PEMBAHASAN EKSTREM FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA TAYLOR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Tutut Bhakti Vrisanti

Nim : 961414001
Nirm : 960051120501120001

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2002

SKRIPSI

PEMBAHASAN EKSTREM FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA TAYLOR

Oleh:

Tutut Bhakti Vrisanti

Nim : 961414001

Nirm : 960051120501120001

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Drs. A. Tutoyo, M.Sc

tanggal 27 - 9 - 2002

SKRIPSI

PEMBAHASAN EKSTREM FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA TAYLOR

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Tutut Bhakti Vrisanti

Nim : 961414001

Nirm : 960051120501120001

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 21 September 2002
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Ketua	:	Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, MT	....
Anggota	:	Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	:	Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	:	Wanty Widjaja, M. Ed.	....

Yogyakarta, 21 September 2002
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma

Dekan

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.

Jawaban terdapat pada akhir perjalanan
bukan pada awal perjalanan.

Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan dibukakan bagimu. (Mat 7:7)

Engkau, TUHAN, janganlah menahan rahmat-Mu dari padaku, kasih-Mu dan kebenaran-Mu kiranya menjaga aku selalu! (Mzm 40:12)

Sungguh, Engkau, ya Allah, telah mendengarkan nazarku, telah memenuhi permintaan orang-orang yang takut akan nama-Mu. (Mzm 61:6)

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Teriring rasa hormat dan cinta
aku persembahkan skripsi ini
sebagai ucapan terima kasih dan tanda baktiku
untuk
Bapak dan Ibu
atas cinta dan perhatiannya

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, selain yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 21 September 2002

Penulis

Tutut Bhakti Vrisanti

ABSTRAK

Masalah ekstrem suatu fungsi dengan satu variabel di mana f berturunan dua kali pada titik kritis a dan $f''(a)=0$ dan masalah ekstrem suatu fungsi dengan dua variabel di mana f berturunan dua kali pada titik kritis (a,b) dan $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) = 0$ dapat dibahas dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel dan dua variabel. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut:

Teorema Taylor untuk Fungsi Dengan Satu Variabel:

Jika fungsi $f(x)$ berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam suatu interval yang memuat titik a dan

$$\rho_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

adalah polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar $x = a$,

maka untuk setiap x dalam interval, ada sekurang-kurangnya satu titik c antara a dan x sedemikian hingga

$$R_n(x) = f(x) - \rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel:

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel yang mempunyai turunan parsial hingga pangkat ke-$n+1$ yang kontinu pada suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b) dan Polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar titik (a,b) adalah

$$\rho_n(x,y) = f(a,b) + \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b) + \frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b) + \cdots + \frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b),$$

maka untuk setiap (x,y) dalam kitaran, ada sekurang-kurangnya satu titik (a_1, b_1) sedemikian hingga

$$R_n(x,y) = f(x,y) - \rho_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a_1,b_1).$$

Andaikan bahwa f berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam suatu interval yang memuat titik a dan untuk $x=a$ berlaku $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ dan $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ maka nilai ekstrem suatu fungsi dapat dicari dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel. Dalam hal ini $f(x)$ dapat diuraikan menjadi deret Taylor dengan sisa di sekitar titik $x=a$,

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\ \text{di mana } x=a+\theta h,\ 0<\theta<1 \qquad \text{...........(*)}$$

Tanda $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sama dengan tanda $f^{(n+1)}(a)$, berdasarkan sifat kekontinuan.

Untuk $n\geq 2$ dan

- jika n genap maka tanda $f(a+h)-f(a)$ berubah, jika tanda h dari (*) berubah, jadi $f(a)$ tidak mempunyai suatu nilai ekstrem.
- jika n ganjil maka tanda $f(a+h)-f(a)$ sama dengan tanda $f^{(n+1)}(a)$di sebelah kiri maupun kanan titik $x=a$. Dalam hal ini $f(a)$ mempunyai suatu nilai ekstrem yaitu suatu maksimum jika $f^{(n+1)}(a)<0$ dan suatu minimum jika $f^{(n+1)}(a)>0$.

Andaikan bahwa $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel yang turunan parsial hingga pangkat ke- $n+1$ kontinu pada suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b) dan untuk $(x,y)=(a,b)$ berlaku $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ dan $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xx}^2(a,b)=0$, maka ada tidaknya nilai ekstrem suatu fungsi di titik (a,b) dapat di cari dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel, dalam kasus ini dengan $f(x,y)$ dapat diuraikan menjadi deret Taylor dengan sisa di $(x,y)=(a,b)$,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k) \qquad \text{.........(**)}$$

di mana $(a+\theta h,b+\theta k)$ dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b) dan $0<\theta<1$.

Jika (**) bertanda positif maka $f(a,b)$ adalah nilai minimum dan jika (**) bernilai negatif maka $f(a,b)$ adalah nilai maksimum. Jika (**) memberikan tanda yang berbeda untuk setiap (h,k) yang diberikan maka $f(a,b)$ bukan nilai ekstrem.

ABSTRACT

Extreme problem of a function with one variable in which f is differentiated twice on critical point a and $f''(a)=0$ and extreme problem of a function with two variables in which f is differentiated twice on critical point (a,b) and $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)=0$ can be discussed by using Taylor's Theorem for function with one variable and two variables. This fact can be written as bellow:

Taylor's Theorem for function with one variable:

If function $f(x)$ can be differentiated $n+1$ at each point in an interval containing point a and

$$\rho_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

be the n^{th} Taylor polynomial about $x=a$ for f,

then for each x in the interval, there is at least one point c between a and x such that

$$R_n(x)=f(x)-\rho_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Taylor's Theorem for function with two variables:

If $f(x,y)$ is function with two variables which possesses continuous partial derivatives of order $n+1$ in circle centered on point (a,b) and

$$\rho_n(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b),$$

Be the n^{th} Taylor polynomial about $(x,y)=(a,b)$ for f,

then there is at least one point (a_1,b_1) in circle centered on point (a,b) such that

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\rho_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a_1,b_1).$$

Suppose that f can be differentiated $n+1$ times in an interval containing point a and for $x=a$ there is rule $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ and $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ so the extreme value can be found by using Taylor's Theorem for function with one variable. In this case $f(x)$ can be stretched to be Taylor series with the remainder arround point $x=a$,

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\ \text{where } x=a+\theta h,\ 0<\theta<1 \qquad \text{..........(*)}$$

Sign $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ equals to sign $f^{(n+1)}(a)$, based on continuous characteristics.

For $n\geq 2$ and

- if n is even then sign $f(a+h)-f(a)$ change, if sign h from (*) change, so $f(a)$ does not have an extreme value.
- if n is old then sign $f(a+h)-f(a)$ equals to sign $f^{(n+1)}(a)$ in the left or right side of point $x=a$. In this case $f(a)$ have an extreme value, that is a maximum if $f^{(n+1)}(a)<0$ and a minimum if $f^{(n+1)}(a)>0$.

Suppose that $f(x,y)$ is a function with two variables which possesses continuous partial derivatives of order $n+1$ in circle centered on point (a,b) and for $(x,y)=(a,b)$ is led $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ and $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xx}^2(a,b)=0$, so whether there is not an extreme value in function on point (a,b) can be found by using Taylor's Theorem for function with two variables, in this case $f(x,y)$ can be stretched to be Taylor series with the remainder arround point $(x,y)=(a,b)$,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k) \qquad \text{.........(**)}$$

where $(a+\theta h,b+\theta k)$ in a circle centrered on (a,b) and $0<\theta<1$.

If (**) has positive sign, then $f(a,b)$ is minimum value and if (**) has negative sign, then $f(a,b)$ is maximum value. If (**) gives different sign for (h,k) that is give, then $f(a,b)$ is not extreme value.

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Allah, bahwa setelah menempuh perjalanan cukup panjang, penulis dapat menyelesaikan kuliah dan penyusunan skripsi ini.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini, pertama-tama kepada:

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc. yang telah dengan sangat sabar membimbing, memberikan tanggapan-tanggapan dan saran-saran penulis selama penyusunan skripsi hingga penyempurnaan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Th. Sugiarto, MT selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika.
3. Bapak Dr. Y. Marpaung dan Ibu Wanty Widjaja, M. Ed. yang telah memberikan tanggapan dan saran-saran untuk penyempurnaan skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu dosen yang telah memberikan begitu banyak pengalaman dan pelajaran yang sangat berharga sebagai bekal penulis dalam menapaki hari-hari selanjutnya.
5. Bapak Soenarjo dan Bapak Sugeng yang telah banyak membantu selama masa perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Seluruh karyawan perpustakaan Universitas Sanata Dharma yang telah menyumbangkan jasanya dalam melayani peminjaman buku.

7. Bapak Tentrem Haryadi dan Ibu Muryanti selaku orang tua penulis atas doa, kasih sayang, pendidikan, kesehatan, dorongan, spirit, kesabaran dan pengertiannya selama ini.
8. Dian, Wishnu dan Galih yang telah memacu penulis menyelesaikan kuliah.
9. Keluarga Besar Martowiyoto yang telah memberikan doa dan dorongan kepada penulis.
10. Seluruh mahasiswa Pendidikan Matematika , khususnya angkatan'96 atas jalinan persahabatan yang telah diberikan selama ini.
11. Heni, Nina, Menuk yang telah menyumbangkan doa dan waktu.
12. Semua yang lain, yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu.

Akhirnya dengan lapang dada penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran-saran dan kritik sangat penulis harapkan demi penyempurnaan skripsi ini. Di samping itu, penulis juga berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan dan dapat digunakan sebagaimana mestinya.

Yogyakarta, September 2002

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Studi tentang perilaku suatu fungsi umumnya mencakup hal-hal antara lain seperti penentuan daerah di mana suatu fungsi naik atau turun, penentuan daerah di mana suatu fungsi mencapai maksimum atau minimum, penentuan di mana suatu fungsi cekung ke atas atau cekung ke bawah, penentuan titik belok, penentuan asimtot dan sebagainya.

Pada skripsi ini akan dibahas tentang maksimum dan minimum fungsi yang bukan merupakan hal yang baru, melainkan merupakan pendalaman tentang maksimum dan minimum fungsi yang telah kita peroleh di bangku SMU.

Suatu fungsi dapat mencapai nilai terbesar dan nilai terkecil yang dikenal dengan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi tersebut. Nilai maksimum atau minimum ini ada yang mutlak dan ada yang relatif. Suatu fungsi mempunyai nilai maksimum atau minimum mutlak jika nilai tersebut merupakan nilai terbesar atau terkecil pada seluruh daerah definisinya. Suatu fungsi mempunyai nilai maksimum atau minimum relatif jika nilai tersebut merupakan nilai terbesar atau terkecil di sekitar titik di mana fungsi itu mencapai nilai terbesar atau terkecil. Suatu fungsi yang mencapai maksimum atau minimum (mutlak/relatif) dikatakan mencapai ekstrem (mutlak/relatif).

Masalah maksimum dan minimum banyak kita jumpai dalam kehidupan nyata. Contohnya, menentukan gunung tertinggi dan lembah terdalam di sekitar daerah pegunungan. Masalah maksimum dan minimum juga dapat kita jumpai dalam cabang ilmu lainnya seperti Ekonomi, Statistika dan Fisika. Suatu contoh dalam Statistika misalnya untuk metode kuadrat terkecil dalam analisis regresi digunakan prinsip-prinsip maksimum dan minimum. Prinsip-prinsip maksimum dan minimum juga digunakan dalam Fisika, misalnya untuk menentukan titik tertinggi yang dicapai peluru yang ditembakkan dalam gerak peluru. Kita juga akan menemukan banyak masalah ekonomi yang menggunakan prinsip-prinsip maksimum dan minimum.

Pandang sebuah perusahaan "X" yang menghasilkan dan memasarkan suatu barang. Jika "X" menjual x satuan barang maka "X" akan membebankan harga $p(x)$ untuk tiap satuan. Total pendapatan yang diharapkan "X" diberikan oleh $R(x) = xp(x)$, banyak satuan kali harga tiap satuan. Untuk memproduksi dan memasarkan x satuan akan mempunyai biaya total $C(x)$. Konsep dasar sebuah perusahaan adalah total laba $P(x)$, yakni selisih antara pendapatan dan biaya total $P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$. Umumnya sebuah perusahaan berusaha memaksimumkan labanya.

Secara singkat, teori maksimum atau minimum sangat berguna untuk menyelesaikan masalah maksimum atau minimum yang banyak kita jumpai dalam kehidupan nyata maupun dalam cabang ilmu yang lain. Mengingat peran teori maksimum atau minimum, perlulah kiranya kita mempelajari secara mendalam penyelesaian dari masalah maksimum dan minimum tersebut.

Dalam skripsi ini pokok permasalahan yang akan dibahas adalah syarat-syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi dapat mencapai maksimum atau minimum. Selanjutnya jika syarat-syarat tersebut tidak dipenuhi apa yang akan terjadi? Adakah jalan lain untuk memecahkan permasalahan tersebut?

Jika suatu fungsi dengan satu variabel $f(x)$ dapat diturunkan dalam interval (a,b), maka syarat perlu suatu fungsi mempunyai nilai ekstrem pada titik $x = c$, di mana c dalam interval (a,b) adalah $f'(c) = 0$ atau f tidak berturunan di titik c. Titik yang demikian disebut titik kritis. Jika fungsi $f(x)$ dapat diturunkan dua kali dalam interval tersebut, maka syarat cukup suatu fungsi mempunyai nilai ekstrem pada titik $x = c$ adalah $f''(c) \neq 0$. Jika $f''(c) > 0$ maka terdapatlah nilai minimum $f(c)$ sebaliknya jika $f''(c) < 0$ terdapatlah nilai maksimum $f(c)$.

Jika suatu fungsi dengan dua variabel $f(x,y)$ dapat diturunkan dalam himpunan tertutup dan terbatas dan turunan parsial pertamanya kontinu dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b), maka syarat perlu suatu fungsi mempunyai nilai ekstrem pada titik $(x,y) = (a,b)$ adalah $f_x(a,b) = 0$ dan $f_y(a,b) = 0$. Titik yang demikian disebut titik kritis. Jika fungsi $f(x,y)$ dapat diturunkan dua kali dalam himpunan tersebut dan turunan parsial tingkat dua kontinu dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b), maka syarat cukup suatu fungsi mempunyai nilai ekstrem pada titik $(x,y) = (a,b)$ adalah $D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$. Jika $f_{xx}(a,b) > 0$ maka terdapatlah nilai minimum pada titik (a,b) yaitu $f(a,b)$ dan jika $f_{xx}(a,b) < 0$ terdapatlah nilai maksimum pada titik (a,b) yaitu $f(a,b)$. Jika $D < 0$ maka f tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik (a,b).

Jika fungsi $f(x)$ dapat diturunkan dua kali dalam suatu interval yang memuat titik $x = c$ dan kita peroleh $f''(c) = 0$ maka kita akan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel untuk membahasnya. Jika fungsi $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial tingkat dua yang kontinu dalam suatu cakram buka yang berpusat pada titik (a,b) yang memuat titik (a_1, b_1) dan kita peroleh $D = 0$ maka kita akan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel untuk membahasnya.

Selain penggunaan teorema Taylor dalam menyelesaikan masalah ekstrem, pembuktian teorema Taylor sendiri merupakan suatu rangkaian cerita yang sangat menarik. Teorema Taylor dibuktikan dengan menggunakan teorema nilai rata-rata Cauchy tentang perbandingan garis singgung di suatu titik dari dua fungsi yang terdiferensialkan. Sedang teorema nilai rata-rata Chauchy sendiri dibuktikan dengan menggunakan teorema nilai rata-rata yang menyatakan terdapatnya suatu titik yang garis singgungnya sejajar dengan tali busur dari kurvanya. Teorema rata-rata sendiri merupakan suatu bentuk umum dari teorema Rolle yang menyatakan bahwa untuk fungsi yang terdiferensialkan dan memotong garis sejajar sumbu x akan terdapat suatu titik pada kurva yang garis singgungnya horizontal. Teorema Rolle sendiri dibuktikan dengan berdasarkan teorema nilai antara untuk fungsi yang kontinu.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah : Bagaimana teorema Taylor dapat digunakan untuk menjelaskan permasalahan ekstrem suatu fungsi dengan satu variabel maupun dua variabel, di mana teorema uji turunan kedua untuk memeriksa ekstrem relatif suatu fungsi tidak bisa digunakan untuk memecahkan permasalahan sebagai berikut :

1. jika fungsi f dengan satu variabel berturunan dua kali pada titik stasioner c dan $f''(c) = 0$.
2. jika fungsi f dengan dua variabel mempunyai turunan parsial tingkat dua yang kontinu dalam cakram buka $B((a,b):r)$ yang berpusat pada titik stasioner (a,b) dan $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) = 0$.

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan ini adalah agar kita dapat menyelesaikan permasalahan seputar maksimum dan minimum suatu fungsi dengan satu variabel maupun dua variabel, antara lain adalah sebagai berikut :

1. dapat menentukan titik-titik kritis suatu fungsi.
2. dapat menentukan titik-titik di mana suatu fungsi akan mencapai maksimum atau minimum.
3. dapat menentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari suatu fungsi.
4. dapat menyebutkan hubungan antara maksimum atau minimum relatif dengan maksimum atau minimum mutlak.
5. dapat mengetahui syarat apa saja yang harus dipenuhi agar suatu fungsi mencapai maksimum atau minimum.
6. dapat menggunakan teorema Taylor dalam membahas masalah maksimum

atau minimum jika syarat-syarat suatu fungsi untuk mencapai maksimum atau minimum tidak dipenuhi.

1.4 MANFAAT PENULISAN

Manfaat dari penulisan ini adalah agar kita dapat menyelesaikan masalah ekstrem suatu fungsi dengan satu variabel maupun dua variabel dengan menggunakan bantuan turunan tingkat tinggi dan bantuan dari teorema Taylor untuk suatu fungsi yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema uji turunan kedua untuk ekstrem relatif.

1.5 METODE PENULISAN

Dalam mempersiapkan penulisan skripsi ini, dilakukan dengan menelaah buku-buku pustaka sebagai acuan, untuk membuktikan teorema-teorema yang digunakan dalam pembahasan masalah maksimum dan minimum dengan menggunakan teorema Taylor, sehingga dalam penulisan ini tidak ditemukan hal-hal yang baru.

1.6 SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Adapun Sistematika Penulisan Skripsi ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

- 1.1 Latar Belakang
- 1.2 Perumusan Masalah
- 1.3 Tujuan Penulisan

BAB II

TEOREMA TAYLOR

Dalam Bab II ini kita akan memperlihatkan bahwa suatu fungsi dapat didekati oleh suatu polinom dan polinom tersebut sebagai pengganti fungsi asalnya dapat digunakan untuk perhitungan bilamana perbedaan di antara nilai fungsi asalnya dan polinomnya cukup kecil.

Terdapat berbagai metode untuk menghampiri suatu fungsi yang diberikan dengan suatu polinom. Salah satunya yang paling sering digunakan adalah dengan menggunakan rumus Taylor. Nama ini diabadikan untuk menghormati seorang matematikawan bangsa Inggris Brook Taylor (1685-1731).

2.1 TEOREMA TAYLOR UNTUK FUNGSI DENGAN SATU VARIABEL

Sebelum membahas tentang teorema Taylor kita akan mengingat kembali definisi fungsi, limit, kekontinuan dan turunan. Selanjutnya akan dibahas tentang teorema nilai antara, teorema Rolle, teorema nilai rata-rata dan teorema Cauchy yang sangat berguna dalam pembuktian teorema Taylor.

Definisi 2.1.1 :

Suatu fungsi f dari himpunan D ke himpunan R adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap anggota x dari himpunan D dengan tepat satu anggota y dalam himpunan $\Re$.

Himpunan D dinamakan daerah definisi atau domain fungsi dan himpunan $\Re$ dinamakan daerah kawan fungsi.

Fungsi dapat juga didefinisikan dengan cara lain yaitu sebagai berikut

Definisi 2.1.2 :

Suatu fungsi f dari himpunan D ke himpunan $\Re$ adalah himpunan pasangan terurut dua bilangan real (x, y) di mana tidak terdapat dua pasangan terurut yang memiliki unsur pertama yang sama.

Himpunan D dinamakan daerah definisi atau domain fungsi dan himpunan $\Re$ dinamakan daerah kawan.

Pada kedua definisi fungsi di atas, x dinamakan variabel bebas, sedangkan y yang nilainya tergantung dari x dinamakan variabel tak bebas. Dan yang dimaksud grafik fungsi f yang terdefinisi pada himpunan D adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Definisi 2.1.3 :

Suatu fungsi f dikatakan mempunyai limit L untuk x mendekati c, jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya) akan dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi 2.1.4 :

Suatu fungsi f dikatakan mempunyai limit L_1 untuk x mendekati c dari sebelah kanan, jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya) akan dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < x - c < \delta$ maka $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

Definisi 2.1.5 :

Suatu fungsi f *dikatakan mempunyai limit* L_2 *untuk* x *mendekati* c *dari sebelah kiri, jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan (betapapun kecilnya) akan dapat ditentukan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* $0 < c - x < \delta$ *maka* $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Definisi 2.1.6 :

f *dikatakan mempunyai limit* L *untuk* x *mendekati* c *, jika limit kanan dan limit kiri dari* f *adalah sama yaitu sama dengan* L.

Definisi 2.1.7 :

Suatu fungsi f *dikatakan kontinu pada titik* $x = c$ *jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan akan dapat ditentukan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* $|x - c| < \delta$ *maka* $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Kekontinuan pada suatu titik dapat juga didefinisikan dengan cara lain yaitu sebagai berikut :

Definisi 2.1.8 :

Suatu fungsi f *dikatakan kontinu pada titik* $x = c$ *jika limit kanan dan limit kiri dari* f *adalah sama untuk* x *mendekati* c *dan nilainya sama dengan* $f(c)$ *atau* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definisi 2.1.9 :

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada interval terbuka (a,b) *jika f kontinu di setiap titik pada interval tersebut.*

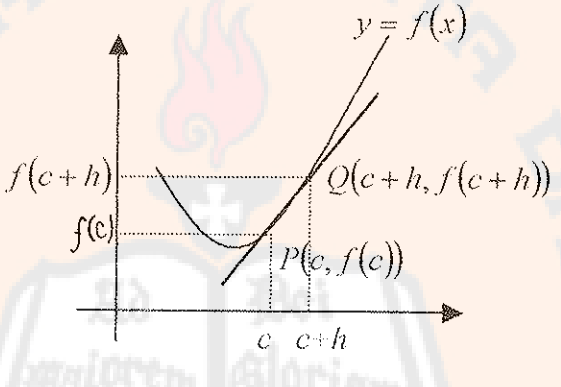
Definisi 2.1.10 :

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ *jika*

(a) *f kontinu di setiap titik pada interval terbuka* (a,b),

(b) *f kontinu kanan pada* $x = a$ *dan,*

(c) *f kontinu kiri pada* $x = b$.



gambar 1

Perhatikan gambar 1, andaikan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$. Andaikan P mempunyai koordinat $(c, f(c))$ dan titik Q didekatnya mempunyai koordinat $(c+h, f(c+h))$ dan tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan

$$m_{sec} = \frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Jadi garis singgung adalah garis yang melalui P dengan kemiringan

$$M_{tan} = \lim_{h\to 0} m_{\sec} = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Definisi 2.1.11 :

Jika $y = f(x)$ *adalah suatu fungsi dengan variabel x maka turunan pertama fungsi f pada titik* $x = a$, *ditulis* $f'(a)$ *dan didefinisikan sebagai*

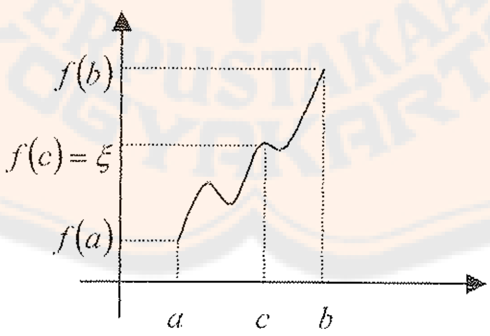
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ atau } f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

jika limit $f(x)$ *ada.*

Jika $f'(a)$ *ada maka fungsi f dikatakan mempunyai turunan pada titik* $x = a$ *atau dengan kata lain f terdiferensialkan pada titik* $x = a$.

Teorema 2.1.1 (Teorema Nilai Antara)

Jika fungsi f *kontinu pada interval* $[a,b]$ *dan* $f(a) < f(b)$ *dan* $f(a) < \zeta < f(b)$ *maka terdapat sekurang-kurangnya satu bilangan c dalam interval* (a,b) *sedemikian hingga* $f(c) = \zeta$



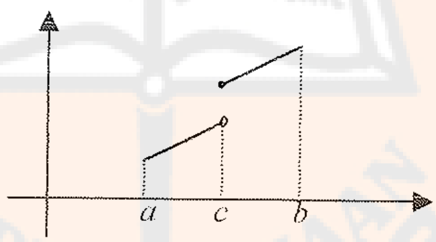
gambar 2

Bukti:

Karena fungsi f kontinu pada $[a,b]$ dan $f(a) < f(b)$ maka terdapat m, M dalam R sedemikian hingga $m = \min f(x) \leq f(x) \leq maks\ f(x) = M$, di mana $a \leq x \leq b$. Karena $f(a) < \zeta < f(b)$ ini berarti ζ dalam (m, M) maka terdapat c dalam (a,b) sedemikian hingga $f(c) = \zeta$.

Contoh 2.1 :

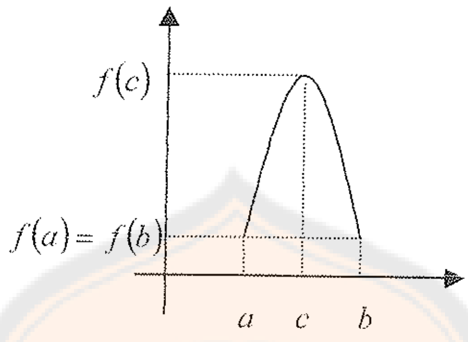
Perhatikan gambar 3, jelas bahwa kekontinuaan diperlukan untuk teorema nilai antara. Kekontinuan ini merupakan syarat cukup untuk sifat nilai antara. Jadi jika fungsinya tidak kontinu maka sifat nilai antara tidak berlaku.



gambar 3

Teorema 2.1.2 (Teorema Rolle)

Jika fungsi f kontinu pada interval $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada interval (a,b) dan $f(a) = f(b)$ maka terdapat sekurang-kurangnya satu bilangan c dalam interval (a,b) sedemikian hingga $f'(c) = 0$.



gambar 4

Bukti :

Jika fungsi f adalah fungsi konstan pada interval $[a,b]$ maka $f'(x) = 0$, untuk setiap x dalam interval (a,b).

Untuk fungsi tidak konstan penjelasannya adalah sebagai berikut :

Karena fungsi f kontinu pada interval $[a,b]$ maka terdapat m, M dalam R sedemikian hingga $m = \min f(x) \le f(x) \le maks\ f(x) = M$, $a \le x \le b$.

Diketahui $f(a) = f(b)$ berarti nilai minimum atau nilai maksimum tidak mungkin tercapai di titik ujung a dan b.

Berdasarkan teorema nilai antara untuk fungsi kontinu , terdapat sekurang-kurangnya satu bilangan c dalam interval (a,b) sedemikian hingga $f(c) = m$ atau $f(c) = M$.

Karena fungsi terdiferensialkan pada interval (a,b) dan c dalam interval (a,b) maka $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$.

- Jika $f(c) = m$ maka

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - m}{x - c} \le 0$$

karena $f(x)-m \geq 0$ dan $x-c<0$.

Sehingga $f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-m}{x-c} \geq 0$

karena $f(x)-m \geq 0$ dan $x-c>0$.

Karena $f'_-(c) \leq 0$ dan $f'_+(c) \geq 0$ maka kemungkinannya hanya $f'(c)=0$.

- Jika $f'(c) = M$ maka

  $f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-M}{x-c} \geq 0$

  karena $f(x)-M \leq 0$ dan x-$c < 0$.

  Sehingga $f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-M}{x-c} \leq 0$

  karena $f(x)-M \leq 0$ dan x-c >0 .

  Karena $f'_-(c) \geq 0$ dan $f'_+(c) \leq 0$ maka kemungkinannya hanya $f'(c)=0$.

Jadi dapat ditarik kesimpulan bahwa $f'(c) = 0$

Contoh 2.2 :

Perhatikan fungsi $f(x) = x^2 - 2x$ untuk $0 \leq x \leq 2$.

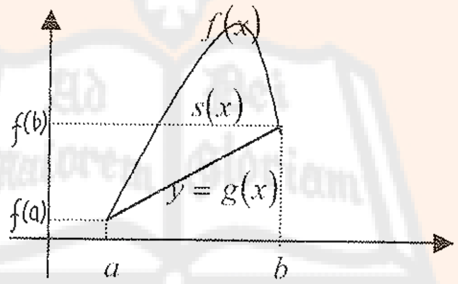
Fungsi ini kontinu pada interval tertutup $[0,2]$ dan terdiferensialkan pada interval terbuka $(0,2)$ serta $f(0) = f(2) = 0$. Oleh karena itu menurut teorema Rolle terdapat c dalam interval $(0,2)$ sedemikian hingga $f'(c) = 0$.

Selanjutnya dari $f(x) = x^2 - 2x$ diperoleh $f'(x) = 2x - 2$ dan $f'(c) = 0$ jika dan hanya jika $2c - 2 = 0$.

Jadi kita peroleh $c = 1$ yang berada dalam interval $(0,2)$.

Teorema 2.1.3 (Teorema Nilai Rata-Rata)

Jika fungsi f kontinu pada interval $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada (a,b) maka terdapat c dalam interval (a,b) sedemikian hingga $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



gambar 5

Bukti:

Pembuktian kita berdasar pada analisis dari fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$.

Andaikan $y = g(x)$ adalah persamaan tali busur yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ ke $(b, f(b))$. Karena garis ini mempunyai kemiringan $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dan melalui $(a, f(a))$, bentuk titik kemiringan untuk persamaannya adalah

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Kemudian ini menghasilkan rumus untuk $s(x)$, yaitu

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Tampak bahwa $s(a) = s(b) = 0$.

Untuk setiap x dalam interval (a,b) , $s'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Karena fungsi $s(x)$ kontinu pada interval $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada interval (a,b) dan $s(a) = s(b) = 0$ maka fungsi $s(x)$ memenuhi teorema Rolle.

Akibatnya terdapat c dalam (a,b) sedemikian hingga

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Contoh 2.3 :

Perhatikan fungsi $f(x) = 2x - x^2$ untuk $-1 \le x \le 2$.

Karena f merupakan polinom maka fungsi f kontinu pada interval tertutup $[-1,2]$ dan terdiferensial pada $(-1,2)$. Jadi syarat teorema nilai rata-rata dipenuhi.

Dari $f(x) = 2x - x^2$ diperoleh $f'(x) = 2 - 2x$ dan $f'(c) = 2 - 2c$

Dengan demikian titik x yang terletak diantara $x=-1$ dan $x=2$ dapat diperoleh dari $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{0+3}{3}=1$ atau $2-2c=1$.

Jadi kita peroleh $c=\dfrac{1}{2}$.

Teorema 2.1.4 (Teorema Cauchy)

Jika fungsi f dan g kontinu pada interval $[a,b]$ *dan terdiferensialkan pada interval* (a,b) *dan* $g'(x)\neq 0$ *maka terdapat* c *dalam* (a,b) *sedemikian hingga* $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Catatan: Jika $g(x)=x$ maka $g'(x)=1$.

Karena $g(b)=b$ dan $g(a)=a$ sehingga diperoleh teorema nilai rata-rata.

Bukti:

Andaikan $F(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$, x dalam interval $[a,b]$.

Maka $F'(x)=f'(x)(g(b)-g(a))-g'(x)(f(b)-f(a))$.

Karena fungsi F kontinu pada interval $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada interval (a,b) dan $F(a)=F(b)=0$ maka fungsi F memenuhi syarat teorema Rolle.

Akibatnya terdapat c dalam interval (a,b) sedemikian hingga $F'(c)=0$.

Sehingga kita peroleh $f'(c)(g(b)-g(a))-g'(c)(f(b)-f(a))=0$.

Sudah diketahui $g'(x) \neq 0$ berarti $g'(c) \neq 0$ dan kita hanya perlu menunjukkan $g(b) - g(a) \neq 0$.

Karena fungsi g sendiri memenuhi teorema nilai rata-rata pada interval $[a, b]$ maka terdapat ξ dalam interval (a, b) sedemikian hingga $g'(\xi) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Perhatikan bahwa kondisi $g'(x) \neq 0$ selalu menghasilkan $g(b) - g(a) \neq 0$.

Ini mengakibatkan $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Contoh 2.4 :

Perlihatkan bahwa $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\theta$ di mana $0 < \alpha < \theta < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ untuk setiap x dalam interval $[\alpha, \beta]$ maka didapat $f'(x) = \cos x$ dan $g'(x) = -\sin x$.

Fungsi f dan g keduanya kontinu dan terdiferensial maka berdasarkan teorema Cauchy pada $[\alpha, \beta]$.

$\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$, di mana $\alpha < \theta < \beta$.

Untuk selanjutnya akan dibahas teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel yang pembuktiannya berdasarkan pada teorema-teorema yang telah dibahas.

Jika $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ adalah konstanta-konstanta dan x adalah suatu variabel, maka deret berbentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \cdots \qquad \text{........(1)}$$

disebut deret kuasa dalam x.

Andaikan kita bermaksud mendekati fungsi f dengan polinomial

$$\rho(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n \qquad \text{........(2)}$$

pada suatu interval yang berpusat di $x = 0$. Karena $\rho(x)$ mempunyai $(n+1)$ koefisien maka $(n+1)$ sebagai syarat pada polinom ini . Kita anggap bahwa n turunan yang pertama dari f ada di $x = 0$ dan kita pilih $(n+1)$ syarat sebagai berikut:

$$f(0) = \rho(0),\ f'(0) = \rho'(0),\ f''(0) = \rho''(0), \ldots, f^{(n)}(0) = \rho^{(n)}(0) \qquad \text{........(3)}$$

Syarat-syarat ini menuntut bahwa nilai $\rho(x)$ dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai $f(x)$ dan n turunan pertamanya di $x = 0$. Adalah beralasan jika kita mengharapkan bahwa $f(x)$ dan $\rho(x)$ akan tetap cukup dekat dalam suatu interval (mungkin kecil) yang berpusat di $x = 0$.

Karena $\rho(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n$

maka $\rho'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1}$.

Sehinggadiperoleh

$$\rho''(x) = 2c_2 + 3.2c_3 x + \cdots + n.(n-1)c_n x^{n-2},$$

$$\rho'''(x) = 3.2c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3},$$

$$\vdots$$

$$\rho^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots c_n = n!c_n .$$

pada $x = 0$ kita peroleh

$$\rho(0) = c_0 ,$$

$$\rho'(0) = c_1 ,$$

$$\rho''(0) = 2c_2 = 2!c_2 ,$$

$$\rho'''(0) = 3.2c_3 = 3!c_3 ,$$

$$\vdots$$

$$\rho^{(n)}(0) = n!c_n .$$

Jadi menurut (3)

$$f(0) = c_0 ,$$

$$f'(0) = c_1 ,$$

$$f''(0) = 2!c_2 ,$$

$$f'''(0) = 3!c_3 ,$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = n!c_n .$$

sehingga diperoleh

$$c_0 = f(0),$$

$$c_1 = f'(0),$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!},$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Jika nilai-nilai itu disubstitusikan ke persamaan (2) maka dihasilkan suatu polinomial Maclurin untuk fungsi f.

Definisi 2.1.12 :

Jika fungsi f berturunan n kali pada $x = 0$ maka polinomial Maclaurin ke-n untuk f didefinisikan sebagai

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{.......(4)}$$

Polinom ini bersifat bahwa nilainya dan nilai-nilai n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai $f(x)$ dan n turunan pertamanya pada $x = 0$.

Contoh 2.5 :

Tentukan polinomial Maclaurin untuk e^x

Andaikan $f(x) = e^x$

$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ dan

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$.

Jadi polinomial Maclaurun ke- n untuk e^x adalah

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Contoh 2.6 :

Tentukan polinomial Maclaurin untuk $\sin x$.

Andaikan $f(x) = \sin x$ maka diperoleh $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$.

Sehingga $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$.

Karena $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, maka pola 0,1,0,-1 akan berulang terus jika f berturut-turut kita turunkan pada $x = 0$.

Jadi polinomial Maclaurun ke- n untuk $\sin x$ adalah

$$\rho_{2n+1}(x) = \rho_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!}x^3 + \frac{x^5}{4!}x^5 - \frac{x^7}{7!}x^3 + \cdots + (-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Untuk kasus pendekatan $f(x)$ pada suatu interval dengan pusat $x = a$ maka ide kita adalah memilih polinomial $\rho(x)$ pada $x = a$ sehingga nilai-nilai $\rho(x)$ dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai-nilai $f(x)$ dan n turunan pertamanya pada $x = a$. Perhitungan paling sederhana bila pendekatan polinomial dinyatakan dalam bentuk

$$\rho(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n, \qquad \ldots\ldots..(5)$$

$$\rho'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$\rho''(x) = 2c_2 + 3.2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

$$\rho'''(x) = 3.2c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3},$$

$$\vdots$$

$$\rho^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots c_n = n!c_n.$$

Untuk $x = a$ diperoleh

$$\rho(a) = c_0,$$

$$\rho'(a) = c_1,$$

$$\rho''(a) = 2c_2 = 2!c_2,$$

$$\rho'''(a) = 3.2c_3 = 3!c_3,$$

$$\vdots$$

$$\rho^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots c_n = n!c_n.$$

Jadi, bila kita ingin nilai $\rho(x)$ dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai-nilai $f(x)$ dan n turunan pertamanya pada $x = a$, kita peroleh

$$c_0 = f(a),$$

$$c_1 = f'(a),$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!},$$

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!},$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Jika nilai–nilai $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ disubstitusikan ke persamaan (5) kita peroleh polinomial yang disebut polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar $x = a$.

Definisi 2.1.13 :

Jika fungsi f berturunan n kali pada $x = a$ maka polinomial Taylor ke-n disekitar $x = a$ didefinisikan sebagai :

$$\rho_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad \ldots\ldots(6)$$

Contoh 2.7 :

Tentukan polinomial Taylor $\rho_4(x)$ untuk e^x di sekitar $x = 1$.

Andaikan $f(x) = e^x$ diperoleh $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$

dan $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = e$.

Jadi polinomial Taylor ke-4 untuk e^x di sekitar $x = 1$ adalah

$$\rho_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

$$\rho_4(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \frac{e}{4!}(x-4)^4.$$

$$\rho_4(x) = e\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-4)^4\right).$$

Contoh 2.8 :

Tentukan polinomial Taylor $\rho_4(x)$ untuk $\sin x$ di sekitar $x = \frac{\pi}{2}$.

Andaikan $f(x) = \sin x$ maka diperoleh $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$,

dan $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Jadi polinomial Taylor ke-4 untuk $\sin x$ di sekitar $x = \frac{\pi}{2}$ adalah

$$\rho_4(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 +$$

$$\frac{1}{4!}f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

Seringkali, notasi sigma sangat berguna untuk menyatakan rumus definisi polinomial Taylor. Untuk melakukan ini kita gunakan notasi $f^{(k)}(a)$ untuk menyatakan turunan tingkat k dari f pada $x = a$ dan kita membuat penyajian tambahan bahwa $f^{(0)}(a)$ menyatakan $f(a)$. Ini memungkinkan kita untuk menulis polinomial dalam bentuk sigma yaitu :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Karena nilai dari f dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai polinomial Taylor dan n turunan pertama pada $x = a$, kita boleh mengharap bahwa jika n naik maka polinomial Taylor untuk f pada $x = a$ akan menjadi lebih baik dalam mendekati $f(x)$, sekurang-kurangnya dalam suatu interval yang berpusat di $x = a$.

Definisi 2.1.14 :

Jika fungsi f berturunan pada semua tingkat pada $x = a$ maka kita definisikan deret Taylor untuk f di sekitar $x = a$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^{2}+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}+\cdots$$

........(7)

Dalam hal khusus Polinomial Maclaurin untuk f dapat ditulis dalam bentuk sigma yaitu $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$.

Definisi 2.1.15 :

Jika fungsi f berturunan pada semua tingkat pada $x=0$ maka kita definisikan deret Maclaurin untuk f di sekitar $x=0$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\cdots .$$

........(8)

Contoh 2.9 :

Polinom Maclaurin ke-n untuk e^{x} adalah

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}.$$

Jadi deret Maclaurin untuk e^{x} adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots .$$

Contoh 2.10 :

Deret Maclaurin untuk $\sin x$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots$$

Contoh 2.11 :

Deret Taylor untuk e^x di sekitar $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e(x-1)^k = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \frac{e}{4!}(x-4)^4 + \cdots .$$

Jika suatu fungsi f didekati oleh polinomial Taylor ke-n yaitu ρ_n, maka kesalahan pada suatu titik x adalah selisih $f(x) - \rho_n(x)$. Selisih ini biasanya disebut sisa ke-n dan ditulis dengan $R_n(x) = f(x) - \rho_n(x)$. Teorema berikut memberikan rumus penting pada sisa ini.

Teorema 2.1.5 (Teorema Taylor untuk Fungsi Dengan Satu Variabel)

Jika fungsi $f(x)$ berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam suatu interval yang memuat titik a dan

$$\rho_n(x) = f(x) - f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

adalah polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar $x = a$,

maka untuk setiap x dalam interval, ada sekurang-kurangnya satu titik c antara a dan x sedemikian hingga

$$R_n(x) = f(x) - \rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Bukti:

Menurut hipotesis, f berturunan $n+1$ kali pada setiap titik dalam interval yang memuat titik a. Pilih suatu titik b dalam interval ini dan kita anggap

$b > a$. Andaikan $\rho_n(x)$ adalah polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar $x = a$ dan didefinisikan

$$F(x) = f(x) - \rho_n(x). \qquad \text{..............(10)}$$

$$G(x) = (x-a)^{n+1}. \qquad \text{..............(11)}$$

Karena $f(x)$ dan $\rho_n(x)$ bernilai sama dan n turunan pertama juga sama di $x = a$, maka

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0. \qquad \text{..............(12)}$$

$$G'(x) = n+1(x-a)^n. \qquad \text{..............(13)}$$

$$G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0. \qquad \text{..............(14)}$$

$G(x)$ dan n turunan pertamanya tidak nol bila $x \neq a$. Secara langsung dapat diperiksa bahwa fungsi F dan G memenuhi hipotesis dari teorema Cauchy pada interval $[a,b]$. Sehingga ada titik c_1 dalam interval (a,b) sedemikian hingga

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \qquad \text{..............(15)}$$

atau dari (12) dan (14)

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \qquad \text{..............(16)}$$

Jika kita gunakan teorema Cauchy untuk F' dan G' atas interval $[a,c_1]$, kita dapat menurunkan bahwa ada suatu titik c_2 dengan $a < c_2 < c_1 < b$ sedemikian hingga

$$\frac{F'(c_1)-F'(a)}{G'(c_1)-G'(a)}=\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}.$$

atau dari (12) dan (14)

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}=\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

yang bila di kombinasikan dengan (16), menghasilkan

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}.$$

Sekarang jelaslah bahwa bila kita teruskan dengan cara ini dan dengan menggunakan teorema Cauchy dengan menurunkan berturut-turut F dan G, akhirnya kita akan memperoleh hubungan dalam bentuk

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{G^{(n+1)}(c_{n+1})} \qquad \text{............(17)}$$

di mana $a < c_{n+1} < b$.

Tetapi $\rho_n(x)$ adalah polinomial berderajat n sehingga turunan tingkat $(n+1)$ adalah nol.

Jadi dari (10) didapat

$$F^{(n+1)}(c_{n+1})=f^{(n+1)}(c_{n+1}). \qquad \text{............(18)}$$

Juga dari (11) , turunan tingkat $(n+1)$ dari $G(x)$ adalah konstan $(n+1)!$, sehingga

$$G^{(n+1)}(c_{n+1})=(n+1)! \qquad \text{.............(19)}$$

Dengan substitusi (18) dan (19) diperoleh

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Dengan memisalkan $c = c_{n+1}$ dan dengan menggunakan (10) dan (11) berlakulah bahwa

$$f(b) - \rho_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Dan ini adalah tepat (9) dalam teorema Taylor dengan pengecualian bahwa variabel di sini bukan x. Jadi untuk menyelesaikan kita perlu mengganti b dengan x.

$$R_n(x) = f(x) - \rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Jika (9) ditulis kembali sebagai $f(x) = \rho_n(x) + R_n(x)$ maka didapat hasil berikut yang disebut *rumus Taylor dengan sisa*:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

......(20)

di mana c di antara a dan x.

Syarat agar (20) berlaku adalah f dan n turunan pertamanya harus kontinu pada selang tertutup yang memuat a dan x, dan turunan ke $(n+1)$ dari f ada di setiap titik pada interval terbuka yang berkaitan.

Suku $R_n(x)$ yang diberikan dalam (20) dinamakan bentuk Lagrange dari sisanya. Nama ini diabadikan untuk menghormati matematikawan Joseph L. Lagrange (1736-1813).

Dari (20) jika $x = a + h$, kita peroleh

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

......(21)

di mana $c = a + \theta h$ diantara a dan $a+h$, $0 < \theta < 1$.

Kasus khusus dari rumus Taylor diperoleh dengan mengambil $a = 0$ pada (20), yaitu

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)^{(n)}}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

......(22)

di mana di mana c di antara a dan x.

Rumus (22) dinamakan rumus Maclaurin, nama ini diabadikan untuk menghormati matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin (1698-1746).

2.2 TEOREMA TAYLOR UNTUK FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL

Dalam subbab 2.2 akan dibahas tentang Teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel pada titik (a,b). Tetapi sebelumnya kita akan mengingatkan kembali definisi dari suatu fungsi dengan dua variabel, turunan parsial, limit dan kekontinuan.

Definisi 2.2.1 :

Suatu fungsi F dari himpunan $X \times Y$ ke himpunan Z ialah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap titik (x, y) dalam $X \times Y$ dengan tunggal z dalam Z sedemikian hingga $F(x, y) = z$.

Himpunan $X \times Y$ disebut daerah definisi atau domain fungsi yaitu himpunan semua titik (x, y) dalam himpunan $X \times Y$ pada bidang di mana aturan fungsi berlaku dan menghasilkan suatu bilangan real z yang disebut daerah kawan fungsi.

Sebagai contoh adalah :

1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$
2. $g(x, y) = 2x\sqrt{y}$

Pada suatu fungsi dengan dua variabel $z = f(x, y)$, x dan y dinamakan variabel bebas, sedangkan z yang nilainya bergantung dari nilai x dan y dinamakan variabel tak bebas. Dan yang dimaksud dengan grafik suatu fungsi f dengan dua variabel adalah grafik dari persamaan $z = f(x, y)$. Biasanya grafik ini merupakan permukaan di R^3 yang berupa himpunan titik dalam ruang berdimensi tiga dengan koordinat kartesiusnya adalah pasangan terurut tiga bilangan (x, y, z). Dan karena setiap (x, y) di daerah definisi hanya berpadanan dengan tepat satu nilai z, maka setiap garis tegak pada bidang xoy memotong permukaan paling banyak di satu titik.

Jika diketahui fungsi dengan dua variabel $z = f(x, y)$, maka kita dapat menentukan turunan dari fungsi tersebut terhadap salah satu variabel bebasnya. Karena turunan ini ditentukan hanya terhadap sebagian variabel bebasnya, maka kita menamakannya turunan parsial.

Definisi 2.2.2 :

Turunan parsial dari fungsi $f(x,y)$ *terhadap x didefinisikan dan ditulis :*

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \text{ , jika nilai limitnya ada.}$$

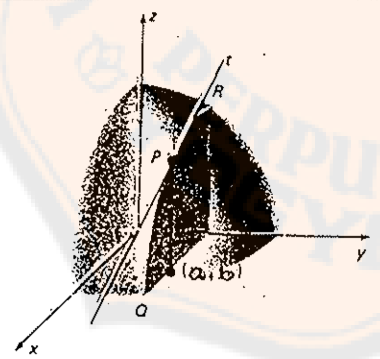
Sedangkan turunan parsial dari fungsi $f(x,y)$ *terhadap y didefinisikan dan ditulis :*

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \text{ , jika nilai limitnya ada.}$$

Jika $z = f(x,y)$, kita gunakan cara penulisan lain yaitu

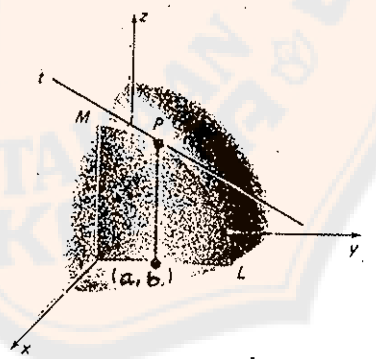
$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Lambang ∂ disebut tanda turunan parsial.



$f_x(x_0, y_0)$ = kemiringan t

gambar 6



$f_y(x_0, y_0)$ = kemiringan t

gambar 7

Untuk melihat arti geometri dari turunan parsial terhadap x, perhatikan dengan seksama gambar 6. Pandang permukaan yang persamaannya

$z = f(x, y)$. Bidang $y = b$ memotong permukaan ini pada kurva bidang QPR dan nilai dari $f_x(a,b)$ adalah ukuran kemiringan bidang singgung pada kurva ini di titik $P(a,b,f(a,b))$.

Untuk melihat arti geometri dari turunan parsial terhadap y, perhatikan dengan seksama gambar 7. Pandang permukaan yang persamaannya $z = f(x, y)$. Bidang $x = a$ memotong permukaan ini pada kurva bidang LPM dan nilai dari $f_y(a,b)$ adalah ukuran kemiringan bidang singgung pada kurva ini di titik $P(a,b,f(a,b))$.

Contoh 2.13 :

Diketahui fungsi dengan dua variabel $f(x, y) = x^2 \sin(xy^2)$.

Tentukan $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$.

Penyelesaian :

Untuk mencari $f_x(x, y)$ anggaplah f sebagai fungsi dari x dan anggaplah y konstan. Kemudian tentukan fungsi turunan pertamanya. Hasilnya adalah sebagai berikut :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y^2 \cos(xy^2) + 2x \sin(xy^2)$$

Untuk mencari $f_y(x, y)$ anggaplah f sebagai fungsi dari y dan anggaplah x konstan. Kemudian tentukan fungsi turunan pertamanya. Hasilnya adalah sebagai berikut :

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y \cos(xy^2).$$

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua variabel yang sama, turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap x dan y untuk memperoleh empat buah turunan parsial kedua fungsi f :

- $f_{xx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,
- $f_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,
- $f_{yx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,
- $f_{yy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

Untuk jelasnya perhatikan contoh berikut tentang menentukan turunan parsial kedua.

Contoh 2.14 :

Diketahui fungsi

(a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+y^2$

(b) $f(x,y)=y\tan^{-1}x$

Penyelesaian :

(a) $f_x(x,y)=3x^2-3y$ $\quad$ $f_y(x,y)=3y^2-3x+2y$

$f_{xx}(x,y)=6x$ $\quad$ $f_{yx}(x,y)=-3$

$f_{xy}(x,y)=-3$ $\quad$ $f_{yy}(x,y)=6y+2$

(b) $f_x(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ $\qquad$ $f_y(x,y) = \tan^{-1} x$

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2}$ $\qquad$ $f_{yx}(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $f_{yy}(x,y) = 0$

Kita ingat kembali konsep limit fungsi f yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat $x = a$ kecuali mungkin di a sendiri, yaitu sebagai berikut :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *bila hanya bila untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan betapapun kecilnya dapat ditentukan* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga untuk* $0 < |x - a| < \delta$ *berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi tersebut menyatakan bahwa nilai fungsi $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L dengan cara mengambil x yang cukup dekat ke a.

Di R^1 jarak antara dua titik dinyatakan dengan harga mutlak selisih kedua bilangan real. Jadi $|x - a|$ menyatakan jarak dua titik x dan a. Di R^2 jarak antara dua titik $P(x,y)$ dan $P(a,b)$ dinyatakan oleh $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Di R^3 jarak antara dua titik $P(x,y,z)$ dan $P(a,b,c)$ dinyatakan oleh $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Maka $|(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ dan titik-titik yang memenuhi $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$ adalah titik-titik di dalam suatu lingkaran dengan radius δ terkecuali pusat (a,b) (lihat gambar 8). Jika suatu fungsi dengan satu variabel terdefinisi pada interval terbuka maka untuk fungsi dengan dua variabel peranan interval terbuka diganti dengan cakram buka dan peranan interval tertutup diganti dengan cakram tutup. Untuk itulah kita perlu lebih dahulu mendefinisikan cakram buka dan cakram tutup.

Definisi 2.2.3 :

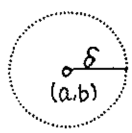
Bola buka $B((a,b);r)$ *di* R^2 *didefinisikan sebagai himpunan semua titik di* R^2 *yang memenuhi* $0 \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r$ *yaitu himpunan yang memuat semua titik di dalam daerah yang dibatasi lingkaran dengan jari-jari sama dengan* r.

Bola buka di R^2 *sering disebut " Cakram Buka ".* (lihat gambar 9)

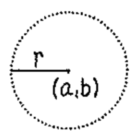
Definisi 2.2.4 :

Bola tutup atau cakram tutup $B((a,b);r)$ *di* R^2 *didefinisikan sebagai himpunan semua titik di* R^2 *yang memenuhi* $0 \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq r$ *yaitu himpunan semua titik pada bola buka* $B((a,b);r)$ *digabungkan dengan himpunan semua titik-titik pada lengkungan lingkaran berpusat di titik* (a,b) *dan berjari-jari* r

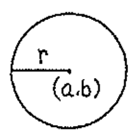
(lihat gambar 10)



gambar 8



gambar 9



gambar10

Jika fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ terdefinisi pada cakram buka yang memuat titik (a,b), kecuali mungkin di (a,b) sendiri, maka $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ berarti bahwa nilai fungsi $f(x,y)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L dengan cara mengambil (x,y) yang cukup dekat ke (a,b) dari segala arah, karena titik ini terletak di dalam suatu cakram buka. Gagasan ini menghasilkan definisi limit fungsi dua variabel, yang lengkapnya sebagai berikut :

Definisi 2.2.5 :

Suatu fungsi $f(x,y)$ dikatakan mempunyai limit L untuk (x,y) mendekati (a,b) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya) dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ berlaku $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Contoh 2.15 :

Tunjukkan bahwa $\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$ dengan memakai definisi 2.2.5.

<u>Penyelesaian</u> :

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian hingga $|2x+3y-11| < \varepsilon$.

Apabila $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$ dengan memakai ketaksamaan segitiga didapat $|2x+3y-11| = |2x-2+3y-9| \le 2|x-1| + 3|y-3|$.

Karena $|x-1| \le \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$ dan $|y-3| \le \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

maka $2|x-1|+3|y-3| < 2\delta + 3\delta$ apabila $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < \delta$.

Hal tersebut membuktikan $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$.

Dengan menggunakan konsep limit fungsi ini kita dapat membahas tentang kekontinuan fungsi pada suatu titik dan kekontinuan fungsi pada suatu himpunan.

Definisi 2.2.6 :

Suatu fungsi dengan dua variabel $f(x,y)$ dikatakan kontinu pada titik (a,b) jika f mempunyai nilai di (a,b) dan f mempunyai limit di (a,b) dan nilai $f(a,b)$ sama dengan nilai limit f di (a,b). Hal ini dapat ditulis $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Untuk mengatakan bahwa $f(x,y)$ kontinu pada suatu himpunan S berarti bahwa $f(x,y)$ adalah kontinu di setiap titik dari himpunan. Tetapi pernyataan ini perlu dikaji lebih lanjut.

Pertama kita perlu untuk mengetahui tentang " kitaran beradius δ dari suatu titik P " , yang dimaksud adalah himpunan semua titik Q yang memenuhi $|Q-P| < \delta$. Di ruang berdimensi dua, suatu kitaran adalah bagian dalam dari suatu lingkaran dan di ruang berdimensi 3 kitaran adalah bagian dalam dari suatu bola.

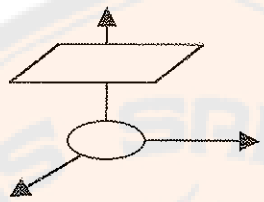
Titik P adalah bagian dalam dari himpunan S jika terdapat suatu kitaran dari titik P yang mengandung S. Himpunan semua titik pedalaman dari himpunan S adalah bagian dalam dari S. Sebaliknya P adalah titik perbatasan dari S jika setiap kitaran dari P memuat titik-titik yang berada dalam S dan di luar S. Himpunan semua titik perbatasan dari S disebut batas dari S dan himpunan semua titik pedalaman dari D disebut pedalaman D. Jadi suatu himpunan adalah terbuka jika semua titiknya adalah titik pedalaman dan sebaliknya himpunan tersebut tertutup jika memuat semua titik batasnya.

Jika S suatu himpunan terbuka, untuk mengatakan bahwa f kontinu pada S secara tepat berarti bahwa f kontinu di setiap titik dari S. Sebaliknya, jika S mengandung beberapa atau semua titik batasnya, kita harus memberikan tafsiran yang benar dari titik-titik yang demikian. Untuk mengatakan bahwa f kontinu pada suatu titik batas P dari himpunan S berarti bahwa $f(Q)$ harus mendekati $f(P)$ untuk Q mendekati P dari titik–titik batas dari S.

Suatu fungsi f yang kontinu pada setiap titik dalam suatu daerah dalam R^2 disebut kontinu pada R. Suatu fungsi yang kontinu pada setiap titik dalam R^2 disebut kontinu di mana-mana atau disebut kontinu saja.

Berikut ini diberikan contoh yang membantu memperjelas apa yang telah dikatakan (lihat gambar11). Andaikan $f(x,y)=\begin{cases} 0 & jika\ x^2+y^2\le 1 \\ 4 & x\quad lainnya \end{cases}$

Jika S adalah himpunan $\{(x,y)/x^2+y^2\leq 1\}$ maka adalah benar untuk mengatakan bahwa $f(x,y)$ kontinu di S. Sebaliknya, akan tidak benar untuk mengatakan bahwa $f(x,y)$ kontinu pada seluruh bidang.



gambar 11

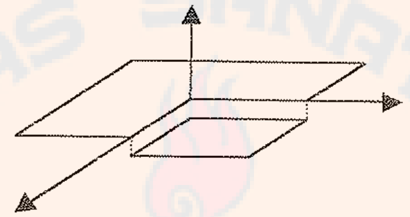
Suatu fungsi dengan satu variabel yang terdiferensialkan pada titik $x=a$ mempunyai dua sifat penting yaitu

1. $f(x)$ kontinu pada $x=a$.
2. kurva $y=f(x)$ mempunyai garis singgung yang tidak vertikal pada $x=a$.

Untuk fungsi dengan dua variabel, apabila $f(x,y)$ terdiferensialkan pada titik (a,b) maka kita ingin agar dua sifat di atas menjadi kasus bahwa

1. $f(x,y)$ kontinu pada titik (a,b).
2. kurva $z=f(x,y)$ mempunyai bidang singgung yang tidak vertikal pada titik (a,b).

Suatu fungsi dengan dua variabel disebut berturunan pada titik (a,b) jika dua turunan parsial $f_x(a,b)$ dan $f_y(a,b)$ ada pada titik (a,b). Tetapi syarat ini tidak cukup kuat untuk mencapai tujuan kita, karena ada fungsi yang mempunyai turunan parsial pada titik, tetapi tidak kontinu pada titik itu. Misalnya, fungsi $f(x,y)=\begin{cases}-1 \text{ , } x>0, y>0 \\ 0 \text{ , } x\le 0, y\le 0\end{cases}$ diskontinu pada $(0,0)$, tetapi mempunyai turunan pada $(0,0)$. Tepatnya $f_x(a,b)=0$ dan $f_y(a,b)=0$. Fakta ini jelas pada gambar 12.



gambar12

Jika dalam fungsi f, x diubah dari a menjadi $a+h$. Maka kita dapat menulis perubahan nilai f dalam bentuk

$$\Delta f = f(a+h)-f(a).$$

Dan kita ingat kembali bentuk dari

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Selanjutnya kita definisikan ε sebagai

$$\varepsilon = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a),$$

sehingga kita peroleh

$$f(a+h)-f(a) = hf'(a)+\varepsilon h.$$

Jika dalam fungsi f dengan 2 dua variabel, x diubah dari a menjadi $a+h$ dan y diubah dari b menjadi $b+k$ maka $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$.

Sehingga definisi dari keterdiferensialan yang lebih tepat adalah sebagai berikut :

Definisi 2.2.7 :

Suatu fungsi f dari dua variabel disebut berturunan di (a,b) jika $f_x(a,b)$ dan $f_y(a,b)$ ada dan Δf dapat ditulis dalam bentuk

$$\Delta f = hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

di mana ε_1 dan ε_2 adalah fungsi-fungsi dari h dan k sedemikian hingga $\varepsilon_1 \to 0$ dan $\varepsilon_2 \to 0$ jika $(h,k) \to (0,0)$.

Dalam fungsi dengan satu variabel, jika suatu fungsi didekati oleh polinomial Taylor maka kesalahan pada suatu titik x adalah selisih $R_n(x) = f(x) - \rho_n(x)$. Begitu pula untuk fungsi dengan dua variabel, jika suatu fungsi didekati oleh suatu polinom Taylor maka kesalahan pada suatu titik (x,y) adalah selisih $R_n(x,y) = f(x,y) - \rho_n(x,y)$. Untuk itu kita perlu mendefinisikan lebih dulu polinomial Taylor untuk fungsi dengan dua variabel.

Definisi 2.2.8 :

Jika suatu fungsi dengan dua variabel berturunan n kali pada titik (a,b) maka kita definisikan polinomial Taylor ke- n untuk f disekitar titik (a,b) adalah

$$p_n(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

Contoh 2.16 :

Tentukan polinomial Taylor ke-2 pada titik $(0,0)$ dari fungsi $f(x,y)=\dfrac{1+xy}{1+x+y}$.

Diketahui $f(x,y)=\dfrac{1+xy}{1+x+y}$, maka $f(0,0)=1$.

Karena $f_x(x,y)=\dfrac{(1+x+y)y-(1+xy)}{(1+x+y)^2}=\dfrac{y^2+y-1}{(1+x+y)^2}$, maka $f_x(0,0)=-1$.

Karena $f_y(x,y)=\dfrac{x^2+x-1}{(1+x+y)^2}$, maka $f_y(0,0)=-1$.

Karena $f_{xx}(x,y)=\dfrac{-2(y^2+y-1)}{(1+x+y)^3}$, maka $f_{xx}(0,0)=2$.

Karena $f_{xy}(x,y)=\dfrac{3+x+y+2xy}{(1+x+y)^3}$, maka $f_{xy}(0,0)=3$.

Karena $f_{yy}(x,y)=\dfrac{-2(x^2+x-1)}{(1+x+y)^3}$, maka $f_{yy}(0,0)=2$.

Jadi polinomial Taylor ke-2 pada titik $(0,0)$ adalah

$$f(x,y)=1-x-y+\frac{1}{2!}\left(2x^2+2.3xy+2y^2\right)$$

$$\frac{1+xy}{1+x+y}=1-x-y+x^2+3xy+y^2.$$

Contoh 2.17 :

Tentukan polinom Taylor ke-2 pada titik $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ dari fungsi $f(x,y)=\sin(x+2y)$.

Diketahui $f(x,y)=\sin(x+2y)$, maka $f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Karena $f_x(x,y)=\cos(x+2y)$,maka $f_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Karena $f_y(x,y)=2\cos(x+2y)$, maka $f_y\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Karena $f_{xx}(x,y)=-\sin(x+2y)$, maka $f_{xx}\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

Karena $f_{xy}(x,y)=-2\sin(x+2y)$, maka $f_{xy}\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$.

Karena $f_{yy}(x,y)=-4\sin(x+2y)$, maka $f_{yy}\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4$.

Jadi polinomial Taylor ke-2 pada titik $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ adalah

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2!}\left(-x^2+2.(-2)x\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-4\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

$$\sin(x+2y)=1-\frac{x^2}{2}-2x\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

Teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel adalah perluasan dari teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel . Seperti halnya pada teorema Taylor untuk fungsi dengan satu variabel, teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel dapat ditulis sebagai berikut :

Teorema 2.2.1 (*Teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel*)

Jika $f(x,y)$ *adalah fungsi dengan dua variabel yang mempunyai turunan parsial hingga pangkat ke-*$n+1$ *yang kontinu pada suatu kitaran yang berpusat pada titik* (a,b) *dan Polinomial Taylor ke-n untuk f di sekitar titik* (a,b) *adalah*

$$\rho_n(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b),$$

maka untuk setiap (x,y) *dalam kitaran, ada sekurang-kurangnya satu titik* (a_1,b_1) *sedemikian hingga*

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\rho_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a_1,b_1).$$

Bukti :

Diketahui $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel x dan y yang terdefinisi pada himpunan tertutup dan terbatas dan turunan parsial $f^{(n+1)}$ kontinu dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b).

Jika variabel t dikenalkan dengan bantuan relasi

$$x = a + ht \quad , \quad y = b + kt$$

di mana h dan k konstanta, akan dihasilkan fungsi dari variabel tunggal t yaitu

$$F(t) \equiv f(x, y) = f(a + ht, b + kt).$$

Dengan bantuan definisi turunan parsial kita peroleh

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

$$= hf_x(x, y) + kf_y(x, y).$$

$$F''(t) = \left[f_{xx}(x, y)\frac{dx}{dt} + f_{yx}(x, y)\frac{dy}{dt}\right]\frac{dx}{dt} + \left[f_{xy}(x, y)\frac{dx}{dt} + + f_{yy}(x, y)\frac{dy}{dt}\right]\frac{dy}{dt}$$

$$= \left[hf_{xx}(x, y) + kf_{yx}(x, y)\right]h + \left[hf_{xy}(x, y) + kf_{yy}(x, y)\right]k$$

$$= h^2 f_{xx}(x, y) + hkf_{yx}(x, y) + hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)$$

$$= h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y).$$

$$F'''(t) = \left[f_{xxx}(x, y)\frac{d^2x}{dt^2} + 2f_{xyx}(x, y)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + f_{yyx}(x, y)\frac{d^2y}{dt^2}\right]\frac{dx}{dt} +$$

$$\left[f_{xxy}(x, y)\frac{d^2x}{dt^2} + 2f_{xyy}(x, y)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + f_{yyy}(x, y)\frac{d^2y}{dt}\right]\frac{dy}{dt}$$

$$= \left[h^2 f_{xxx}(x, y) + 2hkf_{xyx}(x, y) + k^2 f_{yyx}(x, y)\right]h +$$

$$\left[h^2 f_{xxy}(x, y) + 2hkf_{xyy}(x, y) + k^2 f_{yyy}(x, y)\right]k$$

$$= h^3 f_{xxx}(x,y) + 2h^2 k f_{xyx}(x,y) + k^2 h f_{yyx}(x,y) +$$

$$h^2 k f_{xxy}(x,y) + 2hk^2 f_{xyy}(x,y) + k^3 f_{yyy}(x,y)$$

$$= h^3 f_{xxx}(x,y) + 3h^2 k f_{xxy}(x,y) + 3hk^2 f_{xyy}(x,y) + k^3 f_{yyy}(x,y).$$

$\vdots$

Turunan fungsi di atas dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu:

$$F'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) \equiv h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$F''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) \equiv h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$F'''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) \equiv h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2 k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

$\vdots$

$$F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y),$$

$$\equiv h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + C_1^n h^{n-1} k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + C_{n-1}^n hk^{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} + k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)$$

$$\equiv h^{n+1}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + C_1^{n+1} h^n k\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} + \cdots + C_n^{n+1} hk^n\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x \partial y^n} + k^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}.$$

Kita dapat menggunakan rumus Maclaurin untuk fungsi $F(t)$ dan menghasilkan

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(0)}{3!}t^3 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

..........(23)

di mana $0 < \theta < 1$.

Ambil $t = 1$, kita peroleh

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \qquad \text{..........(24)}$$

tetapi $F(1) = f(a+h, b+k)$.

Jika $t = 0$ maka $x = a$ dan $y = b$ sehingga kita peroleh

$F(0) = f(a,b)$,

$$F'(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b),$$

$$F''(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$$

$$= \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b),$$

$$F'''(0) = h^3 f_{xxx}(a,b) + 3h^2 kf_{xxy}(a,b) + 3hk^2 f_{xyy}(a,b) + k^3 f_{yyy}(a,b)$$

$$= \left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(a,b) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b),$$

$\vdots$

$$F^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k).$$

Dari (24) kita peroleh

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a,b)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(a,b)+\frac{1}{(1+n)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

.........(25)

di mana $0<\theta<1$.

Persamaan (25) tak lain adalah fungsi $f(x,y)=\rho_n(x,y)+R_n(x,y)$ di sekitar titik (a,b) dengan mengganti $x=a+h$, $y=b+k$ dan $a_1=a+\theta h$, $b_1=b+\theta k$ di mana $(a+\theta h, b+\theta k)$ dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik (a,b) dan $0<\theta<1$.

BAB III

PEMBAHASAN EKSTREM SUATU FUNGSI DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA TAYLOR

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita dihadapkan pada masalah penentuan cara terbaik untuk melakukan sesuatu. Ini ternyata merupakan masalah pemaksimuman atau peminimuman suatu fungsi f. Ada 3 hal utama yang perlu ditanyakan tentang nilai maksimum atau nilai minimum.

1. Apakah f mempunyai nilai maksimum atau minimum ?
2. Jika f mempunyai nilai maksimum atau minimum di mana tercapainya ?
3. Jika f mempunyai nilai maksimum atau minimum berapakah nilainya ?

Dalam bab III ini kita akan menentukan titik tertinggi dan titik terendah dari grafik suatu fungsi atau nilai terbesar dan nilai terkecil dari suatu fungsi. Suatu grafik fungsi yang membentuk bukit dan lembah mempunyai titik tertinggi dan titik terdalam. Puncak bukit yang merupakan titik tertinggi disebut titik maksimum dan dasar lembah yang merupakan titik terdalam disebut titik minimum.

Puncak bukit-puncak bukit yang merupakan titik tertinggi dari sekitarnya disebut titik maksimum relatif dan dasar lembah-dasar lembah yang merupakan titik terdalam dari sekitarnya disebut titik minimum relatif.

Mungkin kita tertarik menentukan bukit tertinggi dan lembah terdalam di sekitar daerah perbukitan. Permasalahan ini serupa dengan masalah menentukan nilai terbesar dan nilai terkecil dari f atas seluruh domain f. Ini kita sebut nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak dari f.

3.1 MAKSIMUM DAN MINIMUM SUATU FUNGSI DENGAN SATU VARIABEL

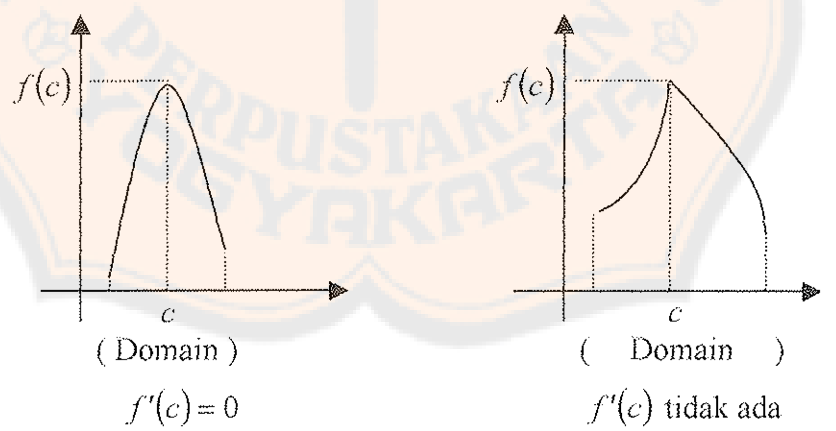
Maksimum dan minimum suatu fungsi dengan satu variabel, berdasarkan domainnya dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.1.1 :

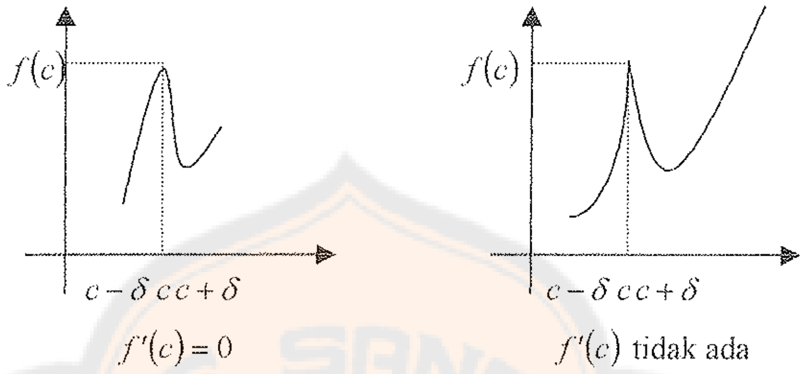
Fungsi f dikatakan mempunyai maksimum relatif pada c jika terdapat interval $(c-\delta, c+\delta)$ sedemikian hingga $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x dalam interval $(c-\delta, c+\delta)$.

Jika hubungan $f(c) \geq f(x)$ berlaku untuk setiap x dalam domain f maka f disebut mempunyai maksimum mutlak pada c.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 13 dan 14.



gambar 13



gambar 14

- Pada gambar 13, $f(c)$ dinamakan nilai maksimum mutlak dari fungsi f pada D dan $(c, f(c))$ dinamakan titik maksimum mutlak dari fungsi f pada D.
- Pada gambar 14, $f(c)$ dinamakan nilai maksimum relatif dari fungsi f pada D dan $(c, f(c))$ dinamakan titik maksimum relatif dari fungsi f pada D.

Maksimum relatif suatu fungsi dapat didefinisikan dengan cara lain yaitu sebagai berikut :

Definisi 3.1.2 :

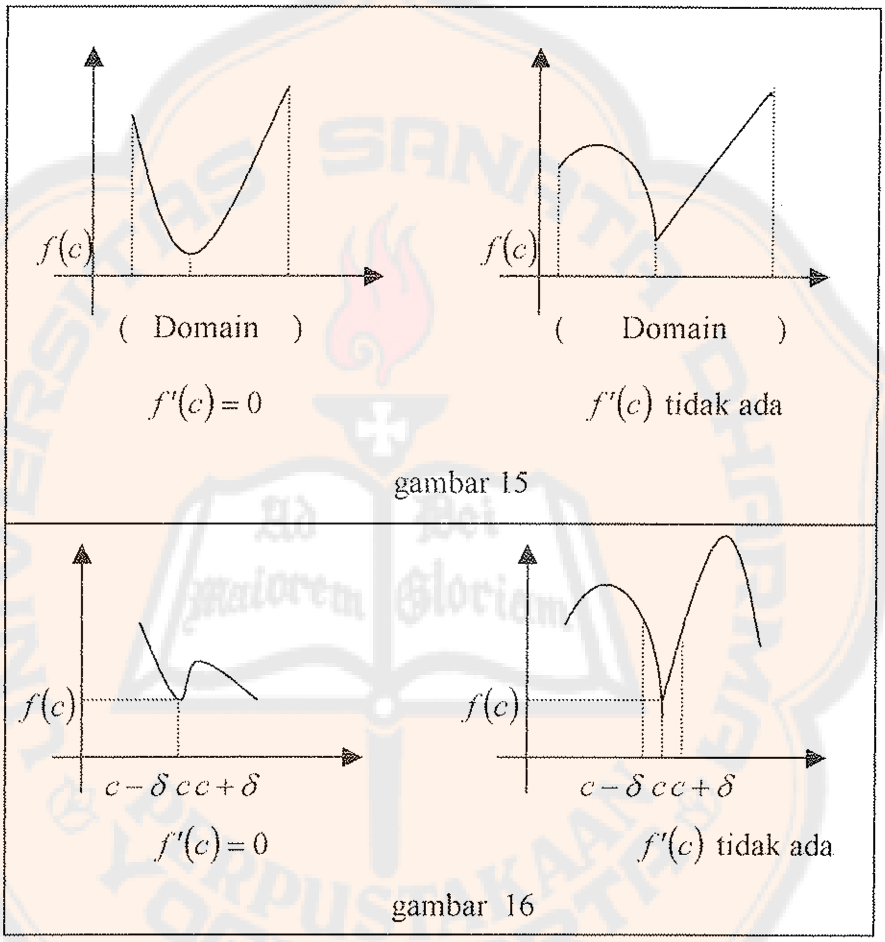
Fungsi f dikatakan mempunyai maksimum relatif pada c jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $f(c) > f(c+h)$ untuk setiap $0 < |h| < \delta$.

Definisi 3.1.3 :

Fungsi f dikatakan mempunyai minimum relatif pada c jika terdapat interval $(c-\delta, c+\delta)$ sedemikian hingga $f(c) \le f(x)$ untuk setiap x dalam interval $(c-\delta, c+\delta)$.

Jika hubungan $f(c) \leq f(x)$ berlaku untuk setiap x dalam domain f maka f disebut mempunyai minimum mutlak pada c.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 15 dan 16.



- Pada gambar 15, $f(c)$ dinamakan nilai minimum mutlak dari fungsi f pada D dan $(c, f(c))$ dinamakan titik minimum mutlak dari fungsi f pada D.
- Pada gambar 16, $f(c)$ dinamakan nilai minimum relatif dari fungsi f pada D dan $(c, f(c))$ dinamakan titik minimum relatif dari fungsi f pada D.

Minimum relatif suatu fungsi dapat didefinisikan dengan cara lain yaitu sebagai berikut :

Definisi 3.1.4 :

Fungsi f dikatakan mempunyai minimum relatif pada c jika terdapat $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $f(c) < f(c+h)$ *untuk setiap* $0 < |h| < \delta$.

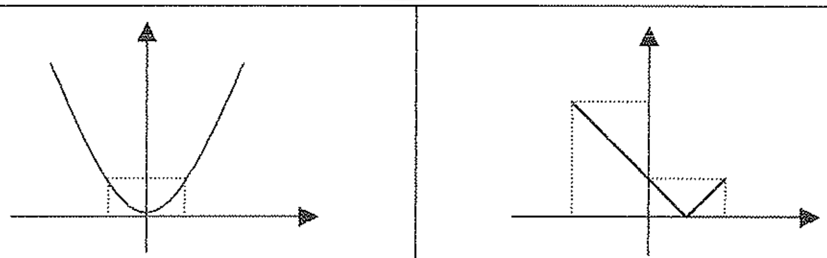
Jika f mempunyai maksimum relatif atau minimum relatif pada titik $x = c$ maka kita katakan bahwa f mempunyai ekstrem relatif di $x = c$ dan jika f mempunyai maksimum mutlak atau minimum mutlak pada titik $x = c$ maka kita katakan bahwa f mempunyai ekstrem mutlak di $x = c$.

Contoh 3.1 :

Fungsi $f(x) = x^2$ untuk x dalam R memiliki minimum mutlak pada $x = 0$ dengan nilai minimum 0, tetapi $f(x) = x^2$ tidak memiliki maksimum mutlak karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, seperti diperlihatkan pada gambar 17.

Contoh 3.2 :

Fungsi $f(x) = |x-1|$ untuk $-2 \le x \le 2$ memiliki minimum mutlak pada $x = 1$ dengan nilai minimum mutlak 0 dan maksimum mutlak pada $x = -2$ dengan nilai maksimum 3 yang merupakan maksimum batas, yang masing-masing adalah $f(1) = 0$ dan $f(-2) = 3$, seperti diperlihatkan pada gambar 18.



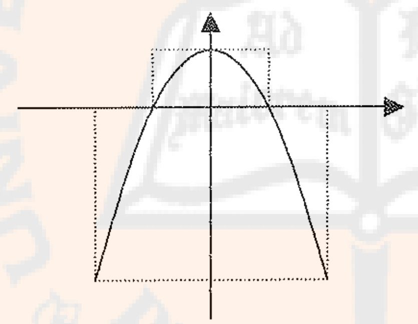
gambar 17 gambar 18

Contoh 3.3 :

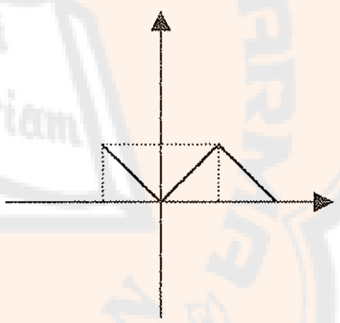
Fungsi $f(x) = 1 - x^2$ untuk $-2 \le x \le 2$ memiliki maksimum relatif pada $x = 0$, karena ada interval terbuka, misalnya $(-1,1)$ sehingga $f(0) \ge f(x)$ untuk semua x dalam $(-1,1)$ seperti diperlihatkan pada gambar 19.

Contoh 3.4 :

Fungsi $f(x) = \begin{cases} |x| & ,untuk\ -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & ,untuk\ 1 < x < 2 \end{cases}$ memiliki minimum relatif pada $x = 0$ dan maksimum relatif pada $x = 1$, seperti diperlihatkan pada gambar 20.

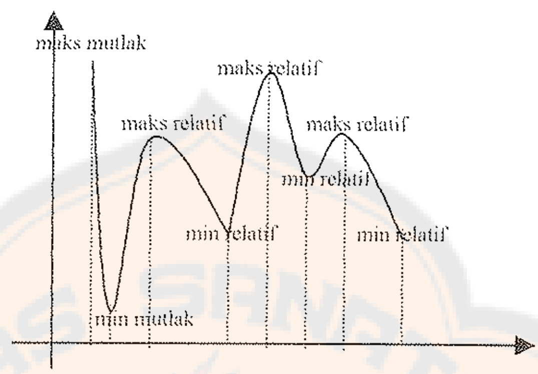


gambar 19



gambar 20

Perhatikan gambar 21 bahwa nilai maksimum mutlak (jika ada) hanyalah yang terbesar di antara nilai-nilai maksimum relatif. Dan nilai minimum mutlak (jika ada) hanyalah yang terkecil di antara nilai-nilai minimum relatif. Tentu saja nilai-nilai maksimum dan minimum mutlak otomatis juga nilai maksimum atau minimum relatif. Alasan inilah yang memberikan gagasan untuk membahas tentang ekstrem relatif terlebih dahulu , baru kemudian tentang ekstrem mutlak.



gambar 21

3.1.1 EKSTREM RELATIF

Bagaimana kita dapat menentukan di mana terjadinya ekstrem relatif suatu fungsi? Seseorang mungkin menyarankan agar kita menggambar grafik fungsinya dan memperhatikannya, seperti pada contoh 3.1, 3.2, 3.3, 3.4. Tetapi ingat, sebuah grafik fungsi biasanya digambar dengan merajah beberapa titik dan menghubungkan titik-titik tersebut dengan suatu kurva mulus. Siapa yang dapat yakin bahwa grafik fungsi tidak bergoyang di antara titik-titik yang dirajah. Untuk itu kita memerlukan prosedur yang lebih baik.

Ekstrem relatif dapat dipandang sebagai titik peralihan yang memisahkan daerah di mana grafik fungsi naik menjadi grafik fungsi turun atau sebaliknya. Untuk itu kita perlu mengingat kembali definisi dari fungsi naik dan fungsi turun.

Definisi 3.1.1.1 :

Andaikan f didefinisikan pada suatu interval dan andaikan x_1 dan x_2 sebarang titik dalam interval dengan $x_1 < x_2$ maka f naik pada interval itu *jika* $f(x_1) < f(x_2)$ *dan turun pada interval itu jika* $f(x_1) > f(x_2)$. *Perhatikan gambar 22.*

gambar 22

Gambar 22 menyarankan bahwa jika grafik suatu fungsi mempunyai garis singgung dengan gradien positif atas suatu interval maka fungsi itu naik pada interval itu , demikian pula jika grafik suatu fungsi mempunyai garis singgung dengan gradien negatif, maka fungsi itu turun. Hal ini menuntun kita pada teorema berikut, yang buktinya dapat kita jumpai pada buku kalkulus:

Teorema 3.1.1.1 :

Jika f kontinu pada interval $[a,b]$ *dan terdiferensial pada interval* (a,b) *dan*

(i) *Jika* $f'(x) > 0$ *untuk semua titik dalam interval* (a,b), *maka f naik pada* $[a,b]$.

(ii) *Jika* $f'(x) < 0$ *untuk semua titik dalam interval* (a,b), *maka f turun pada* $[a,b]$.

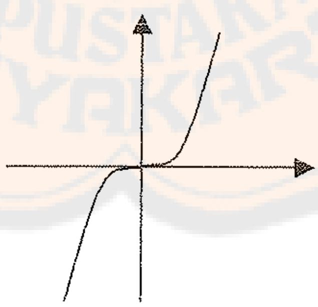
Dengan melihat gambar 13-22 tampak bahwa ekstrem relatif dari suatu fungsi *f* terjadi pada titik-titik di mana garis singgung pada grafik horizontal atau pada titik di mana *f* tidak berturunan. Hal ini menuntun kita untuk mendefinisikan istilah yang bersesuaian dengan itu :

Definisi 3.1.1.2 :

Titik kritis suatu fungsi f adalah nilai x dalam domain di mana $f'(x) = 0$ *atau f tidak berturunan.*

Jika c suatu titik di mana $f'(c) = 0$, *kita sebut c titik stasioner . Nama ini diturunkan dari fakta bahwa pada titik stasioner, grafik fungsi mendatar atau horisontal, karena garis singgungnya mendatar.*

Ekstrem relatif dapat terjadi pada titik kritis. Pertama catatlah bahwa jika fungsi *f* mempunyai turunan pertama di titik ekstremnya misal titik *c*, maka garis singgungnya di titik tersebut mendatar atau horizontal atau $f'(c) = 0$. Tetapi titik stasioner ini tidak selalu menjadi titik ekstrem, sebagai contoh ambillah fungsi $f(x) = x^3$. Pada kasus ini $f'(c) = 0$, tetapi $(0,0)$ bukan titik kritis dari grafik fungsinya.(lihat gambar 23)



gambar 23

Keadaan di mana $f'(x)=0$ atau f tidak berturunan (lihat contoh 3.14) belum menjamin terjadinya ekstrem fungsi . Dari kenyataan itulah muncul teorema yang menyatakan syarat perlu adanya ekstrem suatu fungsi :

Teorema 3.1.1.2 :

Jika f mempunyai ekstrem pada c, maka $f'(c)=0$ atau f tidak berturunan.

Bukti :

Ada 2 kemungkinan yaitu f berturunan pada c atau f tidak berturunan.

Jika tidak berturunan maka c adalah titik kritis untuk f dan terbukti sudah.

Jika f berturunan pada c maka kita harus memperlihatkan bahwa

$f'(c)=0$

(a) $f(c)$ adalah maksimum relatif dari f maka terdapat interval $[c-\delta, c+\delta]$ sedemikian sehingga jika $c+h$ dalam $[c-\delta, c+\delta]$, $c \neq c+h$ maka $f(c+h) < f(c)$.

h mungkin positif , mungkin negatif

(i) jika $h>0$ maka $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$

(ii) jika $h<0$ maka $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$.

Jika $f(x)$ berturunan pada $x=c$ berarti $f'(c)$ ada.

Jika $f'(c)$ ada berarti $f'_-(c)=f'_+(c)=f'(c)$ dan

- $f'_- = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

- $f'_+ = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$.

Karena $f'_- \geq 0$ dan $f'_+ \leq 0$ maka $f'(c) = 0$.

(b) $f(c)$ adalah minimum relatif dari f maka terdapat interval $[c-\delta, c+\delta]$ sedemikian sehingga jika $c+h$ dalam $[c-\delta, c+\delta]$, $c \neq c+h$ maka $f(c+h) > f(c)$.

h mungkin positif , mungkin negatif

(i) jika $h > 0$ maka $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$

(ii) jika $h < 0$ maka $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$.

Jika $f(x)$ berturunan pada $x = c$ berarti $f'(c)$ ada.

Jika $f'(c)$ ada berarti $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$ dan

- $f'_- = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$
- $f'_+ = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$.

Karena $f'_- \geq 0$ dan $f'_+ \leq 0$ maka $f'(c) = 0$.

Sifat suatu titik kritis sering ditentukan dengan mempelajari naik turunnya kurva di sekitar titik kritis. Sebelum melangkah lebih jauh kita ingat kembali bahwa turunan adalah kemiringan dari grafik fungsi, f naik pada interval di mana turunannya positif dan turun pada interval di mana turunannya negatif. Ide ini dinyatakan secara tepat dalam teorema berikut :

Teorema 3.1.1.2 (Teorema Uji Turunan Pertama untuk Nilai Ekstrem Relatif) :

Jika f kontinu pada interval terbuka (a,b) yang memuat titik kritis c dan

(a) $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai maksimum relatif.

(b) $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai minimum relatif.

(c) $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif .

Bukti :

(a) $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b).

Akan dibuktikan bahwa f mempunyai maksimum relatif pada c, dengan memperlihatkan bahwa $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam (a,b).

- Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (a,c). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (a,c) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[x,c]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (x,c) sedemikian hingga

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(\xi) \text{ atau } f(c)-f(x) = (c-x)f'(\xi)$$

$c - x > 0$ karena $c > x$ dan $f'(\xi) > 0$ karena f' positif di mana-mana pada interval (a, c).

Jadi $f(c) - f(x) > 0$, yang memperlihatkan bahwa $f(c) > f(x)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (a, c).

- Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (c, b). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (c, b) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[c, x]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (c, x) sedemikian hingga

  $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \text{ atau } f(x) - f(c) = (x - c) f'(\xi)$$

  $x - c > 0$ karena $x > c$ dan $f'(\xi) < 0$ karena f' negatif di mana-mana pada interval (c, b).

  Jadi $f(x) - f(c) < 0$, yang memperlihatkan bahwa $f(x) < f(c)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (c, b).

Jadi $f(x) < f(c)$ berlaku untuk setiap x dalam (a, b)

(b) $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b).

Akan dibuktikan bahwa f mempunyai minimum relatif pada c, dengan memperlihatkan bahwa $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval (a, b).

- Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (a,c). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (a,c) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[x,c]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (x,c) sedemikian hingga

  $\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'(\xi)$ atau $f(c)-f(x)=(c-x)f'(\xi)$

  $c-x>0$ karena $c>x$ dan $f'(\xi)<0$ karena f' negatif di mana-mana pada interval (a,c).

  Jadi $f(c)-f(x)<0$, yang memperlihatkan bahwa $f(c)<f(x)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (a,c).

- Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (c,b). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (c,b) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[c,x]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (c,x) sedemikian hingga

  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi)$ atau $f(x)-f(c)=(x-c)f'(\xi)$.

  $x-c>0$ karena $x>c$ dan $f'(\xi)>0$ karena f' positif di mana-mana pada interval (c,b).

  Jadi $f(x)-f(c)>0$, yang memperlihatkan bahwa $f(x)>f(c)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (c,b) .

Jadi $f(x)>f(c)$ berlaku untuk setiap x dalam (a,b).

(c) $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif .

Kita akan membuktikannya dalam dua kemungkinan yaitu :

(i) jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif .

(ii) jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif .

- Andaikan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b) .

  Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (a,c). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (a,c) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[x,c]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (x,c) sedemikian hingga

  $$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(\xi) \text{ atau } f(c)-f(x) = (c-x)f'(\xi)$$

  $c - x > 0$ karena $c > x$ dan $f'(\xi) < 0$ karena f' negatif di mana-mana pada interval (a,c).

  Jadi $f(c) - f(x) < 0$, yang memperlihatkan bahwa $f(c) < f(x)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (a,c).

  Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (c,b). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (c,b) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[c,x]$.

Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (c,x) sedemikian hingga

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi) \text{ atau } f(x)-f(c)=(x-c)f'(\xi).$$

$x-c>0$ karena $x>c$ dan $f'(\xi)<0$ karena f' negatif di mana-mana pada interval (a,c).

Jadi $f(x)-f(c)<0$, yang memperlihatkan bahwa $f(x)<f(c)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (c,b).

Karena $f(c)<f(x)$ untuk setiap x dalam interval (a,c) dan $f(x)<f(c)$ untuk setiap x dalam interval (c,b) maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif.

- Andaikan $f'(x)>0$ untuk setiap x dalam (a,c) dan $f'(x)>0$ untuk setiap x dalam (c,b).

  Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (a,c). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (a,c) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[x,c]$.

  Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (x,c) sedemikian hingga

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'(\xi) \text{ atau } f(c)-f(x)=(c-x)f'(\xi).$$

  $c-x>0$ karena $c>x$ dan $f'(\xi)>0$ karena f' positif di mana-mana pada interval (a,c).

Jadi $f(c)-f(x)>0$, yang memperlihatkan bahwa $f(c)>f(x)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (a,c).

Andaikan x adalah sebarang titik dalam interval (c,b). Karena f kontinu pada c dan berturunan pada interval (c,b) maka teorema nilai rata-rata dipenuhi pada interval $[c,x]$.

Jadi ada suatu titik ξ dalam interval (c,x) sedemikian hingga

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi) \text{ atau } f(x)-f(c)=(x-c)f'(\xi).$$

$x-c>0$ karena $x>c$ dan $f'(\xi)>0$ karena f' positif di mana-mana pada interval (a,c).

Jadi $f(x)-f(c)>0$, yang memperlihatkan bahwa $f(x)>f(c)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (c,b).

Karena $f(c)>f(x)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (a,c) dan $f(x)>f(c)$ dipenuhi untuk semua x dalam interval (c,b) maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem relatif.

Teorema 3.1.1.3 (Teorema Uji Turunan Kedua)

Andaikan f berturunan dua kali pada titik stasioner c

(a) *jika* $f''(c)>0$, *maka f mempunyai minimum relatif pada c*

(b) *jika* $f''(c)<0$, *maka f mempunyai maksimum relatif pada c*

Bukti :

Dengan menggunakan definisi turunan kita dapat menuliskan

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}=f''(c),\ x\neq c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

a) Menurut hipotesis $f''(c)>0$ sehingga kita dapat memilih $\varepsilon>0$ dalam definisi limit Berdasarkan kesimpulan dari (26) ada $\delta>0$ sedemikian hingga $\left|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}-f''(c)\right|<\varepsilon$ bilamana $|x-c|<\delta$, $x\neq c$ atau $f''(c)-\varepsilon<\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<f''(c)+\varepsilon$, bilamana x dalam interval $(c-\delta,c+\delta)$, $x\neq c$.

Untuk membuktikan bahwa f mempunyai minimum relatif pada c, kita akan memperlihatkan

- $f'(x)>0$ untuk semua x dalam $(c,c+\delta)$.
- $f'(x)<0$ untuk semua x dalam $(c-\delta,c)$.

Hal ini menyusul dari uji turunan pertama bahwa f mempunyai minimum relatif pada c.

Jika $\varepsilon>0$ yang dipilih kurang dari $f''(c)$ maka $\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$ terletak antara dua bilangan positif, berarti

$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}>0$, bilamana $(c-\delta,c+\delta)$, $x\neq c$.

Selanjutnya

- $f'(x)-f'(c)>0$ atau $f'(x)>f'(c)$untuk semua x dalam $(c,c+\delta)$.

- $f'(x)-f'(c)<0$ atau $f'(x)<f'(c)$ untuk semua x dalam $(c-\delta,c)$.

Menurut hipotesis, c adalah titik stasioner dari f, jadi $f'(c)=0$. Ini berarti

- $f'(x)>0$ untuk semua x dalam $(c,c+\delta)$.
- $f'(x)<0$ untuk semua x dalam $(c-\delta,c)$.

b) Menurut hipotesis $f''(c)<0$ sehingga kita dapat memilih $\varepsilon>0$ dalam definisi limit Berdasarkan kesimpulan dari (26) ada $\delta>0$ sedemikian hingga $\left|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}+f''(c)\right|<\varepsilon$ bilamana $|x-c|<\delta$, $x\neq c$ atau $-f''(c)-\varepsilon<\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<-f''(c)+\varepsilon$, bilamana x dalam interval $(c-\delta,c+\delta)$, $x\neq c$.

Untuk membuktikan bahwa f mempunyai maksimum relatif pada c, kita akan memperlihatkan

- $f'(x)>0$ untuk semua x dalam $(c,c+\delta)$.
- $f'(x)<0$ untuk semua x dalam $(c-\delta,c)$.

Karena ε yang dipilih adalah bilangan positif yang sangat kecil maka $\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$ terletak antara dua bilangan negatif, berarti

$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}>0$, bilamana $(c-\delta,c+\delta)$, $x\neq c$.

Selanjutnya

- $f'(x)-f'(c)<0$ atau $f'(x)<f'(c)$ untuk semua x dalam $(c,c+\delta)$.

- $f'(x) - f'(c) > 0$ atau $f'(x) > f'(c)$ untuk semua x dalam $(c-\delta, c)$.

Menurut hipotesis, c adalah titik stasioner dari f, jadi $f'(c) = 0$. Ini berarti

- $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam $(c, c+\delta)$.
- $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam $(c-\delta, c)$.

Prosedur untuk menentukan nilai ekstrem relatif.

1. Tentukan $f'(x)$.
2. Tentukan nilai x di mana $f'(x) = 0$ atau f tidak berturunan di titik c, untuk menemukan titik kritis.
3. Tentukan $f''(x)$.
4. Hitung $f''(x)$ pada setiap titik kritis
   a) jika $f''(x) < 0$ maka $f(c)$ adalah nilai maksimum relatif.
   b) jika $f''(x) > 0$ maka $f(c)$ adalah nilai minimum relatif

Contoh 3.5:

Periksa nilai ekstrem untuk $f(x) = x^2 - 6x + 5$ untuk setiap x dalam R.

Penyelesaian :

$f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$ maka $f'(x) = 0$ untuk $x = 3$.

$f''(x) = 2$ maka $f''(3) = 2 > 0$.

Jadi $f(3) = -4$ adalah nilai minimum relatif.

Contoh 3.6:

Periksa nilai ekstrem dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos 2x$, $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

$f'(x) = \cos x - 2\sin 2x = \cos x - 4\sin x \cos x$ maka $f'(x) = 0$ untuk

$\cos x = 0$ atau $\sin x = \frac{1}{4}$,

$\cos x = 0$ maka $x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$,

$\sin x = \frac{1}{4}$ maka $x = \sin^{-1}\frac{1}{4}$ dan $x = \pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}$,

$\sin^{-1}\frac{1}{4}$ terletak antara 0 dan 2π.

$f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x$

$x = \frac{\pi}{2}$ maka $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0$,

$x = \frac{3\pi}{2}$ maka $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 > 0$,

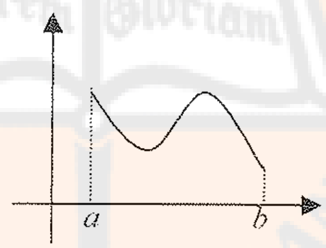
$x = \sin^{-1}\frac{1}{4}$ maka $f\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{4} < 0$,

$x = \pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}$ maka $f\left(\pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{4} < 0$,

Selanjutnya f mencapai maksimum di $x = \sin^{-1}\frac{1}{4}$ dan $x = \pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}$ dan mencapai minimum di $x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$.

3.1.2 EKSTREM MUTLAK

Kita telah mempelajari konsep titik ekstrem, masalahnya sekarang adalah di lokasi manakah ekstrem ini mesti dicari bilamana persamaan fungsi f diketahui. Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai suatu interval sebagai daerah definisinya atau domainnya. Beberapa interval ini memuat titik ujung dan beberapa lagi tidak. Misalnya interval $[a,b]$ memuat dua titik ujung a dan b . Interval $[a,b)$ dan $[a,\infty)$ hanya memuat titik ujung kiri yaitu a. Interval $(a,b]$ dan $(-\infty,b]$ hanya memuat titik ujung kanan yaitu b. Nilai-nilai ekstrem suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup dapat terjadi pada titik-titik ujung (lihat gambar 24) atau pada titik kritis.



gambar 24

Terdapat sebuah teorema bagus yang menyajikan syarat manakah yang menjamin adanya nilai-nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi.

Teorema 3.1.2.1 (*Teorema Nilai Ekstrem*)

Jika suatu fungsi f kontinu pada suatu interval tertutup $[a,b]$, maka f mempunyai nilai maksimum atau minimum pada $[a,b]$.

Walaupun secara intuisi jelas, tetapi bukti secara formal sangat sukar. Perhatikan kata-kata kunci : f harus kontinu dan domainnya harus berupa interval tertutup.

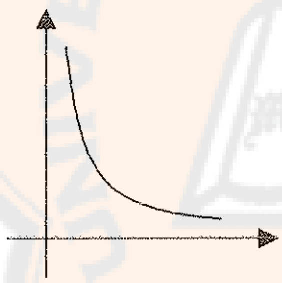
Jika kedua kata kunci tersebut tidak dipenuhi maka adanya nilai maksimum dan minimum tidak dapat dijalani, Hal ini tampak pada contoh-contoh berikut :

Contoh 3.9 :

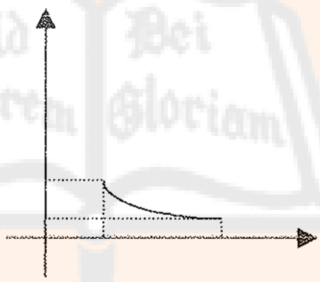
Apakah fungsi $f(x)=\frac{1}{x}$ mempunyai nilai maksimum atau minimum pada domain fungsi f?

Penyelesaian :

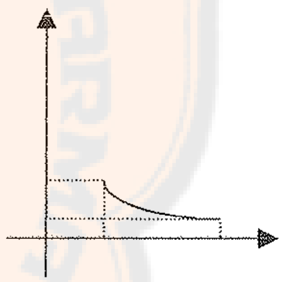
Jawaban dari pertanyaan tersebut pertama-tama tergantung pada domain dari fungsi f sendiri. (perhatikan gambar 25)



gambar 25 a



gambar 25 b



gambar 25 c

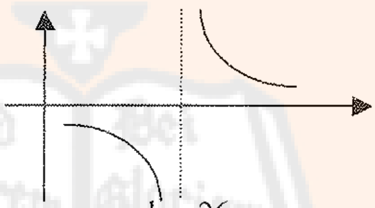
Jika $f(x)=\frac{1}{x}$ pada $(0,\infty)$ maka fungsi f tidak mempunyai nilai maksimum ataupun minimum.

Jika $f(x)=\frac{1}{x}$ pada $[1,3]$ maka fungsi f mempunyai nilai maksimum mutlak pada $x=1$ yang juga merupakan maksimum batas dengan nilai maksimum

$f(1)=1$. Fungsi f mempunyai nilai minimum mutlak pada $x=3$ yaitu $f(3)=\frac{1}{3}$ yang juga merupakan minimum batas.

Jika $f(x)=\frac{1}{x}$ pada $(1,3]$, maka fungsi f tidak mempunyai nilai maksimum tetapi mempunyai nilai minimum pada $x=3$ yaitu $f(3)=\frac{1}{3}$ yang juga merupakan minimum batas.

Contoh 3.10 :



gambar 26

Grafik fungsi f pada gambar 26 didefinisikan di mana-mana pada interval tertutup $[1,9]$ tetapi tidak mempunyai maksimum ataupun minimum pada interval tersebut karena f mempunyai titik diskontinu pada interval $[1,9]$.

Teorema Nilai Ekstrem sering disebut juga teorema eksistensi, karena teorema ini menyebutkan dibawah syarat-syarat manakah maksimum dan minimum dari suatu fungsi f itu ada. Menentukan nilai maksimum dan minimum adalah soal yang terpisah. Teorema berikut ini adalah kunci untuk menentukan nilai ekstrem suatu fungsi.

Teorema 3.1.2.2 :

Jika suatu fungsi f mempunyai nilai ekstrem pada suatu interval terbuka (a,b) maka nilai ekstrem terjadai pada titik kritis.

Bukti ;

Jika f mempunyai nilai ekstrem pada interval (a,b) di titik c maka $f(c)$ adalah nilai terbesar atau nilai terkecil dari f pada interval (a,b). Dengan demikian ini berarti juga bahwa nilai terbesar atau nilai terkecil dari f berada di sekitar titik c. Jadi f mempunyai ekstrem relatif. Berdasarkan teorema 3.1.1.1 , titik c adalah titik kritis yaitu dimana $f'(c)=0$ atau f tidak berturunan pada titik c.

Jadi titik ujung dan titik kritis merupakan titik kunci dari teori maksimum dan minimum. Untuk menentukan titik ekstrem mutlak dari fungsi kontinu f pada interval tertutup $[a,b]$, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Tentukan titik-titik ujung dan titik-titik kritis dari fungsi f.
2. Hitung nilai fungsinya pada titik-titik ujung dan pada titik-titik kritis.
3. Bandingkan nilai fungsinya dengan $f(a)$ dan $f(b)$, di antara semua nilai ini, yang terbesar akan menjadi nilai maksimum mutlak dan yang terkecil akan menjadi nilai minimum mutlaknya.

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.11 :

Carilah titik-titik kritis dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ dan tentukan nilai ekstremnya !

Penyelesaian :

Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2}$ dan 2.

$f'(x) = -6x^2 + 6x$

Untuk mencari titik-titik stasioner, kita tentukan titik di mana $f'(x) = 0$, ini terjadi pada $x = 0$ dan $x = 1$. Fungsi f terdiferensial pada interval $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Kita peroleh titik-titik kritis adalah $-\frac{1}{2}, 0, 1, 2$.

Sekarang, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -4$. Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada $x = 2$).

Contoh 3.12 :

Tentukan titik kritis dan nilai ekstrem dari fungsi $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$, x dalam interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Penyelesaian :

Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2}$ dan $\frac{3}{2}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2x-2, & 0 < x < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Untuk mencari titik-titik stasioner, kita tentukan titik di mana $f'(x) = 0$, ini terjadi pada $x = 1$. Pada interval terbuka $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ fungsi terdiferensial kecuali pada $x = 0$. Kita peroleh titik-titik kritis adalah $-\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{4}$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ dan $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1\frac{1}{4}$. Jadi nilai maksimum adalah 2 (dicapai pada $x = 0$) dan nilai minimum adalah 1 (dicapai pada $x = 1$).

Dalam penjelasan tentang syarat-syarat suatu fungsi dapat mencapai maksimum dan minimum, sebenarnya kita dapat merangkumnya menjadi 3 masalah yaitu sebagai berikut :

1. Jika $f'(c)$ tidak ada maka $(c, f(c))$ mungkin merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi atau mungkin juga tidak. Berikut ini adalah contoh dari setiap kasus yang mungkin.

   Contoh 3.13 :

   Perhatikan fungsi $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

   <u>Penyelesaian</u> :

Kita akan menunjukkan bahwa $f'(0)$ tidak ada tetapi $(0,0)$ merupakan titik ekstrem grafik fungsi f.

Pada kasus ini,

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-}(-1) = -1,$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

karena $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$ maka $f'(0)$ tidak ada. Tetapi karena $f(x) = |x| \geq 0$ untuk setiap x dalam domain $f = R$ maka fungsi f mencapai minimum mutlak di $x = 0$ dengan titik minimumnya $(0,0)$. Grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar 27.

Contoh 3.14 :

Perhatikan fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

<u>Penyelesaian</u> :

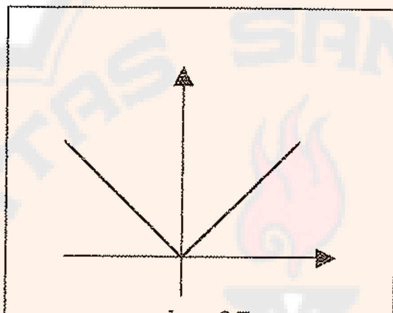
Kita akan menunjukkan bahwa $f'(1)$ tidak ada tetapi $(1,1)$ bukan merupakan titik ekstrem grafik fungsi f.

Pada kasus ini,

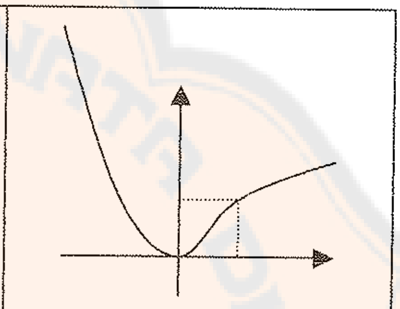
$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-}(x+1) = 2$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

karena $f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$ maka $f'(1)$ tidak ada. Grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar 28.



gambar 27



gambar 28

2. Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c)$ tidak ada maka $(c, f(c))$ mungkin merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi atau mungkin juga tidak. Berikut ini adalah contoh dari setiap kasus yang mungkin.

Contoh 3.15 :

Perhatikan fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Pada kasus fungsi yang kontinu pada R ini kita akan menunjukkan bahwa $f'(0) = 0$ dan $f''(0)$ tidak ada, tetapi $(0,0)$ merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi f.

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} x = 0 .$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0 .$$

Karena $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 0$ maka $f'(0) = 0$

Fungsi turunan pertamanya adalah

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ 3x^2 & , x > 0 \end{cases} .$$

Karena $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam $(-\infty, 0)$ dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam $(0, \infty)$ maka $(0,0)$ adalah titik minimum mutlak dari fungsi f.

Selanjutnya karena

$$f''_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2 ,$$

$$f''_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} 3x = 0 , \text{ dan}$$

karena $f''_{-}(0) \neq f''_{+}(0)$ maka $f''(0)$ tidak ada. Grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar 29

Contoh 3.16 :

Perhatikan fungsi $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Pada kasus fungsi yang kontinu pada R ini kita akan menunjukkan bahwa $f'(0) = 0$ dan $f''(0)$ tidak ada, tetapi $(0,0)$ bukan merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi f.

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x = 0\,,$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0\,.$$

Karena $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 0$ maka $f'(0) = 0$

Fungsi turunan pertamanya adalah

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}.$$

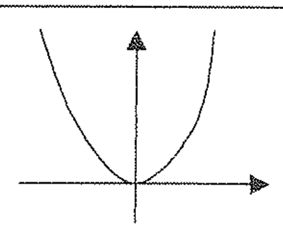
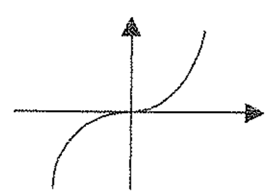
Karena $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam $(-\infty, \infty)$ maka $(0,0)$ bukan titik ekstrem dari fungsi f.

Selanjutnya karena

$$f''_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -2 = -2\,,$$

$$f''_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2\,.$$

Karena $f''_{-}(0) \neq f''_{+}(0)$ maka $f''(0)$ tidak ada. Grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar 30.

 gambar 29	 gambar 30

3. Jika $f'(c)=0$ dan $f''(c)=0$ maka $(c, f(c))$ mungkin merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi atau mungkin juga tidak. Berikut ini adalah contoh dari setiap kasus yang mungkin.

Contoh 3.17 :

Perhatikan fungsi $f(x)=x^3$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Pada kasus fungsi yang kontinu pada R ini kita akan menunjukkan bahwa $f'(0)=0$ dan $f''(0)=0$, tetapi $(0,0)$ bukan merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi f.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0$$

Fungsi turunan pertamanya adalah

$f(x)=3x^2$.

Karena $f'(x)<0$ untuk semua x dalam $(-\infty,\infty)$ maka $(0,0)$ bukan merupakan titik ekstrem dari fungsi f.

Selanjutnya

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0}3x=0$$

Grafiknya dapat dilihat pada gambar 31.

Contoh 3.18 :

Perhatikan fungsi $f(x)=x^4$, selidiki apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Pada kasus fungsi yang kontinu pada R ini kita akan menunjukkan bahwa $f'(0)=0$ dan $f''(0)=0$, tetapi $(0,0)$ merupakan titik ekstrem dari grafik fungsi f.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Fungsi turunan pertamanya adalah

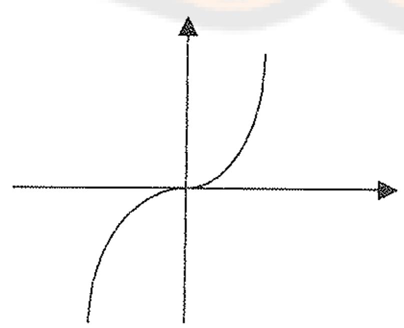
$f(x)=4x^3$.

Karena $f'(x)<0$ untuk semua x dalam $(-\infty,0)$ dan $f'(x)>0$ untuk semua x dalam $(0,\infty)$ maka $(0,0)$adalah titik minimum mutlak dari fungsi f.

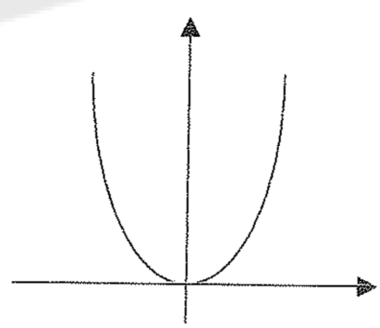
Selanjutnya

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0}3x=0.$$

Grafiknya dapat dilihat pada gambar 32.



gambar 33



gambar 34

Untuk kasus $f'(c)=0$ dan $f''(c)=0$, akan dibahas lebih lanjut pada subbab 3.2.

3.2 PENGGUNAAN TEOREMA TAYLOR DALAM KASUS $f(c)$

Andaikan f adalah fungsi dengan satu variabel yang berturunan pada titik kritis c dan $f'(c)=f''(c)=0$ maka kita dapat mengetahui apakah $f(c)$ merupakan nilai ekstrem atau bukan adalah dengan memeriksa turunan ke-3 dari fungsi pada titik c yaitu apakah $f'''(c)\neq 0$ atau $f'''(c)=0$. Jika diperoleh $f'''(c)\neq 0$ maka selanjutnya kita akan menggunakan rumus Taylor dengan sisa $R_3(x)$ di sekitar titik c. Tetapi jika ternyata $f'''(c)=0$ maka kita akan melanjutkan dengan memeriksa turunan ke-4 dari fungsi f pada titik c, apakah $f^{(4)}(c)\neq 0$ atau $f^{(4)}(c)=0$. Jika $f^{(4)}(c)\neq 0$ kita akan menggunakan rumus Taylor dengan sisa $R_4(x)$ di sekitar titik c, dan seterusnya.

Untuk itu kita perlu mengingat kembali rumus Taylor di sekitar titik c, yang dapat kita tulis dalam bentuk :

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{2!}f''(c)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c+\theta h)$$

atau

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c+\theta h)\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

di mana $|h|<\delta$, $0<\theta<1$, $c+\theta h$ dalam interval $(c-\delta, c+\delta)$.

Perhatikan contoh berikut :

Contoh 3.19 :

Perhatikan fungsi $f(x) = x^3$, periksa apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Fungsi turunan pertamanya adalah $f'(x) = 3x^2$ maka $f'(x) = 0$ untuk $x = 0$.

Fungsi turunan keduanya adalah $f''(x) = 6x$, untuk $x = 0$ maka $f''(0) = 0$.

Karena $f''(0) = 0$ maka langkah selanjutnya adalah memeriksa turunan ke-3 dari fungsi $f(x)$ pada titik $x = 0$.

Fungsi turunan ketiganya adalah $f'''(x) = 6$ maka $f'''(0) = 6 > 0$.

Karena $f'(0) = f''(0) = 0$ dan $f'''(0) = 6 \neq 0$ maka kita akan menggunakan rumus Taylor dengan sisa yaitu $R_3(x)$ di sekitar titik $x = 0$. Berdasarkan kekontinuan pada suatu fungsi , kita dapat menentukan suatu interval $(0-\delta, 0+\delta)$ sedemikian hingga dalam interval tersebut, tanda f''' di sekitar $x = 0$ sama dengan tanda $f'''(0)$.

Dengan menggunakan (27) kita dapat menulis :

$$f(0+h) - f(0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0+\theta h) \quad \text{atau} \quad f(h) - f(0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h)$$

di mana θh dalam interval $(-\delta, \delta)$.

h^3 bernilai positif atau negatif tergantung dari h sendiri positif atau negatif karena $f'''(c) > 0$

- Jika $h < 0$ maka untuk setiap $x = h$ dalam interval $(-\delta, 0)$ berlaku $f(h) - f(0) < 0$.
- >ika $h > 0$ maka untuk setiap $x = h$ dalam interval $(0, \delta)$ berlaku $f(h) - f(0) > 0$.

Karena $f(h) - f(0) < 0$, di mana $-\delta < h < 0$ dan $f(h) - f(0) > 0$, di mana $0 < h < \delta$ berarti $f(0)$ bukan merupakan titik ekstrem.

Contoh 3.20 :

Perhatikan fungsi $f(x) = x^4$, periksa apakah fungsi f mempunyai nilai ekstrem.

Penyelesaian :

Fungsi turunan pertamanya adalah $f(x) = 4x^3$ maka $f'(x) = 0$ untuk $x = 0$.

Fungsi turunan keduanya adalah $f''(x) = 12x^2$, untuk $x = 0$ maka $f''(0) = 0$.

Fungsi turunan ketiganya adalah $f'''(x) = 24x$, untuk $x = 0$ maka $f'''(0) = 0$.

Fungsi turunan keempatnya adalah $f^{(4)}(x) = 24$ maka $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.

Karena diperoleh $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ maka kita akan menggunakan rumus taylor dengan sisa $R_4(x) = \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(0 + \theta h)$, di mana θh dalam interval $(-\delta, \delta)$.

h^4 bernilai positif untuk setiap bilangan real h.

Karena $f^{(4)}(0) > 0$ maka untuk setiap $x = h$ dalam interval $(-\delta, \delta)$ berlaku $f(h) - f(0) > 0$ berarti $f(0)$adalah nilai minimum.

3.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM SUATU FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL

Dalam subbab 3.1 dan 3.2 kita telah membahas bagaimana menentukan maksimum dan minimum suatu fungsi dengan satu variabel. Dalam subbab ini kita akan membahas bagaimana menentukan maksimum dan minimum suatu fungsi dengan dua variabel.

Maksimum dan minimum suatu fungsi dengan dua variabel didefinisikan dengan cara yang sama seperti pada fungsi dengan satu variabel. Pada fungsi dengan dua variabel peranan interval terbuka digantikan dengan cakram buka dan variabel peranan interval tertutup digantikan dengan cakram tutup. Definisi maksimum dan minimum suatu fungsi dengan dua variabel adalah sebagai berikut :

Definisi 3.3.1 :

Misalkan $z = f(x,y)$ *adalah fungsi dengan dua variabel yang terdefinisi pada suatu daerah di bidang yang memuat titik* (a,b). *Jika terdapat suatu cakram buka* $B((a,b);r)$ *sedemikian hingga* $f(a,b) \geq f(x,y)$ *yang terletak pada cakram buka yang berpusat di* (a,b) *dan berjari-jari r, maka fungsi f dikatakan mencapai maksimum relatif di titik* (a,b) *dengan nilai maksimum* $f(a,b)$.

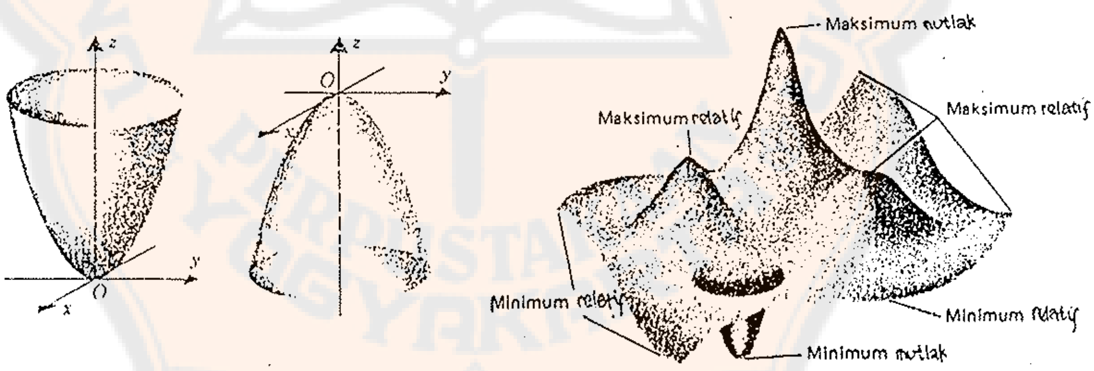
Jika hubungan $f(a,b) \geq f(x,y)$ *berlaku untuk setiap titik* (x,y) *yang terletak dalam daerah definisi fungsi* $z = f(x,y)$, *maka fungsi f dikatakan mencapai maksimum mutlak di titik* (a,b) *dengan nilai maksimum* $f(a,b)$.

Definisi 3.3.2 :

Misalkan $z = f(x,y)$ *adalah fungsi dengan dua variabel yang terdefinisi pada suatu daerah di bidang yang memuat titik* (a,b). *Jika terdapat suatu cakram buka* $B((a,b);r)$ *sedemikian hingga* $f(a,b) \le f(x,y)$ *yang terletak pada cakram buka yang berpusat di* (a,b) *dan berjari-jari r, maka fungsi f dikatakan mencapai minimum relatif di titik* (a,b) *dengan nilai minimum* $f(a,b)$.

Jika hubungan $f(a,b) \le f(x,y)$ *berlaku untuk setiap titik* (x,y) *yang terletak dalam daerah definisi fungsi* $z = f(x,y)$, *maka fungsi f dikatakan mencapai minimum mutlak di titik* (a,b) *dengan nilai minimum* $f(a,b)$.

Situasi yang terjadi pada definisi diatas diperlihatkan pada gambar 33 berikut :

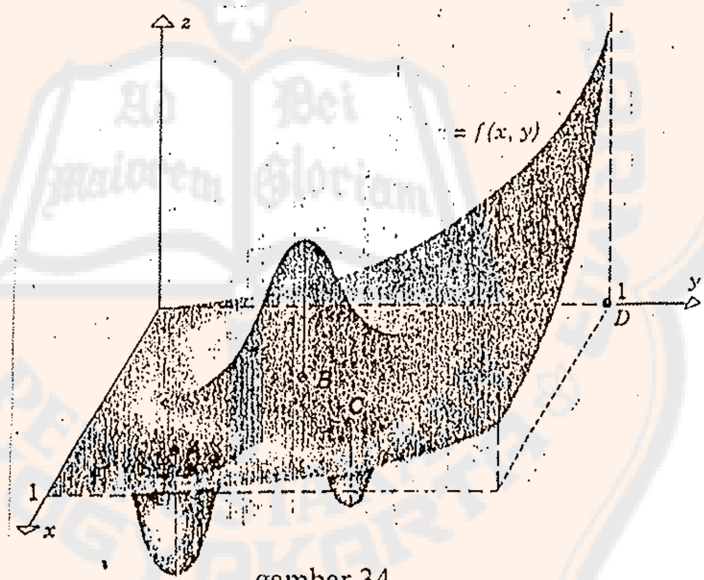


gambar 33

Jika f mempunyai maksimum relatif atau minimum relatif di (a,b) maka kita katakan bahwa f mempunyai ekstrem relatif di (a,b) dan jika f mempunyai maksimum mutlak atau minimum mutlak di (a,b) maka kita katakan bahwa f mempunyai ekstrem mutlak di (a,b). Jika fungsi dengan dua variabel f yang kontinu pada daerah definisinya hanya memiliki tepat satu ekstrem relatif maka dapat ditunjukkan bahwa ekstrem relatif tersebut akan menjadi ekstrem mutlak.

Contoh 3.21 :

Perhatikan gambar 34, kita mempunyai sketsa grafik f yang domainnya adalah persegi tertutup dalam bidang $-xy$ yang titik-titiknya memenuhi ketaksamaan $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$. Fungsi f mempunyai maksimum relatif pada titik B dan minimum relatif pada titik A dan titik C. Fungsi f juga mempunyai minimum mutlak di titik A dan maksimum mutlak di titik D.



gambar 34

Ada 2 hal yang perlu di tanyakan tentang ekstrem suatu fungsi dengan dua variabel

1. Apakah ada ekstrem relatif atau mutlak ?
2. Jika ada, di mana letaknya ?

Untuk menjawab pertanyaan ini, kita akan membahas ekstrem relatif dan ekstrem mutlak lebih lanjut.

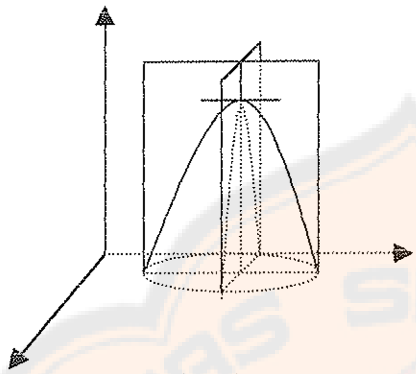
3.3.1 EKSTREM RELATIF

Ingat kembali bahwa jika suatu fungsi f dengan satu variabel mempunyai ekstrem relatif pada titik $x = c$ di mana f berturunan maka $f'(c) = 0$. Untuk memperoleh hasil yang serupa, begitu juga untuk fungsi dengan dua variabel, fungsi f akan mempunyai maksimum relatif atau minimum relatif pada titik (a,b) bilamana $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Secara geometri bahwa irisan luas $z = f(x,y)$ dengan bidang $x = a$ dan bidang $y = b$ mempunyai bidang singgung horizontal pada titik (a,b) atau ukuran kemiringan bidang singgungnya pada titik (a,b) sama dengan nol (gambar 35). Titik di mana ukuran kemiringan bidang singgungnya sama dengan nol di sebut titik stasioner.

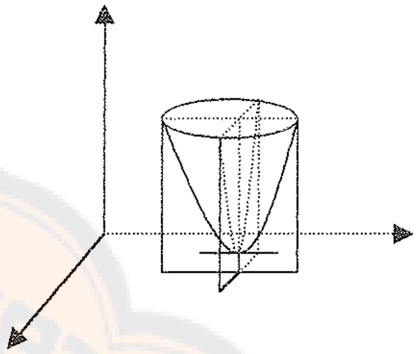
Ini memberikan arah pada teorema yang menyatakan syarat perlu untuk ekstrem relatif :

Teorema 3.3.1.1 :

Jika f mempunyai ekstrem relatif pada titik (a,b) dan jika turunan parsial tingkat pertama dari f ada pada titik (a,b), maka $f_x(a,b) = 0$ dan $f_y(a,b) = 0$.



gambar 35 a



gambar 35 b

Bukti :

Kita akan membuktikan dalam 2 kasus yaitu di mana $f(a,b)$ adalah nilai maksimum relatif dan $f(a,b)$ adalah nilai minimum relatif

(i) Akan diperlihatkan bahwa jika f mempunyai nilai maksimum relatif pada (a,b) dan jika $f_x(a,b)$ ada maka berlaku $f_x(a,b)=0$.

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel (x,y) maka turunan parsial f terhadap x pada titik (a,b) adalah

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

Karena f mempunyai nilai maksimum relatif di (a,b) maka dengan memakai definisi 3.3.1 didapat :

$$f(a+h,b)-f(a,b)\le 0.$$

Ini berlaku bilamana h cukup kecil sedemikian hingga $(a+h,b)$ ada di dalam $B((a,b);\delta)$.

Jika h menuju nol dari kanan atau dari pihak positif, $h>0$.

maka $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \le 0$.

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \le 0.$$

Jika h menuju nol dari kiri atau dari pihak negatif, $h < 0$.

maka $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \ge 0$.

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \ge 0.$$

Karena $f_x(a,b) \ge 0$ dan $f_x(a,b) \le 0$ maka $f_x(a,b) = 0$.

Akan diperlihatkan bahwa jika f mempunyai nilai maksimum relatif pada (a,b) dan jika $f_y(a,b)$ ada maka berlaku $f_y(a,b) = 0$.

Jika f adalah fungsi dengan dua variabel (x,y) maka turunan parsial f terhadap x pada titik (a,b) adalah

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Karena f mencapai maksimum relatif di (a,b) maka dengan memakai definisi 3.3.1 didapat :

$$f(a,b+k)-f(a,b) \le 0$$

Ini berlaku apabila k cukup kecil sedemikian hingga $(a,b+k)$ ada di dalam $B((a,b);\delta)$.

Jika k menuju nol dari atas atau dari pihak positif, $k > 0$.

Maka $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \le 0$

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \le 0$$

Jika k menuju nol dari bawah atau dari pihak negatif, $k < 0$.

Maka $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \ge 0$

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \ge 0$$

Karena $f_y(a,b) \le 0$ dan $f_y(a,b) \ge 0$ maka $f_y(a,b) = 0$

(ii) Akan diperlihatkan bahwa jika f mempunyai nilai minimum relatif pada (a,b) dan $f_x(a,b)$ ada maka berlaku $f_x(a,b) = 0$.

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel (x,y) maka turunan parsial f terhadap x pada titik (a,b) adalah

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

Karena fungsi f mempunyai nilai minimum relatif di (a,b) maka dengan memakai definisi 3.3.2 didapat :

$$f(a+h,b)-f(a,b) \ge 0$$

Ini berlaku bilamana h cukup kecil sehingga $(a+h,b)$ ada di dalam $B((a,b);r)$.

Jika h menuju nol dari kanan atau dari pihak positif, $h>0$,

maka $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$.

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

Jika h menuju nol dari kiri atau dari pihak negatif, $h<0$,

maka $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$$

Karena $f_x(a,b)\geq 0$ dan $f_x(a,b)\leq 0$ maka $f_x(a,b)=0$.

Akan diperlihatkan bahwa jika f mempunyai nilai minimum relatif pada titik (a,b) dan $f_y(a,b)$ ada maka berlaku $f_y(a,b)=0$.

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan dua variabel (x,y) maka turunan parsial f terhadap y pada titik (a,b) adalah

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Karena fungsi f mempunyai minimum relatif di (a,b) maka dengan memakai definisi 3.3.2 didapat :

$f(a,b+k) - f(a,b) \geq 0$.

Ini berlaku bilamana k cukup kecil sehingga $(a,b+k)$ ada di dalam $B((a,b);r)$.

Jika k menuju nol dari atas atau dari pihak positif, $k > 0$.

maka $\dfrac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \geq 0$.

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \geq 0 .$$

Jika k menuju nol dari bawah atau dari pihak negatif, $k < 0$.

maka $\dfrac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \leq 0$.

Dengan memakai definisi turunan parsial didapat :

$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \leq 0 .$$

Karena $f_y(a,b) \geq 0$ dan $f_y(a,b) \leq 0$ maka $f_y(a,b) = 0$

Contoh 3.22 :

Tentukan nilai ekstrem relatif dari fungsi $f(x,y) = x^2 - 2x + \dfrac{y^2}{4}$.

Penyelesaian :

Fungsi yang diberikan dapat didiferensialkan sepanjang daerah definisinya, yaitu bidang xy.

$f_x(x,y) = 2x - 2$.

$f_y(x,y) = \frac{y}{2}$.

Titik-titik stasioner diperoleh dengan cara menetapkan $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ sama dengan nol.

$f_x(x,y) = 2x - 2 = 0$ bilamana $x = 1$ dan $f_y(x,y) = \frac{y}{2} = 0$ bilamana $y = 0$.

Sekarang tinggal memutuskan apakah $(1,0)$ memberikan suatu maksimum atau minimum atau bukan kedua-duanya.

Perhatikan bahwa

$$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1.$$

Jadi $f(1,0)$ sebenarnya adalah suatu nilai minimum mutlak.

Contoh 3.23 :

Tentukan nilai ekstrem relatif dari fungsi $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

Penyelesaiaan :

Kita mempunyai $f_x(x,y) = 4x - y$ dan $f_y(x,y) = 2y - x - 7$.

Untuk menemukan titik stasioner kita tetapkan $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ sama dengan nol.

$f_x(x,y) = 4x - y = 0$ bilamana $x = 1$ dan $f_y(x,y) = 2y - x - 7$ bilamana $y = 4$.

Jadi titik $(1,4)$ adalah titik stasioner.

Sekarang kita bandingkan nilai pada $(1,4)$ dengan nilai f pada $(1+h, 4+k)$

$f(1,4) = 2 + 16 - 4 - 28 = -14$.

$f(1+h, 4+k) = 2(1+h)^2 + (4+k)^2 - (1+h)(4+k)$

$= 2 + 4h + 2h^2 + 16 + 8k + k^2 - 4 - 4h - k - hk - 28 - 7k$

$= 2h^2 + k^2 - hk - 14$.

$f(1+h, 4+k) - f(1,4) = 2h^2 + k^2 - hk = 2\left(h^2 - \frac{1}{2}hk\right) + k^2$

$= 2\left(h - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{9}{8}k^2 > 0$, untuk setiap h,k dalam R.

Jadi f mempunyai minimum relatif pada titik $(1,4)$ dengan nilai -14.

Contoh 3.24 :

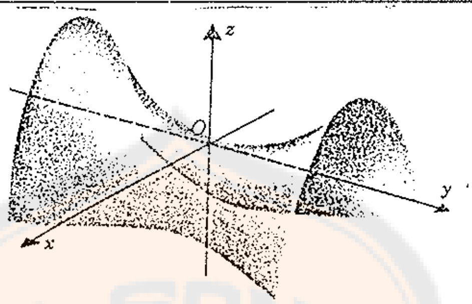
Tentukan nilai ekstrem relatif dari fungsi $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Penyelesaian :

$f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$.

Titik-titik stasioner diperoleh dengan menetapkan $f_x(x,y) = 2x$ dan $f_y(x,y) = -2y$ sama dengan nol, ini dicapai pada titik $(0,0)$. Pada bidang $y = 0$, $f(x,y) = x^2$ dan fungsi f bernilai positif. Tetapi pada bidang $x = 0$, $f(x,y) = -y^2$ fungsi f bernilai negatif.

Jadi $f(0,0)$ bukan merupakan nilai terbesar maupun nilai terkecil.(lihat gambar 36)



gambar 36

Suatu titik kritis di mana suatu fungsi tidak mempunyai nilai terbesar maupun nilai terkecil atau dengan kata lain tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik kritis disebut titik pelana. Jadi pada contoh 3.25 $(0,0)$ adalah titik pelana.

Untuk fungsi dengan satu variabel, syarat $f'(0)=0$ tidak cukup menjamin bahwa f mempunyai ekstrem pada c. Demikian pula syarat $f_x(x,y)=0$ dan $f_y(x,y)=0$ tidak cukup untuk menjamin bahwa fungsi dengan dua variabel mempunyai ekstrem relatif pada (a,b). Jadi kenyataan bahwa $f_x(x,y)=f\ (x,y)=0$ tidak menjamin suatu ekstrem relatif.

Suatu titik kritis di mana suatu fungsi tidak mempunyai nilai terbesar maupun nilai terkecil atau dengan kata lain tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik kritis disebut titik pelana. Jadi pada contoh 3.25 $(0,0)$ adalah titik pelana.

Untuk fungsi dengan satu variabel, syarat $f'(0)=0$ tidak cukup menjamin bahwa f mempunyai ekstrem pada c. Demikian pula syarat $f_x(x,y)=0$ dan $f_y(x,y)=0$ tidak cukup untuk menjamin bahwa fungsi dengan dua variabel

mempunyai ekstrem relatif pada (a,b). Jadi kenyataan bahwa $f_x(x,y) = f\ (x,y) = 0$ tidak menjamin suatu ekstrem relatif.

Ide ini menuntun kita pada teorema yang menyatakan syarat cukup suatu fungsi dengan dua variabel mempunyai ekstrem relatif.

Teorema 3.3.1.2 :

Andaikan f adalah fungsi dengan dua variabel mempunyai turunan parsial tingkat dua kontinu dalam suatu kitaran yang berpusat pada titik kritis (a,b) *dan andaikan* $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$.

a) *Jika* $D > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) > 0$ *maka f mempunyai minimum relatif pada* (a,b).

b) *jika* $D > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) < 0$ *maka f mempunyai maksimum relatif pada* (a,b).

c) *Jika* $D < 0$ *maka f tidak mempunyai ekstrem relatif relatif pada* (a,b)

d) *Jika* $D = 0$ *maka perlu pengujian lebih lanjut*

Bukti :

(a) Andaikan $\phi(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$.

Diketahui $\phi(a,b) > 0$ dan $f_{xx}(a,b) > 0$ akan ditunjukkan $f(a,b)$ adalah nilai minimum relatif.

Karena f_{xx}, f_{xy} dan f_{yy} fungsi-fungsi yang kontinu di $B((a,b);r)$, akibatnya, terdapat cakram buka $B_1((a,b);r_1)$, di mana $r_1 \leq r$, sedemikian hingga $\phi(x,y) > 0$ dan $f_{xx}(x,y) > 0$ untuk setiap (x,y) di $B_1((a,b);r_1)$.

Misalkan h dan k konstanta-konstanta yang tidak dua-duanya nol, sedemikian sehingga titik $(a+h, b+k)$ di $B_1((a,b);r_1)$.

Maka dua persamaan berikut :

$x = a + ht$ dan $y = b + kt$, $0 \leq t \leq 1$

mendefinisikan semua titik pada segmen garis yang menghubungkan titik (a,b) dan $(a+h, b+k)$. Sebut F fungsi dengan satu variabel yang didefinisikan oleh :

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Dengan menggunakan rumus Maclaurin untuk fungsi F dengan satu variabel, didapat :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\xi)}{2!}t^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

di mana $0 < \xi < t$.

Untuk $t = 1$ pada persamaan (29), berlaku :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

di mana $0 < \xi < 1$.

Karena $F(0) = f(a,b)$ dan $F(1) = f(a+h, b+k)$ maka dengan memakai persamaan (30), didapat :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \qquad \text{...............(31)}$$

di mana $0 < \xi < 1$.

Untuk mendapatkan $F'(t)$ dan $F''(\xi)$, digunakan aturan rantai pada persamaan (28), didapat :

$$F'(t) = hf_x(a+ht, b+kt) + kf_y(a+ht, b+kt). \qquad \text{...............(32)}$$

Jika f fungsi dua variabel dalam x dan y yang didefinisikan dalam cakram buka $B((a,b);r)$ dengan f_x, f_y, f_{xy} dan f_{yx} terdefinisi di B dan f_{xy} dan f_{yx} kontinu di B, maka didapat :

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ untuk setiap titik (x,y) di B_1

Jadi berlaku

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \qquad \text{...............(33)}$$

di mana setiap turunan parsial di ruas kanan persamaan (33) dihitung di titik $(a+ht, b+kt)$. Dengan memasukkan $t = 0$ pada persamaan (32) dan $t = \xi$ pada persamaan (33), didapat :

$$F'(0) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b) = 0 \qquad \text{...............(34)}$$

dan

$$F''(\xi) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \qquad \text{...............(35)}$$

di mana setiap turunan parsial kedua pada persamaan (35) dihitung di titik $(a+ht, b+kt)$ dengan $0 < \xi < 1$.

Dengan memasukkan persamaan (34) dan (35) ke dalam (31), didapat :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

Bentuk-bentuk di dalam tanda kurung di ruas kanan persamaan (36) dapat dituliskan sebagai :

$$h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} = f_{xx}\left[h^2 + 2hk\frac{f_{xy}}{f_{xx}} + \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 - \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + k^2\frac{f_{yy}}{f_{xx}}\right]$$

Sehingga persamaan (23) dapat dituliskan sebagai

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{f_{xx}}{2}\left[\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}k^2\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

Karena $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ di hitung di titik $(a+h\xi, b+k\xi)$, maka nilainya sama dengan $\phi(a+h\xi, b+k\xi) > 0$. Jadi akan didapat, bentuk di dalam tanda kurung pada persamaan (37) bertanda positif. Selain itu karena $f_{xx}(a+h\xi, b+k\xi) > 0$, dari persamaan (37) didapat bahwa $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ bertanda positif.

Jadi telah terbukti bahwa $f(a+h, b+k) > f(a,b)$ untuk setiap $(a+h, b+k) \neq (a,b)$ pada B_1. Karenanya dengan memakai definisi (3.3.2.), $f(a,b)$ merupakan nilai minimum relatif dari f.

(b) Diketahui $\phi(a,b) > 0$ dan $f_{xx}(a,b) < 0$ akan ditunjukkan $f(a,b)$ adalah maksimum relatif. Langkah-langkah pembuktiannya analog dengan (a). Karena $(a+h\xi, b+k\xi)$ di dalam $B((a,b);r)$, maka $f_{xx}(a+h\xi, b+k\xi) < 0$ dan dari persamaan (37) didapat bahwa $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ bertanda negatif.

Jadi terbukti bahwa $f(a+h,b+k) < f(a,b)$ untuk setiap $(a+h,b+k) \neq (a,b)$ pada B_1. Karenanya dengan memakai definisi (3.3.1), $f(a,b)$ merupakan nilai maksimum relatif dari f.

(c) Diketahui $D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$.

Kita sudah mendapatkan persamaan (36) .

Andaikan $F = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$. ....(38)

F dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$F = \frac{1}{f_{xx}}\left(h^2 f^2{}_{xx} + 2hkf_{xy} f_{xx} + k^2 f_{yy} f_{xx}\right),\ f_{xx} \neq 0$$

$$F = \frac{1}{f_{xx}}\left[(hf_{xx} + kf_{xy})^2 + k^2\left(f_{xx} f_{yy} - f^2{}_{xy}\right)\right]. \qquad \text{...............(39)}$$

Dalam hal ini, F tandanya tergantung pada nilai h dan k .

Untuk contoh,

- Jika $k = 0$ maka $F = h^2 f_{xx}$ dan F mempunyai tanda sama seperti f_{xx}.
- Jika $k = \dfrac{-hf_{xx}}{f_{xy}}$ maka $F = \dfrac{k^2 D}{f_{xx}} = \dfrac{k^2 D}{f_{xx}^2} f_{xx}$.

  $\dfrac{k^2 D}{f_{xx}^2} < 0$, untuk nilai $k = \dfrac{-hf_{xx}}{f_{xy}}$

Ini berarti F mempunyai tanda yang berlawanan dengan f_{xx}.

Dari kedua contoh di atas, kita ketahui bahwa titik stasioner adalah titik pelana, karena F tidak memberikan tanda yang sama untuk setiap (h,k) yang diberikan.

Jadi $f(a,b)$ bukan nilai ekstrem.

(d) Akan kita bahas pada subbab 3.4.

Prosedur untuk menentukan nilai ekstrem suatu fungsi dengan dua variabel :

1. Tentukan $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$.
2. Tentukan nilai x dan y di mana $f_x(x,y)=0$ dan $f_y(x,y)=0$ untuk menentukan titik kritis.
3. Tentukan semua turunan parsial kedua yaitu $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$.
4. Tentukan $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$ dan $f_{xx}(a,b)$ pada titik kritis.

Contoh 3.25 :

Tentukan nilai ekstrem relatif untuk fungsi $f(x,y) = 4 - 4x^2 - y^2$.

<u>Penyelesaian</u> :

$f_x(x,y) = -8x$ dan $f_y(x,y) = -2y$.

$f_x(x,y) = 0$ jika $x = 0$ dan $f_y(x,y) = 0$ jika $y = 0$.

$f_{xx}(x,y) = -8$, $f_{yy}(x,y) = -2$, $f_{xy}(x,y) = 0$.

Pada titik $(0,0)$, $D = (-8)(-2) - 0^2 = 16 > 0$ dan $f_{xx}(0,0) = -8 < 0$.

Jadi fungsi f mempunyai nilai maksimum pada titik $(0,0,4)$.

Contoh 3.26 :

Tentukan nilai ekstrem relatif untuk fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$.

Penyelesaian :

$f_x(x,y) = 2x - 2$ dan $f_y(x,y) = 2y$.

$f_x(x,y) = 0$ jika $x = 1$ dan $f_y(x,y) = 0$ jika $y = 0$.

$f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$.

Pada titik $(1,0)$, $D = 2.2 - 0^2 = 4 > 0$ dan $f_{xx}(1,0) = 2 > 0$.

Jadi fungsi f mempunyai nilai maksimum pada titik $(1,0,0)$.

Contoh 3.27 :

Tentukan maksimum dan minimum dari fungsi

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

Kita mempunyai

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3$, $f_y(x,y) = 3y^2 - 12$.

$f_x(x,y) = 0$ untuk $x = \pm 1$.

$f_y(x,y) = 0$ untuk $y = \pm 2$.

Selanjutnya fungsi mempunyai 4 titik stasioner yaitu $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$, dan $(-1,-2)$.

$f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 6y$.

Pada titik $(1,2)$, $f_{xx}(x,y) = 6 > 0$ dan $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 72 > 0$ berarti $(1,2)$ adalah titik minimum dari fungsi.

Pada titik $(-1,2)$, $f_{xx}(x,y)=-6<0$ dan $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-72<0$ berarti fungsi tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik $(-1,2)$.

Pada titik $(1,-2)$, $f_{xx}(x,y)=6>0$ dan $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-72<0$ berarti fungsi tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik $(1,-2)$.

Pada titik $(-1,-2)$, $f_{xx}(x,y)=-6<0$ dan $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=72>0$ berarti fungsi mempunyai nilai maksimum pada titik $(-1,-2)$.

3.3 .2 EKSTREM MUTLAK

Untuk fungsi dengan satu variabel biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan terdefinisi pada interval tertutup $[a,b]$ sehingga untuk fungsi dengan satu variabel biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan terdefinisi pada himpunan terbatas R.

Untuk fungsi dengan satu variabel, Teorema Nilai Ektrem (teorema 3.1.2.1) menjawab pertanyaan adanya ekstrem mutlak. Teorema berikut, yang sangat sukar untuk dibuktikan, tetapi secara intuisi jelas, akan membantu kita dalam menjawab pertanyaan tentang ekstrem mutlak suatu fungsi dengan dua variabel.

Teorema 3.3.2.1 (*Teorema Nilai Ekstrem*)

Jika fungsi f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas pada R maka f mempunyai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada titik-titik dalam R.

Jika f kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas R maka teorema 3.3.2.1 menjamin adanya nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak f pada R. Ekstrem mutlak ini dapat terjadi pada batas R atau dalam pedalaman R_1 tetapi ekstrem mutlak yang terjadi pada titik pedalaman, maka itu terjadi pada suatu titik kritis, ini menuntun kita pada teorema sebagai berikut :

Teorema 3.3.2.2 :

Jika suatu fungsi f dengan dua variabel mempunyai ekstrem mutlak pada suatu titik di pedalaman domainnya , maka ekstrem itu terjadi pada suatu titik kritis.

Bukti :

Jika f mempunyai ekstrem mutlak pada titik (a,b) dalam pedalaman domain f maka $f(a,b)$ merupakan nilai terbesar atau terkecil dalam pedalaman domain f. Dengan demikian ini berarti juga bahwa nilai terbesar atau nilai terkecil dari f berada di sekitar titik (a,b) atau dengan kata lain ada suatu kitaran yang berpusat di titik (a,b) yang menjadikan $f(a,b)$ nilai terbesar atau nilai terkecil dalam kitaran tersebut. Jadi f mempunyai ekstrem relatif. Jika kedua turunan parsial ada pada titik (a,b) maka $f_x(a,b)=0$ dan $f_y(a,b)=0$ menurut teorema 3.3.1.1, titik (a,b) adalah titik kritis dari f.

Permasalahan selanjutnya adalah menentukan ekstrem mutlak dari suatu fungsi f dengan dua variabel yang kontinu pada himpunan terbatas R, perhatikan prosedur di bawah ini :

1. Tentukan titik-titik kritis dari f yang terletak di dalam R.

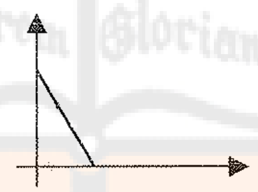
2. Tentukan semua titik perbatasan.

3. Hitung $f(x,y)$ pada titik-titik perbatasan dan titik-titik stasioner, nilai terbesar akan menjadi nilai maksimum mutlak dan nilai terkecil akan menjadi nilai minimum mutlak.

Contoh 3.28 :

Tentukan nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak dari $f(x,y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ pada daerah segitiga tertutup R dengan puncak $(0,0)$, $(3,0)$, dan $(0,5)$

Penyelesaian :



gambar 37

Daerah R tampak pada gambar 37.

Kita mempunyai $f_x(x,y) = 3y - 6$ dan $f_y(x,y) = 3x - 3$

Titik kritis terjadi bilamana $3y - 6 = 0$ dan $3x - 3 = 0$. Penyelesaian persamaan ini menghasilkan $x = 1$ dan $y = 2$, jadi $(1,2)$ adalah titik kritis. Hal ini tampak pada gambar titik kritis di dalam R.

Kemudian kita ingin menentukan lokasi titik-titik pada batas dari R di mana ekstrem mutlak terjadi. Batas R terdiri dari tiga ruas garis, masing-masing akan kita bahas secara terpisah.

- Ruas garis di antara $(0,0)$ dan $(3,0)$

  Pada ruas garis ini kita mempunyai $y = x$ dan $f(x,y)$ dapat kita ubah menjadi fungsi dengan satu variabel dalam x.

  $u(x) = f(x,0) = -6x + 7$, $0 \le x \le 3$.

- Fungsi ini tidak mempunyai titik kritis karena $u'(x) = -6 \ne 0$ untuk semua x. Jadi nilai ekstrem dari $u(x)$ pada titik-titik ujung $x = 0$ dan $x = 3$ yang bersesuaian dengan titik-titik $(0,0)$ dan $(3,0)$ dari R.

- Ruas garis di antara $(0,0)$ dan $(0,5)$

  Pada ruas garis ini kita mempunyai $x = 0$, sehingga fungsi $f(x,y)$ menjadi fungsi dengan satu variabel dalam y yang berbentuk

  $v(y) = f(0,y) = -3y + 7$, $0 \le y \le 5$.

  Fungsi ini tidak mempunyai titik kritis karena $v'(y) = -3 \ne 0$ untuk setiap y. Jadi nilai ekstrem dari $v(y)$ terjadi pada titik-titik ujung $y = 0$ dan $y = 5$ yang bersesuaian dengan titik $(0,0)$ dan $(0,5)$ dari R.

- Ruas garis di antara $(3,0)$ dan $(0,5)$

  Dalam bidang $-xy$ persamaan ruas garis ini adalah

  $y = -\frac{5}{3}x + 5$, $0 \le x \le 3$.

  Fungsi $f(x,y)$ kita ubah menjadi fungsi dengan satu variabel dalam x

  $$w(x) = f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) = 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7$$

  $$= -5x^2 + 14x - 8,\ 0 \le x \le 3$$

$w'(x) = -10 + 14$, persamaan $w'(x) = 0$ hanya menghasilkan sebuah titik kritis yaitu $x = \frac{7}{5}$. Jadi nilai ekstrem dari w terjadi pada titik kritis $x = \frac{7}{5}$ atau titik-titik ujung $x = 0$ dan $x = 3$. Titik-titik ujung yang bersesuaian dengan titik-titik $(3,0)$ dan $(0,5)$ dari R dan dari persamaan $y = -\frac{5}{3}x + 5$, $0 \le x \le 3$, titik kritis bersesuaian dengan $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Perhatikan tabel di bawah yang mendaftar nilai-nilai $f(x, y)$ pada titik kritis dalam dan pada titik-titik pada batas di mana ekstrem mutlak terjadi. Dari tabel tersebut kita simpulkan bahwa nilai maksimum mutlak dari f adalah $f(0,0) = 7$ dan nilai minimum mutlak adalah $f(3,0) = -11$.

(x, y)	$(0,0)$	$(3,0)$	$(0,5)$	$\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$	$(1,2)$
$f(x, y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

3.4 PENGGUNAAN TEOREMA TAYLOR DALAM KASUS $D = 0$

Dari pembahasan pada subbab 3.3 diatas, dapat di tarik kesimpulan sebagai berikut :

Jika fungsi f dengan dua variabel terdefinisi untuk setiap titik pada cakram buka $B((a,b);r)$ *dan kontinu pada cakram buka dan* $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ *maka*

a) *f mencapai nilai minimum relatif di* (a,b) *apabila*

$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) > 0$.

b) *f mencapai nilai maksimum relatif di* (a,b) *apabila*

$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) < 0$.

c) *f tidak mencapai nilai ekstrem relatif di* (a,b) *apabila*

$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$.

Untuk selanjutnya kita akan membahas bilamana $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) = 0$.

Dari (39) maka maka kita dapat menulis F dalam bentuk

$$F = \frac{(hf_{xx} + kf_{xy})^2}{f_{xx}}. \qquad \text{...............(40)}$$

Selanjutnya $f(a,b)$ adalah nilai maksimum jika $f_{xx} < 0$ dan $f(a,b)$ adalah nilai minimum jika $f_{xx} > 0$. Tetapi mungkin $f(a+h,b+k) - f(a,b) = 0$ jika $hf_{xx} + kf_{xy} = 0$, untuk setiap h,k yang diberikan. Untuk kasus seperti ini penyelidikan tidak dilanjutkan.

Contoh 3.29 :

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x,y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + y + \ln y$ untuk $y > 0$ tidak mempunyai nilai ekstrem pada titik stasioner.

Penyelesaian :

$f_x(x,y) = 4x + 6y + 2$.

$f_y(x,y) = 6x + 10y + \frac{1}{y} + 1$.

Untuk mencari titik stasioner kita tentukan

$f_x(x,y) = 4x + 6y + 2 = 0$.

$f_y(x,y) = 6x + 10y + \frac{1}{y} + 1 = 0$.

Sehingga kita peroleh

$$y + \frac{1}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0.$$

Akibatnya kita peroleh $y = 1$ dan $x = -2$, sehingga kita hanya mempunyai sebuah titik stasioner yaitu $(-2,1)$.

$f_{xx}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = 6$, $f_{yy}(x,y) = 10 - \frac{1}{y^2}$.

Sehingga diperoleh $f_{xx}(-2,1) f_{yy}(-2,1) - f_{xy}^2(-2,1) = 4(9) - 6^2 = 0$,

dan kita tidak dapat mengklasifikasikan titik stasioner.

Sekarang kita akan menggunakan rumus Taylor dengan sisa suku ke-3 $R_3(x,y)$ di sekitar titik $(-2,1)$.

$$f(x,y)=2[(x+2)-2]^2+6[(x+2)-2][(y-1)+1]+5[(y-1)+1]^2+2[(x+2)-2]+$$

$$[(y-1)+1]+\ln[(y-1)+1]$$

$$=-2+2(x+2)^2+6(x+2)(y-1)+\frac{9}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+R_3$$

Deret Taylor untuk $\ln[(y-1)+1]$ adalah

$$(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+\cdots.$$

Bentuk pangkat pertama dalam $(x+2)$ dan $(y-1)$ pada titik stasioner $(-2,1)$ adalah nol. Perlu diketahui bahwa koefisien dari $(x+2)^2,(x+2)(y-1),(y-1)^2$ tak lain berturut-turut adalah

$$\frac{1}{2}f_{xx}(-2,1), f_{xy}(-2,1), \frac{1}{2}f_{yy}(-2,1)$$

$$f(x,y)=-2+\frac{1}{2}[2(x+2)+3(y-1)]^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+R_3$$

$$=f(-2,1)+\frac{1}{2}(2x+3y+1)^2+\frac{1}{3}(y-1)+R_3.$$

Selanjutnya pada persamaan $2x+3y+1=0$, dekat titik $(-2,1)$ dan $f(x,y)$ akan lebih besar atau lebih kecil dari $f(-2,1)$ sesuai dengan y lebih besar atau lebih kecil dari 1. Jadi titik stasioner $(-2,1)$ bukan titik ekstrem.

Contoh 3.30 :

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x,y)=x^4-x^2y^2+y^4$, mempunyai nilai minimum pada $(0,0)$, di mana $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$

Penyelesaian :

$f_x(x,y) = 4x^3 - 2xy^2$ maka $f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = -2x^2y + 4y^3$ maka $f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2y^2$ maka $f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = -4xy$ maka $f_{xy}(0,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -2x^2 + 12y^2$ maka $f_{yy}(0,0) = 0$

kita peroleh $f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$.

Kita akan menggunakan bantuan turunan ke-3 dan rumus Taylor dengan sisa suku ke-3 untuk dapat menentukan jenis ekstrem dari fungsi di atas.

$f_{xxx}(x,y) = 24x$

$f_{xxy}(x,y) = -4y$

$f_{xyy}(x,y) = -4x$

$f_{yyy}(x,y) = 24y$

$$f(h,k) - f(0,0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial}{\partial^2}\right)f(0,0) + R_3$$

di mana

$$R_3 = \frac{1}{6}\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(\theta h, \theta k),\ 0 < \theta < 1.$$

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{1}{6}\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(\theta h, \theta k)$$

$$=\frac{1}{6}\left(h^3(24\theta h)+3h^2k(-4\theta k)+3hk^2(-4\theta h)+k^3(24\theta k)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(24\theta h^4-12\theta h^2k^2-12\theta h^2k^2+24\theta k^4\right)$$

$$=4\theta\left(h^4-h^2k^2+k^4\right)$$

$$=4\theta^4\left(h^2-k^2\right)^2+h^2k^2.$$

$4\theta^4\left(h^2-k^2\right)^2+h^2k^2>0$, untuk setiap (h,k) dalam (x,y).

Ini berarti $f(h,k)-f(0,0)$ nilainya positif, untuk setiap (h,k) dalam (x,y)

Jadi f mempunyai minimum pada titik $(0,0)$, di mana nilainya adalah nol.

Contoh 3.31 :

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x,y)=x^4-y^4$, tidak mempunyai nilai ekstrem pada $(0,0)$, di mana $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$.

Penyelesaian :

$f_x(x,y)=4x^3$ maka $f_x(0,0)=0$

$f_y(x,y)=-4y^3$ maka $f_y(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y)=12x^2$ maka $f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=0$ maka $f_{xy}(0,0)=0$

$f_{yy}(x,y)=-12x^2$ maka $f_{yy}(0,0)=0$

kita peroleh $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$

Kita akan menggunakan bantuan turunan ke-3 dan rumus Taylor dengan sisa suku ke-3 untuk dapat menentukan ada tidaknya nilai ekstrem dari fungsi di atas.

$f_{xxx}(x,y) = 24x$

$f_{xxy}(x,y) = 0$

$f_{xyy}(x,y) = 0$

$f_{yyy}(x,y) = -24y$

$$f(h,k) - f(0,0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial}{\partial^2}\right)f(0,0) + R_3$$

di mana

$$R_3 = \frac{1}{6}\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(\theta h, \theta k),\ 0 < \theta < 1$$

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{1}{6}\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(\theta h, \theta k)$$

$$= \frac{1}{6}\left(h^3(24\theta h) + 3h^2k(0) + 3hk^2(0) + k^3(-24\theta k)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(24\theta h^4 - 24\theta k^4\right) = 4\theta\left(h^4 - k^4\right) = 4\theta\left(h^2 + k^2\right)\left(h^2 - k^2\right)$$

Dan $f(h,k)$ akan lebih besar atau lebih kecil dari $f(0,0)$ sesuai dengan h dan k yang diberikan. Jadi titik stasioner $(0,0)$ bukan titik ekstrem.

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan uraian pada bab sebelumnya, maka secara umum dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai ekstrem relatif suatu fungsi dengan satu variabel seringkali terjadi pada titik-titik kritis yaitu titik c dalam domain f di mana $f'(c) = 0$ atau f tidak berturunan pada titik c. Nilai ekstrem relatif suatu fungsi dengan dua variabel seringkali terjadi pada titik-titik kritis yaitu titik (a,b) dalam cakram buka $B((a,b);r)$ di mana $f_x(x,y) = 0$ dan $f_y(x,y) = 0$ atau turunan parsial tingkat satu dari fungsi f tidak ada.
2. Nilai ekstrem mutlak suatu fungsi dengan satu variabel yang kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dapat terjadi pada titik-titik ujung atau titik-titik kritis. Nilai ekstrem mutlak suatu fungsi dengan dua variabel yang kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas R dapat terjadi pada titik-titik batas atau titik-titik kritis.
3. Suatu fungsi f akan mempunyai nilai maksimum relatif pada titik kritis, jika nilai fungsi f merupakan nilai terbesar di sekitar titik kritis. Fungsi f mempunyai nilai minimum relatif pada titik kritis, jika nilai fungsi f merupakan nilai terkecil di sekitar titik kritis.
4. Untuk mencari nilai ekstrem mutlak dari suatu fungsi f, kita harus menentukan titik-titik ujung atau titik-titik batas dan titik-titik kritis,

kemudian membandingkan nilai fungsi dari titik-titik tersebut Di antara semua nilai itu yang terbesar akan menjadi nilai maksimum mutlak dan yang terkecil akan menjadi nilai minimum mutlak.

5. Syarat perlu suatu fungsi dengan satu variabel yang terdiferensial pada titik c mempunyai nilai ekstrem adalah $f'(c)=0$. Syarat perlu suatu fungsi dengan dua variabel yang berturunan pada titik (a,b) mempunyai nilai ekstrem adalah $f_x(a,b)=0$ dan $f_y(a,b)=0$.

6. Syarat cukup suatu fungsi dengan satu variabel yang berturunan dua kali pada titik kritis mempunyai nilai ekstrem adalah $f''(c)\neq 0$ Jika $f''(c)>0$ maka f mempunyai nilai minimum relatif pada titik c. Jika $f''(c)<0$ maka f mempunyai nilai maksimum relatif pada titik c.

7. Syarat cukup suatu fungsi f dengan dua variabel yang turunan parsial tingkat duanya pada titik kritis ada, dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif pada titik (a,b) jika $D>0$ dan $f_{xx}(a,b)<0$. Sebaliknyafungsi f mempunyai minimum relatif pada titik (a,b) jika $D>0$ dan $f_{xx}(a,b)>0$.

8. Penggunaan rumus taylor dalam kasus $f''(c)=0$ menghasilkan kesimpulan sebagai berikut :
   - Jika $f''(c)=0$ dan $f'''(c)\neq 0$ maka $f(c)$ bukan merupakan nilai ekstrem.
   - Jika $f''(c)=f'''(c)=0$ dan $f^{(4)}(c)\neq 0$ maka $f(c)$ merupakan nilai ekstrem.

9. Penggunaan rumus taylor dalam kasus $D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) f_{xy}^2(a,b) = 0$ dapat memberikan kesimpulan bahwa $f(a,b)$ dapat merupakan nilai ekstrem dapat juga bukan nilai ekstrem.

DAFTAR PUSTAKA

Bowman, Frank & F.A. Gerand., Higher Calculus., Cambrige at the University Press., 1967.

Dixon, Charles., Advanced Calculus., John Wiley and Sons Ltd., 1981.

Halton, M.d., M.Sc., Mathematical Analysis., University of Surrey.

John, Richard Courant Fritz., Introduction to Calculus and Analysis., Volume I., New York University., 1965.

Leithotd, Louis., Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik., Jilid 1 & 3. (Alih Bahasa Drs. M. Nababan, Drs. E. Hutahaen, Dra. Widianti Santoso, Drs. Koko martono), Penerbit Erlangga., Jakarta., 1991.

Malik, S.c., Savita Arora., Mathematical Analysis., A Halsted Press Book., John Wiley and Sons., 1984.

Martono, Koko, M.Si., Drs., Kalkulus., Penerbit Erlangga., Jakarta., 1999.

Martono, K., Kumpulan Masalah Kritis Dalam Kalkulus Diferensial dan Integral., Cetakan Pertama., Intermedia., Jakarta., 1987.

Narayan, Shanty., Diffential Calculus., Revised Edition., Shyam Lal Charitable Trust., New Delhi., 1981.

Purclell, Edwin J. & Dale Varberg., Kalkulus dan Geometri Analitis., Jilid 1 dan 2 (Alih Bahasa Drs. I Nyoman Susila, M. Sc., Bana Kartasasmita Ph.D & Drs. Rawuh) Edisi Keempat., Penerbit Erlangga., Jakarta., 1989.

Sherwood, G.E.F. & Angus E. Taylor., Calculus., Prentice-Hall Inc., New York., 1946.

Tutoyo, A, M.Sc, Drs., Kalkulus I, II, & IV.(disadur dari Calculus with Analytic Geometri., Howard Anton), Universitas Sanata Dharma.

Wallis, R.I., Differential and Integral Calculus., Van Nostrand Reinhold (U K) Co. Ltd., 1984