumbu refleksi berimpit .

      Misalkan sumbu refleksi c_1 berimpit dengan c_2

      Untuk pembahasan lebih lanjut digunakan notasi M_i sebagai pengganti M_{ci}, karena $M_{ci} = M_i$



Gambar 2.c.1

c_1 berimpit dengan c_2

$M_1 : A \rightarrow A'$

$M_1 : A' \rightarrow A$

$M_1.M_1(A) = A$

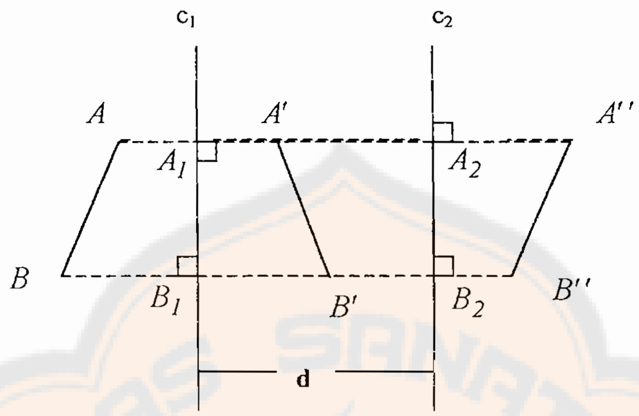
$M_1^2 = I$

Jadi komposisi dua refleksi untuk sumbu refleksi yang berimpit akan menghasilkan suatu transformasi identitas.

Definisi 2.C.2

Suatu transformasi α merupakan involusi bila $\alpha \neq I$ dan $\alpha^2 = I$. Hal ini dapat diartikan bahwa $\alpha = \alpha^{-1}$.

b. Jika kedua sumbu refleksi sejajar



Gambar 2.c.2

$\overline{AB}$ direfleksikan terhadap sumbu refrleksi sejajar, jarak c_1 dengan c_2 adalah **d** maka :

$M_1 : \overline{AB} \rightarrow \overline{A'B'}$

$M_2 : \overline{A'B'} \rightarrow \overline{A''B''}$

$M_2M_1 : \overline{AB} \rightarrow \overline{A''B''}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \\ \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''} \end{array}\right\} \text{maka } \overline{AB} \cong \overline{A''B''}$$

Kita lihat pada titik A.

$M_1(A) = A'$

$M_2(A') = A''$

A, A', A'' segaris, $AA' \perp c_1$ dan $A'A'' \perp c_2$, jadi jarak A ke A'' sama dengan $AA_1 + A_1A' + A'A_2 + A_2A'' = 2A_1A_2 = AA''$

Kita lihat pada titik B

$M_1(B) = B'$

$M_2(B') = B''$

B, B', B'' segaris, $BB' \perp c_1$ dan $B'B'' \perp c_2$, jadi jarak B ke B'' sama dengan $BB_1 + B_1B' + B'B_2 + B_2B'' = 2B_1B_2 = BB''$

Diketahui bahwa jarak sumbu refleksi adalah **d**, sehingga

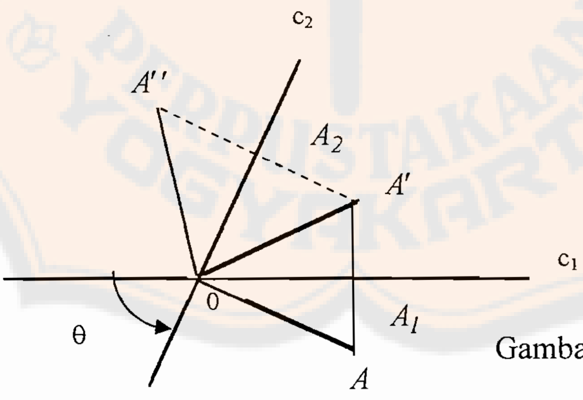
$AA'' = BB'' = 2\,\mathbf{d}, \overline{AB} \,//\, \overline{A''B''}$

$T_{2\mathbf{d}} : \overline{AB} \rightarrow \overline{A''B''}$

$M_2M_1 = T_{2\mathbf{d}}$

Jadi komposisi dua refleksi dengan sumbu refleksi sejajar adalah suatu translasi.

c. Jika kedua sumbu refleksi berpotongan pada satu titik



Gambar 2.c.3

c_1 dan c_2 berpotongan di 0 dan mengampit sudut θ.

$M_1 : A \rightarrow A'$

$M_2 : A' \rightarrow A''$

$M_2M_1 : A \rightarrow A''$

Sehingga

$\angle A0A_1 \cong \angle A_1 0A''$

$\angle A'0A_2 \cong \angle A_2 0A''$

Jadi $m\angle A_1 0A' + m\angle A'0A_2 = m\angle A0A_1 + m\angle A_2 0A'' = \theta$

$0A = 0A' = 0A''$.

Jadi $\angle A0A'' \cong 2\theta$.

R(0,2θ) : $A \rightarrow A''$.

Jadi komposisi 2 refleksi terhadap 2 sumbu refleksi yang berpotongan di 0 dan mengampit sudut θ adalah suatu rotasi dengan titik pusat 0 dan sudut rotasi 2θ.

2. Komposisi dua translasi

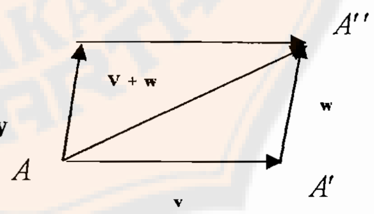
Komposisi dua translasi yaitu suatu translasi yang dikerjakan berturut-turut.

Misalkan :

$T_{\mathbf{v}}$: $A \rightarrow A', \overline{AA'}$ wakil dari **v**

$T_{\mathbf{w}}$: $A' \rightarrow A'', \overline{A'A''}$ wakil dari **w**

$T_{\mathbf{w}}.\ T_{\mathbf{v}}$: $A \rightarrow A''$



$T_{\mathbf{v}}(A) = A'$

Gambar 2.c.4

$T_{\mathbf{w}}(A') = T_{\mathbf{w}}(T_{\mathbf{v}}(A)) = T_{\mathbf{w}}.T_{\mathbf{v}}(A)$

$T_{\mathbf{w}}.T_{\mathbf{v}}$: $A \rightarrow A'', \overrightarrow{AA''}$ wakil dari **v** + **w**.

Jadi komposisi dua translasi adalah suatu translasi.

T_{w+v}: $A \rightarrow A''$, $\overrightarrow{AA''}$ wakil dari **v** + **w.**

$T_w . T_v = T_{v+w}$.

Jadi $T_w . T_v = T_{v+w} = T_{w+v} = T_v . T_w$.

3. Komposisi dua rotasi

Pembahasan komposisi dua rotasi dibedakan menjadi beberapa hal ;

a. Komposisi dua rotasi dengan titik pusat sama.

$$R(0,\theta): A \rightarrow A' \begin{cases} 0A = 0A' \\ \angle A0A' = \theta \end{cases} \qquad R(0,\gamma): A' \rightarrow A'' \begin{cases} 0A' = 0A'' \\ \angle A'0A'' = \gamma \end{cases}$$

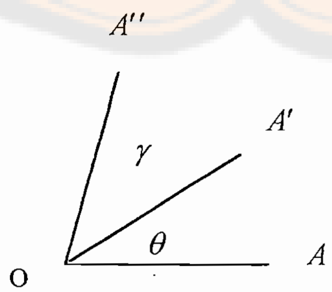
$$R(0,\theta+\gamma): A \rightarrow A'' \begin{cases} 0A = 0A'' \\ \angle A0A'' = \theta+\gamma \end{cases}$$

$R(0,\gamma)R(0,\theta): A \rightarrow A''$ dan $R(0,\gamma)R(0,\theta) = R(0,\gamma+\theta)$

$R(0,\theta)R(0,\gamma): A'' \rightarrow A$ dan $R(0,\theta)R(0,\gamma) = R(0,\theta+\gamma)$

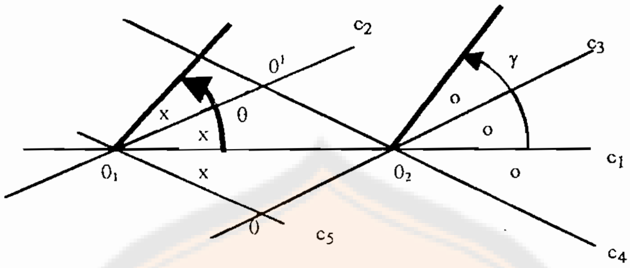
Jadi $R(0,\gamma)R(0,\theta) = R(0,\theta)R(0,\gamma) = R(0,\theta+\gamma) = R(0,\gamma+\theta)$

Komposisi dua rotasi dengan titik pusat sama adalah suatu rotasi.



Gambar 2.c.5

b. Komposisi dua rotasi dengan titik pusat berlainan



Gambar 2.c.6

Akan dicari

$R(0_2\,,\,\gamma)\,R(0_1\,,\,\theta)$

$R(0_1\,,\,\theta) = M_2\,M_1$

$= M_1M_5$

$R(0_2\,,\,\gamma) = M_3M_1$

$= M_1M_4$

$R(0_2\,,\,\gamma)\,R(0_1\,,\theta) = (M_3M_1)\,(M_1M_5)$

$= M_3(M_1M_1)M_5$

$= M_3M_1{}^2M_5$

$=M_3\;I\;M_5$

$= M_3\,M_5$

$= R(0\,,\,\theta + \gamma)$

$R(0_1,\theta)R(0_2,\gamma) = (M_2M_1)(M_1M_4)$

$= M_2(M_1M_1)M_4$

$= M_2M_1{}^2M_4$

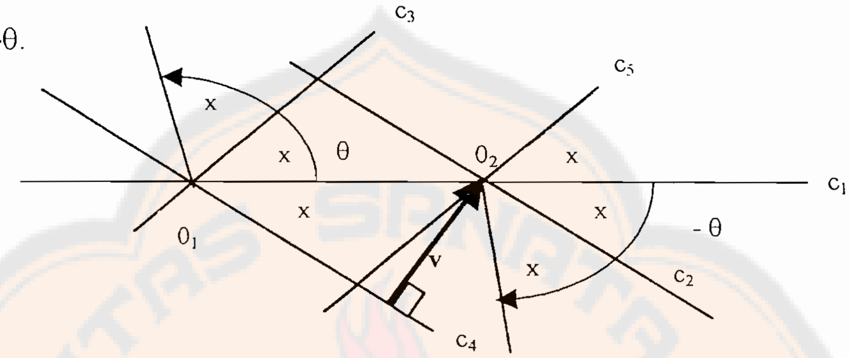
$= M_2\,I\,M_4$

$= R(0',\theta+\gamma)$

$R(0_2,\gamma)R(0_1,\theta) \neq R(0_1,\theta)R(0_2,\gamma)$

Komposisi dua rotasi dengan titik pusat berlainan adalah suatu rotasi.

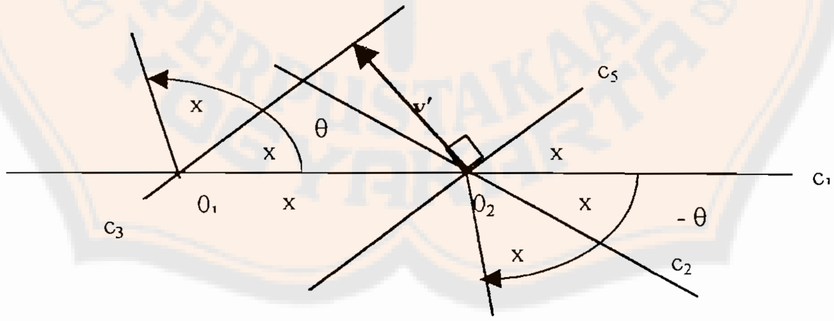
c. Komposisi dua rotasi dengan titik pusat berlainan yang mengampit sudut θ dan $-\theta$.



Gambar 2.c.7

$$R(0_2,-\theta)\, R(0_1,\theta) = (M_2M_1)(M_1M_4)$$
$$= M_2(M_1M_1)M_4$$
$$= M_2M_1^2M_4$$
$$= M_2\, I\, M_4$$
$$= M_2M_4$$

karena $c_2 // c_4$ maka didapatkan $M_2M_4 = T_{2v}$



Gambar 2.c.8

$R(0_1,\theta)R(0_2,-\theta)=(M_3M_1)(M_1M_5)$

$= M_3(M_1M_1)M_5$

$= M_3M_1^2M_5$

$=M_3\ I\ M_5$

$=M_3M_5$

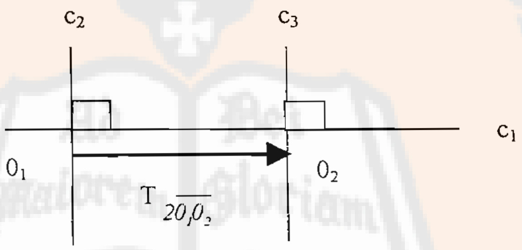
karena c_3 // c_5 maka didapatkan $M_3M_5 = T_{2v'}$

Jadi komposisi dua rotasi dengan sudut θ dan $-\theta$ adalah suatu translasi.

d. Komposisi dua setengah putaran $H_{02}H_{01}$ dengan :

$H_{01} = R(0_1,180°)$

$H_{02} = R(0_2,180°)$



Gambar 2.c.9

Sehingga :

$H_{01} = M_2M_1=M_1M_2$

$H_{02} = M_3M_1= M_1M_3$

$H_{02}H_{01} = (M_3M_1)(M_1M_2)$

$= M_3(M_1M_1)M_2$

$= M_3M_1^2M_2$

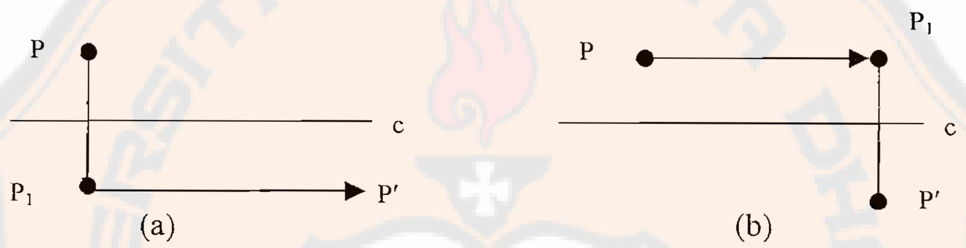
$= M_3M_2$, karena c_3 // c_2 maka :

$= T_{2\overline{0_10_2}}$

Jadi komposisi dua setengah putaran adalah suatu translasi dengan vektor translasi yang besarnya dua kali jarak titik pusat setengah putaran itu.

4. Komposisi translasi dan refleksi

Dengan menggunakan definisi 2.B.22 halaman 32 didapatkan bahwa komposisi translasi dan refleksi adalah suatu refleksi geser.



Gambar 2.c.10

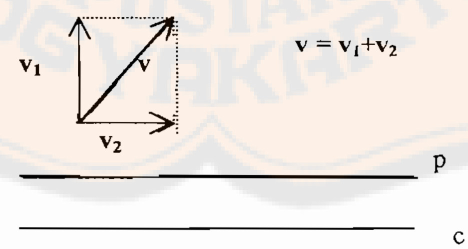
$v \,//\, c$

$T_v M_c = G_{v,c}$

$M_c T_v = G_{c,v}$

$T_v M_c = M_c T_v = G_{c,v} = G_{v,c}$

$v \not\parallel c$



Gambar 2.c.11

$Tv = Tv_1 \,.\, Tv_2$

$Tv\, Mc = Tv_2\, Tv_1\, Mc$

$= T\mathbf{v}_2\ Mp\ Mc\ Mc$

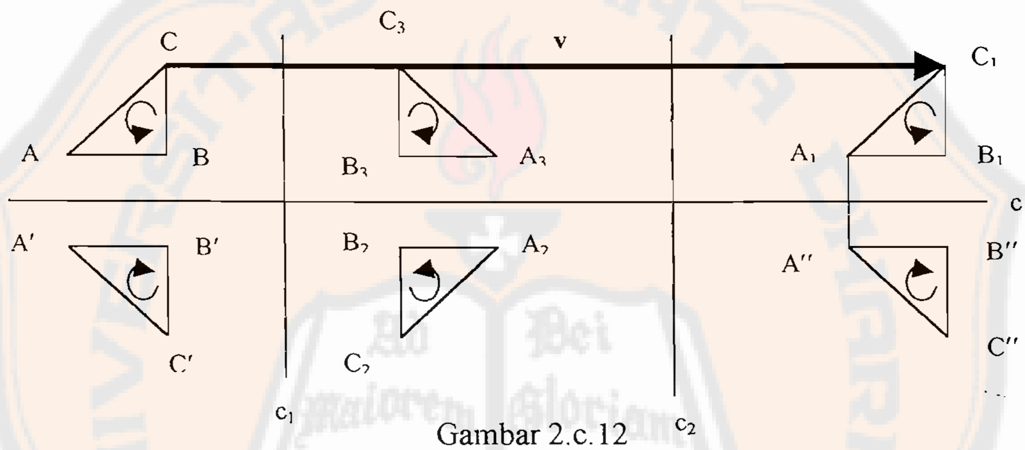
$= T\mathbf{v}_2\ Mp\ Mc^2$

$= T\mathbf{v}_2\ Mp\ I$

$= T\mathbf{v}_2\ Mp$, jarak p dengan c adalah $\frac{1}{2}\,|\,\mathbf{v}_1\,|$

Pada suatu refleksi geser tidak ada titik invarian.

Refleksi geser mengubah arah.



Gambar 2.c.12

$T_{\mathbf{v}} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1$

$M_c : \Delta A_1B_1C_1 \rightarrow \Delta A''B''C''$

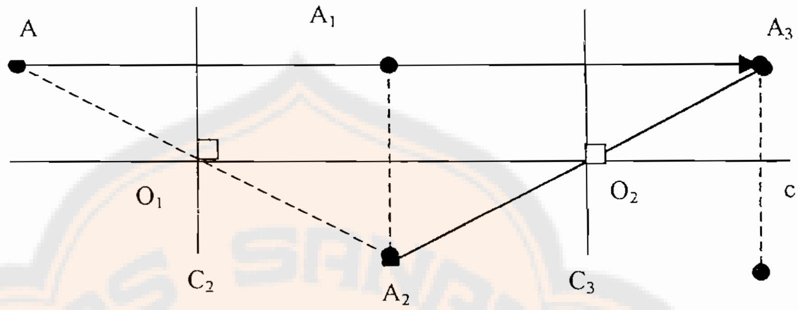
$M_cT_{\mathbf{v}} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A''B''C''$

ΔABC arah perputarannya berlawanan dengan arah jarum jam, $\Delta A''B''C''$ arah perputarannya searah dengan jarum jam. Jadi suatu refleksi geser mengubah arah.

Pembahasan selanjutnya membicarakan beberapa komposisi yang dapat menghasilkan suatu refleksi geser.

5. Komposisi tiga refleksi

a. Dua sumbu refleksi tegak lurus sumbu refleksi ketiga .



Gambar 2.c.13

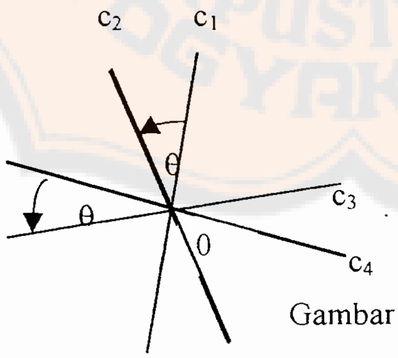
$$M_3 M_2 M_1 (A) = M_3 (M_2 M_1) (A) = M_3 H_{01} (A) \quad ....(1)$$

$$(M_3 M_2) M_1 (A) = T_v M_1 (A) = G_{v,c1} (A) \quad ....(2)$$

$$M_3 M_1 M_2 (A) = (M_3 M_1) M_2 (A) = H0_2 M_2 (A) \quad ....(3)$$

Dari (2) didapatkan komposisi tiga refleksi dengan $c_1 \perp c$, $c_1 \perp c_3$, dan $c_2 // c_3$ adalah suatu refleksi geser. $M_3M_2M_1 = M_3H_{01} = H_{02}M_2 = G_{v,c1}$

b. Ketiga sumbu refleksi berpotongan pada satu titik.



Gambar 2.c.14

Akan kita cari $M_3\, M_2\, M_1$

$M_2\, M_1 = R\,(0{,}2\theta) = M_3\, M_4$

$M_3(M_2\, M_1) = M_3\,(M_3\, M_4)$

$= (M_3\, M_3)\, M_4$

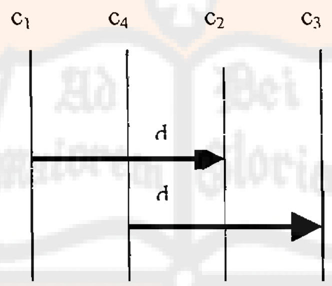
$= M_3^{\,2}\, M_4$

$= I\, M_4$

$= M_4$

Jadi komposisi tiga refleksi dengan sumbu refleksi berpotongan pada satu titik adalah suatu refleksi

c. Ketiga sumbu refleksi sejajar



Gambar 2.c.15

Akan dicari hasil kali dari $M_3\, M_2\, M_1$

M_2M_1 = kita refleksikan terhadap c_1 terlebih dahulu setelah itu baru kita refleksikan ke c_2 maka didapatkan.

$M_2M_1 = T_{2d} = M_3\, M_4$

$M_3\, M_2\, M_1 = M_3\,(M_2\, M_1)$

$= M_3\,(M_3\, M_4)$

$= (M_3\, M_3)\, M_4$

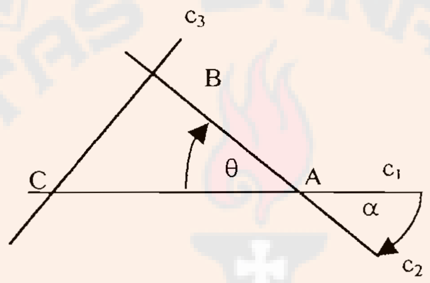
$= M_3^2 M_4$

$= I M_4$

$= M_4$

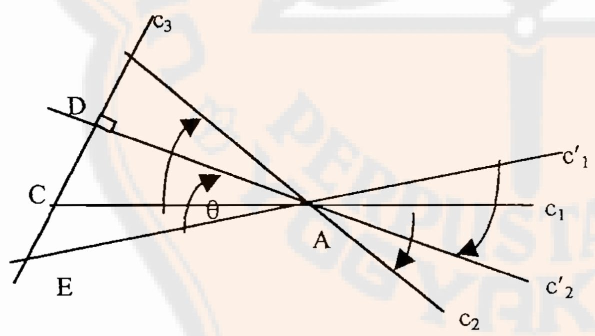
Komposisi tiga refleksi dengan sumbu refleksi sejajar adalah satu refleksi.

d. Ketiga sumbu refleksi berpotongan dan membentuk segitiga.



Gambar 2.c.16

Akan dicari hasil kali dari $M_3M_2M_1$



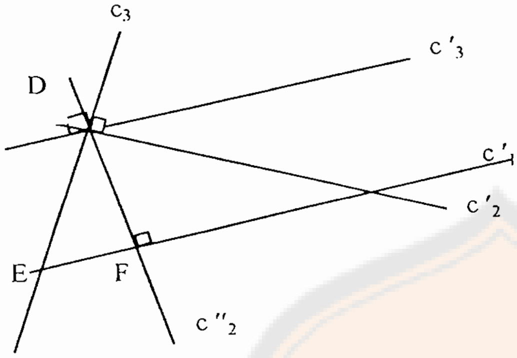
$M_2M_1 = R(A,2\theta)$

$= M'_2M'_1$

dengan $c'_2 \perp c_3$

$M_3M_2M_1 = M_3M'_2M'_1$

Gambar 2.c.17



Gambar 2.c.18

$M_3M_2' = R(D,180°)$

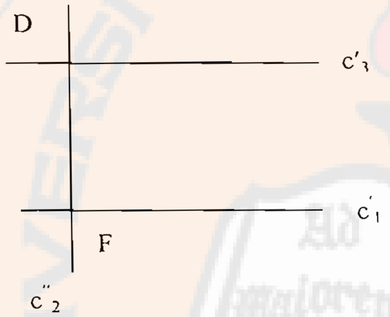
$= R(D,-180°)$

$= H_D$

$c_2'' \perp c_1'$ dan dibuat $c_3' \perp c_2''$

sehingga $M_3M_2' = M_3'M_2''$

$c_3' // c_1'$ maka



Gambar 2.c.19

$M_3M_2M_1 = M_3M_2'M_1'$

$= M_3'M_2'M_1', c_2'' \perp c_1'$

$= G$

Jadi $M_3M_2M_1 = G$

Komposisi tiga refleksi dengan sumbu refleksi sebarang dan membentuk segitiga adalah suatu refleksi geser.

6. Komposisi dua refleksi geser yang sama.

$G_{v,c} = T_vM_c = M_cT_v$ maka

$G_{v,c} = (T_vM_c)(M_cT_v)$

$= T_v(M_cM_c)T_v$

$= T_vM_c^2T_v$

$= T_v I T_v$

$= T_{2v}$, komposisi dua translasi adalah translasi jadi komposisi dua refleksi geser yang sama adalah suatu translasi.

Di dalam pembahasan sebelumnya suatu translasi dan rotasi dapat dinyatakan sebagai komposisi dua refleksi, termasuk juga setengah putaran merupakan kejadian khusus dari rotasi. Suatu refleksi geser dapat tersusun sebagai hasil kali suatu translasi dengan refleksi sehingga refleksi geser merupakan hasil kali tiga refleksi.

Isometri yang sudah kita pelajari merupakan komposisi dari refleksi. Setiap hasil kali dari refleksi, rotasi, translasi, refleksi geser dapat dianggap sebagai hasil kali dari refleksi-refleksi.

Contoh 2.C.1

Diketahui $G = M_3 M_2 M_1$, M_4 dan $T_v = M_6 M_5$

Hasil kali rotasi , refleksi dan refleksi geser = $(M_6 M_5)(M_4)(M_3 M_2 M_1)$

$= M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 M_1$

Suatu rangkaian refleksi M_n, M_{n-1}, M_{n-2}, M_{n-3}, ...M_1 akan merupakan isometri searah jika n genap dan isometri berlawanan jika n ganjil. Sering juga dikatakan bahwa isometri searah disebut isometri genap dan isometri berlawanan disebut isometri gasal.

$I = M_1^2$	merupakan isometri genap
$T_v = M_2 M_1, (c_1 \| c_2)$	merupakan isometri genap
$R(0,2\theta) = M_2 M_1$	merupakan isometri genap
$G= M_3 M_2 M_1$	merupakan isometri ganjil
M_c	merupakan isometri ganjil

Dengan menggunakan pengertian isometri genap atau isometri ganjil kita dapat mencari kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dari komposisi isometri yaitu refleksi, rotasi (setengah putaran termasuk dalam rotasi), translasi dan refleksi geser.

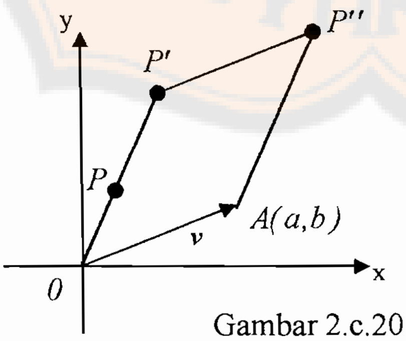
Contoh 2.C.2

Kemungkinan hasil dari komposisi refleksi dengan translasi (translasi dengan refleksi) adalah suatu refleksi geser atau refleksi. Cara mencari kemungkinan hasil tersebut adalah sebagai berikut. Refleksi merupakan isometri ganjil dan translasi merupakan isometri genap sehingga hasil kalinya berupa isometri ganjil. Kemungkinan hasil dari komposisi tersebut adalah refleksi geser atau refleksi.

Dengan demikian kita dapat mencari semua kemungkinan hasil dari pasangan-pasangan yang mungkin terjadi dari komposisi isometri.

7. Komposisi translasi dengan dilatasi sentral

a. Andaikan diketahui $P(x,y)$ dan dilatasi sentral $[0,\mu]$ akan kita cari koordinat-koordinat titik $P' = [0,\mu](P)$



Gambar 2.c.20

$$P'' = T\mathbf{v}\,(P')$$

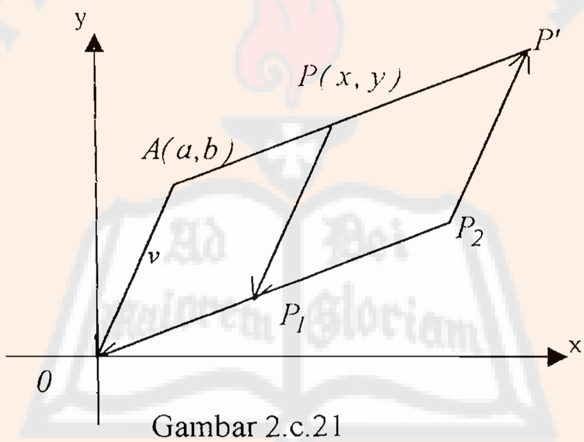
$$= (T\mathbf{v}\,[0,\mu])\,(P)$$

$$(x'', y'') = T\mathbf{v}\,(\mu x, \mu y)$$

$$= (\mu x + a, \mu y + b)$$

Jadi komposisi translasi dengan dilatasi sentral [0,μ] adalah suatu dilatasi sentral.

b. Diandaikan diketahui dilatasi sentral [A,μ]dengan titik $A(a,b)$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Gambar 2.c.21

Andaikan ada titik $A(a,b)$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$[A,\mu](P) = T_{\mathbf{v}}[0,\mu]T_{-\mathbf{v}}(P)$$

$$= T_{\mathbf{v}}[0,\mu]P_1\,(x-a, y-b)$$

$$= T_{\mathbf{v}}P_2\;(\mu(x-a), \mu(y-b))$$

$$= P'(\mu(x-a)+a, \mu(y-b)+b)$$

$$[A,\mu](P) = P'\,(\mu x + a(1-\mu), \mu y + b(1-\mu))$$

Dilatasi sentral [A,μ]diperoleh dari $T_{\mathbf{v}}\,[0,\mu]\,T_{-\mathbf{v}}$

8. Komposisi dua dilatasi sentral

Andaikan diketahui dilatasi sentral $[A,\mu_1]$ dan $[B,\mu_2]$ dipilih suatu sistim koordinat ortogonal dengan $\overrightarrow{AB}$ sebagai sumbu –x dan titik asal kita pilih di A. Andaikan $B(b,0)$ dan $A(0,0)$. Jika $P(x,y)$ maka :

$[A,\mu_1](P)=P'(\mu_1 x,\mu_1 y)$ dan $[B,\mu_2](P')=(\mu_2 x'+b(1-\mu_2),\mu_2 y')$

Jadi $[B,\mu_2][A,\mu_1](P)=[B,\mu_2](P')$

$$=P''(\mu_2 x'+b(1-\mu_2),\mu_2 y')$$

$$=P''((\mu_2(\mu_1 x)+b(1-\mu_2)),\mu_2(\mu_1 y))$$

$$=P''((\mu_2\mu_1)x+b(1-\mu_2),(\mu_2\mu_1)y)$$

Kemungkinan – kemungkinan yang kita dapatkan dari komposisi dua dilatasi sentral antara lain :

i. Jika $\mu_1\mu_2\neq 1$ dan $A\neq B$

$[B,\mu_2][A,\mu_1](P)=P'((\mu_1\mu_2)x+b(1-\mu_2),(\mu_1\mu_2)y)$

Akan kita cari pusat dilatasi, titik pusat dilatasi adalah titik invarian dari dilatasi tersebut.

Misalkan $[B,\mu_2][A,\mu_1]=[C,\mu]$, misalkan $C(x_0,y_0)$

$[B,\mu_2][A,\mu_1](P)=[C,\mu](P)$

$[B,\mu_2][A,\mu_1](C)=[C,\mu](C)$

$((\mu_{,}\mu_2)x_0 + b(1-\mu_2), \mu_1\mu_2 y_0) = (x_0, y_0)$

$(\mu_1\mu_2)x_0 + b(1-\mu_2) = x_0$

$\mu_1\mu_2 y_0 = y_0$ maka $(1-\mu_1\mu_2)y_0 = 0$

$\mu_1\mu_2 \neq x$ maka $y_0 = 0$

$(\mu_1\mu_2 - 1)x_0 = b(\mu_2 - 1)$

$$x_0 = \frac{b(\mu_2 - 1)}{\mu_1\mu_2 - 1}$$

Jadi hasil kali $[B,\mu_2][A,\mu_1]$adalah suatu dilatasi sentral $[C,\mu_1\mu_2]$ dengan

$C \in \overleftrightarrow{AB}$ dan $C\left(\frac{b(\mu_2 - 1)}{\mu_1\mu_2 - 1}, 0\right)$

ii. Jika $\mu_1\mu_2 = 1$ dan $A \neq B$ maka $b \neq 0$, tidak ada titik invarian.

Kita peroleh $[B,\mu_2][A,\mu_1](P) = P''((x + b(1-\mu_2), y))$ ini berarti bahwa hasil kali $[B,\mu_2][A,\mu_1]$ adalah suatu translasi dengan arah yang sejajar dengan garis $\overline{AB}$.

iii. Jika $\mu_1\mu_2 \neq 1$ dan $A = B$ didapatkan $[A,\mu_1]$ dan $[A,\mu_2]$ maka $[B,\mu_2][A,\mu_1]$ adalah dilatasi dengan faktor skala $\mu_1\mu_2$ titik pusatnya A.

iv. $\mu_1\mu_2 = 1$ dan $A = B$ maka hasil kali ini adalah suatu transformasi identitas.

D. Operasi simetri

Definisi 2.4.1

Operasi simetri suatu bangun adalah suatu isometri yang mentransformasikan bangun itu ke dirinya sendiri.

Di dalam penulisan kali ini operasi simetri tidak dibahas lebih lanjut.

E. Similaritas

Definisi 2.5.1

Similaritas ("Similarity") ialah suatu transformasi yang mentransformasikan setiap segmen AB ke segmen A′B′ sedemikian sehingga

$$\frac{A'B'}{AB} = \mu$$

dengan μ suatu bilangan positif konstan yang disebut faktor perbanyakan ("ratio of magnification").

Oleh suatu similaritas setiap segitiga ditransformasikan ke segitiga yang sebangun dan setiap sudut ke sudut yang kongruen. Similaritas merupakan hasil kali dari dilatasi dengan isometri.

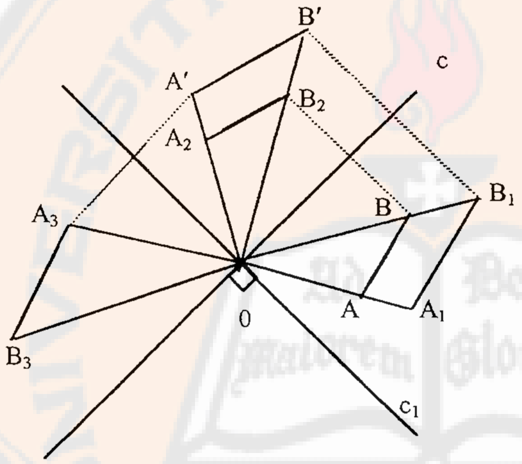
Suatu similaritas dibedakan menjadi dua hal yaitu :

a. Similaritas langsung.

Suatu similaritas langsung ialah suatu similaritas yang tidak mengubah arah, yang termasuk similaritas langsung adalah dilatasi, rotasi, similaritas spiral, dan transformasi identitas.

b. Similaritas berlawanan

Similaritas berlawanan adalah similaritas yang mengubah arah, yang termasuk similaritas ini ialah refleksi, refleksi geser dan refleksi dilatif. Suatu similaritas berlawanan ("opposite similarity") yang bukan refleksi geser mempunyai titik invarian. Hal itu dapat diperlihatkan pada suatu refleksi dilatif. Suatu refleksi dilatif dapat dinyatakan sebagai $M_c[0,\mu]$ dengan sumbu refleksi c melalui 0.



Gambar 2.e.1.

Misalkan

$M_c[0,\mu] \quad : \quad AB \rightarrow A'B'$

dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$[0,\mu] \,:\, AB \rightarrow A_1B_1$

$M_c \,:\, A_1B_1 \rightarrow A'B'$

$M_c[0,\mu] \,:\, AB \rightarrow A'B'$

$M_c \,:\, AB \rightarrow A_2B_2$

$[0,\mu] \,:\, A_2B_2 \rightarrow A'B'$

$[0,\mu]M_c \,:\, AB \rightarrow A'B'$

$M_c[0,\mu] = [0,\mu]M_c$

Ditunjukkan :

$M_c[0,\mu] = M_{c1}[0,-\mu]$

$[0,-\mu] \,:\, AB \rightarrow A_3B_3$

$M_{c1} \,:\, A_3B_3 \rightarrow A'B'$

$M_{c1} : A_3B_3 \rightarrow A'B'$

$M_{c1}[0,-\mu] : AB \rightarrow A'B'$ dengan $c \perp c_1$ berlaku pula $M_{c1}[0,-\mu]$ = $[0,-\mu]M_{c1}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $M_c[0,\mu]$ = $[0,\mu]M_c = M_{c1}[0,-\mu] = [0,-\mu]M_{c1}$ dengan $c \perp c_1$, titik 0 merupakan titik invarian.

Teorema 2.5.1

Jika S suatu similaritas berlawanan maka S^2 suatu dilatasi.

Bukti :

Suatu similaritas berlawanan dapat berupa refleksi dilatif, refleksi geser atau refleksi jika $\mu = 1$.

Misal :

i. $S = M_c$ maka $S^2 = M_c^2 = I = [A,1]$

ii. $S = M_c T_v$

$S^2 = (M_cT_v)(M_cT_v)$

$= (T_vM_c)(M_cT_v)$

$= T_v(M_c M_c)T_v$

$= T_v M_c^2 T_v$

$= T_v I T_v$

$= T_{2v}$ (suatu dilatasi tanpa titik invarian)

iii. Hasil kali suatu refleksi dilatif.

$M_c[0,\mu_1] . M_c[0,\mu_2] = [0,\mu_1]M_c . M_c[0,\mu_2]$

$= [0,\mu_1]M_c^2 [0,\mu_2]$

$= [0,\mu_1]\ I\ [0,\mu_2]$

$= [0,\mu_1][0,\mu_2]$, (suatu dilatasi)

$= [0,\mu_1\mu_2]$

Similaritas merupakan komposisi dari isometri dan dilatasi.

BAB III

GRUP TRANSFORMASI

Suatu himpunan transformasi dikatakan membentuk suatu grup jika :

i. Memuat komposisi dari setiap dua transformasi (sifat tertutup).

ii. Memuat elemen identitas.

iii. Memuat invers dari setiap transformasi.

iv. Memenuhi sifat assosiatif untuk hasil kali transformasi.

Karena transformasi merupakan fungsi bijektif (Definisi 2.B.7.), maka himpunan transformasi memenuhi sifat : i), ii), iii), iv). Jadi himpunan transformasi membentuk grup.

Di bawah ini akan dibahas beberapa macam transformasi yang membentuk suatu grup.

A. Himpunan Isometri.

Dalam pembahasan diatas sudah diperkenalkan tentang pengertian grup transformasi. Himpunan transformasi membentuk grup dapat dinyatakan dengan grup transformasi T. Himpunan kolineasi membentuk grup dinyatakan dengan grup kolineasi K. Di bawah ini akan dibicarakan teorema kolineasi dan juga teorema-teorema himpunan isometri yang membentuk suatu grup.

Teorema 3.A.1

Himpunan kolineasi membentuk suatu grup.

i. Misalkan v, w kolineasi dan g garis $w(g) = g'$

$(vw)(g) = v(w(g))$

$= v(g')$

$= g''$

karena w kolineasi maka g' adalah garis dan juga karena v kolineasi maka g'' suatu garis, vw merupakan kolineasi. Jadi sifat tertutup dipenuhi.

ii. Diandaikan v kolineasi dan g garis.

$v(g) = l$, misalkan ada v' sedemikian hingga $v'(l) = g$

$v'(v(g)) = v'(l) = g$

$(v'v)(g) = g$

$v'v =$ I maka $v' = v^{-1}$

v^{-1} suatu kolineasi karena garis lurus g dipetakan ke garis lurus l.

Jadi himpunan kolineasi membentuk suatu grup.

Teorema 3.A.2.

Himpunan isometri membentuk suatu grup.

Bukti :

Himpunan isometri merupakan himpunan bagian dari himpunan kolineasi. Sedangkan himpunan kolineasi membentuk suatu grup. Untuk dapat membuktikan bahwa himpunan isometri tidak kosong tertutup dan mempunyai invers.

Bukti :

Himpunan isometri merupakan himpunan bagian dari himpunan kolineasi. Sedangkan himpunan kolineasi membentuk suatu grup (Teorema 3.A.1.). Untuk dapat membuktikan bahwa himpunan isometri tidak kosong tertutup dan mempunyai invers.

i. Himpunan isometri tidak kosong karena suatu isometri mempunyai anggota antara lain translasi, rotasi, refleksi, refleksi geser atau transformasi identitas.

ii. Untuk sebarang dua isometri komposisi juga merupakan anggota himpunan isometri . (pembahasan ada pada Bab II).

iii. Untuk semua anggota himpunan isometri mempunyai invers.

Jadi himpunan isometri membentuk grup yang disebut grup isometri.

Di bawah ini akan dibahas tentang himpunan - himpunan bagian dari himpunan isometri yang membentuk grup. Himpunan – himpunan bagian tersebut antara lain:

1. **Himpunan Translasi.**

Untuk dapat mengetahui himpunan translasi membentuk grup harus dapat dibuktikan bahwa sifat-sifat grup dipenuhi.

i. Komposisi dua translasi adalah suatu translasi *(pembahasan terdapat pada hal 41-42)*. Sifat komutatif juga dipenuhi.

ii. Memuat elemen identitas.

Ada elemen identitas T_0 sehingga untuk setiap T_v suatu translasi berlaku.

$$T_v T_o = T_{o+v}$$
$$= T_{v+o}$$
$$= T_v$$

Jadi identitasnya adalah $T_o = I$ (I identitas)

iii. Ada invers

$T_o = I$

$T_w T_v = T_w T_v = I$

$T_{v+w} = T_o$ sehingga

$w + v = v + w = o$

$w = -v$

jadi $T_v^{-1} = T_{-v}$

iv. Memenuhi sifat asosiatif terhadap operasi perkalian

$$T_a (T_v T_b) = T_a (T_{b+v})$$
$$= T_{(b+v)+a}$$
$$= T_{(b+v+a)}$$
$$= T_{(b+(v+a))}$$
$$= T_{(v+a)} T_b$$
$$= (T_a T_v) T_b$$

Jadi sifat asosiatif terpenuhi.

Himpunan translasi membentuk grup, dan karena sifat komutatif juga dipenuhi maka grup diatas merupakan grup Abelian.

2. Himpunan Rotasi

i. Komposisi dua rotasi dengan titik pusat sama adalah suatu rotasi karena

$R(0,\theta)\ R(0,\gamma) = R\ (0,\gamma+\theta)$

$= R\ (0,\ \theta+\gamma)$

$= R\ (0,\gamma)\ R\ (0,\ \theta)$

sifat tertutup dan sifat komutatif dipenuhi :

ii. Memuat elemen identitas

Ada elemen identitas $R(0,0°)$ sehingga untuk setiap $R(0,\gamma)$ suatu rotasi berlaku

$R\ (0,\gamma)\ R(0,0°) = R\ (0,\ 0°+\gamma) = R\ (0,\ \gamma+\ 0°) = R\ (0,0°)\ R\ (0,\ \gamma)$

$= R\ (0,\ \gamma)$

Jadi $R\ (0,0°) = I$, ada elemen identitas atau $I = R\ (0,\ k.360°)$ dengan k bilangan bulat.

iii. Ada invers

$I = R\ (0,0°)$

Misalkan $R\ (0,\theta)\ R\ (0,\ \gamma) = R\ (0,\ \gamma+\ \theta)$

$= I$

$= R\ (0,0)$ sehingga

$$\gamma + \theta = 0$$

$$\theta = -\gamma$$

$R^{-1}(0, \gamma) \quad = R(0, -\gamma)$

Jadi $R^{-1}(0, \gamma) = R(0, -\gamma)$

iv. Memenuhi sifat asosiatif terhadap perkalian

$$\begin{aligned} R(0,\gamma)(R(0,\theta)R(0,\delta)) &= R(0,\gamma)R(0,\delta+\theta) \\ &= R(0(\delta+\theta)+\gamma) \\ &= R(0,\delta+(\theta+\gamma)) \\ &= R(0,\theta+\gamma)\, R(0,\delta) \\ &= (R(0,\gamma)R(0,\theta))\, R(0,\delta) \end{aligned}$$

Jadi sifat asosiatif terpenuhi.

Himpunan rotasi dengan titik pusat sama membentuk grup, karena dipenuhi sifat komutatif maka grup diatas merupakan grup Abelian.

Teorema 3.A.3.

Himpunan translasi dan setengah putaran membentuk suatu grup.

Bukti.

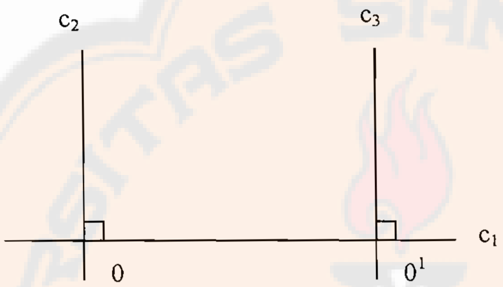
i. Himpunan translasi dan setengah putaran tertutup terhadap operasi perkalian.

- Komposisi dua translasi berupa translasi. *(pembahasan terdapat pada hal 41-42)*
- Komposisi dua setengah putaran berupa translasi. *(pembahasan terdapat pada hal 45-46)*

- Komposisi translasi dengan setengah putaran berupa setengah putaran.

$H_0 = M_2M_1$

$T\nu = M_3M_2$

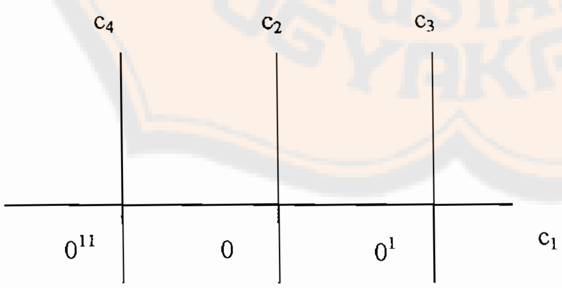


$$
\begin{aligned}
T\nu H_0 &= (M_3M_2)\, M_2M_1 \\
&= M_3(M_2M_2)M_1 \\
&= M_3M_2^2M_1 \\
&= M_3\, I\, M_1 \\
&= M_3M_1 \\
&= H_0'
\end{aligned}
$$

Gambar 3.a.1

Jadi komposisi translasi dengan setengah putaran berupa setengah putaran.

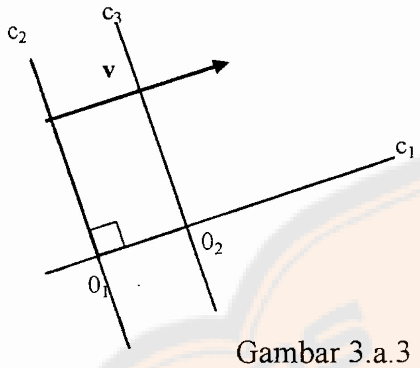
Komposisi setengah putaran dengan translasi.



$$
\begin{aligned}
H_0T\nu &= (M_2M_1)(M_3M_2) \\
&= (M_1M_2)(M_2M_4) \\
&= M_1(M_2M_2)M_4 \\
&= M_1M_2^2M_4 \\
&= M_1\, I\, M_4 \\
&= H_0''
\end{aligned}
$$

Gambar 3.a.2

Komposisi setengah putaran dengan sebarang translasi.



Gambar 3.a.3

Andaikan diketahui translasi dengan vektor translasi **v**. dan setengah putaran H_{01}. Dibuat suatu sumbu reflesksi c_1 yang sejajar dengan vektor translasi **v**.

$c_1 \perp c_2$ dan $c_1 \perp c_3$

Jarak c_2 dengan c_3 adalah ½ $|\mathbf{v}|$

$H_{01} = M_2M_1$

$T_{\mathbf{v}} = M_3M_2$

$T_{\mathbf{v}}H_{01} = (M_3M_2)(M_2M_1)$

$= M_3(M_2M_2)M_1$

$= M_3M_2{}^2M_1$

$= M_3\ I\ M_1$

$= M_3M_1$

$= H_{02}$

Komposisi setengah putaran dengan translasi adalah suatu setengah putaran

ii. Memuat elemen identitas

$I = T_{\mathbf{0}}$ dan $I = H^2$

iii. Invers dari transformasi – transformasi berikut adalah :

$T^{-1}{}_{\mathbf{v}} = T_{-\mathbf{v}}$ dan $Hp^{-1} = Hp$

Jadi himpunan translasi dan setengah putaran membentuk suatu grup. Himpunan translasi dan setengah putaran merupakan grup tak hingga yang dihasilkan oleh H sebab suatu translasi dapat ditulis sebagai komposisi dari dua H.

Teorema 3.A.4.

Himpunan translasi dan rotasi adalah suatu grup.

Bukti :

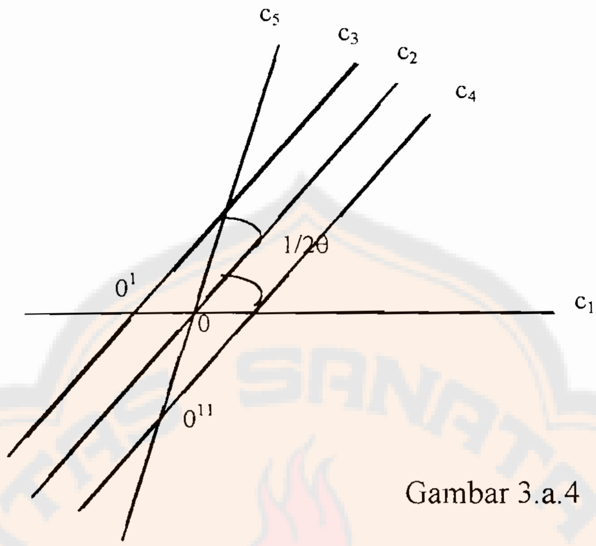
i. Himpunan translasi dan rotasi tertutup terhadap operasi perkalian karena :

- Komposisi dua translasi adalah suatu translasi. *(Pembahasan terdapat pada hal 41-42)*
- Komposisi dua rotasi adalah suatu rotasi atau translasi *(Pembahasan terdapat pada hal 42-46)*
- Komposisi translasi dengan rotasi dengan titik pusat 0 dan sudut rotasi θ.

$$R(0,\theta) = M_2 M_1$$

$$T_{\mathbf{v}} = M_3 M_2$$

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}} R(0,\theta) &= (M_3 M_2)(M_2 M_1) \\ &= M_3 (M_2 M_2) M_1 \\ &= M_3 M_2^2 M_1 \\ &= M_3 I M_1 \\ &= M_3 M_1 = R(0',\theta) \end{aligned}$$



Gambar 3.a.4

Jadi komposisi translasi dengan rotasi adalah suatu rotasi.

- Komposisi rotasi dengan translasi

$R(0,\theta)\, T_{\mathbf{v}} = (M_2M_1)(M_3M_2)$

$= (M_2M_1)(M_2M_4)$

$= (M_5M_2)(M_2M_4)$

$= (M_5M_2)(M_2M_4)$

$= M_5\,(M_2M_2)\,M_4$

$= M_5\,I\,M_4$

$= M_5\,M_4$

$= R(0'',\theta)$

Jadi komposisi rotasi dengan translasi adalah suatu rotasi.

ii. Memuat elemen identitas

$I = R(0,0°)$ dan $I = T_{\mathbf{0}}$

iii. Ada invers

$T^{-1}_{\mathbf{v}} = T_{-\mathbf{v}}$ dan $R^{-1}(0,\theta) = R(0,-\theta)$

Jadi himpunan translasi dan rotasi membentuk suatu grup.

Himpunan bagian dari himpunan isometri yang tidak membentuk suatu grup antara lain :

1. Himpunan rotasi tidak membentuk grup karena ada komposisi dua rotasi yang tidak berupa rotasi. Jika dua rotasi sudutnya θ dan sudut yang lain-θ dengan titik pusat tidak sama maka komposisi dua rotasi akan menghasilkan suatu translasi. *(Pembahasan pada hal 44-45)*
2. Himpunan refleksi tidak membentuk grup karena komposisi dua refleksi hasilnya bukan refleksi. Suatu refleksi mengubah arah tetapi komposisi dua refleksi tidak mengubah arah sehingga komposisi dua refleksi tidak tertutup. Misalkan komposisi dua refleksi dengan sumbu refleksi sejajar akan menghasilkan suatu translasi.
3. Himpunan setengah putaran tidak membentuk grup karena komposisi dua setengah putaran yang tidak berupa setengah putaran yaitu dua setengah putaran $H_{0_2}H_{0_1}$ dengan titik pusat 0_1 dan 0_2 tidak sama akan menghasilkan suatu translasi.
4. Himpunan refleksi geser tidak membentuk grup karena ada komposisi dua refleksi geser yang tidak berupa refleksi geser. suatu refleksi geser

mengubah arah tetapi komposisi dua refleksi geser tidak mengubah arah dengan demikian komposisi dua refleksi geser tidak memenuhi sifat tertutup. Misalkan komposisi dua refleksi geser sama akan menghasilkan suatu translasi. *(Pembahasan terdapat pada hal 51)*

Suatu grup yang banyaknya anggota berhingga dapat ditunjukkan dengan menggunakan tabel perkalian Cayley. Di bawah ini akan diberikan contoh penggunaan tabel Cayley untuk menyelidiki suatu himpunan yang membentuk grup.

Contoh 3.A.1.

Diketahui bahwa $M_1M_2 = H_0$ dan $M_1^2 = M_2^2 = I$ akan dihasilkan tabel Cayley seperti dalam tabel 3.1.1. dibawah ini. Himpunan $\{M_1, M_2, H_0, I\}$

$\bullet$	I	M_1	M_2	H_0
I	I	M_1	M_2	H_0
M_1	M_1	I	H_0	M_2
M_2	M_2	H_0	I	M_1
H_0	H_0	M_2	M_1	I

Tabel 3.a.1.

Dengan menggunakan tabel 3.a.1. dapat diketahui bahwa hasil kali dari anggota-anggota tersebut membentuk grup. Grup tersebut merupakan grup dihedral. Suatu grup disebut dihedral Dn dengan order 2n jika dibangun oleh dua elemen misalkan a dan r yang memenuhi relasi $r^n = I$, $a^2 = I$, $a^r = r^{n-1}a$.

Misalkan α suatu transformasi dan ada bilangan asli n sedemikian hingga $\alpha^n = I$ maka α tersebut berderajat n. Himpunan $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{n-1}, I\}$ membentuk suatu grup berderajat n disebut grup siklik yang dihasilkan oleh α dengan lambang $\langle\alpha\rangle = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{n-1}, I\}$. Transformasi α menjadi penghasil $\langle\alpha\rangle$ berarti setiap anggota $\langle\alpha\rangle$ merupakan kelipatan dari α. Jika tidak ada suatu bilangan tertentu n seperti di atas maka α dikatakan berderajat tak hingga.

Contoh 3.A.2.

Diambil suatu transformasi α dengan $\alpha = R(0,60°)$

$\alpha = R\ (0,60°)$

$\alpha^2 = R\ (0,120°)$

$\alpha^3 = R\ (0,180°)$

$\alpha^4 = R\ (0,240°)$

$\alpha^5 = R\ (0,300°)$

$\alpha^6 = I$

$\bullet$	I	α	α^2	α^3	α^4	α^5
I	I	α	α^2	α^3	α^4	α^5
α	α	α^2	α^3	α^4	α^5	I
α^2	α^2	α^3	α^4	α^5	I	α
α^3	α^3	α^4	α^5	I	α	α^2
α^4	α^4	α^5	I	α	α^2	α^3
α^5	α^5	I	α	α^2	α^3	α^4

Tabel 3.a.2

Terlihat bahwa <α> $=\{I,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5\}$. Dari tabel 3.a.2. dapat disimpulkan bahwa himpunan α = R (0,60°) membentuk suatu grup siklik. Himpunan α membentuk grup siklik yang dihasilkan oleh R (0,60°) dan berderajat 6.

B. Himpunan dilatasi.

Himpunan dilatasi merupakan himpunan bagian dari himpunan transformasi. Sudah diketahui bahwa himpunan transformasi membentuk grup. Untuk dapat mengetahui bahwa himpunan dilatasi membentuk grup harus dibuktikan tidak kosong dan mempunyai invers.

i. Himpunan dilatasi tidak kosong karena himpunan dilatasi paling sedikit memuat elemen identitas.

ii. Andaikan [A,μ] suatu dilatasi maka invers dari dilatasi tersebut adalah $[A, \frac{1}{\mu}]$.

Jadi himpunan dilatasi membentuk grup.

C. Himpunan similaritas

Di bawah ini akan dibicarakan tentang teorema yang menunjukkan bahwa himpunan similaritas membentuk grup.

Teorema 3.B.1.

Himpunan similaritas membentuk suatu grup.

Bukti :

Misalkan himpunan transformasi similaritas (S,•) membentuk grup terhadap operasi "•", harus dibuktikan bahwa sifat-sifat grup dipenuhi.

i. Untuk sebarang ΔABC dan S_1, $S_2 \in S$ dengan faktor skala $\mu_1 \mu_2$ sedemikian hingga

$S_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dan $\frac{A'B'}{AB} = \mu_1$

$S_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$ dengan $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ dan $\frac{A''B''}{A'B'} = \mu_2$ akan ditunjukkan $S_1 \bullet S_2 \in S$

$S_1 \bullet S_2(\Delta ABC) = S_2(\Delta A'B'C')$

$= \Delta A''B''C''$

Sudah diketahui bahwa $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dan $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ maka $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ dengan demikian akan didapatkan

$A''B'' = \mu_2 A'B' = \mu_2(\mu_1 AB) = (\mu_2 \mu_1) AB = (\mu_1 \mu_2) AB$ atau

$$\frac{A''B''}{AB} = (\mu_2 \mu_1) AB$$

$$= \mu_2 . \mu_1 AB$$

jadi $S_2 \bullet S_1 = S_1 \bullet S_2 \in S$

Sifat tertutup dan juga sifat komutatif dipenuhi.

ii. Memuat elemen identitas

Diambil sebarang $S_1 \in S$ dengan faktor skala μ_1. Misalkan ada ΔABC maka didapatkan $S_2 \in S$ dengan faktor skala μ_2 sehingga

$S_1 \bullet S_2 = S_2 \bullet S_1 = S_1$

$S_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dengan $A'B' = \mu_1 AB$

$S_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$, $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ dengan $A''B'' = \mu_2 A'B'$

$S_2 \bullet S_1(\Delta ABC) = \Delta A''B''C''$, $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ dan

$A''B'' = \mu_2 A'B' = (\mu_2 \mu_1) AB = (\mu_1 \mu_2) AB$

Di atas diketahui bahwa $S_2 \bullet S_1 (\Delta ABC) = S_1(\Delta ABC)$ maka $\Delta A''B''C'' \cong \Delta A'B'C'$ dan $A''B'' = A'B'$

Sehingga $(\mu_2 \mu_1) AB = \mu_1 AB$

$$\mu_2 = \frac{\mu_1 AB}{\mu_1 AB} = 1$$

Jadi untuk sebarang $S_1 \in S$ dengan μ_1 sebarang serta untuk sebarang segitiga ABC terdapat $S_2 \in S$ dengan $\mu_2 = 1$ sehingga $S_2 \bullet S_1$ $(\Delta ABC) = \Delta A'B'C' = S_2 \bullet S_1 (\Delta ABC)$ dengan $A'B' = (1.\mu_1)AB = (\mu_1.1)AB$ terbukti bahwa S memuat elemen identitas yaitu transformasi identitas.

iii. Ada invers

Diambil sembarang $S_1 \in S$ dengan faktor skala μ_1. Untuk sebarang ΔABC, $S_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ dan $A'B' = \mu_1 AB$

Untuk dapat membuktikan bahwa ada invers harus ditunjukkan terdapat $S_2 \in S$ dengan faktor skala μ_2 sehingga

$S_2 \bullet S_1 (\Delta ABC) = \Delta ABC$

$S_2 \bullet S_1(\Delta ABC) = S_2(S_1(\Delta ABC))$

$= S_2(\Delta A'B'C')$

$= \Delta A''B''C''$ dengan $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ dan

$A''B'' = \mu_2(A'B') = (\mu_2\, \mu_1)AB$ ....(1)

sehingga $A''B'' = AB$

Dari persamaan 1) akan didapatkan $(\mu_2\, \mu_1)AB = AB$

maka $\mu_2 \,.\, \mu_1 = 1$

$\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_1}$ ………………..(2)

$S_2 = S_1^{-1}$

Dari persamaan (2) disubsitusikan ke dalam persamaan (1) diperoleh $A''B'' = (\dfrac{1}{\mu_1}.\mu_1)AB = AB$ karena $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ dan $A''B'' = AB$ maka $\Delta A''B''C'' \cong \Delta ABC$ terbukti bahwa untuk sebarang $S_1 \in S$ dengan faktor skala μ_1 terdapat $S_1^{-1} \in S$ dengan faktor skala $\dfrac{1}{\mu_1}$.

iv. Memenuhi sifat assosiatif terhadap operasi "•"

Karena himpunan similaritas merupakan himpunan transformasi maka sifat assosiatif pasti terpenuhi.

Karena sifat i), ii), iii) dan iv) terbukti bahwa himpunan similaritas merupakan grup.

Grup similaritas memuat grup isometri dan grup dilatasi. Grup transformasi geometri Euclides adalah grup similaritas. Grup isometri memuat grup translasi, grup rotasi dengan titik pusat sama, grup yang memuat translasi dan rotasi, grup yang memuat translasi dan setengah putaran.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dalam bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan sebagai berikut:

i. Grup transformasi geometri Euclides adalah grup similaritas. Grup similaritas memuat grup isometri dan grup dilatasi.

ii. Grup isometri memuat grup translasi, grup rotasi dengan titik pusat sama, grup yang memuat translasi dan rotasi, grup yang memuat translasi dan setengah putaran. Himpunan rotasi yang sepusat membentuk grup sedangkan himpunan rotasi yang tidak sepusat tidak membentuk grup. Jika suatu transformasi mengubah arah tetapi hasil kalinya tidak mengubah arah atau sebaliknya maka himpunan transformasi tersebut tidak membentuk grup. Misalnya himpunan refleksi dan himpunan refleksi geser.

iii. Persamaan-persamaan transformasi

- Persamaan transformasi identitas

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

- Persamaan refleksi terhadap sumbu c dengan persamaan

c : Ax+By+C = 0

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(B^2 - A^2)}{A^2 + B^2} x - \dfrac{2AB}{A^2 + B^2} y - \dfrac{2AC}{A^2 + B^2} \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2} x - \dfrac{(A^2 - B^2)}{A^2 + B^2} y - \dfrac{2BC}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

persamaan refleksi terhadap sumbu –x yang persamaannya y = 0

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

persamaan refleksi terhadap sumbu –y yang persamaannya x = 0

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

- Persamaan translasi dengan vektor translasi $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

- Persamaan rotasi

  Persamaan rotasi dengan titik pusat 0 (0,0) dan sudut rotasi θ yang ditunjukkan dengan R (0,θ)

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Persamaan rotasi dengan pusat rotasi P(h,k) dan sudut rotasi θ yang ditunjukkan dengan R(P, θ)

$$\begin{cases} x' = (x-h)\cos\theta - (y-k)\sin\theta + h \\ y' = (x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta + k \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + (-h\cos\theta + k\sin\theta + h) \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + (-h\sin\theta - k\cos\theta + k) \end{cases}$$

Dari hasil pembahasan mengenai persamaan transformasi identitas, persamaan refleksi, persamaan translasi, persamaan rotasi yang merupakan persamaan isometri, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa semua isometri mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \text{, dengan } a^2 + b^2 = 1$$

(+) untuk isometri yang searah

(-) untuk isometri yang berlawanan

- Persamaan dilatasi sentral dengan pusat 0 dan faktor skala $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} x' = \mu x \\ \\ y' = \mu y \end{cases} , \mu \neq 0$$

- Persamaan dilatasi sentral dengan pusat P(h,k) dan faktor skala μ

$$\begin{cases} x' = \mu(x-h)+h \\ y' = \mu(y-k)+k \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} x' = \mu x + h - \mu h \\ y' = \mu y + k - \mu k \end{cases}$$

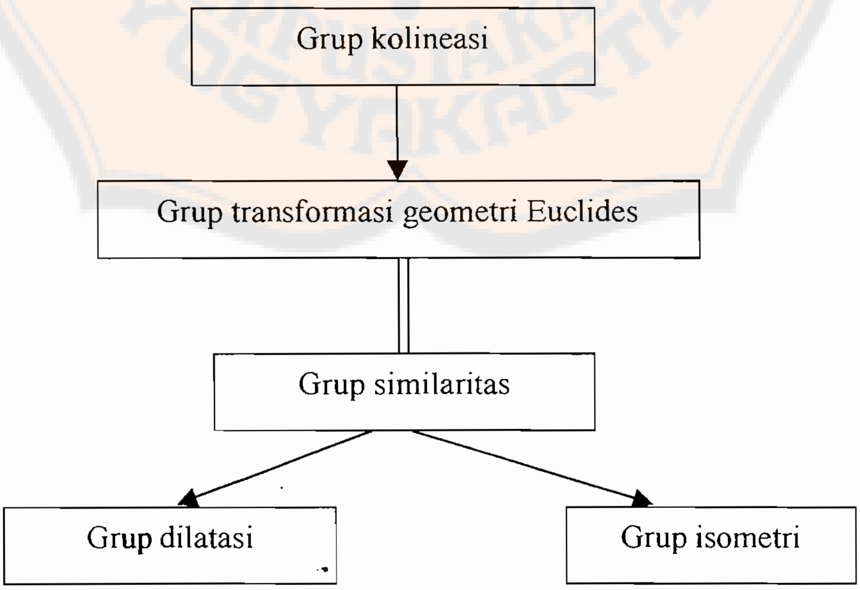
- Persamaan similaritas

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ \\ y' = \pm(bx + ay + d) \end{cases} \text{, dengan } a^2 + b^2 \neq 0$$

(+) untuk similaritas searah

(-) untuk similaritas berlawanan

Dari pembahasan tentang grup transformasi dapat disimpulkan bahwa grup isometri dan grup dilatasi merupakan subgrup dari grup similaritas. Grup transformasi geormetri Euclides adalah grup similaritas. Grup transformasi Eulicdes merupakan subgrup dari grup kolineasi. Di bawah ini diberikan diagram dari grup transformasi geometri Euclides.



DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, Jr. (1967). *Theory and Problems Of Proyektif Geometry, Schaum's Outline Series*. New York : Mc Graw – Hill, inc.

Durbin, Jhon R. (1985). *Modern Aljabar An Introduction*. New York : John Wiley and Sons.

Gans, David. (1969). *Transformations and Geometries*. New York : Appleton Century. Crofits.

Martin, George E. (1982). *Transformation Geometry : An Introduction to Symmetry* New York : Springer – Verlag

Moeharti, Hw. (1986). *Sistem – sistem Geometri*. Jakarta : Karunika UT.

Moeharti, Hw. (1986). *Vektor dan Transformasi dalam Geometri*. Yogyakarta : FP MIPA

Rawuh. (1992). *Geometri Transformasi*.Jakarta : Depdikbud Dirjendekti.

Susanta, B. (1990). *Geometri Transformasi*. Yogyakarta : FPMIPA UGM

Wahyudin. (1989). *Aljabar Modern*. Bandung : Tarsita