TEORI UKURAN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

Rahadian Satya Buana

NIM : 951414033
NIRM : 950051120501120031

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

TEORI UKURAN

Yang diajukan oleh

Rahadian Satya Buana

NIM: 951414033

NIRM: 950051120501112003 1

Telah disetujui oleh

Pembimbing I

Prof. R. Soemantri

Tanggal: 10 Agustus 2001

Pembimbing II

M.V Any Herawati , S.Si,M.Si

Tanggal: 10 Agustus 2001

Pengesahan Skripsi Berjudul

TEORI UKURAN

Yang ditulis dan dipersiapkan oleh

RAHADIAN SATYA BUANA

NIM:951414033

NIRM:950051120501120031

Dipertahankan di hadapan Panitia Penguji Skripsi

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Pada Tanggal : 25 Mei 2001

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs R.Rohandi, M.Ed	
Sekretaris	: Drs St. Susento, M.Si	
Anggota	: Prof. R. Soemantri	
Anggota	: M.V. Any Herawati,S.Si,M.Si	
Anggota	: Drs St. Susento, M.Si	

Yogyakarta,

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

(Dr Paul Suparno,S.J,M.S.T)

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan nama Tuhan Yang Maha Esa saya menyatakan bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta , 20 Mei 2001

Penulis

Rahadian Satya Buana

KATA PENGANTAR

Dengan rahmat Tuhan Yang Maha Esa dan atas pertolongannya Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "TEORI UKURAN". Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk mencapai jenjang kesarjanaan S1 pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta sekaligus usaha untuk memperkaya pengetahuan secara mandiri.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga skripsi ini selesai.

1. Kepada Bapak Prof. R. Soemantri, selaku pembimbing I yang telah banyak memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi.
2. Kepada Ibu M.V. Any Herawati,S.Si,M.Si selaku pembimbing II yang telah banyak memberikan saran dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi.
3. Drs. St. Susento, M.Si, selaku Kaprodi yang telah membantu dan memberi bimbingan selama kuliah.
4. Segenap Dosen FMIPA dan JPMIPA Universitas Sanata Dharma Yogyakarta yang telah banyak membantu saya selama masih kuliah.
5. Staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta yang telah membantu menyediakan buku-buku referensi yang diperlukan dalam penulisan skripsi ini.
6. Bapak dan Ibu dan kedua saudaraku atas segala doa dan dorongannya.
7. Teman-teman angkatan 95 yang telah memberikan motivasi. Tanpa kecuali Iko, Yan ;
8. Kakak-kakak angkatan 93 atas segala saran dan nasehatnya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna oleh sebab itu penulis mengharap saran dan kritik yang bersifat membangun. Harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, 20 Mei 2001

Penulis

(Rahadian Satya Buana)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN KARYA iv
KATA PENGANTAR v
DAFTAR ISI vi
ABSTRAK vii
BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Tujuan penelitian 1
1.3 Pembatasan Materi 1
1.4 Metode Penelitian 2
1.5 Sistematika Pembahasan 2
BAB II TEORI HIMPUNAN 3
BAB III TEORI UKURAN
3.1 Ukuran pada Semi Ring 16
3.2 Ukuran Luar dan Himpunan Terukur 23
3.3 Ukuran Luar yang Dibangkitkan oleh Suatu Ukuran 28
3.4 Fungsi Terukur 39
3.5 Fungsi Sederhana dan Fungsi Tangga 49
3.6 Ukuran Lebesgue 57
BAB IV KESIMPULAN 61
DAFTAR PUSTAKA

ABSTRAK

Teori ukuran yang dibahas pada skripsi ini didefinisikan pada suatu semi ring **S** yang terdiri atas himpunan bagian dari X. Suatu fungsi μ : **S** $\rightarrow [\,0, \infty\,]$ disebut ukuran pada **S** jika memenuhi sifat :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. Jika $< A_n >$ barisan anggota **S** yang saling asing dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in$ **S** maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Fungsi $\mu : P(X) \rightarrow [\,0\,,\,\infty\,]$ yang didefinisikan pada himpunan kuasa P(X) disebut ukuran luar jika :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ jika $A \leq B$
3. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ terpenuhi untuk setiap $A_n \in P(X)$

Ukuran luar dapat dijadikan suatu ukuran jika daerah asalnya dibatasi yaitu berupa kumpulan semua himpunan terukur. Kemudian ukuran μ dapat diperluas menjadi suatu ukuran luar μ^* dan disebut sebagai ukuran luar yang dibangun oleh ukuran μ, fungsi himpunan μ^* juga merupakan ukuran luar.

Suatu fungsi $f{:}X \rightarrow R$ disebut fungsi terukur jika $f^{-1}(\vartheta)$ himpunan terukur untuk setiap himpunan bagian terbuka ϑ dari R. Q adalah fungsi sederhana jika

dapat dinyatakan dalam bentuk $Q=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ dengan $A_i = (x \in X ; Q(x) = a_i \}$ terukur untuk semua i dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bernilai tidak nol yang berbeda. Suatu fungsi sederhana Q disebut fungsi tangga jika $\mu^* (A_i) < \infty$

Ukuran Lebesgue λ merupakan kejadian khusus dari suatu ukuran yang didefinisikan pada R^n dengan $\lambda (\prod_{i=1}^{n} (a_i , b_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Dalam menyelesaikan masalah matematika maupun fisika yang berhubungan dengan pengintegralan, kita sering menggunakan integral Riemann. Namun penggunaan integral Riemann ini hanya terbatas untuk fungsi yang kontinu kecuali untuk berhingga titik, sehingga jika syarat diatas tidak dipenuhi maka integral Riemann tidak dapat digunakan. Untuk mengatasi masalah tersebut maka diperlukan integral lain yaitu integral Lebesgue. Padahal untuk mempelajari integral Lebesgue diperlukan dasar teori yang baik tentang teori ukuran. Dengan alasan diatas maka sangat baik jika kita melihat lebih jauh tentang teori ukuran.

2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui tentang teori ukuran secara mendetail dan bagaimana teori ukuran itu dibangun. Selain itu dengan mengetahui teori ukuran secara lengkap maka kita lebih mudah mempelajari integral Lebesgue.

3. Pembatasan Materi

Teori ukuran yang dipelajari di sini hanyalah teori ukuran yang didefinisikan pada semi ring.

4. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka .

5. Sistematika Pembahasan

Pada bab II dibahas tentang semi ring. Ukuran yang dibahas nanti merupakan ukuran pada semi ring. Sifat aljabar-σ di bahas pada bab ini karena akan digunakan pada himpunan terukur.

Teori ukuran secara mendetail akan dibahas pada Bab III. Disana akan kita temui definisi ukuran pada semi ring. Ukuran luar dan himpunan terukur akan dibahas pada sub bab 3.2. Dalam mendefinisikan fungsi terukur akan menggunakan himpunan terukur.

Ukuran dapat diperluas lagi menjadi ukuran luar yang dibangun oleh suatu ukuran. Ukuran luar yang dibangun oleh suatu ukuran ini sebenarnya merupakan ukuran. Salah satu contoh ukuran pada R yang didefinisikan dengan λ [a_i , b_i) = (b_i – a_i) dan λ (ϕ) = 0 merupakan kejadian khusus dari ukuran Lebesgue pada R^1 sehingga jika hal ini dikembangkan pada R^n dengan $\lambda\ ((\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ dan λ (ϕ) = 0 maka akan kita dapat suatu ukuran Lebesgue.

BAB II

TEORI HIMPUNAN

Pada bab ini akan dibahas tentang suatu himpunan yang mempunyai sifat-sifat tertentu. Himpunan yang dimaksud adalah topologi, himpunan terbuka, himpunan tertutup, aljabar σ, aljabar himpunan, semi ring, dan himpunan Borel.

Sebelum mendefinisikan topologi kita definisikan terlebih dahulu himpunan yang mempunyai sifat terbuka, sebab pada suatu contoh nanti kita akan melihat hubungannya. Pada seluruh pembahasan, R kita sepakati sebagai himpunan semua bilangan real dan N sebagai himpunan semua bilangan asli.

Definisi 2.1. Diberikan titik p $\in$R dan r>0. *Kitar titik p dengan radius r* yang diberi notasi N(p,r) adalah himpunan titik-titik x$\in$R dengan sifat jarak titik x ke p kurang dari r, yaitu $N(p,r)=\{x\in R; |x-p|<r\}$

Definisi 2.2. Ambil E$\subseteq$R. Diberikan titik p $\in$R dan r>0. Titik p dinamakan *titik interior himpunan E* jika terdapat r sedemikian sehingga $N(p,r)\subset E$

Definisi 2.3. Himpunan G dikatakan mempunyai *sifat terbuka* (disingkat terbuka) dalam R jika semua anggotanya adalah titik interior G

Contoh 2.1 Buktikan bahwa selang (a,b) $\subseteq$R mempunyai sifat terbuka.

Bukti : ambil sembarang $p \in (a,b)$. Jika dipilih $r = \min\left(\frac{|p-a|}{2}, \frac{|p-b|}{2}\right)$ maka $N(p,r) \subset (a,b)$. Jadi p titik interior (a,b) dan berakibat (a,b) terbuka.

Definisi 2.4. Andaikan X himpunan tak kosong. Kumpulan τ yang terdiri atas himpunan bagian X disebut topologi pada X jika τ memenuhi aksioma berikut :

1. $X \in \tau$ dan $\phi \in \tau$
2. Jika $U, V \in \tau$ maka $U \cap V \in \tau$

3.Gabungan sembarang banyaknya himpunan pada τ merupakan anggota dari τ.

Anggota τ kita beri nama himpunan terbuka-τ atau disingkat himpunan terbuka. Pasangan terurut (X,τ) kita beri nama sebagai ruang topologi. Kemudian untuk mempermudah pemahaman tentang topologi maka dibawah ini akan diberikan contoh topologi pada R.

Contoh 2.2. Jika kita ambil X=R maka $\tau = \{E \subset R / \ E \text{ terbuka } \}$ adalah topologi.

Bukti :

1. R terbuka sebab jika $x \in R$ maka $N(x,1) \subset R$. Kemudian kita juga dapat mengatakan bahwa ϕ terbuka. Hal ini dapat dibuktikan oleh pernyataan berikut ini. Menurut pelajaran logika, $A \Rightarrow B$ akan selalu bernilai benar jika diketahui pernyataan A salah.Oleh karena itu pernyataan $x \in \phi \Rightarrow x$ titik interior ϕ merupakan pernyataan yang benar. Jadi terbukti bahwa himpunan kosong

adalah terbuka.

2. Misal himpunan A dan B terbuka. Kemudian akan dibuktikan bahwa $A \cap B$ mempunyai sifat terbuka. Ambil sembarang $p \in A \cap B$ maka $p \in A$ dan $p \in B$. Karena A dan B terbuka maka terdapat $r_a > 0$ dan $r_b > 0$ sehingga $N(p,r_a) \subset A$ dan $N(p,r_a) \subset A$. Jika diambil $r = \min\{r_a, r_b\}$ maka $N(p,r) \subset A \cap B$ dan p titik interior dari $A \cap B$. Jadi terbukti $A \cap B$ terbuka.
3. Diberikan sembarang himpunan (berhingga atau tak hingga) dan keluarga himpunan yang mempunyai sifat terbuka $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Akan dibuktikan himpunan $S = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ adalah terbuka. Ambil sembarang $p \in S$ maka $\exists \alpha_0 \in A$ sehingga $p \in G\alpha_0$. Karena $G\alpha_0$ terbuka maka $\exists r > 0$ sehingga $N(p,r) \subset G\alpha_0 \subset$ S. Jadi untuk sembarang $p \in S$ maka p titik interior S. Terbukti bahwa gabungan dari sembarang banyaknya himpunan yang mempunyai sifat terbuka adalah terbuka.

Dari contoh 2.1 di atas maka kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan yang mempunyai sifat terbuka pada R merupakan himpunan terbuka.

Definisi 2.5. Misal (X,τ) adalah ruang topologi dan $F \subseteq X$. Himpunan F disebut *himpunan tertutup* jika komplemennya yaitu F^c adalah himpunan terbuka.

Selanjutnya akan kita lihat dahulu definisi dari semi ring. Semi ring akan digunakan untuk membangun teori ukuran yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Untuk itu marilah kita lihat definisi suatu semi ring.

Definisi 2.6. Misal X suatu himpunan tak kosong. Suatu himpunan $\mathbf{S} \subseteq P(X)$ disebut *semi ring* bila memenuhi 3 aksioma berikut:

1. $\phi \in \mathbf{S}$
2. Jika $A,B \in \mathbf{S}$ maka $A \cap B \in \mathbf{S}$
3. Untuk setiap $A,B \in \mathbf{S}$, A-B dapat ditulis sebagai gabungan berhingga himpunan yang saling asing dalam **S** (atau dengan kata lain ada $C_1, \ldots, C_n$ dalam **S** sedemikian sehingga $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ dan $C_i \cap C_j = \phi$ jika $i \neq j$).

Contoh 2.3. Ambil $a,b \in R$ yang memenuhi $a \leq b$. Himpunan $[a,b) = \phi$ jika $a=b$ dan $[a,b) = \{x \in R; a \leq x < b\}$ jika $a<b$. Maka kumpulan $S = \{[a,b); a,b \in R \text{ dan } a \leq b\}$ merupakan semi ring yang terdiri atas himpunan bagian dari R.

Bukti:

1. Diketahui bahwa $[a,b) = \phi$ jika $a=b$ sehingga $\phi \in \mathbf{S}$
2. Ambil sembarang $A = [a_1,b_1)$ dan $B = [a_2,b_2)$ dalam **S**. Untuk membuktikan bahwa $A \cap B \in \mathbf{S}$ kita lihat 4 kasus yaitu :

   Untuk $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$ maka $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = \phi \in \mathbf{S}$

   Untuk $a_1 \leq a_2 < b_1 \leq b_2$ maka $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_2,b_1) \in \mathbf{S}$

   Untuk $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$ maka $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_2,b_2) \in \mathbf{S}$

   Untuk $[a_2,b_2) = \phi$ atau $[a_1,b_1) = \phi$ maka $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = \phi \in \mathbf{S}$

   Untuk kasus $a_2 \leq b_2 \leq a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq a_1 < b_2 \leq b_1$, $a_2 \leq a_1 < b_1 \leq b_2$ dapat dibuktikan secara analog.

3. Ambil sembarang $A=[a_1,b_1)$ dan $B=[a_2,b_2)$ dalam **S**. Untuk membuktikan bahwa ada $C_1,\ldots,C_n$ dalam **S** sedemikian sehingga $A-B=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ dan $C_i \cap C_j=\phi$ jika $i\neq j$ maka kita akan melihat tiap kasus, yaitu :

   Untuk $[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)=\phi$ maka $[a_1,b_1)-[a_2,b_2)=\bigcup_{i=1}^{2} C_i$ dengan $C_1=[a_1,b_1)$ dan $C_2=\phi$

   Untuk $a_1\leq a_2\leq b_1\leq b_2$ maka $[a_1,b_1)-[a_2,b_2)=\bigcup_{i=1}^{2} C_i$ dengan $C_1=[a_1,a_2)$ dan $C_2=\phi$

   Untuk $a_1\leq a_2\leq b_2<b_1$ maka $[a_1,b_1)-[a_2,b_2)=\bigcup_{i=1}^{2} C_i$ dengan $C_1=[a_1,a_2)$ dan $C_2=[b_2,b_1)$

   Untuk $[a_1,b_1)\subset[a_2,b_2)$ maka $[a_1,b_1)-[a_2,b_2)=\phi$.

   Untuk $[a_2,b_2)=\phi$ maka $[a_1,b_1)-[a_2,b_2)=\bigcup_{i=1}^{2} C_i$ dengan $C_1=[a_1,b_1)$ dan $C_2=\phi$.

Contoh 2.4. Andaikan **S** menyatakan kumpulan semua himpunan bagian A dari R^n dengan $A=[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ dengan $a_i\leq b_i$. Jika ada i sedemikian sehingga $a_i=b_i$ maka $A=\phi$. Kita dapat mengatakan bahwa **S** suatu semi ring .

Bukti:

1. Karena $\phi=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ dengan $a_i=b_i$ untuk semua i maka $\phi\in$**S**

2. Untuk membuktikan aturan ke 2 kita gunakan induksi matematik Jika **S**

menyatakan kumpulan semua himpunan bagian A dari R berlaku untuk setiap A,B$\in$**S** maka A$\cap$B$\in$S.. Kemudian andaikan benar untuk **S** yang menyatakan kumpulan semua himpunan bagian A dari R^k. Akan dibuktikan benar bahwa untuk $A=[a_1,b_1)X...X[a_{k+1},b_{k+1})$ dan $B=[c_1,d_1)X...X[c_{k+1},d_{k+1})$ dalam **S** maka A$\cap$B$\in$S. Kemudian $[a_1,b_1)X...X[a_{k+1},b_{k+1})\cap[c_1,d_1)X...X[c_{k+1},d_{k+1})$ $=([a_1,b_1)\cap[c_1,d_1))X...X([a_{k+1},b_{k+1})\cap[c_{k+1},d_{k+1}))\in S$.

3. Sebelum kita buktikan aturan ke-3 dibuktikan dulu bahwa $(AXB)-(CXD)=[(A-C)XB]\cup[(A\cap C)X(B-D)]$. $(x,y)\in(AXB)-(CXD)$ $\Leftrightarrow x\in A, y\in B$ dan ,$x\notin C$ atau $y\notin D \Leftrightarrow$ $x\in(A-C), y\in B$ atau $x\in A$, $y\in B-D$. Jadi $(AXB)-(CXD)=[(A-C)XB]\cup[AX(B-D)]=$ $[[(A-C)X(B\cap D)]\cup$ $[(A-C)X(B-D)]]\cup[[(A-C)X(B-D)]\cup$ $[(A\cap C)X(B-D)]]$ $=$ $[(A-C)XB]\cup[(A\cap C)X(B-D)]$. Untuk membuktikan aturan ke 3 kita gunakan induksi matematik Jika S menyatakan kumpulan semua himpunan bagian A dari R(disingkat S^1) maka berlaku untuk setiap A,B$\in$S ada $C_1,\ldots,C_k$ dalam **S** sedemikian sehingga $A-B=\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ dan $C_i\cap C_j=\phi$ jika $i\neq j$ seperti yang ditunjukkan dalam contoh 2.3. Kemudian andaikan benar untuk **S** yang menyatakan kumpulan semua himpunan bagian A dari R^d(disingkat S^d). Andaikan S^{d+1} menyatakan Semiring yang terdiri atas semua himpunan bagian A dari R^{d+1}. Akan dibuktikan benar bahwa untuk $M=\prod_{i=1}^{d+1}[a_i,b_i)$ dan $N=\prod_{i=1}^{d+1}[c_i,d_i)$ dalam S^{d+1} maka ada $C_1,\ldots,C_k$ dalam S^{d+1} sedemikian

sehingga $M - N = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$ dan $C_i \cap C_j = \phi$ jika $i \neq j$. Kita tahu bahwa $(A\times B) - (C\times D) = [(A-C)\times B] \cup [(A\cap C)\times(B-D)]$ sehingga

$$[\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i)\times[a_{d+1},b_{d+1})] - [\prod_{i=1}^{d}[c_i,d_i)\times[c_{d+1},d_{d+1})] =$$

$$[(\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i) - \prod_{i=1}^{d}[c_i,d_i))\times[a_{d+1},b_{d+1})] \cup$$

$$[(\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i) \cap \prod_{i=1}^{d}[c_i,d_i))\times([a_{d+1},b_{d+1}) - [c_{d+1},d_{d+1}))]$$

Kemudian kita dapat mengambil $K_1,\ldots,K_z$ dalam S^d dan $H_1,\ldots,H_h$ dalam S^i sedemikian sehingga $\bigcup_{t=1}^{z} K_t = \prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i) - \prod_{i=1}^{d}[c_i,d_i)$ dengan $K_t \cap K_y = \phi$ jika $t \neq y$ dan $[a_{n+1},b_{n+1}) - [c_{n+1},d_{n+1}) = \bigcup_{s=1}^{h} H_s$ dengan $H_t \cap H_y = \phi$ jika $t \neq y$ maka

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\times[a_{n+1},b_{n+1}) - \prod_{i=1}^{n}[c_i,d_i)\times[c_{n+1},d_{n+1}) =$$

$$[\bigcup_{i=1}^{z} K_i \times[a_{n+1},b_{n+1})] \cup [\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i) \cap \prod_{i=1}^{n}[c_i,d_i) \times \bigcup_{i=1}^{h} H_i].$$

Selanjutnya kita juga dapat mengandaikan $[\bigcup_{i=1}^{z} K_i \times[a_{n+1},b_{n+1})] \cup [\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i) \cap \prod_{i=1}^{n}[c_i,d_i) \times \bigcup_{i=1}^{h} H_i] = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$ dengan $C_1,\ldots,C_r$ dalam S^{d+1} dan $C_i \cap C_j = \phi$ jika $i \neq j$. Jadi terbukti bahwa jika $M,N \in S$ maka ada $C_1,\ldots,C_k$ dalam **S** sedemikian sehingga $M - N = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ dan $C_i \cap C_j = \phi$ jika $i \neq j$.. Bukti selesai.

Setelah kita mendefinisikan suatu semi ring ,kita akan mendefinisikan suatu himpunan-σ. Ambil **S** suatu semi ring yang terdiri atas himpunan bagian X. Suatu himpunan bagian A dari X disebut *himpunan-σ* jika ada barisan saling asing $\{A_n\}$ dari **S** (yaitu $A_n \cap A_m = \phi$ jika $n \neq m$)sedemikian sehingga $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .Jika $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ dengan $A_1,....,A_n \in$ **S** dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$ maka A adalah suatu himpunan-σ yang dalam hal ini himpunan $A_i = \phi$ untuk $i > n$.

Contoh 2.5 Ambil **S**=$\{[a,b);a,b \in R$ dan $a \leq b\}$maka $(-\infty,0)$ merupakan himpunan-σ

Bukti: Ambil $I_n=[-n,-n+1) \in$ **S.** Kemudian kita akan membuktikan bahwa $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,-n+1) = (-\infty,0)$ dengan $I_n \cap I_m = \phi$ untuk $n \neq m$.Ambil $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,-n+1)$ maka ada m sedemikian sehingga $x \in [-m,-m+1) \subseteq (-\infty,0)$ sehingga $x \in (-\infty,0)$. Kemudian ambil $-\infty < x < 0$ maka terdapat bilangan bulat negatif terbesar m yang kurang dari atau sama dengan x yaitu $m \leq x$. Selanjutnya kita dapat menyatakan bahwa $m=-n$ dengan $n \in N$ sehingga $-n \leq x < -n+1$. Jadi $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,-n+1)$. Kemudian ambil sembarang $m,n \in N$ dengan $n \neq m$. Jika $m < n$ maka $m \leq n+1$ sehingga $[-n,-n+1) \cap (-m,-m+1) = \phi$. Jika $n < m$ maka $n \leq m+1$ sehingga $[-n,-n+1) \cap (-m,-m+1) = \phi$. Dari semua pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,-n+1) = (-\infty,0)$ dengan $I_n \cap I_m = \phi$ untuk $n \neq m$ atau dengan kata lain $(-\infty,0)$

merupakan himpunan-σ.

Teorema di bawah ini akan menyajikan hubungan antara semi ring dengan himpunan-σ.

Teorema 2.1. Untuk suatu semi ring **S** maka akan berlaku :

1. Jika $A \in$ **S** dan $A_1, A_2, \ldots, A_n \in$ **S** maka $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dapat ditulis sebagai gabungan berhingga himpunan yang saling asing dalam **S.**

2. Untuk setiap $\langle A_n \rangle$ barisan anggota **S**,himpunan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah himpunan-σ.

3. Gabungan terbilang dan irisan berhingga dari himpunan-σ adalah himpunan-σ

Bukti :

1. Dalam membuktikan pernyataan pertama kita gunakan induksi matematik . Untuk n=1 maka $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ =A - A_1 = $\bigcup_{s=1}^{b} C_s$ dengan $C_s \in$ **S**, $\forall s \in N$ dan $C_s \cap C_t = \phi$ jika $t \neq s$, hal ini menurut definisi semi ring . Jadi benar untuk n=1 . Kemudian andaikan benar untuk n=k , maka ada $C_1, C_2, \ldots, C_b \in$ **S** sedemikian sehingga $A - \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ = $\bigcup_{s=1}^{b} C_s$ dan $C_i \cap C_j = \phi$ jika $i \neq j$. Kemudian kita dapat melihat bahwa :

$$A - \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1})^c$$

$$= A \cap (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{k+1}^c)$$

$$= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c \cap A_{k+1}^c$$

$$=\bigcup_{s=1}^{b} C_s \cap A_{k+1}^{c}$$

$$=(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_b) \cap A_{k+1}^{c}$$

$$=((C_1 \cap A_{k+1}^{c}) \cup (C_2 \cap A_{k+1}^{c}) \cup \dots \cup (C_b \cap A_{k+1}^{c}))$$

$$=(C_1 - A_{k+1}) \cup (C_2 - A_{k+1}) \cup \dots \cup (C_b - A_{k+1})$$

Karena $C_s \in \mathbf{S}$, $\forall s \in N$ dan $A_{k+1} \in \mathbf{S}$ maka menurut definisi 3 semi ring, $C_s - A_{k+1}$ dapat ditulis sebagai gabungan berhingga yang saling asing , jika kita misalkan $C_s - A_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{rs} D_{js}$, maka :

$$=(\bigcup_{j=1}^{r1} D_{j1}) \cup (\bigcup_{j=1}^{r2} D_{j2}) \cup \dots \cup (\bigcup_{j=1}^{rb} D_{jb})$$

$$=\bigcup_{m=1}^{b} (\bigcup_{j=1}^{rm} D_{jm})$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa $A - \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$ dapat ditulis sebagai gabungan berhingga himpunan yang saling asing sehingga bukti selesai.

2. Andaikan $<A_n>$ barisan anggota **S**. Misal $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ambil $B_1 = A_1$ dan $B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ untuk $n \geq 1$ maka $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Kemudian akan kita tunjukkan bahwa $B_i \cap B_j = \phi$ untuk $i \neq j$. Bila $i > j$ maka $B_i = A_i \cap A_1^{c} \cap \dots \cap A_j^{c} \cap \dots \cap A_{i-1}^{c}$ sedangkan $B_j = A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} Ai$ maka $B_i \cap B_j = \phi$ untuk $i > j$. Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa $B_i \cap B_j = \phi$ untuk $i < j$. Jadi $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah

himpunan-σ.

3a. Dari 2 jelas bahwa gabungan terbilang dari himpunan-σ adalah himpunan-σ.

3b. Ambil $B_i=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ji}$ ∈ himpunan-σ dengan $A_{ji} \in S$ maka $\bigcap_{i=1}^{n}[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ji}]=[(A_{11}\cap A_{12}\cap$

$\ldots\cap A_{1n})\cup(A_{21}\cap A_{12}\cap\ldots\cap A_{1n})\cup\ldots\cup(Ar_1\cap A_{12}\cap\ldots\cap A_{1n})\cup\ldots]\ldots\cup[(A_{11}\cap A_{22}$

$\cap\ldots\cap A_{1n})\cup\ldots(A_{r1}\cap A_{22}\cap\ldots\cap A_{1n})\cup\ldots]\cup\ldots\cup[\ldots\cup(Ar_1\cap A_{r2}\cap\ldots\cap A_{rn})\ldots]$.

Karena pada **S** tertutup terhadap irisan berhingga maka dengan menggunakan teorema 2.1(2) dapat disimpulkan bahwa irisan berhingga dari himpunan-σ adalah himpunan-σ.

Pada bagian selanjutnya marilah kita lihat definisi lain dari suatu himpunan yaitu aljabar himpunan , yang nantinya pada suatu teorema akan kita lihat hubungan antara semi ring dan aljabar himpunan tersebut.

Definisi 2.7. Diberikan $X\neq\phi, \mathbb{A}\subseteq P(X)$ dan $\mathbb{A}\neq\phi$. Himpunan $\mathbb{A}$ disebut *aljabar himpunan* jika memenuhi aksioma berikut :

1. Jika $A,B \in \mathbb{A}$ maka $A\cap B \in \mathbb{A}$
2. Jika $A\in\mathbb{A}$ maka $A^c\in\mathbb{A}$

Contoh 2.6. Ambil X suatu himpunan bilangan asli. Himpunan $\mathbb{A}$ terdiri atas ϕ,G_l={1,3,5,…}, G_p={2,4,6,…} dan X maka $\mathbb{A}$ suatu aljabar himpunan sebab :

1. Untuk semua A ,B $\in\mathbb{A}$ maka $A\cap B\in\mathbb{A}$, hal ini bisa ditunjukkan oleh

pernyataan berikut : $\phi \cap G_1 = \phi \in \mathbb{A}$; $\phi \cap G_p = \phi \in \mathbb{A}$; $\phi \cap X = \phi \in \mathbb{A}$; $G_1 \cap G_p = \phi \in \mathbb{A}$; $G_1 \cap X = G_1 \in \mathbb{A}$; $G_p \cap X = G_p \in \mathbb{A}$.

2. Untuk semua $A \in \mathbb{A}$ maka $A^c \in \mathbb{A}$ sebab:

   $G_1{}^c = G_p \in \mathbb{A}$. $X^c = \phi \in \mathbb{A}$. $G_p{}^c = G_1 \in \mathbb{A}$. $\phi^c = X \in \mathbb{A}$

Contoh 2.7. Untuk setiap himpunan tak kosong X, himpunan $\mathbb{A} = \{\phi, X\}$adalah aljabar himpunan .Bukti :

1. $\phi, X \in \mathbb{A}$, maka $\phi \cap X = \phi \in \mathbb{A}$
2. a.$\phi \in \mathbb{A}$ maka .$\phi^c = X \in \mathbb{A}$;b.$X \in \mathbb{A}$ maka $X^c = \phi \in \mathbb{A}$

Beberapa sifat penting akan dapat kita lihat dari aljabar himpunan dan hubungannya dengan semi ring melalui teorema di bawah ini .

Teorema 2.2 . Untuk suatu aljabar himpunan $\mathbb{A}$ maka berlaku :

1. $\phi, X \in \mathbb{A}$
2. Jika $A, B \in \mathbb{A}$ maka $A \cup B \in \mathbb{A}$
3. $\mathbb{A}$ adalah suatu semi ring.

Bukti :

1. Karena $\mathbb{A}$ tak kosong maka ada $A \in \mathbb{A}$. Dengan menggunakan definisi suatu aljabar himpunan maka $A^c \in \mathbb{A}$. Jadi $A \cap A^c = \phi \in \mathbb{A}$. Karena $\phi \in \mathbb{A}$ maka $\phi^c = X \in \mathbb{A}$

2.Ambil sembarang $A, B \in \mathbb{A}$ maka $A^c \in \mathbb{A}$ dan $B^c \in \mathbb{A}$ sehingga $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathbb{A}$

4. Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{A}$ suatu semi ring kita cukup membuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathbb{A}$, A-B dapat ditulis sebagai gabungan berhingga

himpunan yang saling asing dalam A.

Bukti:

Menurut teori himpunan $A\text{-}B = A \cap B^c = (A \cap B^c) \cup \phi \in A$ sebab $A, B^c, \phi \in A$. Jadi A-B dapat ditulis sebagai berhingga himpunan yang saling asing. ■

Definisi 2.8. Suatu aljabar himpunan $A \subseteq P(X)$ disebut *aljabar-σ* bila dan hanya bila jika $<A_n>$ barisan anggota A maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$.

Sebagai penutup bab ini akan di definisikan tentang suatu himpunan Borel karena himpunan Borel ini akan kita gunakan pada pembahasan tentang ukuran Lebesgue.

Definisi 2.9. Himpunan Borel dari ruang topologi (X,τ) adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan terbuka .

Aljabar-σ dari semua himpunan Borel dari (X,τ) dinotasikan dengan B.

Contoh 2.8. Himpunan $\aleph = P(R)$ merupakan himpunan Borel

Bukti: 1. $R, \phi \in \aleph$

2. Jika $A, B \in \aleph$ maka $A \cap B \in \aleph$

3. Gabungan dari sembarang banyaknya himpunan pada $\aleph$ merupakan anggota dari $\aleph$.

4. Jika $A \in \aleph$ maka $A^c \in \aleph$

5. Jika $<A_n>$ barisan anggota $\aleph$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \aleph$

BAB III

TEORI UKURAN

Pada bab ini akan dibahas tentang teori ukuran secara umum. Ukuran yang dimaksud adalah suatu ukuran yang didefinisikan pada semi ring.

1. Ukuran pada Semi Ring.

Definisi 3.1.1. Misal $S \subseteq P(X)$. Suatu fungsi $\mu : S \rightarrow [\, 0, \infty \,]$ disebut *ukuran* pada **S** jika memenuhi :

1. $\mu(\phi) = 0$

2. Bila $<A_n>$ suatu barisan anggota **S** yang saling asing dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Sifat ini biasa disebut sebagai aditif- σ.

Untuk lebih memperjelas definisi diatas kita lihat contoh dibawah ini.

Contoh 3.1.1. Jika diberikan sembarang himpunan X yang tidak kosong. Misalkan $S \subseteq P(X)$ suatu semi ring maka μ yang didefinisikan pada S dengan aturan $\mu(E) = 0$, untuk semua $E \in S$ merupakan ukuran.

Bukti :

(i) Karena $\phi \in$ **S** maka $\mu(\phi) = 0$

(ii) Andaikan $<E_n>$ suatu barisan anggota **S** yang saling asing dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in$ **S** maka μ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$. Kemudian untuk semua $E_n \in$ **S** maka μ (E_n) = 0

sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. Jadi μ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa μ suatu ukuran pada **S**.

Contoh 3.1.2. Andaikan X sembarang himpunan tak kosong dan andaikan S suatu semi ring yang terdiri atas semua himpunan bagian dari X. Kemudian ambil p elemen tetap dari X dan didefinisikan μ untuk E ∈ X dengan

μ (E) = 0, jika $p \notin E$

μ (E) = 1, jika $p \in E$

Buktikan bahwa μ suatu ukuran pada **S**.

Bukti :

(i) Karena $p \notin \phi$ maka $\mu(\phi) = 0$

(ii) Andaikan $<E_n>$ suatu barisan anggota **S** yang saling asing dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in$ **S**

Untuk membuktikan bahwa μ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ kita akan meninjau 2 kasus yaitu :

a. untuk $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ maka μ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ sehingga μ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

b. Jika $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ maka ada tepat satu $i \in N$ sedemikian sehingga $p \in E_i$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots + \mu(E_i) + \mu(E_{i+1}) + \ldots$$

$$= 0 + 0 + \quad + 1 + 0 + \ldots = 1$$

sedangkan $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$ sehingga $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

Dari (i) dan (ii) kita dapat menyimpulkan bahwa μ suatu ukuran pada **S**.

Contoh 3.1.3. Andaikan $f:R \to R$ fungsi yang kontinu kiri dan tidak turun. Kemudian ambil Semi ring $S=\{[a,b);\ a,b \in R \text{ dan } a \le b\}$ dan didefinisikan $\mu: S \to [0,\infty]$ dengan $\mu([a,b))=f(b)-f(a)$. Sekarang akan dibuktikan bahwa μ suatu ukuran pada **S**.

Bukti:

1. Jelas $\mu(\phi)=\mu([a,a))=f(a)-f(a)=0$
2. Untuk sifat aditif-σ , misal $<[a_n,b_n)>$ barisan anggota **S** yang saling asing $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n) \in S$. Misalkan juga $[a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$ dengan $a,b \in R$ dan $a \le b$. Jika $[a_1,b_1), \ldots, [a_k,b_k)$ tidak kosong dan andaikan $a_1<b_1 \le a_2<b_2 \le \ldots \le a_k<b_k$ maka $\sum_{i=1}^{k}[f(b_i)-f(a_i)] \le f(b_k)-f(a_1) \le f(b)-f(a)$ sebab f tidak turun . Hal ini berakibat $\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n,b_n)) \le f(b)-f(a)=\mu([a,b))$. Kemudian ambil $\delta>0$ dan $0<\varepsilon<b-a$. Untuk setiap n pilih $c_n<a_n$ yang memenuhi $f(a_n)-f(x)<2^{-n}\delta$ jika $c_n<x\le a_n$. Jika

$[a,b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n,b_n)$ dan karena $[a,b-\varepsilon]$ kompak maka ada k sedemikian sehingga $[a,b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k}(c_n,b_n)$. Ambil $a_1=a$. Jika $b_1<b-\varepsilon$ maka kita dapat mengasumsikan $b_1 \in (c_2,b_2)$. Karena $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)=\phi$ maka $c_2<b_1\leq a_2$. Selanjutnya untuk $1\leq m\leq k$ kita juga dapat membuat $(c_1,b_1), \ldots ,(c_m,b_m)$ dengan $b-\varepsilon\leq b_m$. Jika $m\geq 2$, $c_{i+1}<b_i<a_{i+1}$ untuk $1\leq i\leq m-1$. Sekarang kita mempunyai $\sum_{i=1}^{m-1}|f(a_{i+1})-f(b_i)|\leq\delta$, hal ini berakibat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n,b_n))\geq\sum_{i=1}^{m}[f(b_i)-f(a_i)]=f(b_m)-f(a_1)-\sum_{i=1}^{m-1}|f(a_{i+1})-f(b_i)|>f(b-\varepsilon)-f(a)-\delta$$

jika $\delta>0$ dan $0<\varepsilon<b-a$ dan f kontinu kiri maka $\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n,b_n))\geq f(b)-f(a)$. Jadi $\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n,b_n))=f(b)-f(a)$ sehingga sifat aditif-σ terpenuhi. ■

Untuk kasus khusus pada contoh 3.1.3 yaitu $f(x)=x$ untuk semua bilangan real x , ukurannya kita sebut sebagai ukuran Lebesgue pada **S** dan akan dinotasikan dengan λ. Selanjutnya akan kita definisikan suatu ruang ukuran . Misal X himpunan tak kosong , **S** adalah suatu semi ring yang terdiri atas himpunan bagian dari X dan μ adalah ukuran pada **S** maka pasangan terurut ganda tiga $(X,\mathbf{S},\mu)$ disebut ruang ukuran.

Teorema 3.1.1 . Untuk suatu ruang ukuran $(X,\mathbf{S},\mu)$ maka akan berlaku :

1. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbf{S}$ adalah himpunan-himpunan saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbf{S}$

   maka $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

2. Jika $A, B \in \mathbf{S}$ dengan $A \subseteq B$ maka $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Bukti :

1. Misal $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbf{S}$ adalah himpunan yang saling asing sedemikian sehingga $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbf{S}$ dan pilih $A_i = \phi$ jika $i > n$ maka $<A_i>$ adalah suatu barisan anggota $\mathbf{S}$ yang saling asing dan memenuhi $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dilain pihak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \mu(A_{n+1}) + \ldots \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + 0 + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\end{aligned}$$

Sehingga $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

2. Misal $A, B \in S$ dengan $A \subseteq B$. Pilih suatu himpunan berhingga yang saling asing $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dari $\mathbf{S}$ sedemikian hingga $B - A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Maka $B = A \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$ adalah suatu gabungan berhingga himpunan yang saling asing dari S, sehingga $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \ldots + \mu(C_n) \geq \mu(A)$; sebab $\mu(C_i) \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

■

Di bawah ini akan disajikan ciri-ciri suatu fungsi himpunan pada semi ring yang merupakan suatu ukuran dengan melalui teorema di bawah ini .

Teeorema 3.1.2. Ambil **S** suatu semi ring dan ambil μ:**S**$\rightarrow[0,\infty]$ suatu fungsi himpunan. μ adalah suatu ukuran di **S** jika dan hanya jika μ memenuhi :

1. $\mu(\phi) = 0$

2. Jika $A \in$ **S** dan $A_1, A_2, \ldots, A_n \in$ **S** memenuhi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$

   maka $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$

3. Jika $A \in S$ dan $\langle A_n \rangle$ barisan anggota **S** memenuhi $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka

   $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Bukti :

1. Andaikan μ adalah ukuran pada **S** maka dengan menggunakan definisi ukuran maka $\mu(\phi)=0$.

2. Andaikan $A \in$ **S** dan $A_1, \ldots, A_n$ merupakan himpunan yang saling asing dalam S yang memenuhi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$. Dengan teorema 2.1 maka ada himpunan saling asing $B_1, \ldots, B_n$ dalam **S** sedemikian sehingga $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Kemudian dibentuk barisan himpunan $C_1=A_1, \ldots, C_n=A_n$ dan $C_{n+i}=B_i$ untuk $1 \leq i \leq m$ maka himpunan $C_1, \ldots, C_{n+m}$ saling asing asing dan $A = \bigcup_{i=1}^{m+n} C_i$ sehingga

menurut teorema 3.1.1 kita akan mendapatkan $\mu(A)=\mu(\bigcup_{i=1}^{m+n} C_i) = \sum_{i=1}^{m+n} \mu(C_i) \geq = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

3. Misal $A \in S$ dan $<A_n>$ barisan anggota **S** yang memenuhi $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ambil $B_1 = A_1$ dan $B_{n+1}=A_{n+1}-\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ untuk $n \geq 1$. Dengan menggunakan langkah-langkah pada bukti teorema 2.1 maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $B_n \subseteq A_n$ untuk semua n. Barisan $\{B_n\}$ saling asing . Dengan menggunakan teorema 2.1 untuk setiap n dapat dibuat suatu barisan saling asing $\{C_i^n\}$ dari S sedemikian sehingga $B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^{\,n}$ dengan (2) maka $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i^{\,n}) \leq \mu(A_n)$. Karena $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap C_i^{\,n})$. Untuk $i \neq j$ maka $(B_i \cap A) \cap (B_j \cap A) = (B_i \cap B_j \cap A \cap A) = \phi \cap A = \phi$ sehingga $\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A)$ merupakan gabungan himpunan yang saling asing . Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^{\,n} \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^{\,n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

Selanjutnya kita akan membuktikan bahwa μ ukuran jika syarat 1, 2, dan 3 terpenuhi.

Ambil $<A_n>$ barisan anggota **S** yang saling asing dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in$ **S**. Karena $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Untuk semua n maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

sehingga dengan menggunakan syarat ke-2 untuk semua n berlaku $\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) \le \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$. Hal ini berakibat $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \le \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. ■

Definisi 3.1.2 Ambil μ:S→[0,∞] dengan **S** suatu semiring. μ disebut *ukuran aditif* berhingga pada **S** jika memenuhi :

1. $\mu(\phi)=0$
2. jika $A_1, \ldots, A_n \in$S merupakan himpunan yang saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{n}A_i \in$S maka $\mu(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$

2. Ukuran Luar dan Himpunan Terukur

Definisi 3.2.1 : Suatu fungsi himpunan μ:P(X)→[0,∞] yang didefinisikan pada himpunan kuasa P(X) dari himpunan X disebut *ukuran luar* jika memenuhi :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. μ monoton yaitu jika $A \subseteq B$ maka $\mu(A) \le \mu(B)$
3. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ dengan A_n merupakan himpunan bagian X.

(pernyataan ini disebut dengan sifat subaditif-σ).

Pada subbab 3.2 μ kita sepakati sebagai ukuran luar.

Contoh 3.2.1. Diketahui X sembarang himpunan tak kosong dan didefinisikan $\mu:P(X)\to[0,\infty]$ dengan $\mu(E)=0$ untuk semua $E\subseteq P(X)$ maka μ suatu ukuran luar.

Jawab :

1. $\phi\in P(X)$ maka $\mu(\phi)=0$
2. Ambil sembarang $A\subseteq B$ maka $\mu(A)=0$ dan $\mu(B)=0$ sehingga $\mu(A)=0\leq 0=\mu(B)$
3. Ambil sembarang $\{A_n\}\subseteq X$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$,

sedangkan $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots+\mu(A_n)+\ldots$

$=\ 0\ +\ 0\ +\ldots+\ 0\ +\ldots=0$

sehingga $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa μ suatu ukuran luar.

Definisi 3.2.2: Ambil sembarang μ ukuran luar pada himpunan kuasa P(X). Suatu himpunan bagian E dari X disebut *terukur* jika memenuhi $\mu(A)=\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)$ untuk semua $A\subseteq X$

Definisi 3.2.3: Kumpulan semua himpunan terukur akan dinotasikan dengan Λ yang berarti bahwa: $\Lambda=\{E\subseteq X;\mu(A)=\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)$, untuk semua $A\subseteq X\}$.

Setelah didefinisikan tentang himpunan terukur kemudian akan diperkenalkan suatu himpunan khusus yang mempunyai sifat terukur yaitu himpunan nol.

Definisi 3.2.4: Suatu himpunan E disebut himpunan nol jika $\mu(E)=0$

Teorema 3.2.1 : Setiap himpunan nol adalah terukur.

Bukti:

Ambil sembarang $E\subseteq X$ dengan $\mu(E)=0$. Jelas bahwa untuk setiap $A\subseteq X$ $\phi\subseteq(A\cap E)$sehingga $0=\mu(\phi)\leq\mu(A\cap E)\leq\mu(E)=0$ dan berakibat :

$\mu(A)\leq \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)=\mu(A\cap E^c)\leq\mu(A)$.

Jadi $\mu(A)=\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)$. ■

Teorema 3.2.2 : Ambil himpunan $E_1,E_2,\ldots,E_n$ yang saling asing dan terukur maka $\mu(A\cap[\bigcup_{i=1}^{n} Ei]) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A\cap Ei)$ terpenuhi untuk setiap himpunan bagian A dari X.

Bukti :

Pembuktiannya dengan menggunakan induksi matematika.

Untuk n=1 benar bahwa $\mu(A\cap[\bigcup_{i=1}^{1} Ei])=\mu(A\cap E) = \sum_{i=1}^{1}\mu(A\cap Ei)$.

Sekarang diasumsikan benar untuk n=k. Kemudian akan dibuktikan benar untuk n=k+1. Sekarang ambil himpunan $E_1,E_2,\ldots,E_k,E_{k+1}$ yang saling asing dan terukur. Jika $A\subseteq X$ maka

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i)\cap E_{k+1} = A\cap E_{k+1}$$

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i)\cap(E_{k+1})^c = A\cap(\bigcup_{i=1}^{k} E_i),$$

tetapi dengan sifat terukur dari E_{k+1} , akan didapat

$$\mu(A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i))=\mu(A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i)\cap E_{k+1}) +\mu(A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i)\cap(E_{k+1})^c)$$

$$=\mu(A\cap E_{k+1})+\mu(A\cap(\bigcup_{i=1}^{k} E_i))=\mu(A\cap E_{n+1})+ \sum_{i=1}^{k}\mu(A\cap E_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\mu(A\cap E_i)$$

Bukti selesai. ■

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa kumpulan semua himpunan terukur adalah aljabar-σ.

Teorema 3.2.3 : Kumpulan Λ dalam definisi 3.2.3 adalah aljabar-σ.

Bukti :

Dari definisi himpunan terukur dapat dilihat bahwa jika $E\in\Lambda$ maka $E^c\in\Lambda$. kemudian akan ditunjukkan bahwa jika $E_1,E_2\in\Lambda$ maka $E_1\cap E_2\in\Lambda$. Andaikan $E_1{}^c=N$, $E_2{}^c=M$ dan $W=N\cup M=N\cup(N^c\cap M)$ maka untuk setiap himpunan bagian A dari X berlaku : $\mu(A) \le \mu(A\cap W) + \mu(A\cap W^c)$

$$\le [\mu(A\cap N)+\mu((A\cap N^c)\cap M)]+\mu((A\cap N^c)\cap M^c)$$

$$=\mu(A\cap N)+[\mu((A\cap N^c)\cap M)]+\mu((A\cap N^c)\cap M^c)]$$

$$=\mu(A\cap N) + \mu(A\cap N^c)= \mu(A)$$

sehingga $N \cup M = E_1{}^c \cup E_2{}^c \in \Lambda$ dan berakibat $(E_1 \cap E_2)^c \in \Lambda$. Jadi $(E_1 \cap E_2) \in \Lambda$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Λ tertutup terhadap gabungan terbilang. Ambil $\{E_n\} \subseteq \Lambda$ dan himpunan $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ dan didefinisikan $G_1=E_1$ dan $G_{n+1}=E_{n+1}-\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ untuk $n \geq 1$. Jika $n \neq m$ maka $G_n \cap G_m = \phi$ dan $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Himpunan $E_n=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ untuk $n \geq 1$. Jika $A \subseteq X$ maka:

$$\mu(A)=\mu(A\cap E_n)+\mu(A\cap E_n{}^c)\geq \mu(A\cap E_n)+\mu(A\cap E^c)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \mu(A\cap G_i)+\mu(A\cap E^c)$$

terpenuhi untuk semua n sehingga

$$\mu(A)\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A\cap G_i)+\mu(A\cap E^c)\geq \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\geq \mu(A)$$

Jadi $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Lambda$ dan Λ adalah aljabar-σ. ■

Teorema 3.2.4: Andaikan μ ukuran luar pada X maka (X,Λ,μ) ruang ukuran.

Bukti :

Dari definisi ukuran luar jelas bahwa $\mu(\phi)=0$

Kemudian akan kita tunjukkan μ memenuhi sifat aditif-σ. Andaikan $\{E_n\}$ barisan saling asing dari Λ ,himpunan $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. μ ukuran luar maka $\mu(E)\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Dilain pihak teorema 3.2.2 menunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)=\mu(E\cap(\bigcup_{n=1}^{k}E_n))\leq\mu(E)$ terpenuhi untuk setiap k sehingga $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\leq\mu(E)$. Jadi $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\mu(E)$. ■

Teorema 3.2.4 : Jika A dan B himpunan terukur sedemikian sehinga $A\subseteq B$ dengan $\mu(B)<\infty$ maka $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$

Bukti :

Kita tahu bahwa A terukur sehingga $\mu(B)=\mu(B\cap A^c)+\mu(B\cap A)=\mu(B-A)+\mu(A)$

Karena $\mu(B)<\infty$ maka $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$. ■

3. Ukuran Luar yang Dibangun oleh Suatu Ukuran

Definisi 3.3.1 : Misalkan (X,S,μ) ruang ukuran. Maka untuk setiap $A\subseteq X$ didefinisikan :

$\mu^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n);\langle A_n\rangle$ adalah barisan anggota **S** dengan $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\}$

Jika tidak ada $\langle A_n\rangle$ barisan anggota **S** sedemikian sehingga $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ maka $\mu^*(A)=\infty$

Teorema 3.3.1: Fungsi himpunan μ^* adalah suatu ukuran luar (disebut ukuran luar yang dibangun oleh μ).

Bukti :

a. Dengan jelas dapat dikatakan bahwa untuk setiap $A \subseteq X$ berlaku $\mu^*(A) \geq 0$. Kemudian untuk $A=\phi$ maka kita dapat mengambil $A_n=\phi$ untuk semua n sehingga $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)=0$. Jadi $\mu^*(A)=0$.

b. Misal $A,B \subseteq X$ dengan $A \subseteq B$. Untuk kemonotonan dari μ^* kita pandang dua kasus, yaitu :

i.. Jika tidak ada $<A_n>$ barisan anggota **S** sedemikian sehingga $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $\mu^*(B)=\infty$ sehingga $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

ii. Jika ada $<B_n>$ barisan anggota **S** sedemikian sehingga $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ maka $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ sehingga $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. Padahal $\mu^*(B)=\inf(\sum_{n=1}^{\infty} (B_n)$;$<B_n>$ adalah barisan anggota **S** dengan $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ } sehingga $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c. Untuk subaditif-σ dari μ^*. Ambil $<A_n>$ barisan yang terdiri atas himpunan bagian dari X. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)=\infty$ maka jelas bahwa $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ .Sekarang untuk $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$, ambil $\varepsilon>0$. Untuk setiap n pilih barisan $\{A_m^n\} \subseteq S$ dengan $A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^n$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m^n) \leq \mu^*(A_n)+2^{-n}\varepsilon$ begitu juga $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^n$. Oleh karena itu kita dapat mengatakan bahwa

$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m{}^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}[\mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n) + \varepsilon$, berlaku untuk setiap ε. Jadi $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$. ■

Teorema 3.3.2. Misal **S** suatu semi ring. Jika $A \in \mathbf{S}$ maka $\mu^*(A)=\mu(A)$.

Bukti:

Misal $A \in \mathbf{S}$ dan $\langle A_n \rangle$ barisan anggota **S** dengan $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Kemudian kita dapat mengambil $A_1=A$ dan $A_n=\phi$ untuk $n\geq 2$ maka $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$. Selanjutnya karena $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ sehingga $\mu^*(A)\geq\mu(A)$. Jadi $\mu^*(A)=\mu(A)$. ■

Teorema 3.3.3 Misal (X,S,μ) ruang ukuran dan μ^* ukuran luar yang dibangun oleh μ. Jika E himpunan bagian X maka pernyataan di bawah ini ekuivalen.

1. E adalah terukur terhadap μ^*.
2. $\mu(A)= \mu^*(A\cap E)+ \mu^*(A\cap E^c)$ untuk semua $A \in \mathbf{S}$ dengan $\mu(A)<\infty$
3. $\mu(A)\geq\mu^*(A\cap E)+ \mu^*(A\cap E^c)$ untuk semua $A \in \mathbf{S}$ dengan $\mu(A)<\infty$
4. $\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+ \mu^*(A\cap E^c)$ untuk semua $A\subseteq X$.

Bukti:

a. $(1)\Rightarrow(2)$

Misal E terukur terhadap μ^* maka $\mu(A)^*=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$untuk semua $A\in S$. Jadi $\mu(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ sebab $\mu(A)^*=\mu(A)$.

b.(2) $\Rightarrow$(3)

Diketahui bahwa $(\forall A\in \mathbf{S})(\ \mu(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c))$ maka dari pernyataan di atas berlaku$(\forall A\in \mathbf{S})(\ \mu(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c))$

c. (3) $\Rightarrow$ (4)

Misal $A\subseteq X$. Jika $\mu^*(A)=\infty$ maka ($\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$) untuk semua $A\subseteq X$. Selanjutnya andaikan $\mu^*(A)<\infty$ dan ambil sembarang $\varepsilon>0$. Pilih sembarang $<A_n>$ barisan anggota **S** dengan $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ maka ada $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon$ untuk semua $\varepsilon>0$ sehingga $\mu(A_n)<\infty$ untuk semua n. Dari (3) dapat dikatakan bahwa $\mu(A_n)\geq\mu^*(A_n\cap E)+\mu^*(A_n\cap E^c))$ untuk semua $A_n\in\mathbf{S}$.

Akibatnya $\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c))\leq\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cap E)+\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cap E^c))$ $\leq\sum_{n=1}^{\infty}[\ \mu^*(A_n\cap E)+\mu^*(A_n\cap E^c))]$. Padahal dari (3) $\sum_{n=1}^{\infty}[\ \mu^*(A_n\cap E)+\mu^*(A_n\cap E^c))]$ $\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ dan $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon>0$. Jadi $\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\ \mu^*(A\cap E^c)$ untuk semua $A\subseteq X$

d.(4)$\Rightarrow$(1)

Dengan sifat subaditifo dari μ^* maka $\mu^*(A)\leq\ \mu^*(A\cap E)+\ \mu^*(A\cap E^c)$. Jadi dapat disimpulkan $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ sehingga E terukur terhadap μ^*. ■

Suatu himpunan bagian E dari suatu ruang ukuran (X,**S**,μ) akan disebut terukur (atau terukur-μ) jika E adalah terukur terhadap ukuran luar μ^* yang dibangun oleh μ.

Teorema 3.3.4 Setiap anggota semi ring S adalah terukur.

Bukti :

Ambil sembarang E$\in$**S** kemudian akan dibuktikan bahwa E himpunan terukur. Ambil A$\in$**S** maka ada sejumlah berhingga himpunan yang saling asing $B_1, B_2, \ldots, B_n$ dalam **S** sedemikian hingga A-E=$\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ maka dengan sifat subaditif-σ dari μ^* maka $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i) = \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$.

Kemudian untuk $\forall E \in S$ maka $\mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(A)$ sebab $A \cap E, B_1, B_2, \ldots, B_n$ himpunan yang saling asing maka $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ sehingga dengan menggunakan Teorema 3.3.3 dapat disimpulkan bahwa E terukur . ■

Sebelum kita masuk pada teorema selanjutnya didefinisikan dahulu tentang $A_n \uparrow A$ yang berarti bahwa pada barisan $\langle A_n \rangle$ memenuhi $A_n \subseteq A_{n+1}$ untuk setiap n dan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Serupa dengan $A_n \downarrow A$ berarti bahwa $A_{n+1} \subseteq A_n$ dan $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .Kemudian $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ berarti bahwa $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$ dan

$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$. Sebaliknya $\mu(A_n)\downarrow\mu(A)$ berarti $\mu(A_n)\geq\mu(A_{n+1})$ dan $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$.

Teorema 3.3.5. Ambil (X,S,μ) suatu ruang ukuran dan ambil $<E_n>$ barisan himpunan terukur.

1. Jika $E_n\uparrow E$ maka $\mu^*(E_n)\uparrow\mu^*(E)$
2. Jika $E_n\downarrow E$ dan $\mu^*(E_k)<\infty$ terpenuhi untuk beberapa k maka $\mu^*(E_n)\downarrow\mu^*(E)$.

Bukti :

1. Dibuat suatu barisan $<B_n>$ dengan $B_1=E_1$ dan $B_n=E_n-E_{n-1}$ untuk $n\geq2$. Maka setiap B_n terukur dan $B_i\cap B_j=\phi$ untuk $i\neq j$. Demikian juga $E_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ dan $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$. Selanjutnya $\mu^*(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(B_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu^*(Bi)$. Padahal $\mu^*(E_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B_i)$ maka $\mu^*(E)=\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_n)$. Jadi $\mu^*(E_n)\uparrow\mu^*(E)$.
2. Kita asumsikan bahwa $\mu^*(E_s)<\infty$. Sekarang $E_s-E_n\uparrow E_s-E$ terpenuhi sehingga $\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_s-E_n)=\mu^*(E_s-E)$. Dengan menggukan teorema 3.2.4 maka $\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_s-E_n)=\mu^*(E_s)-\mu^*(E)$ sehingga $-\mu^*(E_n)\uparrow-\mu^*(E)$. Jadi $\mu^*(E_n)\downarrow\mu^*(E)$. ■

Sebelum kita masuk pada teorema berikutnya akan kita sepakati bersama apa yang dimaksud dengan interval. Suatu himpunan bagian I dalam R disebut interval jika setiap $x,y \in I$ dengan $x<y$ maka $[x,y] \subseteq I$. Jika I mempunyai bentuk $[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$ dengan $\infty<a<b<\infty$ maka I disebut sebagai interval terbatas dan panjangnya didefinisikan dengan $|I|=b-a$. Jika I tak terbatas maka panjangnya tak terhingga dan ditulis sebagai $|I|=\infty$.

Teorema 3.3.6 Setiap interval I dari R adalah terukur Lebesgue dan $\lambda^*(I)=|I|$.

Bukti :

1. Kita tahu bahwa kumpulan $\mathbf{S}=\{[a,b);\ a,b \in R$ dan $a \leq b\}$ adalah semi ring. Dengan teorema 3.3.4 maka himpunan yang berbentuk $[a,b)$ dengan $\infty<a<b<\infty$ adalah terukur Lebesgue. Dengan contoh 3.1.3 , jika didefinisikan $\lambda:\mathbf{S} \to [0,\infty]$ dengan $\lambda([a,b))=f(b)-f(a)$ maka λ suatu ukuran. Jika diambil $f(x)=x$ untuk semua $x \in R$ maka $\lambda([a,b))=b-a$. Dengan teorema 3.3.2 maka $\lambda^*([a,b))=\lambda([a,b))=b-a=|[a,b)|$.
2. Untuk $I=[a,b]$.Misalkan $E_n=[a,b+\frac{1}{n})$ untuk setiap n maka masing-masing terukur Lebesgue dan $E_n \downarrow I$ terpenuhi sehingga I terukur Lebesgue . Kemudian $\lambda^*(I)=\lim \lambda^*([a,b+\frac{1}{n}))=\lim (b+\frac{1}{n}-a)=|I|$
3. Untuk $I=[a,\infty)$. Kita buat himpunan $F_n=[a,a+n)$ untuk semua n dan catat bahwa $F_n \uparrow I$. Berarti I terukur Lebesgue . Kemudian $\lambda^*(I)=\lim \lambda^*([a,a+n))=\lim n=\infty=|I|$
4. Untuk $I=(a,b]$. Pilih barisan $\{x_n\}$ sedemikian sehingga $x_n \downarrow a$ dan $a<x_n<b$ untuk setiap n sehingga $[x_n,b] \downarrow (a,b]$ dan I terukur Lebesgue. Oleh karena itu

$\lambda^*((a,b]) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([x_n,b] = b-a = |I|$.

5. Untuk $I=(a,b)$. Pilih $a<x_n<b$ dengan $x_n \downarrow a$ sehingga $[x_n,b)\uparrow(a,b)$ dan I terukur Lebesgue. Kemudian $\lambda^*((a,b]) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([x_n,b] = b-a = |I|$.

6. Untuk $I=(-\infty,a)$. Catat bahwa $[a-n,a)\uparrow(-\infty,a)$ dan I terukur Lebesgue sehingga $\lambda^*((-\infty,a)) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([a-n,a)) = \infty = |I|$.

7. Untuk $I=(-\infty,a]$. Kemudian buat $E_n=(-\infty,a+\frac{1}{n})$ untuk setiap n maka $E_n\downarrow I$ terpenuhi sehingga I terukur Lebesgue. Kemudian $\infty = |(-\infty,a)| = \lambda^*((-\infty,a)) \leq \lambda^*((-\infty,a])$.

8. Untuk $I=(a,\infty)$. Ambil $E_n=[a-\frac{1}{n},\infty)$ maka $E_n\downarrow I$ sehingga I terukur Lebesgue. Kemudian $\infty = |[a+1,\infty)| \leq \lambda^*((a,\infty))$.

9. $I=(-\infty,\infty)$. Kita buat himpunan $E_n=(a-n,a+n)$ maka $E_n\uparrow I$ sehingga I terukur Lebesgue. Kita tahu bahwa $\infty = |[0,\infty)| = \lambda^*([0,\infty)) \leq \lambda^*((a,\infty))$. ■

Berikut ini akan disajikan dua kelompok penting tentang ruang ukuran .

Definisi 3.3.2 Ruang ukuran (X,S,μ) dikatakan :

1. terhingga jika $\mu^*(X)<\infty$
2. σ-hingga jika ada barisan $<X_n>$ dari himpunan terukur sedemikian sehingga $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ dan $\mu^*(X_n)<\infty$ untuk semua n

Teorema 3.3.7 Misal (X,S,μ) suatu ruang ukuran terhingga dan ambil E suatu himpunan bagian X maka E disebut terukur jika dan hanya jika $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$

Bukti :

Jelas bahwa jika E terukur maka $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$. Kemudian untuk konversnya , kita ambil $(X,\mathbf{S},\mu)$ ruang ukuran terhingga dan andaikan $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$ terpenuhi. Ambil $A\in\mathbf{S}$ dan A terukur sehingga: $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=\mu^*(E)$ dan $\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E^c\cap A^c)=\mu^*(E^c)$ dengan menambahkan persamaan di atas didapat: $\mu^*(X) = \mu^*(E)+\mu^*(E^c) = \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E^c\cap A^c)\geq \mu^*(A)+\mu^*(A^c)=\mu^*(X)$ sehingga $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E^c\cap A^c)= \mu^*(A)+\mu^*(A^c)$. Padahal $\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)\geq \mu^*(A^c)$ dan $\mu^*(X)<\infty$ maka $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(A\cap E^c)\leq\mu^*(A)$. Dengan menggunakan teorema 3.3.3 dapat disimpulkan bahwa E terukur.

■

Teorema 3.3.8. Misal $(X,\mathbf{S},\mu)$ suatu ruang ukuran σ-hingga,Σ suatu semi ring sedemikian sehingga $\mathbf{S}\subseteq\Sigma\subseteq\Lambda$ dan ν suatu ukuran pada Σ. Jika $\nu=\mu$ pada **S** maka $\nu=\mu^*$ pada Σ.

Bukti :

Misal ν* ukuran luar yang dibangun oleh ν pada ruang ukuran (X,Σ,ν). Ambil $A\subseteq X$ dan ambil $\{A_n\}$ barisan pada **S** sedemikian sehingga $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Karena $\mu=\nu$

pada **S** maka $\nu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ terpenuhi . Hal ini menunjukkan bahwa $\nu^*(A) \leq \mu^*(A)$ terpenuhi untuk semua $A \subseteq X$. Kemudian ambil sembarang $A \in \Sigma$ dan memenuhi $\mu^*(A) < \infty$. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Pilih suatu $<A_n>$ barisan anggota **S** yang saling asing sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Himpunan $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan catat bahwa $\mu^*(B) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Kemudian $\nu^*(B-A) \leq \mu^*(B-A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) < \varepsilon$. Oleh karena itu $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \nu^*(B) = \nu^*(A) + \nu^*(B-A) < \nu(A) + \varepsilon$ untuk semua $\varepsilon > 0$, sehingga $\mu^*(A) \leq \nu(A)$. Jadi untuk $\mu^*(A) < \infty$ maka $\mu^* = \nu$. Untuk kasus umum yaitu $\mu^*(A) \in [0, \infty]$ ambil $<X_n>$ barisan anggota **S** yang saling asing yang menutup X sedemikian sehingga $\mu^*(X_n) < \infty$ untuk semua n. Kemudian ambil sembarang $A \in \Sigma$ maka

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n \cap A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\right) = \nu(A)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\nu = \mu^*$ pada Σ. ■

Teorema 3.3.9. Misal (X, S, μ) suatu ruang ukuran σ-hingga, Σ suatu semiring sedemikian sehingga $S \subseteq \Sigma \subseteq \Lambda$ dan ν suatu ukuran pada Σ. Jika $\nu = \mu$ pada **S** dan $\nu = \mu^*$ pada Σ maka $\nu^* = \mu^*$ pada Σ.

Bukti :

Ambil $A \subseteq X$. Jika $<A_n>$ barisan anggota Σ yang memenuhi $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka

$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$. Kemudian $v^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$;$<A_n>$ adalah barisan anggota Σ dan $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \} \geq \mu^*(A)$. Dilain pihak untuk sembarang $\varepsilon>0$ ada $<A_n>$ barisan anggota S sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A)+\varepsilon$. Padahal $v^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sehingga kita dapat $v^*(A)<\mu^*(A)+\varepsilon$ untuk sembarang $\varepsilon>0$ dan $v^*(A) \leq \mu^*(A)$ dan berakibat $v^*(A)=\mu^*(A)$. ∎

Teorema 3.3.10. Misal (X,S,μ) ruang ukuran. Jika $A \subseteq X$ maka ada himpunan terukur E sedemikian sehingga $A \subseteq E$ dan $\mu^*(A)=\mu^*(E)$

Bukti:

Ambil $A \subseteq X$. Jika $\mu^*(A)=\infty$ maka E=X memenuhi sifat yang dinyatakan. Kemudian andaikan $\mu^*(A)<\infty$. Untuk setiap i pilih barisan $\{A_n^i\}$ dalam **S** sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n{}^i$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A)+\frac{1}{i}$. Misal $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka setiap E_i adalah himpunan terukur sedemikian sehingga $A \subseteq E_i$. Buat $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ maka $A \subseteq E$ dan E terukur . $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(Ei) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n{}^i) < \mu^*(A)+\frac{1}{i}$ untuk setiap i dan berakibat $\mu^*(A)=\mu^*(E)$. ∎

Dibawah ini akan disajikan satu contoh bahwa ada himpunan bagian R yang tidak terukur Lebesgue

Contoh 3.3.2. Ada himpunan bagian R yang tidak terukur Lebesgue. Ambil I=[0,1]. Untuk x,y∈I x~y jika x-y bilangan rasional. Kita dapat mengatakan bahwa ~ memenuhi relasi ekuivalensi. Kemudian K(x)= {x+r∈I;r∈Q} dengan Q merupakan himpunan bilangan rasional maka $\bigcup_{x\in I} K(x)$=I dan jika K(x)≠K(y) maka K(x)∩K(y)=ϕ. Selanjutnya buat himpunan A yang berisi tepat satu anggota dari masing-masing himpunan. Andaikan A terukur Lebesgue. Kemudian andaikan $r_0,r_1,\ldots$ merupakan anggota dari Q∩[-1,1] dan didefinisikan $A_k=\{x+r_k;x\in A\}$ maka kita dapat mengatakan bahwa $\lambda(A_k)=\lambda(A)$ untuk semua k dengan $[0,1]\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subset[-1,2]$. Kita tahu bahwa λ(A)≥0. Andaikan λ(A)>0 Padahal $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)=\lim_{n\to\infty}[n\lambda(A)]\leq\lambda([-1,2])=3$ dan berakibat $\lambda(A)=\lambda(A_k)=0$ sehingga tidak mungkin λ(A)>0. Dilain pihak jika λ(A)=0 maka $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$. Padahal $\lambda([0,1])=1\leq\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa A bukan terukur Lebesgue.

4. Fungsi Terukur

Sebelum dibahas tentang fungsi terukur akan dibahas dulu tentang relasi hampir dimana-mana karena teorema-teorema mengenai fungsi terukur akan sering menggunakan relasi hampir dimana-mana. Misalkan μ ukuran luar dari X, relasi yang melibatkan elemen X disebut memenuhi hampir dimana-mana(disingkat h.d) jika himpunan A dari semua titik yang gagal memenuhi relasi tersebut adalah himpunan nol (yang berarti $\mu(A)=0$). Sebagai contoh , jika f dan g fungsi bernilai real yang didefinisikan pada X sedemikian sehingga f=g hampir dimana-mana maka himpunan $A=\{x\in X;\ f(x)\neq g(x)\}$ merupakan himpunan nol yaitu $\mu(A)=0$.

Andaikan (X,S,μ) ruang ukuran maka dengan mengatakan bahwa suatu relasi berlaku hampir dimana-mana berarti relasi tersebut berlaku hampir dimana-mana terhadap ukuran luar μ^* yang dibangun oleh μ. Dasar tentang relasi hampir dimana-mana akan diuraikan di bawah ini. Andaikan (X,S,μ) ruang ukuran, f dan g fungsi bernilai real yang didefinisikan pada X , maka :

1. $f=g$ h.d jika $\mu^*(\{x\in X;\ f(x)\neq g(x)\})=0$
2. $f\geq g$ h.d jika $\mu^*(\{x\in X; f(x)<g(x)\})=0$
3. $f_n \to f$ h.d jika $\mu^*(\{x\in X;\ f_n(x)\not\to f(x)\})=0$
4. $f_n \uparrow f$ h.d jika $f_n\leq f_{n+1}$ h.d untuk semua n dan $f_n\to f$ h.d
5. $f_n\downarrow f$ h.d jika $f_{n+1}\leq f_n$ h.d untuk semua n dan $f_n\to f$ h.d

Definisi 3.4.1. Misal $f:X\to R$ suatu fungsi . Jika $f^{-1}(\vartheta)$ adalah himpunan terukur untuk setiap ϑ himpunan bagian terbuka dari R maka f disebut *fungsi terukur*.

Contoh 3.4.1 Setiap fungsi konstan adalah terukur.

Bukti:

Misal f(x)=c untuk semua $x \in X$ dan ϑ himpunan bagian terbuka dari R maka $f^{-1}(\vartheta)=\phi$ jika $c \notin \vartheta$ sehingga $\mu(f^{1}(\vartheta))=0$. Kemudian $f^{1}(\vartheta)=X$ jika $c \in \vartheta$. Padahal $X=\phi^{c}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi terukur.

Teorema 3.4.1. Untuk fungsi $f : X \rightarrow R$ maka pernyataan dibawah ini adalah equivalen

1. f terukur
2. $f^{-1}((a,b))$ terukur untuk setiap interval terbuka yang terbatas (a,b) dari R
3. $f^{-1}(C)$ terukur untuk setiap himpunan bagian tertutup C dari R
4. $f^{-1}([a,\infty))$ terukur untuk setiap $a \in R$
5. $f^{-1}((-\infty,a]$ terukur untuk setiap $a \in R$
6. $f^{-1}(B)$ terukur untuk setiap himpunan bagian Borel B dari R

Bukti:

a. $(1) \Rightarrow (2)$

f terukur maka $f^{-1}(\vartheta)$ himpunan terukur untuk setiap ϑ himpunan bagian terbuka dari R sehingga untuk semua interval terbuka terbatas $(a,b) \subseteq R$, $f^{-1}(a,b)$ himpunan terukur juga .

b. $(2) \Rightarrow (3)$

Ambil sembarang C himpunan bagian tertutup dari R. $f^{-1}((a,b))$ terukur untuk setiap interval terbuka yang terbatas (a,b) dari R. Padahal

$C^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ sehingga $f^{-1}(C^c)= f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)) =\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((a_i,b_i))$ terukur untuk setiap i. Jadi dapat disimpulkan bahwa $f^{-1}(C^c)$ terukur sehingga $f^{-1}(C)$ terukur .

c. (3)⇒(4)

$f^{-1}([a,\infty))=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}[a,a+n]$ padahal dari (3) untuk setiap n $f^{-1}[a,a+n]$ terukur.

Jadi $f^{-1}([a,\infty))$ terukur.

d. (4)⇒(5)

$f^{-1}([a,\infty))$ terukur maka $[f^{-1}([a,\infty))]^c = f^{-1}((-\infty,a))$ terukur . Kemudian $f^{-1}((-\infty,a])=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty,a+\frac{1}{n}))$. Padahal $f^{-1}((-\infty,a+\frac{1}{n}))$ terukur untuk semua n sehingga $f^{-1}((-\infty,a])$ terukur.

e. (5)→(6)

Misal $\wp=\{A\subseteq R;\ f^{-1}(A)$ terukur$\}$.Kita dapat langsung melihat bahwa $\wp$ aljabar-σ himpunan bagian dari R. $(-\infty,a]$ termasuk dalam $\wp$ untuk setiap $a\in R$ sehingga $(a,\infty)\in\wp$ dan dengan mudah $[b,\infty)\in\wp$ untuk setiap $b\in R$ sehingga $(a,b)\in\wp$ untuk setiap $a,b\in R$. Hal ini akan berakibat $\wp$ berisi himpunan bagian terbuka dari R sehingga $\wp$ berisi himpunan Borel. Jadi dapat disimpulkan bahwa $f^{-1}(B)$ terukur untuk setiap himpunan bagian Borel B dari R

f.(6)→(1)

Karena $f^{-1}(B)$ terukur untuk setiap himpunan bagian Borel B dari R maka untuk semua himpunan terbuka ϑ dari R, $f^{-1}(\vartheta)$ terukur . Jadi terbukti bahwa f terukur.

■

Teorema 3.4.2. Jika f fungsi terukur dan $g:X \rightarrow R$ memenuhi $f=g$ h.d maka g fungsi terukur.

Bukti :

Jika $A=\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ maka $\mu^*(A)=0$ sehingga A terukur. Kemudian ambil ϑ suatu himpunan bagian terbuka dari R. Jika f terukur maka $f^{-1}(\vartheta)$ terukur sehingga $A^c \cap g^{-1}(\vartheta) = \{x \in X; f(x)=g(x)\} \cap \{x \in X; g(x) \in \vartheta\} = \{x \in X; f(x)=g(x) \in \vartheta\} = \{x \in X; f(x)=g(x)\} \cap \{x \in X; f(x) \in \vartheta\} = A^c \cap f^{-1}(\vartheta)$ juga merupakan himpunan terukur. Kita juga dapat mengatakan bahwa $\mu^*(A \cap g^{-1}(\vartheta))=0$. Jadi $g^{-1}(\vartheta)=[A \cap g^{-1}(\vartheta)] \cup [A^c \cap g^{-1}(\vartheta)]$ adalah himpunan terukur sehingga g fungsi terukur. ■

Teorema 3.4.3. Jika f dan g terukur maka 3 himpunan berikut ini terukur:

a. $\{x \in X; f(x) > g(x)\}$

b. $\{x \in X; f(x) \geq g(x)\}$

c. $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$

Bukti :

a. Jika $r_1, r_2, \ldots$ merupakan bilangan-bilangan rasional pada R maka

$\{x \in X; f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x \in X; f(x) > r_n\} \cap \{x \in X; g(x) < r_n\}]$ merupakan himpunan terukur sebab $[\{x \in X; f(x) > r_n\} \cap \{x \in X; g(x) < r_n\}]$ himpunan terukur untuk setiap n.

b. $\{x \in X;\ f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X;\ f(x) < g(x)\}^c$. Padahal $\{x \in X;\ f(x) < g(x)\}^c$ terukur sebab $\{x \in X;\ f(x) < g(x)\}$ terukur (dari a)

c. $\{x \in X;\ f(x) = g(x)\} = \{x \in X;\ f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X;\ f(x) \leq g(x)\}$ merupakan himpunan terukur sebab $\{x \in X;\ f(x) \geq g(x)\}$ dan $\{x \in X;\ f(x) \leq g(x)\}$ himpunan terukur (dari b).

Teorema 3.4.4. Jika f dan g fungsi terukur maka :

1. f+g fungsi terukur
2. f.g fungsi terukur
3. $|f|$, f^+ (dengan $f^+(x) = \text{maks}\{f(x), 0\}$), f^- (dengan $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$) fungsi terukur .
4. $f \vee g$ dan $f \wedge g$ (dengan $(f \vee g)(x) = \text{maks}\{f(x), g(x)\}$ dan $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$) fungsi terukur.

Bukti :

1. Ambil sembarang $a, b \in R$. Diketahui f dan g fungsi terukur maka $\{x \in X;\ g(x) \leq b-a\} = \{x \in X;\ a \leq b-g(x)\}$ terukur,sehingga b-g. fungsi terukur. Kemudian $(f+g)^{-1}([a, \infty)) = \{x \in X;\ a \leq f(x)+g(x)\} = \{x \in X;\ a-g(x) \leq f(x)\}$terukur sebab $\{x \in X;\ f(x) \leq h(x)\}$ terukur jika f dan h fungsi terukur. $(f+g)^{-1}([a, \infty))$ terukur maka menurut teorema 3.4.1 (f+g) fungsi terukur.

2. Ambil sembarang $a \in R$. f fungsi terukur maka $f^{-1}([-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ terukur untuk $a \geq o$ sehingga $\{x \in X; f^2(x) \leq a\} = f^{-1}([\sqrt{a}, \sqrt{a})$ terukur juga. Kemudian jika $a < 0$ maka $\{x \in X; f^2(x) \leq a\} = \phi$ dan merupakan himpunan terukur sehingga

f^2 merupakan fungsi terukur. Menurut teorema 3.4.1 $f^{-1}((-\infty,a]$ terukur maka $f^{-1}((-\infty,a])^c = f^{-1}((a,\infty)$ terukur . Oleh karena itu $\{x\in X;f(x)>\frac{a}{c}\}$ terukur maka untuk $c>0$ $\{x\in X;f(x)>\frac{a}{c}\}=\{x\in X;cf(x)>a\}$ terukur dan untuk $c<0$ maka $\{x\in X;f(x)>\frac{a}{c}\}=\{x\in X;cf(x)<a\}$ terukur sehingga c.f merupakan fungsi terukur. Akibatnya $f.g=\frac{1}{2}[(f+g)^2+(-\frac{1}{2}f^2)-\frac{1}{2}g^2]$ merupakan fungsi terukur sebab $\frac{1}{2}[(f+g)^2$ fungsi terukur,$(-\frac{1}{2}f^2)$ fungsi terukur $-\frac{1}{2}g^2$ fungsi terukur.

3a. Diketahui bahwa $\{x\in X;|f(x)|\leq a\}=\phi$ bila $a<0$ sehingga $\{x\in X;|f(x)|\leq a\}$ merupakan himpunan terukur. $\{x\in X;|f(x)|\leq a\}=\{x\in X;f(x)\leq a\}\cap\{x\in X;f(x)\geq -a\}$ bila $a\geq 0$ yang juga merupakan himpunan terukur.

Jadi $|f|$ merupakan fungsi terukur.

b. $f^+(x)=\text{maks}\{0,f(x)\}$ tetapi kita juga dapat menulis bahwa $f^+(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$ sebab:

i. untuk $f(x)\leq 0$ maka :

$$f^+(x)=0=\frac{1}{2}(0)=\frac{1}{2}(-f(x)+f(x))=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$$

ii. untuk $f(x)>0$ maka

$$f^+(x)=f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(x))=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$$

Kemudian karena $|f|$ dan f terukur maka $f^+(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$ terukur.

3c. $f^-(x)$=maks$\{0,-f(x)\}$= $\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$ sebab :

untuk $f(x)<0$ maka $f^-(x)=-f(x)=\frac{1}{2}(-f(x)-f(x))=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$

sedangkan untuk $f(x)\geq 0$ maka $f^-(x)=0=\frac{1}{2}(f(x)-f(x))=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$

sehingga untuk semua x maka $f^-(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$ kemudian karena $|f|$ dan $-f$ fungsi terukur maka f^- fungsi terukur.

4a. Diketahui bahwa $(f\vee g)(x)$=maks$\{f(x),g(x)\}$ untuk semua x maka :

i. untuk $f(x)\geq g(x)$ maka:

$(f\vee g)(x) = f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(x)-g(x)+g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+f(x)-g(x))=$ $\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$,sedangkan

ii. untuk $f(x)<g(x)$ maka:

$(f\vee g)(x) = g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+ g(x)- f(x))=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$

sehingga untuk semua f dan g berlaku $(f\vee g)(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$. Padahal f-g fungsi terukur sehingga $|f-g|$ fungsi terukur . Jadi $f\vee g$ fungsi terukur.

4b. Diketahui bahwa $(f\wedge g)(x)$=min$\{f(x),g(x)\}$ untuk semua $x\in X$ maka:

`i. untuk $f(x)>g(x)$ maka

$(f\wedge g)(x)= g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$

ii. untuk $f(x) \leq g(x)$ maka

$$(f \wedge g)(x) = f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-\ g(x)+\ f(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-(\ g(x)-\ f(x)) =$$

$$\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$$

sehingga untuk semua f dan g berlaku $(f \wedge g)(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$. f-g terukur dan |f-g| terukur maka dapat disimpulkan bahwa $f \wedge g$ terukur . ■

Teorema 3.4.5. Untuk barisan $\{f_n\}$ dari fungsi terukur maka pernyataan berikut akan terpenuhi :

1. Jika $f_n \to f$ h.d maka f fungsi terukur.
2. Jika $\{f_n(x)\}$ barisan terbatas untuk setiap x maka lim Sup f_n dan lim Inf f_n fungsi terukur

Bukti :

1. Ambil $A=\{x \in X;\ \lim f_n(x)=f(x)\}$. Karena $f_n \to f$ h.d kita mempunyai $\mu^*(A^c)=0$. Akibatnya A^c terukur sehingga A juga himpunan terukur. Kemudian ambil sembarang $a \in R.)$. Dengan jelas dapat dikatakan bahwa $A \cap f((a,\infty)) = A \cap [\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-}((a+\frac{1}{n},\infty))]$. Semua f_i terukur dan A juga terukur sehingga $A \cap f^{-}((a,\infty))$ merupakan himpunan terukur. $\mu(A^c \cap f((a,\infty))) \leq \mu(A^c)=0$ sehingga $A^c \cap f^{-}((a,\infty))$ himpunan terukur. $f^{-}((a,\infty)) = [A \cap f^{-}((a,\infty))] \cup [A^c \cap f^{-}((a,\infty))]$ merupakan himpunan terukur sehingga f fungsi terukur.

2. Ambil $\{f_n(x)\}$ barisan terbatas untuk setiap x. Pertama kita akan menunjukkan bahwa lim sup f_n adalah fungsi terukur. lim sup $f_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} f_n$. Andaikan $h_n = f_{m+1} \vee \ldots \vee f_{m+n}$ terukur untuk setiap n sehingga $h_n \uparrow \bigvee_{i=m}^{\infty} f_i = g_m$ fungsi terukur untuk setiap g_m . Jika $g_m \downarrow$lim sup f_n maka lim sup f_n merupakan fungsi terukur sebab g_m terukur untuk semua m. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa lim inf f_n merupakan fungsi terukur. Diketahui bahwa lim Inf f_n = -lim Sup $(-f_n)$. Jika $\{f_n\}$ merupakan barisan fungsi terukur maka $\{-f_n\}$ juga merupakan barisan fungsi terukur sehingga lim sup $(-f_n)$ fungsi terukur maka lim inf f_n = -lim sup $(-f_n)$ juga merupakan fungsi terukur.

Sebelum kita akhiri pembahasan pada sub bab ini akan kita bahan terlebih dahulu teorema Egoroff yang menghubungkan antara barisan fungsi yang konvergen terhadap fungsi tertentu hampir dimana-mana dengan barisan fungsi yang konvergen seragam.

Teorema 3.4.6. (Egoroff) Ambil $\{f_n\}$ barisan dari fungsi terukur sedemikian sehingga $f_n \to f$ h.d dan ambil E himpunan bagian terukur dari X sedemikian sehingga $\mu^*(E) < \infty$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada himpunan bagian terukur F dari E dengan $\mu^*(F) < \varepsilon$ dan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada E~F.

Bukti :

Pertama kita dapat menggeneralisasikan terlebih dahulu bahwa Lim $f_n(x) = f(x)$ terpenuhi untuk semua $x \in X$. Kemudian kita buat himpunan sedemikian sehinggga untuk masing-masing pasangan bilangan bulat positif n dan bilangan k , himpunan $E_{n.k}=\{x\in E; |f_m(x)-f(x)|<2^{-n}$ untuk semua $m\geq k\}$. Jelas bahwa E_{nk} merupakan himpunan bagian terukur dari X dan $E_{n.k}\subseteq E_{n.k+1}$ terpenuhi untuk setiap k dan n. Karena $\lim f_n(x)=f(x)$ untuk setiap $x\in X$ maka $E_{nk}\underset{k}{\uparrow} E$ untuk setiap bilangan tetap n sehingga kita juga dapat mengatakan bahwa $\mu(E_{nk})\underset{k}{\uparrow}\mu(E)$ untuk setiap bilangan tetap n. Kemudian ambil sembarang $\varepsilon>0$. Diketahui bahwa $\mu^*(E)<\infty$ untuk setiap n, maka ada bilangan bulat k_n sedemikian sehingga $\mu^*(E\sim E_{n.kn})=\mu^*(E)-\mu^*(E_{n.kn})<2^{-n}.\varepsilon$. Kemudian kita buat himpunan $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-E_{n.kn})$ maka himpunan F terukur dan $F\subseteq E$ dengan $\mu^*(F)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E-E_{n.kn})<\varepsilon$. Oleh karena itu untuk sembarang $\varepsilon>0$ ada $k_m\in N$ sedemikian sehingga untuk semua $m\geq k_n$ dan untuk semua $x\in E\sim F=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{n.kn}$ maka $|f_m(x)-f(x)|<2^{-n}$. Jadi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $E\sim F$.

5. Fungsi Sederhana dan Fungsi Tangga

Pembahasan tentang fungsi sederhana dan fungsi tangga akan diawali dengan pembahasan tentang fungsi karakteristik. Jika A himpunan bagian X maka fungsi χ_A adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada X dengan $\chi_A(x)=1$ jika $x\in A$ dan $\chi_A(x)=0$ jika $x\notin A$. Kemudian aturan-aturan pada fungsi χ akan dibuat dalam suatu teorema berikut.

Teorema 3.5.1. Misalkan A dan B himpuanan bagian X maka relasi-relasi dibawah ini akan terpenuhi .

1. $\chi_\phi=0$ dan $\chi_X=1$
2. Jika $A\subseteq B$ maka $\chi_A\leq\chi_B$
3. $\chi_{(A\cap B)}=\chi_A.\chi_B=\chi_A\wedge\chi_B$
4. $\chi_{(A\cup B)}=\chi_A+\chi_B - \chi_{(A\cap B)}=\chi_A\vee\chi_B$
5. $\chi_{(A-B)}=\chi_A- \chi_{(A\cap B)}$
6. Jika $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ dan $\{A_n\}$ adalah barisan yang saling asing yang merupakan himpunan bagian dari X maka $\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$
7. $\chi_{AXB}=\chi_A.\chi_B$ dengan B merupakan himpunan bagian dari himpunan Y dan A merupakan himpunan bagian dari X.

Bukti:

1. $x\notin\phi$ sehingga $\chi_\phi=0$

   $x\in X$ sehingga $\chi_X=1$
2. Ambil $A\subseteq B$ akan dibuktikan bahwa $\chi_A\leq\chi_B$. Andaikan benar bahwa $\chi_{A(x)}>\chi_{B(x)}$ untuk semua $x\in X$. Jika $x\in A$ maka $\chi_A(x)=1$. Kemudian karena $x\in A$ maka$x\in B$ sebab $A\subseteq B$ sehingga $\chi_B(x)=1$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_A(x)= \chi_B(x)$ dan sehingga tidak benar bahwa $\chi_{A(x)}>\chi_{B(x)}$. Akibatnya terjadi kontradiksi dan terbukti bahwa $\chi_A\leq\chi_B$.
3. Kita mempunyai $\chi_{(A\cap B)}(x)= 1$, jika $x\in A\cap B$

$\chi_{(A\cap B)}(x)=0$, jika $x\notin A\cap B$

Sehingga $\chi_{(A\cap B)}(x)=1$, jika $x\in A$ dan $x\in B$

$\chi_{(A\cap B)}(x)=0$, jika $x\notin A$

$\chi_{(A\cap B)}(x)=0$, jika $x\notin B$

Oleh karena itu $\chi_{(A\cap B)}(x)=\chi_A(x).\chi_B(x)=\chi_A(x).\chi_B(x)=\min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}$

4. untuk $x\in A$ dan $x\in B$ maka $\chi_{(A\cup B)}(x)=1=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$

untuk $x\in A$ dan $x\notin B$ maka $\chi_{(A\cup B)}(x)=1=1+0+0=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$ $=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$

untuk $x\notin A$ dan $x\in B$ maka $\chi_{(A\cup B)}(x)=1=0+1+0=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$ $=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$

untuk $x\notin A$ dan $x\notin B$ maka $\chi_{(A\cup B)}(x)=0=0++0=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$ $=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$

5. jika $x\in A$ dan $x\in B$ maka $\chi_{(A-B)}(x)=0=1-1=\chi_A(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$

jika $x\in A$ dan $x\notin B$ maka $\chi_{(A-B)}(x)=1=1-0=\chi_A(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$

jika $x\notin A$ dan $x\in B$ maka $\chi_{(A-B)}(x)=0=0-0=\chi_A(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$

jika $x\notin A$ dan $x\notin B$ maka $\chi_{(A-B)}(x)=0=0-0=\chi_A(x)-\chi_{(A\cap B)}(x)$

6. Ambil $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\{A_n\}$ barisan yang saling asing himpunan bagian dari X .

Jika $x\in A$ maka ada A_j sedemikian sehingga $x\in A_j$ maka $\chi_A(x)=1$ sedangkan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{A1}(x)+\ldots+\chi_{Aj}(x)+\chi_{A(j+1)}(x)+\ldots=0+\ldots+1+0+\ldots=1$$

Jadi benar bahwa $\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$

7. Catat bahwa $\chi_{(AXB)}(x,y)=1=1.1=\chi_A(x).\chi_B(y)$ jika $(x,y)\in AXB$

jika $x\in A$ dan $y\notin B$ maka $(x,y)\notin AXB$ sehingga $\chi_{(AXB)}(x,y)=0=1.0=\chi_A(x).\chi_B(y)$

jika $x\notin A$ dan $y\in B$ maka $(x,y)\notin AXB$ sehingga $\chi_{(AXB)}(x,y)=0=0.1=\chi_A(x).\chi_B(y)$

jika $x\notin A$ dan $y\notin B$ maka $(x,y)\notin AXB$ sehingga $\chi_{(AXB)}(x,y)=0=0.0=\chi_A(x).\chi_B(y)$

Definisi 3.5.1. Q adalah *fungsi sederhana* jika dapat dinyatakan dalam bentuk $Q=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ dengan $A_i=\{x\in X;Q(x)=a_i\}$ terukur untuk semua i dan $a_1,a_2,...,a_n$ bernilai tidak nol dan berbeda. Suatu fungsi sederhana Q disebut *fungsi tangga* jika A_i merupakan himpunan terukur dengan $\mu^*(A_i)<\infty$

Definisi 3.5.2. Misal Q suatu fungsi tangga yang dinyatakan $Q=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ dengan $a_1,a_2,...,a_n$ bernilai tidak nol yang berbeda dan $A_i=\{x\in X;Q(x)=a_i\}$. Maka *integral Lebesgue* Q didefinisikan dengan $I(Q)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^*(A_i)$.

Teorema 3.5.2. Jika Q fungsi tangga maka $I(\alpha Q)=\alpha I(Q)$ terpenuhi untuk semua $\alpha\in R$.

Bukti:

Misal $Q=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$, maka $I(\alpha Q)=\sum_{i=1}^{n}\alpha\, a_i\,\mu^*(A_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^*(A_i)=\alpha I(Q)$

Teorema 3.5.3. Jika Q dan Z fungsi tangga maka I(Q+Z)=I(Q)+I(Z)

Bukti:

Misal $Q=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{Ai}$ dan $Z=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{Bj}$. Misalkan pula himpunan $E=(\bigcup_{i=1}^{n} Ai)\cup(\bigcup_{j=1}^{m} Bj)$. Kemudian kita bentuk $A_0=E-\bigcup_{i=1}^{n} A_i$;$B_0=E-\bigcup_{j=1}^{m} B_j$ dengan $a_0=b_0=0$ maka A_i dan B_j himpunan yang saling asing dan $\bigcup_{i=0}^{n} A_i=E=\bigcup_{j=0}^{m} B_j$.

Selanjutnya $Q+Z=\sum_{k=1}^{r} c_k\chi_{Ck}$. Karena $Q(x)+Z(x)\neq 0$ berakibat $Q(x)\neq 0$ atau $Z(x)\neq 0$ dan $\bigcup_{k=1}^{r} C_k\subseteq E$. Misal $c_0=0$ dan $C_o=E-\bigcup_{k=1}^{r} C_k$ maka C_k suatu pasangan terurut yang saling asing dan $C_k=\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j=0}^{m} C_k\cap A_i\cap B_j$ sehingga $\mu^*(C_k)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mu^*(C_k\cap A_i\cap B_j)$. Perhatikan bahwa $c_k\mu^*(C_k\cap A_i\cap B_j)=(a_i+bj)$ $\mu^*(C_k\cap A_i\cap B_j)$ terpenuhi untuk semua i,j dan k sebab untuk $C_k\cap A_i\cap B_j=\phi$ maka persamaan diatas jelas terpenuhi, tetapi jika $x\in C_k\cap A_i\cap B_j$ maka persamaan di atas dipenuhi berdasarkan $c_k=Q(x)+Z(x)=a_i+bj$, kemudian

$$I(Q+Z)=\sum_{k=1}^{r} c_k\,\mu^*(C_k)=\sum_{k=0}^{r} c_k\,\mu^*(C_k)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_k\,\mu^*(C_k\cap A_i\cap B_j)$$

$$=\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i+b_j)\,\mu^*(C_k\cap A_i\cap B_j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i+b_j)\,\mu^*(A_i\cap B_j)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} \mu^*(A_i \cap B_j) + \sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{i=0}^{n} \mu^*(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i\, \mu^*(A_i) + \sum_{j=0}^{m} b_j\, \mu^*(B_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu^*(B_j) = I(Q) + I(Z) \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5.4. Misal Q dan Z fungsi tangga maka pernyataan di bawah ini akan terpenuhi

1a. Jika $Q \geq 0$ h.d maka $I(Q) \geq 0$

b. Jika $Q \geq Z$ h.d maka $I(Q) \geq I(Z)$

2.a. Jika $Q=0$ h.d maka $I(Q)=0$

b. Jika $Q=Z$ h.d maka $I(Q)=I(Z)$

Bukti :

1a. Pembuktiannya dengan menggunakan kontradiksi.

Andaikan $I(Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i) < 0$ maka $a_i < 0$ sebab $\mu^*(A_i) \geq 0$ untuk semua i. Padahal $A_i = \{x \in X; Q(x) = a_i\}$ maka $\mu^*(A_i) = 0$ sebab $Q \geq 0$ sehingga $I(Q)=0$. Padahal di atas diandaikan $I(Q)<0$ maka terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $I(Q) \geq 0$

1.b. $Q \geq Z$ h.d maka $Q-Z \geq 0$ h.d sehingga $I(Q)-I(Z) \geq 0$. Oleh karena itu $I(Q) \geq I(Z)$

2.a. $Q=0$ h.d berarti $Q \geq 0$ h.d dan $-Q \geq 0$ h.d sehingga $I(Q) \geq 0$ dan $-I(Q) \geq 0$. Jadi $I(Q)=0$

2.b. $Q=Z$ h.d maka $Q-Z=0$ h.d sehingga $I(Q)-I(Z)=0$. Jadi $I(Q)=I(Z)$. $\blacksquare$

Teorema 3.5.5 Ambil $\{Q_n\}$ barisan fungsi tangga .Jika $Q_n \downarrow 0$ h.d maka

$I(Q_n)\downarrow 0$

Bukti :

Andaikan $Q_n\downarrow 0$ h.d .Ambil $A_n=\{x\in X; Q_{n+1}(x)>Q_n(x))$ dan $A_0=\{x\in X; Q_n(x)\to 0\}$ dengan asumsi di atas maka $\mu^*(A_n)=0$ untuk n=0,1,2, . . . Himpunan $A=\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ maka $\mu^*(A)=0$. Jika kita mempunyai $\psi_n(x)\downarrow 0$ untuk setiap $x\in X$ maka $\psi_n=Q_n\chi_{A'}$ sehingga $\psi_n=Q_n$ h.d untuk setiap n .Dengan teorema 3.5.4 kita mempunyai $I(\psi_n)=I(Q_n)$ untuk setiap n sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa $Q_n\downarrow 0$ terpenuhi untuk setiap $x\in X$. Kemudian ambil sembarang $\varepsilon>0$. himpunan $M=\text{maks}\{Q_1(x); x\in X\}$ dan $B=\{x\in X; Q_1>0\}$ maka jelas $\mu^*(B)<\infty$. Untuk setiap n didefinisikan $E_n=\{x\in X; Q_n(x)\geq\varepsilon\}$ maka $\mu^*(E_1)<\infty$. Karena $Q_n\downarrow 0$ terpenuhi untuk setiap $x\in X$ maka $E_n\downarrow\phi$ sehingga $\mu^*(E_n)\downarrow 0$. Kemudian pilih suatu bilangan k sedemikian sehingga $\mu^*(E_k)<\varepsilon$, maka untuk $n\geq k$ berlaku

$0\leq Q_n\leq Q_k=Q_k\,\chi_{Ek}+Q_k\chi_{B-Ek}\leq M\chi_{Ek}+\varepsilon\chi_B$.

Pertidaksamaan diatas berakibat

$0\leq I(Q_n)\leq M\,\mu^*(E_k)+\varepsilon\,\mu^*(B)<\varepsilon(M+\mu^*(B))$ untuk semua $n\geq k$. Oleh karena itu $\lim I(Q_n)=0$ sehingga terbukti $I(Q_n)\downarrow 0$.

Teorema 3.5.6. Andaikan 2 barisan fungsi tangga $\{Q_n\}$ dan $\{Z_n\}$ memenuhi $Q_n\uparrow f$ h.d dan $Z_n\uparrow f$ h.d dengan $f:X\to R^*$ fungsi yang diberikan maka $\lim I(Q_n)=\lim I(Z_n)$

Bukti :

Untuk setiap bilangan tetap m maka berlaku $Q_m \wedge Z_n \underset{n}{\uparrow} Q_m \wedge f = Q_m$ h.d sehingga $\lim_{n\to\infty} I(Q_m \wedge Z_n) = I(Q_m)$. Padahal $Q_m \wedge Z_n \leq Z_n$ untuk semua n maka $I(Q_m) = \lim_{n\to\infty} I(Q_m \wedge Z_n) \leq \lim_{n\to\infty} I(Z_n)$ untuk semua bilangan tetap m sehingga $\lim_{n\to\infty} I(Q_n) \leq \lim_{n\to\infty} I(Z_n)$. Dengan jalan serupa, untuk setiap bilangan tetap m berlaku $Z_m \wedge Q_n \underset{n}{\uparrow} Z_m \wedge f = Z_m$ h.d sehingga $\lim_{n\to\infty} I(Z_m \wedge Q_n) = I(Z_m)$. Padahal $Q_m \wedge Z_n \leq Q_n$ untuk semua n maka $I(Z_m) = \lim_{n\to\infty} I(Z_m \wedge Q_n) \leq \lim_{n\to\infty} I(Q_n)$ berlaku untuk semua bilangan tetap m sehingga $\lim_{n\to\infty} I(Z_n) \leq \lim_{n\to\infty} I(Q_n)$. Jadi $\lim_{n\to\infty} I(Q_n) = \lim_{n\to\infty} I(Z_n)$ ■

Teorema 3.5.7. Ambil $\{Q_n\}$ suatu barisan fungsi tangga . Jika A himpunan bagian X sedemikian sehingga $Q_n \uparrow \chi_A$ h.d maka A himpunan terukur dan $\lim_{n\to\infty} I(Q_n) = \mu^*(A)$ terpenuhi.

Bukti :

Keterukuran dari A mengikuti dari teorema 3.4.5(1). Kita dapat mengasumsikan bahwa $Q_n(x) \uparrow \chi_A(x)$ terpenuhi untuk semua $x \in X$.Untuk setiap n himpunan $An = \{x \in X;\ Q_n(x) > 0\}$terukur dengan $A_n \uparrow A$. hal ini mengikuti bahwa $\chi_{An} \uparrow \chi_A$ sehingga $\lim_{n\to\infty} I(Q_n) = \lim_{n\to\infty} I(\chi_{An}) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$. ■

Teorema 3.5.8 Ambil $f: X \rightarrow R$ fungsi terukur sedemikian sehingga $f(x) \geq 0$ untuk semua x maka ada barisan $\{Q_n\}$ dari fungsi sederhana sedemikian sehingga $0 \leq Q_n(x) \uparrow f(x)$ terpenuhi untuk semua $x \in X$.

Bukti:

Untuk setiap n, himpunan $A_n^i=\{x\in X;(i-1)2^{-n}\leq f(x)<i2^{-n}\}$ untuk $i=1,\ldots n2^n$ dan catat bahwa $A_n^i\cap A_n^j=\phi$ jika $i\neq j$. Jika f terukur maka semua A_n^i himpunan terukur. Kemudian untuk setiap n didefinisikan $Q_n=\sum_{i=1}^{n2^n} 2^{-n}(i-1)\chi_{An^i}$ dan catat bahwa $\{Q_n\}$ adalah barisan fungsi sederhana. Kita dapat mengatakan juga bahwa $0\leq Q(x)\leq Q_{n+1}(x)\leq f(x)$ terpenuhi untuk semua x dan n sebab jika ada i sehingga $2^{-n}(i-1)>f(x)$ maka $\chi_{An^i}=0$. Untuk x yang tetap maka $0\leq f(x)-Q_n(x)\leq 2^{-n}$ terpenuhi untuk semua n sehingga $Q_n(x)\uparrow f(x)$ terpenuhi untuk semua $x\in X$. ■

6. UKURAN LEBESGUE

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa sifat dari ukuran Lebesgue pada R^n. Pada ukuran Lebesgue, **S** menyatakan semi ring yang berisi himpunan kosong dan semua himpunan yang mempunyai bentuk $A = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ dengan $-\infty < ai < bi < \infty$ untuk setiap i. Teorema berikut ini akan menyatakan bahwa suatu fungsi himpunan $\lambda : \mathbf{S} \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan $\lambda(\phi) = 0$ dan $\lambda(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n}[b_i - a_i)$ merupakan suatu ukuran dan disebut sebagai ukuran Lebesgue.

Teorema 3.6.1. fungsi $\lambda : \mathbf{S} \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan $\lambda(\phi) = 0$ dan $\lambda(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n}[b_i - a_i)$ adalah ukuran.

Bukti :

1. dari definisi kita dapat mengatakan bahwa $\lambda(\phi) = 0$. Sehingga kita tinggal membuktikan sifat aditif-σ
2. Pembuktiannya dengan menggunakan induksi matematika. Pertama kita misalkan S_n sebagai semi ring **S** pada R^n dan fungsi himpunan sebagai λ_n. Untuk n = 1 telah dibuktikan bahwa λ suatu ukuran, sekarang diasumsikan benar untuk n = k, kita akan menunjukkan benar untuk n = k + 1. Ambil AX [a,b) = $\bigcup_{i=1}^{\infty}[A_i\, X[a_i, b_i)]$ dengan $A \in S_k$, $A_i \in S_k$ untuk setiap i dan barisan $\{A_i \ X \ [a_i,b_i)\}$ adalah himpunan saling asing. Kemudian dapat dikatakan $\chi_{AX\,[a,b)} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i X [a_i,b_i)}$, sehingga untuk $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ dan $t \in R$ menghasilkan $\chi_A(x).\chi_{(a,b)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x).\chi_{[a_i,b_i)}(t)$. Andaikan Q_r merupakan fungsi tangga dengan $Q_r(t) = \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i}(x).\chi_{[a_i,b_i)}(t)$ maka $Q_r(t) \uparrow_r \chi_A(x).\chi_{[a,b)}(x)$ untuk setiap $t \in R$.

Dengan teorema 3.5.5. didapat :

$\sum_{i=1}^{r} \lambda(a_i, b_i)\, \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{r} (b_i - a_i)\, \chi_{A_i}(x) \uparrow (b-a)\, \chi_{A_i}(x)$ dan dengan teorema 3.5.5. kita juga dapat menyatakan bahwa $\sum_{i=1}^{r} (b_i - a_i)\, \lambda_k(A_i) \uparrow (b-a)\lambda_k(A)$

sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{k+1}(A_i\, X[a_i, b_i)) = \lambda_{k+1}(A\, X\, [a,b)) = \lambda_{k+1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}[A_i X[a_i, b_i)])$. Jadi dapat disimpulkan bahwa pada λ berlaku sifat aditif-σ. ∎

Teorema 3.6.2. Suatu himpunan bagian E pada R^n adalah terukur Lebesgue jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada himpunan terbuka ϑ sedemikian hingga $E \subseteq \vartheta$ dan $\lambda(\vartheta - E) < \varepsilon$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diasumsikan E terukur kemudian akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada himpunan terbuka ϑ sedemikian hingga $E \subseteq \vartheta$ dan $\lambda(\vartheta - E) < \varepsilon$. Untuk membuktikannya akan dilihat dua kasus yaitu :

1. $\lambda(E) < \infty$ ambil sembarang $\varepsilon > 0$, kemudian pilih barisan $\{I_i\}$ interval terbuka yang terbatas sedemikian hingga $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E) + \varepsilon$.

   Misalkan $\vartheta = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$,maka $\lambda(\vartheta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E) + \varepsilon$. Karena E terukur maka

   $\lambda(\vartheta) = \lambda(\vartheta \cap E^c) + \lambda(\vartheta \cap E)$.

   $\Leftrightarrow \lambda(\vartheta) = \lambda(\vartheta - E) + \lambda(E)$

   $\Leftrightarrow \lambda(\vartheta) - \lambda(E) = \lambda(\vartheta - E)$

   Sehingga $\lambda(\vartheta - E) = \lambda(\vartheta) - \lambda(E) < \varepsilon$

2. $\lambda(E) = \infty$, untuk setiap i himpunan $B_i = \{ x \in R^n ; d(x,0) \leq i \}$ dan $E_i = E \cap B_i$ dengan $d(x,0) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - 0)^2\right]^{1/2}$. Selanjutnya dapat dikatakan bahwa $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ dan setiap E_i himpunan terukur Lebesgue sedemikian hingga $\lambda(E_i) < \infty$. Kemudian ambil himpunan terbuka ϑ_i sedemikian hingga untuk setiap i

berlaku $E_i \subseteq \vartheta_i$ dan $\lambda(\vartheta_i - E_i) < 2^{-i}\,\varepsilon$ dan himpunan $\vartheta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \vartheta_i$. Maka ϑ merupakan himpunan terbuka dan $E \subseteq \vartheta$, sehingga $\lambda\,(\vartheta\text{-}E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\,(\vartheta_i - E_i) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Kita asumsikan bahwa setiap $\varepsilon > 0$ ada himpunan terbuka ϑ sedemikian hingga $E \subseteq \vartheta$ dan $\lambda\,(\vartheta - E) < \varepsilon$. Untuk setiap i pilih himpunan terbuka ϑ_i sedemikian hingga $E \subseteq \vartheta_i$ dan $\lambda\,(\vartheta_i - E) < i^{-1}$. Misal $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \vartheta_i$. Maka G himpunan terukur Lebesgue sedemikian hingga $E \subseteq G$. juga $\lambda\,(G - E) \leq \lambda\,(\vartheta_i - E) < i^{-1}$ untuk setiap i berimplikasi bahwa $\lambda\,(G - E) = 0$, dan G-E himpunan terukur lebesgue. Keterukuran E sekarang mengikuti dari relasi $E = G - (G\text{-}E)$ dan bukti selesai. ■

Teorema 3.6.3 Setiap himpunan bagian Borel dari R^n adalah terukur Lebesgue.

Bukti :

Ambil $-\infty < a_i < b_i < \infty$ untuk $i = 1, \ldots, n$, kemudian pilih m sedemikian hingga $a_i + \left(\frac{1}{m}\right) < b_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, relasi $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) = \bigcup_{k=m}^{\infty} [\prod_{i=1}^{\infty}[a_i + \frac{1}{k}, b_i)]$. Kita ketahui bahwa $\prod_{i=1}^{\infty}[a_i + \frac{1}{k}, b_i) \in \Lambda$, sedangkan Λ aljabar-σ maka $\bigcup_{k=m}^{\infty} [\prod_{i=1}^{\infty}[a_i + \frac{1}{k}, b_i)] = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \in \Lambda$. Kita ketahui bahwa himpunan terbuka dapat ditulis sebagai gabungan terbilang dari interval terbuka sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap himpunan bagian Borel dari R^n adalah terukur Lebesgue. ■

BAB IV

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat ditarik dari Teori Ukuran ini adalah sebagai berikut :

1. Keluarga semua himpunan terukur Λ adalah aljabat-σ.
2. Misal X himpunan tidak kosong. Jika Λ kumpulan semua himpunan terukur yang terdiri atas himpunan bagian dari X dan μ suatu ukuran luar pada X maka (X, Λ, μ) adalah ruang ukuran
3. Setiap anggota semi ring adalah terukur.
4. Jika f dan g fungsi terukur maka $f+g, fg, |f|, f^{+}, f^{-}$ $f\wedge g$, dan $f\vee g$ merupakan fungsi terukur.
5. Andaikan **S** menyatakan semi ring yang berisi himpunan kosong dan semua himpunan yang mempunyai bentuk $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ dengan $-\infty<a_i<b_i<\infty$ untuk setiap i . Fungsi himpunan λ:**S**$\rightarrow\infty$ yang didefinisikan dengan $\lambda(\phi) = 0$ dan $\lambda(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ = adalah ukuran dan ini disebut sebagai ukuran Lebesgue.
6. Setiap himpunan bagian Borel dari R^n adalah terukur Lebesgue.

DAFTAR PUSTAKA

Aliprantis, C. D, dan Burkinshaw,O,1990. *Principles of Real Analysis* . San Diego:Academic Press.Inc.

Aliprantis, C. D, dan Burkinshaw,O,1990. *Problems of Real Analysis* . San Diego:Academic Press.Inc.

Brucner,A.M, 1997. *Real Analysis* . New Jersey :Prentice-Hall International.Inc.

Lipschutz, S, 1965.*Theory and Problem of General Topology*. Newyork:Schaum Publishing Company.

Sumantri,R,1983. *Analisis Real* .Jakarta : Karunika, Universitas terbuka.