## ABSTRAK

Masalah ekstrem suatu fungsi dengan satu variabel di mana $f$ berturunan dua kali pada titik kritis $a$ dan $f''(a)=0$ dan masalah ekstrem suatu fungsi dengan dua variabel di mana $f$ berturunan dua kali pada titik kritis $(a,b)$ dan $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)=0$ dapat dibahas dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel dan dua variabel. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut:

*Teorema Taylor untuk Fungsi Dengan Satu Variabel:*

*Jika fungsi $f(x)$ berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam suatu interval yang memuat titik a dan*

$$\rho_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*adalah polinomial Taylor ke-n untuk $f$ di sekitar $x=a$,*

*maka untuk setiap $x$ dalam interval, ada sekurang-kurangnya satu titik c antara a dan $x$ sedemikian hingga*

$$R_n(x)=f(x)-\rho_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel:*

*Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel yang mempunyai turunan parsial hingga pangkat ke-$n+1$ yang kontinu pada suatu kitaran yang berpusat pada titik $(a,b)$ dan Polinomial Taylor ke-n untuk $f$ di sekitar titik $(a,b)$ adalah*

$$\rho_n(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b),$$

*maka untuk setiap $(x,y)$ dalam kitaran, ada sekurang-kurangnya satu titik $(a_1,b_1)$ sedemikian hingga*

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\rho_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a_1,b_1).$$

Andaikan bahwa $f$ berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam suatu interval yang memuat titik $a$ dan untuk $x=a$ berlaku $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ dan $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ maka nilai ekstrem suatu fungsi dapat dicari dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel. Dalam hal ini $f(x)$ dapat diuraikan menjadi deret Taylor dengan sisa di sekitar titik $x=a$,

$f(a+h)-f(a)=\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$, di mana $x=a+\theta h$, $0<\theta<1$ ............(*)

Tanda $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sama dengan tanda $f^{(n+1)}(a)$, berdasarkan sifat kekontinuan.

Untuk $n\geq 2$ dan

- jika $n$ genap maka tanda $f(a+h)-f(a)$ berubah, jika tanda $h$ dari (*) berubah, jadi $f(a)$ tidak mempunyai suatu nilai ekstrem.
- jika $n$ ganjil maka tanda $f(a+h)-f(a)$ sama dengan tanda $f^{(n+1)}(a)$di sebelah kiri maupun kanan titik $x=a$. Dalam hal ini $f(a)$ mempunyai suatu nilai ekstrem yaitu suatu maksimum jika $f^{(n+1)}(a)<0$ dan suatu minimum jika $f^{(n+1)}(a)>0$.

Andaikan bahwa $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel yang turunan parsial hingga pangkat ke- $n+1$ kontinu pada suatu kitaran yang berpusat pada titik $(a,b)$ dan untuk $(x,y)=(a,b)$ berlaku $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ dan $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xx}^2(a,b)=0$, maka ada tidaknya nilai ekstrem suatu fungsi di titik $(a,b)$ dapat di cari dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel, dalam kasus ini dengan $f(x,y)$ dapat diuraikan menjadi deret Taylor dengan sisa di $(x,y)=(a,b)$,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k) \quad \text{.........(**)}$$

di mana $(a+\theta h,b+\theta k)$ dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik $(a,b)$ dan $0<\theta<1$.

Jika (**) bertanda positif maka $f(a,b)$ adalah nilai minimum dan jika (**) bernilai negatif maka $f(a,b)$ adalah nilai maksimum. Jika (**) memberikan tanda yang berbeda untuk setiap $(h,k)$ yang diberikan maka $f(a,b)$ bukan nilai ekstrem.

## ABSTRACT


Extreme problem of a function with one variable in which $f$ is differentiated twice on critical point $a$ and $f''(a)=0$ and extreme problem of a function with two variables in which $f$ is differentiated twice on critical point $(a,b)$ and $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^{2}(a,b)=0$ can be discussed by using Taylor's Theorem for function with one variable and two variables. This fact can be written as bellow:

*Taylor's Theorem for function with one variable:*

*If function $f(x)$ can be differentiated $n+1$ at each point in an interval containing point a and*

$$\rho_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*be the $n^{th}$ Taylor polynomial about $x=a$ for $f$,*

*then for each $x$ in the interval, there is at least one point c between a and $x$ such that*

$$R_n(x)=f(x)-\rho_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Taylor's Theorem for function with two variables:*

*If $f(x,y)$ is function with two variables which possesses continuous partial derivatives of order $n+1$ in circle centered on point $(a,b)$ and*

$$\rho_n(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b),$$

*Be the $n^{th}$ Taylor polynomial about $(x,y)=(a,b)$ for $f$,*

*then there is at least one point $(a_1,b_1)$ in circle centered on point $(a,b)$ such that*

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\rho_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a_1,b_1).$$

Suppose that $f$ can be differentiated $n+1$ times in an interval containing point $a$ and for $x=a$ there is rule $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ and $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ so the extreme value can be found by using Taylor's Theorem for function with one variable. In this case $f(x)$ can be stretched to be Taylor series with the remainder arround point $x=a$,

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \text{ where } x=a+\theta h,\ 0<\theta<1 \qquad \text{..........(*)}$$

Sign $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ equals to sign $f^{(n+1)}(a)$, based on continuous characteristics.

For $n\geq 2$ and

- if $n$ is even then sign $f(a+h)-f(a)$ change, if sign $h$ from (*) change, so $f(a)$ does not have an extreme value.
- if $n$ is old then sign $f(a+h)-f(a)$ equals to sign $f^{(n+1)}(a)$ in the left or right side of point $x=a$. In this case $f(a)$ have an extreme value, that is a maximum if $f^{(n+1)}(a)<0$ and a minimum if $f^{(n+1)}(a)>0$.

Suppose that $f(x,y)$ is a function with two variables which possesses continuous partial derivatives of order $n+1$ in circle centered on point $(a,b)$ and for $(x,y)=(a,b)$ is led $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ and $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xx}^2(a,b)=0$, so whether there is not an extreme value in function on point $(a,b)$ can be found by using Taylor's Theorem for function with two variables, in this case $f(x,y)$ can be stretched to be Taylor series with the remainder arround point $(x,y)=(a,b)$,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k) \qquad \text{.........(**)}$$

where $(a+\theta h,b+\theta k)$ in a circle centrered on $(a,b)$ and $0<\theta<1$.

If (**) has positive sign, then $f(a,b)$ is minimum value and if (**) has negative sign, then $f(a,b)$ is maximum value. If (**) gives different sign for $(h,k)$ that is give, then $f(a,b)$ is not extreme value.