METODE KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI

Oleh

ENOK YULIA
NIM : 961414004
NIRM : 960051120501120004

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2001

METODE KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

ENOK YULIA
NIM : 961414004
NIRM : 960051120501120004

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2001

HALAMAN PERSETUJUAN

SKRIPSI

METODE KUADRAT TERKECIL

Disusun oleh:

ENOK YULIA

NIM : 961414004

NIRM : 960051120501120004

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Dr. F. Susilo.S.J tanggal 10/8 '01

Pembimbing II

M. Andy Rudhito, S.Pd tanggal 13/8 '01

HALAMAN PENGESAHAN

S K R I P S I

METODE KUADRAT TERKECIL

Dipersiapkan dan disusun oleh:

ENOK YULIA

NIM : 961414004

NIRM : 960051120501120004

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 1 Agustus 2001 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. R. Rohandi, M.Ed	
Sekretaris	Drs. St. Susento, M.Si	
Anggota	Dr. F. Susilo, S.J.	
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd	
Anggota	Dr. St. Suwarsono	

Yogyakarta, 15 Agustus 2001

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

(Dr. Paul Suparno, S.J.,MST.)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Janganlah hendaknya kamu kuatir tentang apa pun juga,
tetapi nyatakanlah dalam segala hal keinginanmu kepada Allah
dalam doa dan permohonan dengan ucapan syukur.
(Filipi 4 : 6)

Kupersembahkan untuk yang tercinta dan terkasih

Bapak, Mamah, kakakku Elisabeth Een,
adikku Andreas Dadang
dan Mas Udya

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan karunianya kepada penulis, sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.

Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata 1 (S1) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Namun demikian perlu disadari bersama bahwa tanpa bantuan dari semua pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, pengarahan, petunjuk-petunjuk, kerjasama, dukungan, kritikan maupun saran.

Pada kesempatan ini pula, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Dr. F. Susilo, S.J. selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan tugas akhir ini.
2. M. Andy Rudhito, S.Pd. selaku dosen pembimbing II yang dengan kesabarannya telah membimbing dan memberikan saran-saran kepada penulis selama proses penulisan tugas akhir ini.
3. Drs. St. Susento, MS. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan dukungan atas penulisan tugas akhir ini.

4. Wanty Widjaja, S.Pd. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis selama kuliah.
5. Sr.Benedicte, C.B. selaku pimpinan asrama syantikara yang telah banyak memberikan masukan dan saran kepada penulis dari awal kuliah sampai akhir.
6. Mas Edi, Wiwi, Alex, yang telah membantu penulis selama proses pembuatan tugas akhir ini baik secara moril maupun materil.
7. Erna, Mas Hanes, Lina, Menik, Fina yang telah memberikan motivasi dan telah bersedia mendengarkan keluh kesah penulis selama ini.
8. Buat teman-teman P.Mat'96 yang telah memberikan dukungan moril terimakasih atas kebersamaan selama menjalani masa kuliah bersama-sama. Serta semua teman lain yang tak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan sumbangsih saran, kritik, serta dukungan moril dan materil mulai dari awal hingga akhir penyusunan tugas akhir ini.

Penulis juga menyadari keterbatasan kemampuan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik, sehingga harapan penulis, kiranya semua pihak dapat memberikan kritik dan saran yang membangun untuk kebaikan penulis di masa yang akan datang. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRACTnya mana?

ABSTRAK

Enok Yulia (2001), Metode Kuadrat Terkecil, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Studi ini berkaitan dengan sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten dengan vektor-vektor kolom matriks $A_{m \times n}$ bebas linear dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$. Sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsisten bila $\mathbf{b} \notin K(A)$.

Tujuan dari studi ini adalah untuk membahas beberapa metode kuadrat terkecil dan penerapannya dalam pencocokan kurva. Metode kuadrat terkecil adalah suatu metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari sistem persamaan linear yang inkonsisten.

Suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten, dengan $W = K(A)$ sedemikian hingga vektor $\mathbf{x}$ memenuhi persamaan $A\mathbf{x} = \text{proy}_W\mathbf{b}$ dan meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \text{proy}_W \mathbf{b}\|$. Bila $\mathbf{x} \in K(A^t)$ maka penyelesaian kuadrat terkecilnya tunggal. Vektor $\mathbf{x} = (A^tA)^-A^t\mathbf{b}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan normal $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ yang juga merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten dengan $A^- = (A^tA)^-A^t$ merupakan pendekatan invers matriks dari A. Jika matriks A difaktorkan menjadi hasilkali QR maka $\mathbf{x} = R^{-1}Q^t\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten. Sedangkan vektor $\mathbf{x} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil terboboti dari sistem persamaan linear terboboti $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ dengan $\tilde{A} = Q^{-1}(PAQ^{-1})^-P$ merupakan pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A.

Penerapan metode kuadrat terkecil dalam pencocokan kurva dengan menggunakan persamaan garis, persamaan polinomial kuadratik dan kubik, persamaan eksponensial dan persamaan bidang visualisasinya dapat diperoleh dengan menggunakan program Matlab.

BAB I

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear (SPL) merupakan himpunan berhingga dari persamaan linear. Tidak semua SPL mempunyai penyelesaian. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian paling sedikit satu penyelesaian (konsisten) jika terdapat suatu vektor $\hat{\mathbf{x}} \in R^n$ yang memenuhi persamaan $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Sedangkan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai penyelesaian (inkonsisten) jika tidak terdapat suatu vektor $\hat{\mathbf{x}} \in R^n$ yang memenuhi persamaan $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Dalam tulisan ini akan dibahas suatu metode yang disebut metode kuadrat terkecil untuk mencari penyelesaian pendekatan dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten sehingga diperoleh suatu vektor $\mathbf{x}$ yang meminimumkan $\|Ax - b\|$. Vektor $\mathbf{x} \in R^n$ tersebut disebut penyelesaian kuadrat terkecil.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai metode kuadrat terkecil perlu dibahas terlebih dulu mengenai matriks dan SPL, seperti yang akan dibahas dalam BAB II. Penyelesaian dari SPL dapat diperoleh dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan karena SPL dapat diubah kedalam bentuk persamaan matriks.

Bab III membahas mengenai ruang-n Euclides (R^n) yang merupakan perluasan dari R^2 dan R^3. Bab ini diawali dengan pembahasan mengenai R^n dengan penjumlahan dan perkalian suatu vektor dengan skalar didefinisikan dalam R^n. Perkalian-skalar dalam R^n yang akan didefinisikan, dimodifikasi dengan memberikan bobot terhadap vektor tersebut yang disebut dengan perkalian-skalar terboboti. Beberapa konsep penting dalam R^n yang akan dibahas adalah pengertian dari subruang-n, ruang baris (dilambangkan B(A)), ruang kolom (dilambangkan K(A)) dan ruang nol (dilambangkan N(A)). Akan ditunjukkan bahwa (B(A)), (K(A)) dan (N(A)) tersebut saling komplemen ortogonal. Himpunan vektor dalam R^n yang saling ortogonal membentuk suatu basis yang disebut basis ortogonal. Sebarang basis dalam R^n dapat diubah menjadi basis ortonormal dengan menggunakan proses Gram-Schmidt. Bagian akhir dari bab III akan ditunjukkan bagaimana matriks A dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua buah matriks Q dan R yang disebut dengan faktorisasi-QR.

Mengawali pembahasan mengenai metode kuadrat terkecil dalam bab IV, akan didefinisikan pengertian penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten. Selanjutnya ditunjukkkan dua metode untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil yaitu metode kuadrat terkecil dengan proyeksi ortogonal vektor dan metode kuadrat terkecil dengan faktorisasi-QR. Pembahasan mengenai SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten dalam tulisan ini dibatasi untuk suatu matriks A yang vektor-vektor kolomnya bebas linear. Metode kuadrat terkecil dimodifikasikan menjadi metode kuadrat terkecil terboboti, dengan terlebih dulu mendefinisikan SPL terboboti, penyelesaian kuadrat terkecil terboboti dan pendekatan invers matriks terboboti. Penyelesaian kuadrat terkecil terboboti dapat diperoleh dengan mencari pendekatan invers matriks terboboti.

Penerapan metode kuadrat terkecil dalam pencocokan kurva akan dibahas pada bagian terakhir dari tulisan ini. Dalam pencocokan kurva ini akan dicari suatu kurva yang paling mendekati titik-titik data berdasarkan pola titik-titik data tersebut pada diagram pencarnya. Ada beberapa kemungkinan bentuk kurva yang terjadi pada diagram pencar seperti suatu garis lurus, polinomial, eksponensial dan bidang yang visualisasinya dapat diperoleh dengan menggunakan program matlab.

BAB II

MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

2.1 Matriks dan Sifat-sifat Matriks

Aljabar matriks merupakan dasar yang digunakan dalam mempelajari aljabar linear. Banyak permasalahan dalam aljabar linear yang dapat diselesaikan dengan aljabar matriks. Oleh karena itu pada bagian ini akan dibahas pengertian matriks dan sifat-sifatnya yang akan digunakan pada bagian selanjutnya.

Definisi 2.1.1

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan real atau kompleks yang terdiri dari baris dan kolom.

Matriks dinyatakan dengan menggunakan huruf besar dan bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut elemen dari matriks yang dinyatakan dengan huruf kecil dan disebut *skalar*. Suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matriks berordo m x n, dengan m, n $\in$ Z , m > 0, n > 0.

Secara umum matriks A dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elemen pada baris ke-i dan kolom ke- j dari matriks A dinyatakan dengan a_{ij}, secara singkat matriks A dapat ditulis A = (a_{ij}). Sebuah matriks A_{mxn} yang terdiri dari satu baris disebut *matriks baris*, ditulis A = (a_i), untuk i = 1, 2, … , m dan sebuah matriks A yang terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom*, ditulis A = (a_j), untuk j = 1, 2, … , n. Sedangkan sebuah matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom sama disebut *matriks persegi*.

Penjumlahan dua matriks yang berordo sama didefinisikan dengan menjumlahkan elemen yang berpadanan yaitu A + B = (a_{ij} + b_{ij}). Matriks –B didefinisikan dengan –B = ($-b_{ij}$), sehingga *pengurangan dua matriks* yang berordo sama didefinisikan sebagai berikut A – B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}). *Perkalian suatu matriks A dengan suatu skalar* c, didefinisikan sebagai perkalian setiap anggota A dengan skalar c. Perkalian suatu matriks A dengan skalar c ditulis cA = (ca_{ij}). Sedangkan *Perkalian dua matriks A dan B* didefinisikan jika A sebuah matriks berordo m x r dan B sebuah matriks berordo r x n dengan A B = $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{ir}b_{rj}$, untuk i = 1, 2, … , m dan j = 1, 2, … , n.

Perhatikan perkalian matriks A berordo m x n dengan matriks X berordo n x 1 berikut :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ dan $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n \\ . & & & \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diperoleh hasil perkaliannya berupa jumlahan dari hasil perkalian antara skalar dengan kolom matriks A.

Definisi 2.1.2

Transpose dari suatu matriks A berordo m x n dinyatakan dengan A^t (baca: A transpose), didefinisikan sebagai suatu matriks berordo n x m yang diperoleh dengan mempertukarkan baris dan kolom dari matriks A, yaitu kolom dari matriks A menjadi baris pada matriks A^t dan baris dari matriks A menjadi kolom pada matriks A^t.

Misalkan A matriks berordo 3x4 maka transpose dari matriks A adalah matriks A^t berordo 4x3, jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ maka $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Definisi 2.1.3

Matriks Identitas adalah matriks persegi dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan bilangan 0 untuk anggota selain diagonal utamanya, dilambangkan dengan I.

Definisi 2.1.4 (Invers dari sebuah matriks)

Misalkan A sebuah matriks persegi, jika ada sebuah matriks B yang berukuran sama dengan A sedemikian hingga AB = BA = I maka A dikatakan *mempunyai invers* dan B disebut invers dari matriks A.

Teorema 2.1.1

Invers dari suatu matriks persegi adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan invers matriks A tidak tunggal. Misalkan ada matriks C dan B yang merupakan invers dari matriks A, dengan $C \neq B$.

$$BA = I$$

$$(BA)C = IC$$

$$B\,(AC) = C \qquad \text{(C invers dari A)}$$

$$B\,I = C$$

$$B = C \qquad \text{(Kontradiksi)}$$

Terjadi kontradiksi dengan pengandaian. Jadi invers dari suatu matriks persegi tunggal. □

Invers dari suatu matriks A dinyatakan dengan A^{-1} (baca: A invers).

Teorema 2.1.2

Jika A dan B adalah matriks yang mempunyai invers dan berukuran sama, maka

1. Matriks AB mempunyai invers
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti :

Diketahui A dan B mempunyai invers, maka ada A^{-1} dan B^{-1} sehingga

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AA^{-1} = I$ ... 1)

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}B = I$ ... 2)

Selanjutnya dari ...1) dan ...2) terlihat AB mempunyai invers dan karena invers dari suatu matriks tunggal maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Suatu matriks persegi A yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol disebut *matriks segitiga atas*, dapat ditulis $A = (a_{ij})$, untuk $i > j$ maka $a_{ij} = 0$. Sedangkan Suatu matriks persegi A yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol disebut *matriks segitiga bawah*, dapat ditulis $A = (a_{ij})$, untuk $i < j$ maka $a_{ij} = 0$. Suatu matriks persegi A dikatakan *simetris* jika $A = A^t$ atau $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

2.2 Sistem Persamaan Linear

Suatu penerapan penting dari perkalian matriks yaitu pada sistem persamaan linear. Sebelum membahas mengenai sistem persamaan linear perlu diketahui terlebih dulu bentuk umum persamaan linear. Bentuk umum persamaan linear dengan n variabel yaitu $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ dengan $x_1, x_2, \dots , x_n$ sebagai variabel dan $a_1, a_2 , \dots , a_n$, b adalah konstanta-konstanta real.

Definisi 2.2.1

Sistem persamaan linear (SPL) adalah himpunan berhingga persamaan linear dengan variabel-veriabel $x_1, x_2, \dots , x_n$.

Bentuk umum suatu SPL yang terdiri dari m persamaan dan n variabel dapat ditulis sebagai:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

dengan $x_1, x_2, \dots , x_n$ sebagai variabel dan a_{ij} , b_i sebagai konstanta-konstanta real dengan $i = 1, 2, \dots , m$ dan $j = 1, 2, \dots , n$. SPL di atas dapat ditulis sebagai perkalian dari matriks A dan X yang menghasilkan matriks kolom B, dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriks A disebut *matriks koefisien*.

Jika kita menambahkan sebuah kolom pada matriks A dengan matriks kolom B yang ditempatkan pada kolom terakhir maka akan diperoleh suatu matriks baru yang disebut *matriks lengkap*. Matriks lengkap dari SPL diatas adalah

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Penyelesaian dari sebuah SPL adalah sederetan angka $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sedemikian hingga $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ memenuhi sistem persamaan tersebut. Penyelesaian dari SPL dapat dicari dengan melakukan operasi baris elementer pada matriks lengkap sehingga diperoleh suatu SPL baru yang lebih sederhana. SPL yang baru ini merupakan sistem yang ekuivalen dengan SPL semula artinya penyelesaian yang diperoleh dari SPL yang baru juga merupakan penyelesaian dari SPL semula.

Definisi 2.2.2

Operasi baris elementer pada suatu matriks adalah salah suatu operasi :

1. Menukar letak dari dua baris matriks tersebut.
2. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol.
3. Mengganti suatu baris dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan kelipatan dari baris yang lain.

Dengan melakukan operasi baris elementer pada matriks lengkap ini dapat diperoleh suatu matriks baru yang disebut *matriks eselon baris*. Dengan menggunakan operasi baris elementer terhadap matriks identitas akan diperoleh matriks baru yang disebut *matriks elementer*. Misalkan E adalah matriks elementer yang diperoleh dari matriks identitas I dengan melakukan beberapa operasi baris elementer, dan E_0 adalah suatu matriks yang diperoleh dengan melakukan invers operasi terhadap I sehingga $EE_0 = I$ dan $E_0E = I$ maka matriks elementer E_0 adalah invers dari matriks elementer E. Dengan demikian setiap matriks elementer mempunyai invers dan inversnya juga merupakan suatu matriks elementer.

Definisi 2.2.3

Suatu matriks disebut *matriks eselon baris* jika mempunyai dua sifat berikut:

1. Setiap baris yang semua elemennya nol terletak di bawah.
2. Pada setiap baris yang mempunyai elemen tak nol, elemen tak nol pertama terletak di kolom sebelah kanan elemen tak nol pertama dari baris di atas.

Elemen tak nol pertama dari suatu baris dalam matriks eselon baris disebut *elemen pivot*. Setelah diperoleh matriks eselon baris maka penyelesaian dari SPL dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan cara substitusi balik. Variabel yang berkaitan dengan elemen pivot disebut *variabel tak bebas* dan variabel lainnya disebut *variabel bebas*.

Suatu proses yang digunakan untuk mengubah sebarang matriks menjadi matriks eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer dinamakan *Eliminasi Gauss*. Jika kita menambahkan sifat pada matriks eselon baris yaitu bahwa setiap elemen pivotnya bernilai satu dan setiap elemen pivot itu merupakan satu-satunya elemen tak nol pada kolom tersebut, maka akan diperoleh sebuah *matriks eselon baris tereduksi*. Suatu proses yang digunakan untuk mengubah sebarang matriks menjadi matriks eselon baris tereduksi dinamakan *Eliminasi Gauss-Jordan*.

Contoh 2.2.1

SPL berikut akan diselesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_1 \quad + 3x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 \quad + x_3 + x_4 = 3.$$

Penyelesaian :

Matriks lengkap dari SPL di atas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan akan diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris tereduksi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

sehingga diperoleh SPL baru yaitu

$$x_1 \quad + 4x_4 = 7$$

$$x_2 \quad - x_4 = -2$$

$$x_3 - 3x_4 = -4$$

Variabel tak bebasnya adalah x_1, x_2 dan x_3, sedangkan variabel bebasnya x_4. Misalkan $x_4 = t$ dengan t sebarang bilangan real, maka diperoleh penyelesaian umum dari SPL diatas adalah

$$x_1 = 7 - 4t$$

$$x_2 = -2 + t$$

$$x_3 = -4 + 3t$$

$$x_4 = t.$$

Tidak semua SPL mempunyai penyelesaian. Suatu SPL dapat mempunyai tepat satu penyelesaian, tak hingga banyak penyelesaian atau tidak mempunyai penyelesaian. SPL yang mempunyai penyelesaian dinamakan SPL yang *konsisten*, sedangkan SPL yang tidak mempunyai penyelesaian dinamakan SPL yang *inkonsisten.*

Teorema 2.2.1

Jika matriks A_{nxn} mempunyai invers, maka untuk setiap matriks B_{nx1}, SPL AX = B mempunyai tepat satu penyelesaian, yaitu $X = A^{-1}B$.

Bukti :

Misalkan $\hat{X}$ adalah penyelesaian dari SPL AX = B maka $A\hat{X} = B$, karena A mempunyai invers maka $A^{-1}(A\hat{X}) = A^{-1}B$ sehingga $\hat{X} = A^{-1}B$. Untuk membuktikan bahwa $\hat{X}$ satu-satunya penyelesaian, andaikan $\hat{X}_o$

adalah suatu penyelesaian sebarang dari SPL AX = B sehingga $A\hat{X}_o = B$, karena A mempunyai invers maka $\hat{X}_o = A^{-1}B$. Jadi diperoleh $\hat{X} = \hat{X}_o$. □

Sebuah SPL yang terdiri dari m baris dan n kolom dengan matriks eselon barisnya matriks U dikatakan inkonsisten jika dan hanya jika $u_{mn} = 0$ dan $u_{mn+1} \neq 0$. SPL AX = B dengan A matriks berordo m x n, m ≥ n akan mempunyai penyelesaian tunggal jika dan hanya jika bentuk eselon baris dari matriks lengkap mempunyai n baris tak nol, sedangkan SPL AX = B akan mempunyai penyelesaian tak hingga banyak jika dan hanya jika bentuk eselon baris dari matriks lengkapnya mempunyai r baris tak nol dengan r < n, sehingga SPL tersebut mempunyai n - r variabel bebas.

Suatu SPL yang semua konstanta b_i di ruas kanan persamaannya nol disebut SPL homogen (SPLH). Bentuk umum SPLH yaitu:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Setiap SPLH selalu mempunyai penyelesaian yaitu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ yang disebut *penyelesaian trivial*. Jika disamping penyelesaian trivial ada penyelesaian yang lain maka penyelesaian tersebut disebut *penyelesaian tak trivial*.

Hubungan antara SPL, bentuk eselon baris tereduksi dan matriks elementer dapat dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema 2.2.3

Jika matriks A_{nxn}, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

1. Matriks A mempunyai invers.
2. SPLH AX = O hanya mempunyai penyelesaian trivial.
3. Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A adalah I_n
4. Matriks A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer.

Bukti :

(1 ⇒ 2) : Andaikan matriks A mempunyai invers dan andaikan x_o adalah sebarang penyelesaian dari SPLH AX = O. Maka Ax_o = O, dengan mengalikan kedua ruas dari persamaan dengan A^{-1} diperoleh $A^{-1}(Ax_o) = A^{-}O$

$$A^{-1}(Ax_o) = O$$

$$I\,x_o = O$$

$$x_o = O$$

Jadi AX = O hanya mempunyai penyelesaian trivial.

(2 ⇒ 3) : Andaikan AX = O, bentuk matriks dari sistem tersebut adalah

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots 1)$$

dan andaikan SPLH tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial. Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan akan diperoleh sistem persamaan yang baru dengan bentuk baris-eselon tereduksi dari matriks lengkap yaitu :

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = 0 \\ & x_2 & & & = 0 \\ & & \dots & & \\ & & & x_n & = 0 \end{array}$$

Persamaan ... 1) dapat direduksi menjadi matriks lengkap

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika kolom terakhir dari matriks diatas tidak diperhatikan maka dapat disimpulkan bahwa bentuk-baris eselon tereduksi dari matriks A adalah I_n.

(3⇒4) : Andaikan bentuk-baris eselon tereduksi dari matriks A adalah I_n sedemikian hingga matriks A bisa direduksi menjadi I_n dengan beberapa operasi baris elementer. Maka dapat diperoleh matriks-matriks elementer E_1, E_2, ... , E_k sedemikian hingga $E_k \dots E_2\ E_1 A = I_n$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan hasil kali invers dari matriks-matriks elementer akan diperoleh

$$E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k^{-1}E_k \dots E_2 E_1 A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n$$

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n$$

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Jadi terbukti bahwa matriks A merupakan suatu hasil kali matriks elementer.

(4⇒1) : Andaikan matriks A merupakan hasil kali matriks elementer, maka berdasarkan teorema 2.1.2 dan sifat matriks elementer yang mempunyai invers maka matriks A adalah suatu hasil kali dari matriks yang mempunyai invers, sehingga matriks A mempunyai invers. □

BAB III

RUANG-n EUCLIDES

3.1 Ruang-n Euclides

Vektor-vektor di bidang R^2 dan di ruang R^3 secara geometris dapat dinyatakan sebagai segmen-segmen garis berarah. Vektor-vektor yang mempunyai panjang dan arah yang sama dikatakan sama walaupun vektor-vektor tersebut diletakkan pada kedudukan yang berbeda-beda. Misalkan sebarang vektor **v** pada bidang yang titik awalnya berada pada titik asal dengan koordinat (v_1, v_2) maka v_1 dan v_2 dinamakan komponen-komponen dari vektor **v**. Vektor **v** dapat ditulis dengan matriks kolom yaitu $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Gagasan mengenai vektor di R^2 dan R^3 dapat diperluas untuk vektor di ruang berdimensi-n, dengan n > 3. Meskipun secara geometris vektor-vektor di ruang berdimensi-n tidak dapat digambarkan, namun vektor-vektor tersebut dapat dibahas secara aljabar. Vektor di ruang berdimensi-n ditulis dalam bentuk matriks n x 1, yang dapat dinyatakan juga sebagai transpose dari matriks n x 1 yaitu matriks berordo 1 x n.

Himpunan semua matriks berordo n x 1 dilambangkan dengan R^n.

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, \ldots, x_n \in R \right\}$$

Atau dengan cara penulisan lain :

$$R^n = \{ (x_1, x_2, \ldots , x_n)^t \mid x_1, x_2, \ldots , x_n \in R)$$

Setiap elemen dari R^n dilambangkan dengan huruf kecil tebal, misalkan elemen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)^t$ maka $x_1, x_2, \ldots , x_n$ disebut komponen-komponen dari elemen **x**.

Definisi 3.1.1

Penjumlahan dua elemen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots , y_n)^t$ dalam R^n didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots , x_n + y_n)^t$$

Jika c sebarang skalar, maka *perkalian* suatu elemen **x** dengan skalar c didefinisikan dengan $c\,\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots , cx_n)^t$

Suatu elemen dalam R^n yang semua komponennya sama dengan nol, disebut *elemen nol,* dilambangkan dengan $\mathbf{0} = (0, 0,\ldots, 0)^t$. Untuk sebarang elemen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)^t$ dalam R^n - **x** didefinisikan dengan $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots , -x_n)^t$. Operasi *pengurangan* dua elemen **x** dan **y** dalam R^n didefinisikan dengan $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^t$.

Teorema 3.1.1

Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots , y_n)^t$ dan $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots , z_n)^t$ merupakan elemen-elemen dalam R^n dengan c dan k sebarang skalar dalam R^n, maka

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

(ii) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

(iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

(iv) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, yakni $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(v) $c\,(k\,\mathbf{x}) = (c\,k)\,\mathbf{x}$

(vi) $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\,\mathbf{x} + c\,\mathbf{y}$

(vii) $(c + k)\,\mathbf{x} = c\,\mathbf{x} + k\,\mathbf{x}$

(viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Bukti :

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t + (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^t$

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n)^t$

$= (y_1, y_2, \dots, y_n)^t + (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$

$= \mathbf{y} + \mathbf{x}.$

(ii) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t + (y_1, y_2, \dots, y_n)^t + (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)^t + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)^t$

$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n))^t$

$= ((x_1 + y_1) + z_1), (x_2 + y_2) + z_2), \dots, (x_n + y_n) + z_n)^t$

$= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots, (x_n + y_n))^t + (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$

$= ((x_1, x_2, \dots, x_n)^t + (y_1, y_2, \dots, y_n)^t + (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$

$= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$

(iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t + (0, 0, \dots, 0)^t$

$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0)^t$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = \mathbf{x}.$

(iv) $\mathbf{x} + (\mathbf{-x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t + (-x_1, -x_2, \ldots, -x)^t$

$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots, x_n - x_n)^t$

$= (0, 0, \ldots, 0)^t = \mathbf{0}.$

(v) $c\,(k\mathbf{x}) = c\,(k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t)$

$= c\,(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)^t$

$= (c(kx_1), c(kx_2), \ldots, c(kx_n))^t$

$= ((ck)x_1), (ck)x_2), \ldots, (ck)x_n)^t$

$= (ck)\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t)$

$= (ck)\,\mathbf{x}.$

(vi) $c\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\,((x_1, x_2, \ldots, x_n)^t + (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$

$= c\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^t$

$= (c(x_1 + y_1), c(x_2 + y_2), \ldots, c(x_n + y_n))^t$

$= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \ldots, cx_n + cy_n)^t$

$= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)^t + (cy_1, cy_2, \ldots, cy_n)^t$

$= c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t + c\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$

$= c\mathbf{x} + c\mathbf{y}.$

(vii) $(c + k)\,\mathbf{x} = (c + k)\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$= (c + k)\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$= ((c + k)x_1, (c + k)x_2, \ldots, (c + k)x_n)^t$

$= (cx_1 + kx_1, cx_2 + kx_2, \ldots, cx_n + kx_n)$

$= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)^t + (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)^t$

$= c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t + k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$= c\mathbf{x} + k\mathbf{x}$.

(viii) $1\mathbf{x} = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$= (1.x_1, 1.x_2, \ldots, 1.x_n)^t$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = \mathbf{x}$. □

Himpunan R^n dengan operasi penjumlahan dan perkalian seperti yang didefinisikan pada definisi 3.1.1, dan memenuhi teorema 3.1.1 disebut *ruang-n Euclides*. Setiap elemen dalam ruang-n Euclides itu disebut *vektor*.

3.2 Perkalian-skalar Dalam Ruang-n Euclides

Perkalian-skalar dalam R^n merupakan perluasan dari perkalian-skalar dalam R^2 dan R^3 yang akan digunakan untuk memperluas konsep panjang dan jarak dalam R^n.

Definisi 3.2.1

Perkalian-skalar dua vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ dalam R^n didefinisikan dengan $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

Teorema 3.2.1

Jika **x**, **y**, **z** adalah vektor-vektor dalam R^n dan c sebarang skalar, maka:

(i) $\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \mathbf{y}^t\mathbf{x}$

(ii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^t\,\mathbf{z} = \mathbf{x}^t\,\mathbf{z} + \mathbf{y}^t\,\mathbf{z}$

(iii) $(c\mathbf{x})^t\,\mathbf{y} = c\,(\mathbf{x}^t\,\mathbf{y})$

(iv) $\mathbf{x}^t\,\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}^t\,\mathbf{x} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bukti :

Ambil sebarang vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dan $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dalam R^n, maka:

(i) $\mathbf{x}^t\,\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

$= y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n$

$= \mathbf{y}^t\,\mathbf{x}$.

(ii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^t\,\mathbf{z} = (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \ldots + (x_n+y_n)z_n$

$= (x_1z_1 + y_1z_1) + (x_2z_2 + y_2z_2) + \ldots + (x_nz_n + y_nz_n)$

$= (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n)^t + (y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n)^t$

$= \mathbf{x}^t\,\mathbf{z} + \mathbf{y}^t\,\mathbf{z}$.

(iii) $(c\mathbf{x})^t\,\mathbf{y} = (cx_1)y_1 + (cx_2)y_2 + \ldots + (cx_n)y_n)$

$= c(x_1y_1) + c(x_2y_2) + \ldots + c(x_ny_n)$

$= c(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)$

$= c\,(\mathbf{x}^t\,\mathbf{y})$.

(iv) $\mathbf{x}^t\,\mathbf{x} = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n$

$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$. Karena $x_i^2 \geq 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ maka $\mathbf{x}^t\mathbf{x} = 0$ jika dan hanya jika $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, dengan demikian $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, jadi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Perkalian-skalar dapat digunakan untuk mendefinisikan konsep panjang dan jarak euclides vektor-vektor dalam R^n.

Definisi 3.2.2

Panjang Euclides suatu vektor **x** dalam R^n dinyatakan dengan $\|\mathbf{x}\|$ dan didefinisikan dengan $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t\mathbf{x})^{1/2}$.

Jarak Euclides dua vektor **x** dan **y** di R^n dinyatakan dengan d(**x**,**y**) dan didefinisikan dengan $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Jika **x** suatu vektor tak nol dalam R^n maka vektor $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ mempunyai panjang Euclides 1. Hal ini karena

$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{x}}}\mathbf{x}\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t\right\|$$

$$= \left\|\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}\right)\right\|$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = 1.$$

Teorema berikut menyatakan hubungan antara perkalian-skalar dua vektor dalam R^n dengan panjang vektor masing-masing yang dikenal dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

Teorema 3.2.2 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

Misalkan **x** dan **y** dua vektor dalam R^n, maka berlaku ketaksamaan $|\mathbf{x}^t\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$.

Bukti :

Jika vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ atau vektor $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ maka kedua ruas pada ketaksamaan di atas sama dengan nol. Ketaksamaan diatas berlaku untuk $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, sehingga untuk sebarang bilangan real k berlaku:

$$(k\mathbf{x} + \mathbf{y})^t (k\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$$
$$(k\mathbf{x}^t + \mathbf{y}^t)(k\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x}^t\mathbf{x}\, k^2 + \mathbf{x}^t\mathbf{y}k + \mathbf{y}^t\mathbf{x}k\,(\mathbf{y}^t\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{x}^t\mathbf{x})k^2 + 2\mathbf{x}^t\mathbf{y}k + (\mathbf{y}^t\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}.$$

Perhatikan ketaksamaan di atas merupakan fungsi kuadrat dalam k yang nilainya tidak negatif. Hal ini berarti fungsi kuadrat tidak mempunyai akar real yang berbeda sehingga diskriminannya selalu tidak positif.

$$4\,(\mathbf{x}^t\mathbf{y}) - 4\,(\mathbf{x}^t\mathbf{x})(\mathbf{y}^t\mathbf{y}) \leq 0$$
$$4\,(\mathbf{x}^t\mathbf{y}) \leq 4\,(\mathbf{x}^t\mathbf{x})(\mathbf{y}^t\mathbf{y})$$
$$|\mathbf{x}^t\mathbf{y}|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$
$$|\mathbf{x}^t\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|. \qquad \square$$

Dalam penerapannya perkalian-skalar dimodifikasi dengan cara memboboti suku-sukunya. Jika $w_1, w_2, \ldots, w_n$ merupakan bilangan-bilangan real positif yang disebut *bobot* dan jika **x**, **y** sebarang vektor dalam R^n maka perkalian-skalar **x** dan **y** dimodifikasikan dengan:

$$(\mathbf{x}^t\mathbf{y})_w = w_1x_1y_1 + w_2x_2y_2 + \ldots + w_nx_ny_n.$$

Bobot $w_1, w_2, \dots, w_n$ dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}$$

Sehingga perkalian-skalar terboboti di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$(\mathbf{x}^t\mathbf{y})_W = (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x}^t W \mathbf{y}.$$

Definisi 3.2.3

Perkalian-skalar terboboti dua vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ dalam R^n dengan matriks pembobot W merupakan matriks diagonal dimana $w_{ii} > 0$, didefnisikan dengan:

$$(\mathbf{x}^t\mathbf{y})_W = \mathbf{x}^t W \mathbf{y} = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \dots + w_n x_n y_n .$$

Perkalian-skalar terboboti dengan matriks pembobot W memenuhi teorema 3.2.1 yang diperlihatkan sebagai berikut:

(i) $(\mathbf{x}^t\mathbf{y})_W = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \dots + w_n x_n y_n$

$= w_1 (x_1 y_1) + w_2 (x_2 y_2) + \dots + w_n (x_n y_n)$

$= w_1 (y_1 x_1) + w_2 (y_2 x_2) + \dots + w_n (y_n x_n)$

$= w_1 y_1 x_1 + w_2 y_2 x_2 + \dots + w_n y_n x_n$

$= (\mathbf{y}^t\,\mathbf{x})_w$

(ii) $((\mathbf{x}+\mathbf{y})^t\mathbf{z})_w = w_1(x_1+y_1)z_1 + w_2(x_2+y_2)z_2 + \ldots + w_n(x_n+y_n)z_n$

$= w_1(x_1z_1+y_1z_1) + w_2(x_2z_2+y_2z_2) + \ldots + w_n(x_nz_n+y_nz_n)$

$= w_1x_1z_1 + w_1y_1z_1 + w_2x_2z_2 + w_2y_2z_2 + \ldots + w_nx_nz_n + w_ny_nz_n$

$= (w_1x_1z_1 + w_2x_2z_2 + \ldots + w_nx_nz_n) + (w_1y_1z_1 + w_2y_2z_2 + \ldots + w_ny_nz_n)$

$= (\mathbf{x}^t\mathbf{z})_w + (\mathbf{y}^t\mathbf{z})$

(iii) $((c\mathbf{x})^t\mathbf{y})_w = w_1(cx_1)y_1 + w_2(cx_2)y_2 + \ldots + w_n(cx_n)\,y_n$

$= w_1c(x_1y_1) + w_2c(x_2y_2) + \ldots + w_nc(x_ny_n)$

$= c\,(w_1\,(x_1y_1) + w_2\,(x_2y_2) + \ldots + w_n\,(x_ny_n))$

$= c\,(w_1x_1y_1 + w_2x_2y_2 + \ldots + w_nx_ny_n)$

$= c\,(\mathbf{x}^t\,\mathbf{y})_w$

(iv) $(\mathbf{x}^t\mathbf{x})_w = w_1x_1x_1 + w_2x_2x_2 + \ldots + w_nx_nx_n$

$= w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + \ldots + w_nx_n^2 \geq 0$. $(\mathbf{x}^t\mathbf{x})_w = 0$ bila dan hanya bila $w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + \ldots + w_nx_n^2 = 0$ karena $w_1, w_2, \ldots, w_n$ bilangan-bilangan real positif maka vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Panjang dan jarak euclides terboboti didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.2.4

Panjang euclides terboboti suatu vektor **x** dalam R^n, dengan matriks pembobot W didefinisikan dengan $\|\mathbf{x}\|_w = (\mathbf{x}^t\,W\,\mathbf{x})^{1/2}$.

Jarak euclides terboboti antara dua vektor **x** dan **y** dalam R^n, dengan matriks pembobot W didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_w = ((\mathbf{x} - \mathbf{y})^t W (\mathbf{x} - \mathbf{y}))^{½}.$$

Definisi 3.2.5

Andaikan **x** dan **y** vektor tak nol di R^n, sudut θ antara vektor **x** dan **y** didefinisikan $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{x}^t\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$, dengan $0 \le \theta \le \pi$.

Definisi 3.2.6

Dua vektor **x** dan **y** dalam R^n dikatakan saling ortogonal jika $\mathbf{x}^t\,\mathbf{y} = 0$.

Dua buah vektor dalam R^n dapat dipandang sebagai dua vektor yang terletak dalam sebuah bidang dalam R^n, sehingga jika kedua vektor tersebut ortogonal maka berlaku rumus Pythagoras. Untuk **x** dan **y** dua vektor yang saling ortogonal berlaku :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y})^t\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^t\mathbf{x} + \mathbf{x}^t\mathbf{y} + \mathbf{y}^t\mathbf{x} + \mathbf{y}^t\mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^t\mathbf{x} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{y}^t\mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^t\mathbf{x} + \mathbf{y}^t\mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

Jadi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Teorema 3.2.3 (*Ketaksamaan Segitiga*)

Misalkan **x** dan **y** dua vektor dalam R^n, sedemikian hingga $\mathbf{x}^t\mathbf{y} \neq 0$ maka berlaku $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Bukti :

Untuk membuktikan teorema ini digunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz sebagai berikut:

$$\|x + y\|^2 = (x + y)^t (x + y)$$

$$= x^t x + x^t y + y^t x + y^t y$$

$$= x^t x + 2\, x^t y + y^t y$$

$$< x^t x + 2\|x\|\ \|y\| + y^t y$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

atau $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$. □

3.3 Subruang-n Euclides

Andaikan S merupakan himpunan bagian dari R^n yang memenuhi sifat-sifat dalam teorema 3.1.1 maka himpunan bagian tersebut disebut subruang-n seperti yang akan didefinisikan di bawah ini:

Definisi 3.3.1

S dikatakan *subruang* dari R^n jika $S \subset R^n$ dan $S \neq \varnothing$ sehingga berlaku:

(i) Untuk sebarang vektor **x**, **y** $\in$ S berlaku **x** + **y** $\in$ S

(ii) Untuk sebarang vektor **x** $\in$ S dan c suatu skalar berlaku c**x** $\in$ S.

Karena $S \subset R^n$ maka sifat-sifat (i), (ii), (v), (vi) , (vii), (viii) dalam teorema 3.1.1 berlaku juga dalam S, berdasarkan definisi di atas S merupakan subruang dari R^n jika S tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Karena $S \neq \varnothing$ maka untuk sebarang vektor $\mathbf{u} \in S$ dan skalar 0 berlaku $0.\mathbf{u} = \mathbf{0} \in S$ dan untuk skalar -1 berlaku $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in S$. Jadi S memenuhi teorema 3.1.1. Dengan demikian R^n merupakan subruang dari R^n dan $\{\mathbf{0}\}$ merupakan subruang dari R^n karena untuk setiap vektor $\mathbf{0} \in R^n$ berlaku $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ dan untuk c suatu skalar berlaku $c\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Contoh 3.3.1

Misalkan $S \subset R^n$ terdiri dari semua vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ yang memenuhi sistem persamaan linear homogen (SPLH) $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan subruang dari R^n. Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ vektor-vektor dalam S maka

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \dots + a_n(x_n + y_n) &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Sehingga vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in S$.

Untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dan sebarang skalar c maka $a_1(cx_1) + a_2(cx_2) + \dots + a_n(cx_n) = c(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = c0 = 0$.

Sehingga vektor $c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in S$. Karena vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ dan vektor $c\mathbf{x} \in S$ maka S merupakan subruang dari R^n.

Contoh 3.3.2

Penyelesaian umum dari SPLH di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \quad\quad + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

adalah: $x_1 = -s - t$

$x_2 = -2s$

$x_3 = s$

$x_4 = t$, dengan s dan t skalar.

Ditulis dalam bentuk matriks

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -2s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ruang penyelesaian dari SPLH diatas adalah $\{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + t\ \mathbf{v}\}$ dengan vektor $\mathbf{u} = (-1, -2, 1, 0)^t$ dan vektor $\mathbf{v} = (-1, 0, 0, 1)^t$. Penyelesaian SPLH dari contoh di atas dapat dituliskan sebagai jumlahan dari perkalian vektor dengan skalar yaitu $\mathbf{x} = s(-1, -2, 1, 0)^t + t(-1, 0, 0, 1)^t$.

Kedua contoh di atas memperlihathan bahwa penyelesaian dari SPLH membentuk subruang yang dapat diperluas untuk subruang S dalam R^n . Oleh karena itu perlu diketahui terlebih dulu pengertian dari kombinasi linear, bebas linear dan bergantung linear.

Definisi 3.3.2

Andaikan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in R^n$. Bentuk $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n$ disebut *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dalam R^n, dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar-skalar. Himpunan semua kombinasi linear dari vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dalam R^n disebut *rentang* dari vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dan dilambangkan dengan $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Teorema 3.3.1

Jika $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor dalam R^n maka $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ merupakan subruang dari R^n.

Bukti :

(i) Andaikan c suatu skalar dan vektor $\mathbf{v} \in S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$, maka terdapat skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n \in R^n$ sehingga $\mathbf{v} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n$.

Kemudian $c\mathbf{v} = c\,(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n = (ck_1)\mathbf{x}_1 + (ck_2)\mathbf{x}_2 + \ldots + (ck_n)\mathbf{x}_n$.

Jadi $c\mathbf{v} \in R^n$.

(ii) Andaikan $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w} \in S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$

$\mathbf{v} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n$ dan $\mathbf{w} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$

maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$

$= (k_1 + c_1)\mathbf{x}_1 + (k_2 + c_2)\mathbf{x}_2 + \ldots + (k_n + c_n)\mathbf{x}_n$.

Jadi $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in R^n$.

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ merupakan subruang dari R^n. □

Definisi 3.3.3

Misalkan S subruang dari R^n maka vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ dikatakan *merentang* S jika untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in S$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ dalam S.

Definisi 3.3.4

Himpunan vektor $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ dalam R^n dikatakan *bebas linear* jika persamaan $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi oleh skalar-skalar $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ sedangkan himpunan vektor $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$dalam R^n dikatakan *bergantung linear* jika ada skalar $k_1, k_2, \dots, k_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol, sedemikian hingga dipenuhi $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

Contoh 3.3.3

Himpunan vektor-vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t$, … , $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^t$ merupakan himpunan vektor yang bebas linear, sebab untuk persamaan $k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + \dots + k_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ dipenuhi hanya bila $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Definisi 3.3.5

Himpunan vektor $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ dalam R^n dikatakan *basis* jika $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ bebas linear dan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ merentang R^n.

Contoh 3.3.4

Berdasarkan contoh 3.3.3 himpunan vektor-vektor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bebas linear. Untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ dapat ditulis dalam bentuk $\mathbf{x} = x_1\ \mathbf{e}_1 + x_2\ \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\ \mathbf{e}_n$, dengan demikian himpunan vektor-vektor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ merentang S. Jadi himpunan vektor $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ merupakan basis dalam R^n. Basis seperti ini biasa disebut basis standar dalam R^n.

Definisi 3.3.6

Dimensi subruang S dari R^n dinyatakan dengan dim (S), didefinisikan sebagai banyak vektor dalam suatu basis untuk subruang S dari R^n.

Berdasarkan contoh 3.3.4 dim (R^n) adalah n, karena basis standar merupakan basis dalam R^n yang terdiri dari n vektor.

Contoh 3.3.5

Akan dicari basis dan dimensi dari ruang penyelesaian SPLH pada contoh 3.3.2.

Penyelesaian :

Ditunjukkan bahwa penyelesaian umum dari sistem yang diberikan pada contoh 3.3.2 adalah

$$x_1 = -s - t$$
$$x_2 = -2s$$
$$x_3 = s$$
$$x_4 = t$$

Vektor-vektor penyelesaiannya dapat ditulis sebagai kombinasi linear yaitu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -2s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ yang menunjukan bahwa vektor-vektor

$\mathbf{u} = (-1, -2, 1, 0)^t$ dan $\mathbf{v} = (-1, 0, 0, 1)^t$ merentang ruang penyelesaian dan karena persamaan $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi untuk $s = t = 0$ maka vektor **u** dan **v** bebas linear, sehingga {**u**, **v**} merupakan suatu basis dengan ruang penyelesaian dari SPLH tersebut berdimensi 2.

Definisi 3.3.7

Misalkan S subruang dari R^n. Suatu vektor **u** dalam R^n disebut *ortogonal* terhadap S jika **u** ortogonal terhadap setiap vektor dalam S, dan himpunan semua vektor dalam R^n yang ortogonal terhadap S disebut *komplemen ortogonal* dari S, dilambangkan dengan $S^{\perp}$.

Teorema 3.3.2

Jika S subruang dari R^n , maka

(a) $S^{\perp}$ adalah subruang dari S

(b) $S^{\perp} \cap S = \{\mathbf{0}\}$

(c) $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Bukti :

(a) Akan dibuktikan bahwa $S^{\perp}$ adalah subruang dari S.

Perhatikan, jika $\mathbf{s} \in S$ maka $\mathbf{0}^t \mathbf{s} = 0$ sehingga $\mathbf{0} \in S^{\perp}$. Akan ditunjukkan bahwa $S^{\perp}$ tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian-skalar. Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor dalam $S^{\perp}$, k sebarang skalar maka untuk sebarang vektor $\mathbf{s}$ dalam S berlaku $\mathbf{u}^t\mathbf{s} = 0$ dan $\mathbf{v}^t\mathbf{s} = 0$. Berdasarkan teorema 3.2.1 berlaku: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^t\mathbf{s} = \mathbf{u}^t\mathbf{s} + \mathbf{v}^t\mathbf{s} = 0 + 0 = 0$

$$(k\,\mathbf{u})^t\mathbf{s} = k(\mathbf{u}^t\mathbf{s}) = k(0) = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dan $k\mathbf{u}$ berada dalam $S^{\perp}$.

(b) Misalkan $\mathbf{u}$ sebarang vektor yang terletak di S dan $S^{\perp}$ yaitu vektor $\mathbf{u} \in S^{\perp} \cap S$ maka vektor $\mathbf{u}$ ortogonal terhadap dirinya sendiri yaitu $\mathbf{u}^t\mathbf{u} = 0$, berdasarkan teorema 3.2.1 diperoleh vektor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dengan demikian vektor yang terletak di S dan $S^{\perp}$ adalah vektor nol.

(c) Misalkan vektor $\mathbf{u} \in S$ dan vektor $\mathbf{v} \in S^{\perp}$ maka $\mathbf{u}^t\mathbf{v} = 0$. Ini berarti vektor $\mathbf{u} \in (S^{\perp})^{\perp}$ atau $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$. Sebaliknya misalkan vektor $\mathbf{u} \in (S^{\perp})^{\perp}$ maka $\mathbf{v}^t\mathbf{u} = 0$ untuk semua $\mathbf{v}$ di $S^{\perp}$, jadi vektor $\mathbf{u} \in S$ atau $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$. Karena $S \subset (S^{\perp})^{\perp} \wedge (S^{\perp})^{\perp} \subset S$ maka $S = (S^{\perp})^{\perp}$. □

3.4 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Nol

Diketahui matriks A_{mxn} yaitu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ sehingga dapat

diperoleh vektor-vektor $\mathbf{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})^t$, $\mathbf{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})^t$, … ,

$\mathbf{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})^t$ yang terbentuk dari baris-baris matriks A, dan dinamakan *vektor-vektor baris* matriks A. Dapat diperoleh juga vektor-vektor $\mathbf{c}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^t$, $\mathbf{c}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^t$, … , $\mathbf{c}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})^t$ yang terbentuk dari kolom-kolom matriks A, dan dinamakan *vektor-vektor kolom* matriks A.

Definisi 3.4.1

Misalkan diketahui matriks A_{mxn} dengan $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ vektor-vektor baris matriks A. Himpunan vektor dalam R^m yang direntang oleh vektor-vektor baris matriks A dinamakan *ruang baris* dari matriks A, dilambangkan B(A).

Secara matematis ditulis $B(A) = \{\mathbf{b} \in R^n \mid \mathbf{b} \in S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m)\}$.

Menurut teorema 3.3.3 B(A) merupakan subruang dari R^n. Dimensi dari B(A) disebut *peringkat baris* dari matriks A.

Definisi 3.4.2

Misalkan diketahui matriks A_{mxn} dengan $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ vektor-vektor kolom matriks A. Himpunan vektor dalam R^n yang direntang oleh vektor-vektor kolom matriks A dinamakan *ruang kolom* dari matriks A, dilambangkan K(A).

Secara matematis ditulis $K(A) = \{\mathbf{c} \in R^m \mid \mathbf{c} \in S(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)\}$.

Menurut teorema 3.3.3 K(A) merupakan subruang dari R^n. Dimensi dari K(A) disebut *peringkat kolom* dari matriks A.

Definisi 3.4.3

Himpunan semua penyelesaian SPLH A**x** = **0** dengan matriks $A_{m \times n}$ disebut *ruang nol* dari matriks A, dilambangkan N(A).

Secara matematis ditulis $N(A) = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$.

Selanjutnya akan dibahas hubungan antara penyelesaian suatu SPL A**x** = **b** dengan ruang kolom dari matriks koefisien A. Misalkan A_{mxn} matriks koefisien dan **x** adalah matriks berordo n x 1 maka perkalian matriks A dan **x** dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor kolom matriks A yaitu $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n$ atau $\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n$. Karena vektor **b** berada dalam ruang kolom matriks A maka SPL A**x** = **b** konsisten.

Teorema 3.4.1

SPL A**x** = **b** inkonsisten bila dan hanya bila $\mathbf{b} \notin K(A)$

Bukti :

(⇒): Andaikan $\mathbf{b} \in K(A)$, maka **b** dapat dinyatakan dengan $\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n$ dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suatu skalar dan $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ merupakan vektor-vektor kolom matriks A. Sehingga

$\mathbf{b} = (\ \mathbf{c}_1 |\ \mathbf{c}_2\ | \ldots |\ \mathbf{c}_n\ ) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = A\ \mathbf{x}$. Dengan demikian terdapat vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ yang merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Jadi SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten.

($\Leftarrow$): Andaikan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten, dan andaikan $\mathbf{x}_o = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka $A\ \mathbf{x}_o = \mathbf{b}$ atau ditulis

$\mathbf{b} = (\ \mathbf{c}_1 |\ \mathbf{c}_2\ | \ldots |\ \mathbf{c}_n\ ) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n,$ dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suatu skalar dan $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ merupakan vektor-vektor kolom matriks A.. Karena Vektor $\mathbf{b}$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor kolom matriks A maka $\mathbf{b} \in K(A)$. □

Hubungan antara SPLH dengan SPL tak homogen dapat dilihat dalam teorema berikut:

Teorema 3.4.2

Jika vektor $\mathbf{x}_o$ adalah penyelesaian dari suatu SPL tak homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang konsisten dan vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ membentuk suatu basis untuk N(A) yaitu ruang penyelesaian dari SPLH $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka setiap penyelesaian dari SPL tak homogen A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$. Sebaliknya untuk semua pilihan skalar $c_1, c_2, \ldots, c_k$ vektor $\mathbf{x}$ merupakan penyelesaian dari SPL tak homogen A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$.

Bukti :

Misalkan vektor $\mathbf{x}_o$ adalah penyelesaian dari suatu SPL tak homogen A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ dan vektor $\mathbf{x}$ adalah sebarang penyelesaian dari SPL tak homogen A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ maka A $\mathbf{x}_o$ = $\mathbf{b}$ dan A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$.

$$A\,\mathbf{x}_o - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{b}$$

$$A\,(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Jadi vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ merupakan penyelesaian dari SPL A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$. Karena vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ merupakan suatu basis untuk ruang penyelesaian SPLH maka vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis tersebut yaitu:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_o = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k\,.$$

Sebaliknya jika diketahui $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$

maka $A\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}_o + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k)$

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_o + c_1\,(\mathbf{A}\mathbf{v}_1) + c_2\,(\mathbf{A}\mathbf{v}_2) + \ldots + c_k\,(\mathbf{A}\mathbf{v}_k)$$

$\mathbf{x}_o$ merupakan penyelesaian dari SPL tak homogen sedangkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ adalah penyelesaian dari SPLH maka persamaannya menjadi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + 0 + 0 + \ldots + 0 = \mathbf{b}.$$

Terbukti bahwa vektor **x** merupakan penyelesaian dari SPL tak homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

Ruang baris dan ruang nol dari matriks A saling komplemen ortogonal karena vektor-vektor baris matriks A ortogonal terhadap ruang nol dari matriks A. Hal ini dapat dilihat dalam teorema berikut:

Teorema 3.4.3

Jika A suatu matriks berordo m x n, maka

(a) Ruang baris dan ruang nol dari matriks A saling komplemen ortogonal, yaitu $N(A) = B(A)^{\perp}$ dan $N(A)^{\perp} = B(A)$.

(b) Ruang nol dari matriks A^t dan ruang kolom dari matriks A saling komplemen ortogonal, yaitu $N(A^t) = K(A)^{\perp}$ dan $N(A^t)^{\perp} = K(A)$.

Bukti :

(a). Misalkan $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ adalah vektor-vektor baris matriks A maka untuk vektor $\mathbf{v} \in N(A)$ berlaku $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sehingga $\mathbf{r}_1^t\mathbf{v} = \mathbf{r}_2^t\mathbf{v} = \ldots = \mathbf{r}_n^t\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dengan demikian vektor $\mathbf{v} \in B(A)^{\perp}$. Karena untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in N(A)$ berakibat $\mathbf{v} \in B(A)^{\perp}$, maka $N(A) \subseteq B(A)^{\perp}$. Misalkan **v** sebarang vektor dalam $B(A)^{\perp}$ sedemikian hingga vektor **v** ortogonal dengan setiap vektor dalam B(A) yaitu $\mathbf{r}_1^t\mathbf{v} = \mathbf{r}_2^t\mathbf{v} = \ldots = \mathbf{r}_n^t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ maka $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dengan demikian $\mathbf{v} \in N(A)$. Karena $\mathbf{v} \in B(A)^{\perp}$ dan $\mathbf{v} \in N(A)$ maka $B(A)^{\perp} \subseteq N(A)$. Diperoleh $N(A) \subseteq B(A)^{\perp}$ dan $B(A)^{\perp} \subseteq N(A)$, jadi $N(A) = B(A)^{\perp}$. Berdasarkan teorema

3.3.4 $N(A)^{\perp} = (B(A)^{\perp})^{\perp} = B(A)$. Jadi disimpulkan bahwa $N(A) = B(A)^{\perp}$ dan $N(A)^{\perp} = B(A)$.

(b). Andaikan vektor $\mathbf{v} \in N(A^t)$ sehingga $A^t\mathbf{v} = 0$. Karena $K(A) = B(A^t)$ dan $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \ldots, \mathbf{r}_n^*$ adalah vektor-vektor dalam $B(A^t)$ maka $\mathbf{r}_1^{*t}\mathbf{v} = \mathbf{r}_2^{*t}\mathbf{v} = \ldots = \mathbf{r}_n^{*t}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dengan demikian $\mathbf{v} \in K(A)^{\perp}$ atau $\mathbf{v} \in B(A^t)^{\perp}$ maka vektor $\mathbf{v}$ ortogonal dengan setiap vektor baris matriks A^t yaitu $\mathbf{r}_1^{*t}\mathbf{v} = \mathbf{r}_2^{*t}\mathbf{v} = \ldots = \mathbf{r}_n^{*t}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $A^t\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dengan demikian $\mathbf{v} \in N(A^t)$, jadi $K(A)^{\perp} \subseteq N(A^t)$. Karena $N(A^t) \subseteq K(A)^{\perp} \wedge K(A)^{\perp} \subseteq N(A^t)$ maka $N(A^t) = K(A)^{\perp}$. Berdasarkan teorema 3.3.4 diperoleh $N(A^t)^{\perp} = (K(A)^{\perp})^{\perp} = K(A)$. Jadi disimpulkan bahwa $N(A^t) = K(A)^{\perp}$ dan $N(A^t)^{\perp} = K(A)$. □

Teorema 3.4.4

Jika matriks A_{mxn} yang vektor-vektor kolomnya bebas linear maka A^tA merupakan matriks yang vektor-vektor kolomnya juga bebas linear.

Bukti :

A^tA suatu matriks persegi. Matriks A^tA akan mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas linear jika dan hanya jika $N(A^tA) = \mathbf{0}$, sehingga untuk sebarang vektor $\mathbf{x} \in R^n$ maka $A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Untuk membuktikan matriks A^tA mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas linear cukup dengan membuktikan bahwa $A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian trivial saja. Dengan mengalikan $A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dengan $\mathbf{x}^t$ dari sebelah kiri akan diperoleh persamaan $\mathbf{x}^t A^t A\mathbf{x} = 0$ atau $(A\mathbf{x})^t A\mathbf{x} = 0$. $\|A\mathbf{x}\| = 0$ jadi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, karena vektor-vektor kolom matriks A bebas linear maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

3.5 Basis Ortogonal dan Ortonormal

Andaikan S subruang dari R^n. Dibagian depan telah dibahas suatu basis untuk S. Sering kali kita mengharapkan suatu basis yang anggota-anggotanya saling ortogonal. Oleh karena itu perlu dibahas terlebih dulu suatu himpunan vektor yang anggotanya saling ortogonal sehingga vektor-vektor dalam himpunan tersebut bebas linear, seperti dalam teorema berikut:

Teorema 3.5.1

Diketahui S subruang dari R^n. Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ adalah vektor-vektor tak nol dalam R^n yang saling ortogonal maka S bebas linear.

Bukti:

Dibentuk persamaan $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, untuk membuktikan S bebas linear, akan ditunjukkan bahwa skalar $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Karena setiap vektor dalam S saling ortogonal, maka untuk setiap vektor $\mathbf{v}_i \in S$ berlaku $\mathbf{v}_i{}^t\mathbf{v}_j = 0$, untuk $i \neq j$ dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$. Sehingga diperoleh :

$$(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_m\mathbf{v}_m)^t\mathbf{v}_i = 0$$

$$k_1(\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_i) + k_2(\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_i) + \ldots + k_m(\mathbf{v}_m{}^t\mathbf{v}_i) = 0$$

$$0 + 0 + \ldots + k_i + \ldots + 0 = 0$$

$$k_i = 0$$

Di peroleh $k_i = 0$, $\forall_i = 1, 2, \ldots, m$. Jadi $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Terbukti bahwa $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ bebas linear. □

Definisi 3.5.1

Basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ untuk subruang S dari R^n adalah sebuah basis yang terdiri dari vektor-vektor yang saling ortogonal yaitu suatu basis yang memenuhi sifat $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_j = 0$ untuk setiap $i \neq j$, sedangkan suatu basis ortogonal yang memenuhi sifat $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_j = 1$ untuk setiap $i = j$ disebut *basis ortonormal.*

Teorema 3.5.2

Jika $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ adalah suatu basis ortonormal dari subruang S $\in R^n$ maka untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in R^n$ dapat ditulis $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m$ dengan $a_i = \mathbf{v}^t\,\mathbf{u}_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

Bukti :

Diketahui T suatu basis dalam S dan diketahui bahwa vektor $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m$, ditunjukkan bahwa skalar $a_i = \mathbf{v}^t\mathbf{u}_i$ yaitu:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}^t\mathbf{u}_i &= (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m)^t\mathbf{u}_i \\
&= a_1(\mathbf{u}_1{}^t\mathbf{u}_i) + a_2(\mathbf{u}_2{}^t\mathbf{u}_i) + \ldots + a_m(\mathbf{u}_m{}^t\mathbf{u}_i) \\
&= a_1\,0 + a_2\,0 + \ldots + a_i\,1 + a_m\,0 \\
&= 0 + 0 + \ldots + a_i + 0 \\
&= a_i\,.
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbf{v}^t\mathbf{u}_i = a_i$. □

Suatu basis dari subruang R^n tidak selalu ortogonal. Untuk memperoleh suatu basis ortogonal dari suatu basis sebarang diperlukan beberapa langkah-langkah, yang disebut dengan proses Gram-Schmidt.

Teorema 3.5.3

Andaikan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ adalah vektor-vektor tak nol dalam R^n yang saling ortogonal dan andaikan vektor $\mathbf{v} \notin S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$.

Didefinisikan $\mathbf{w}_{m+1} = \mathbf{v} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{w}_j}{\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_j}\mathbf{w}_j$, maka vektor-vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}$ saling ortogonal. Oleh karena itu

$$S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}) = S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}).$$

Bukti :

Diketahui vektor-vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ saling ortogonal maka berdasarkan definisi dari $\mathbf{w}_{m+1}$, vektor $\mathbf{v} \in S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1})$ dan vektor $\mathbf{w}_{m+1} \in S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v})$. Jadi $S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}) = S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1})$. Untuk membuktikan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}$ saling ortogonal maka ditunjukkan $\mathbf{w}_{m+1}{}^t\mathbf{w}_k = 0$, $\forall\, k = 1, 2, \ldots, m$, yaitu:

$$\mathbf{w}_{m+1}{}^t\mathbf{w}_k = \left(\mathbf{v} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{w}_j}{\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_j}\mathbf{w}_j\right)^t\mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{w}_{m+1}{}^t\mathbf{w}_k = \mathbf{v}^t\mathbf{w}_k - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{w}_j}{\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_j}\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{w}_{m+1}{}^t\mathbf{w}_k = \mathbf{v}^t\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_k{}^t\mathbf{w}_k}\mathbf{w}_k{}^t\mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{w}_{m+1}{}^t\mathbf{w}_k = \mathbf{v}^t\mathbf{w}_k - \mathbf{v}^t\mathbf{w}_k = 0\,. \qquad \square$$

Andaikan bahwa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan suatu basis dalam R^n. Untuk membentuk suatu basis ortonormal di R^n cukup dengan membentuk basis ortogonal, karena basis ortonormal dapat diperoleh dengan menormalkan vektor-vektor dalam basis ortogonal yaitu dengan cara mengalikan vektor-vektor dalam basis ortogonal dengan kebalikan dari panjang vektor-vektornya. Dengan menggunakan teorema 3.5.3 diperoleh beberapa langkah yang digunakan untuk memperoleh basis ortogonal yang disebut dengan proses Gram-Schmidt seperti yang akan dibahas dalam teorema berikut:

Teorema 3.5.4 (Proses Gram- Schmidt)

Jika $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$suatu basis dari subruang $S \in R^n$ maka terdapat suatu basis ortonormal $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ untuk S.

Bukti:

Andaikan $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ sebarang basis untuk S. Untuk menunjukkan S mempunyai suatu basis ortonormal $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ cukup dengan menunjukkan bahwa S mempunyai basis ortogonol $W^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Karena vekotr-vektor dalam basis ortogonal dapat dinormalkan untuk memperoleh suatu basis yang ortonormal. Andaikan vektor $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Vektor $\mathbf{v}_2$ dalam subruang S_1 dari S direntang oleh $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ yang ortogonal terhadap vektor $\mathbf{v}_1$. Karena vektor $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ maka S_1 direntang juga oleh $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2\}$, sehingga $\mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{u}_2$. Karena $\mathbf{v}_1^t\mathbf{v}_2 = 0$ maka $0 = \mathbf{v}_2^t\mathbf{v}_1 = (a_1\mathbf{v}_1 +$

$a_2\mathbf{u}_2)^t\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{u}_2{}^t\mathbf{v}_1$, sehingga diperoleh $a_1 = -a_2 \dfrac{\mathbf{u}_2{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}$. Jika $a_2 = 1$ maka akan diperoleh vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{u}_2{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$. Kemudian vektor $\mathbf{v}_3$ dalam subruang S_2 dari S direntang oleh $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$. Sehingga S_2 juga direntang oleh $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3\}$. Vektor $\mathbf{v}_3$ dinyatakan dengan $\mathbf{v}_3 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{u}_3$. Karena $\mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ maka

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_1 = (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{u}_3)^t\mathbf{v}_1 = b_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_2 = (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3)^t\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_2.$$

Sehingga diperoleh $b_1 = -b_3 \dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}$ dan $b_2 = -b_3 \dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2}$, misalkan $b_3 = 1$ maka $b_1 = -\dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}$ dan $b_2 = -\dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2}$. Jadi $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\mathbf{u}_3{}^t\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$.

Selanjutnya vektor $\mathbf{v}_4$ berada dalam subruang S_3 dari S yang direntang oleh $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ dan juga oleh $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4\}$ yang ortogonal terhadap vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sehingga dapat diperoleh $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \dfrac{\mathbf{u}_4{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\mathbf{u}_4{}^t\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{u}_4{}^t\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3$. Untuk vektor $\mathbf{v}_n$ berada dalam subruang S_{n-1} dari S yang direntang oleh $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ juga direntang oleh $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n-2}, \mathbf{u}_n\}$ yang ortogonal terhadap vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n-2}$ sehingga $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\mathbf{u}_n{}^t\mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j{}^t\mathbf{v}_j}\mathbf{v}_j$. Jadi diperoleh basis ortogonal $W^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, misalkan $\mathbf{w}_i = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka basis ortonormalnya adalah $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_n\}$.□

Contoh 3.5.1:

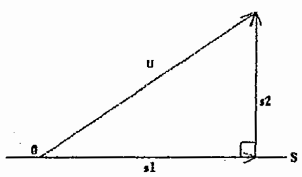
Akan dicari basis ortonormal dari vektor $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0)$ dan $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$ yang membentuk suatu basis di R^3. Dengan menggunakan proses Gram–Schmidt dapat diperoleh vektor $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ yang membentuk basis ortogonal di R^3 yaitu $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, -1, 0)$ dan $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \dfrac{\mathbf{a}_2{}^t\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = (½, ½, -1)$.

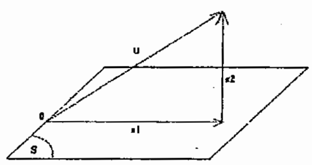
Sehingga basis ortonormalnya adalah $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, dengan :

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ dan}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)}{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Dalam R^2 atau R^3 secara geometris, jika S adalah suatu garis atau bidang yang melalui titik asal, maka untuk vektor $\mathbf{u}$ dalam ruang tersebut dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, dengan $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$. Seperti terlihat dalam gambar.1 di bawah ini:





Gambar.1

Hal ini dapat diperluas untuk S suatu subruang dalam R^n, yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 3.5.5 (Teorema Proyeksi)

Jika S adalah suatu subruang dalam R^n, maka setiap vektor **u** dalam R^n dapat dinyatakan tepat dalam satu cara yaitu $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ dengan $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$.

Bukti:

Berdasarkan proses Gram-Schmidt untuk suatu subruang S terdapat suatu basis ortonormal, misalkan $W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Andaikan $\mathbf{s}_1 = (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n$, sehingga menurut teorema 3.5.3 vektor $\mathbf{s}_2$ dapat dinyatakan dengan $\mathbf{s}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{s}_1$ untuk suatu vektor dalam R^n. Sehingga $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{s}_1) = \mathbf{u}$. Akan ditunjukkan bahwa vektor $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$. Vektor $\mathbf{s}_1$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor dalam W untuk S, jadi $\mathbf{s}_1 \in S$. Untuk menunjukkan bahwa vektor $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{s}_2$ ortogonal terhadap setiap vektor dalam S. Andaikan **s** sebarang vektor dalam S dinyatakan dengan $\mathbf{s} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$ maka $\mathbf{s}_2^t\mathbf{s} = (\mathbf{u}-\mathbf{s}_1)^t\mathbf{s} = \mathbf{u}^t\mathbf{s} - \mathbf{s}_1^t\mathbf{s}$ dengan $\mathbf{u}^t\mathbf{s} = \mathbf{u}^t(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n) = k_1(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_1) + k_2(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_2) + \ldots + k_n(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_n)$

dan $\mathbf{s}_1^t\mathbf{s} = ((\mathbf{u}^t\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n)^t(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n)$

$= (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_1)k_1 + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_2)k_2 + \ldots + (\mathbf{u}^t\mathbf{v}_n)k_n$

$= k_1(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_1) + k_2(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_2) + \ldots + k_n(\mathbf{u}^t\mathbf{v}_n)$

maka $\mathbf{s}_2^t\mathbf{s} = 0$. Andaikan vektor **u** dapat juga dinyatakan dengan $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1^1 + \mathbf{s}_2^1$, sehingga diperoleh persamaan

$\mathbf{0} = (\mathbf{s}_1^1 - \mathbf{s}_1) + (\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2)$ atau $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^1 = \mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2$ ....(*)

Vektor $\mathbf{s}_2^1$dan $\mathbf{s}_2$ ortogonal terhadap S maka $\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2 \in S^\perp$. Untuk sebarang vektor $\mathbf{s} \in S$ berlaku $\mathbf{s}^t(\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2) = \mathbf{s}^t\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}^t\mathbf{s}_2^1 = 0 - 0 = 0$. Dari persamaan...(*) diperoleh juga bahwa $\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2 \in S$, sehingga $\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2$ berada dalam $S \cap S^\perp$. Jadi $\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2$ ortogonal terhadap dirinya sendiri yaitu

$$(\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2)^t(\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2) = 0$$

$$\mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2 = 0$$

$$\mathbf{s}_2^1 = \mathbf{s}_2$$

Karena $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^1 = \mathbf{s}_2^1 - \mathbf{s}_2$ maka $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1^1$. □

Vektor $\mathbf{s}_1$ dalam teorema diatas disebut proyeksi ortogonal $\mathbf{u}$ terhadap S, dinyatakan $\mathbf{s}_1 = \text{proy}_s\, \mathbf{u}$ dan $\mathbf{s}_2$ disebut komplemen vektor $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap S dinyatakan $\mathbf{s}_2 = \text{proy}_{s\perp}\mathbf{u}$.

Teorema3.5.6 (Faktorisasi-QR)

Jika peringkat matriks A_{mxn} sama dengan n maka matriks A dapat difaktorkan menjadi suatu hasil kali QR, dengan matriks Q_{mxn} yang vektor-vektor kolomnya membentuk basis ortonormal untuk ruang kolom matriks A dan R suatu matriks segitiga atas yang mempunyai invers.

Bukti :

Misalkan $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_n$ adalah vektor-vektor kolom matriks A yang bebas linear sehingga membentuk suatu basis untuk K(A). Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt diperoleh basis ortonormal $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots,$ $\mathbf{w}_n$ untuk K(A). Basis ortonormal diperoleh dari basis ortogonal untuk K(A) yaitu $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$ dan untuk i = 1, 2, ... , n

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{a}_i{}^t \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1{}^t \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_i{}^t \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^t \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_i{}^t \mathbf{v}_{i-1}}{\mathbf{v}_{i-1}{}^t \mathbf{v}_{i-1}}\mathbf{v}_{i-1} \quad .....1)$$

dan akhirnya diperoleh basis ortonormal $\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i, \forall i = 1, 2, \dots, n.$

Berdasarkan teorema 3.5.2 untuk setiap vektor $\mathbf{a}_i \in$ B(A) dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear dari vektor-vektor ortonormal $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{w}_1 + r_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + r_{n1}\mathbf{w}_n \\ \mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{w}_1 + r_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + r_{n2}\mathbf{w}_n \qquad \dots 2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_n &= r_{1n}\mathbf{w}_1 + r_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + r_{nn}\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

dengan $r_{ji} = \mathbf{a}_i{}^t\mathbf{w}_j$, untuk i = 1, 2, ... , n dan untuk j = 1, 2, ... , n.

Menurut persamaan...1) vektor $\mathbf{a}_i \in S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i) = S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i)$.

$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i) = S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i)$ karena setiap vektor yang membentuk basis ortonormal merupakan kombinasi linear dari vektor yang membentuk basis ortogonal. Untuk j > i, vektor $\mathbf{w}_j$ ortogonal terhadap vektor yang direntang oleh vektor-vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_I$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{w}_j \perp (k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \dots + k_i\mathbf{w}_i)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j{}^t(k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \dots + k_i\mathbf{w}_i) &= \mathbf{w}_j{}^t(k_1\mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_j{}^t(k_2\mathbf{w}_2) + \dots + \mathbf{w}_j{}^t(k_i\mathbf{w}_i \\ &= k_1(\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_1) + k_2(\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_2) + \dots + k_i(\mathbf{w}_j{}^t\mathbf{w}_i) \\ &= k_1\,0 + k_2\,0 + \dots + k_i\,0 = 0. \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{w}_j^t(k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \ldots + k_i\mathbf{w}_i) = 0$ maka vektor $\mathbf{w}_j$ ortogonal terhadap vektor $\mathbf{a}_i$. Dengan demikian $r_{ji} = 0$ untuk setiap $j > i$, sehingga persamaan....2) menjadi:

$$\mathbf{a}_1 = r_{11}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{12}\mathbf{w}_1 + r_{22}\mathbf{w}_2$$

....

$$\mathbf{a}_n = r_{1n}\mathbf{w}_1 + r_{2n}\mathbf{w}_2 + \ldots + r_{nn}\,\mathbf{w}_n$$

Jika diubah kedalam bentuk matriks akan di peroleh persamaan:

$$[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_n] = [\mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{w}_n] \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$A = Q\,R$, dengan

$$Q = [\mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{w}_n] = \quad \text{dan} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa vektor-vektor kolom matriks R bebas linear, misalkan vektor $\mathbf{x}$ penyelesaian dari SPL $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$Q(R\mathbf{x}) = Q.\mathbf{0}$$

$$(QR)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Diperoleh SPLH $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dapat ditulis dalam bentuk persamaan

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Karena vektor-vektor kolom matriks A bebas linear maka vektor $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Jadi diperoleh vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dengan demikian vektor-vektor kolom dari matriks R bebas linear. □

Contoh3.5.2

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dari contoh 3.5.1 diperoleh vektor-vektor ortonormal dari K(A) adalah $\mathbf{q}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ dan $\mathbf{q}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Menurut teorema 3.5.2 vektor-vektor kolom dari matriks A yaitu $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1{}^t\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\mathbf{a}_1{}^t\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right)\mathbf{q}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3}\right)\mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{2}\mathbf{q}_1$$

dan

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_2{}^t\mathbf{q}_1)\,\mathbf{q}_1 + (\mathbf{a}_2{}^t\mathbf{q}_2)\,\mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right)\mathbf{q}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3}\right)\mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

diperoleh persamaan $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jadi matriks

A dapat difaktorkan menjadi A = Q R, dengan

matriks $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dan matriks $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

BAB IV

METODE KUADRAT TERKECIL

Suatu SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan matriks $A_{m \times n}$, $m > n$ dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ biasanya merupakan SPL yang inkonsisten. Bab ini membahas suatu metode untuk mencari vektor $\mathbf{x} \in R^n$ dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten sehingga $A\mathbf{x}$ merupakan suatu vektor dalam K(A) yang "paling dekat" dengan vektor $\mathbf{b} \in R^m$. Hal ini berarti mencari suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ yang meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ ekuivalen dengan meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, sehingga metode ini dinamakan *metode kuadrat terkecil.*

Definisi 4.1

Jika diketahui SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsisten dengan peringkat matriks $A_{m \times n}$ adalah n dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ maka suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ yang meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ disebut *penyelesaian kuadrat terkecil.*

Selanjutnya akan dibahas dua metode kuadrat terkecil yang digunakan untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil. Pertama, metode kuadrat terkecil dengan proyeksi ortogonal vektor dan kedua, metode kuadrat terkecil dengan faktorisasi-QR.

4.1 Metode Kuadrat Terkecil dengan Proyeksi Ortogonal Vektor.

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana proyeksi ortogonal suatu vektor dipandang sebagai suatu pendekatan untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** yang inkonsisten.

Misalkan terdapat subruang S dari R^m dan suatu vektor **b** $\in R^m$, berdasarkan teorema 3.5.4 vektor **b** dapat ditulis $\mathbf{b} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, denga $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$. Vektor $\mathbf{s}_1$ merupakan vektor proyeksi ortogonal dari vektor **b** terhadap S. Akan ditunjukkan bahwa vektor $\mathbf{s}_2$ merupakan vektor terpendek yang menghubungkan vektor **b** dengan vektor $\mathbf{s}_1$, seperti dalam teorema berikut:

Teorema 4.1.1 (teorema hampiran terbaik)

Jika S merupakan subruang dari R^n, maka vektor $\mathbf{s} \in S$ yang paling dekat dengan vektor $\mathbf{b} \in R^n$ adalah vektor $\mathbf{s} = \text{proy}_s\mathbf{b}$.

Bukti :

Diketahui $\mathbf{b} \in R^n$, berdasarkan teorema 3.5.4 $\mathbf{b} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, dengan $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$, $\mathbf{s}_1 = \text{proy}_s\mathbf{b}$. Untuk sebarang vektor $\mathbf{s} \in S$ berlaku:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}\|^2$$

$$= \|(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) + \mathbf{s}_2\|^2$$

$$= ((\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) + \mathbf{s}_2)^t((\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) + \mathbf{s}_2)$$

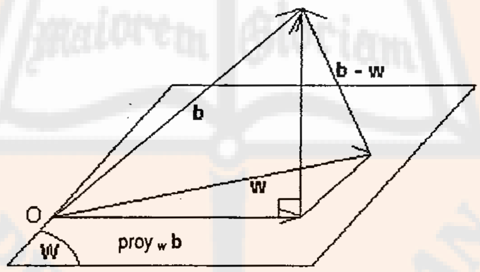
$$= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s})^t(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) + \mathbf{s}_2{}^t\mathbf{s}_2)$$

$$= \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{s}_2\|^2$$

$\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\|^2$ akan minimum jika dan hanya jika $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = \text{proy}_s\mathbf{b}$.

Jadi $\mathbf{s} = \text{proy}_s\mathbf{b}$. □

Untuk setiap matriks $A_{m \times n}$ dan vektor $\mathbf{x} \in R^n$, vektor $A\mathbf{x}$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor kolom matriks A. Secara geometris mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten berarti mencari suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ sehingga $A\mathbf{x} \in K(A)$ merupakan suatu vektor yang paling dekat dengan vektor $\mathbf{b} \in R^m$.



Gambar 2. Proyeksi ortogonal vektor **b** terhadap W

Perhatikan gambar.2, andaikan W = K(A) maka berdasarkan teorema 4.1.1 vektor dalam W yang paling dekat dengan vektor **b** adalah vektor proyeksi ortogonal dari vektor **b** terhadap W. Jika vektor $\mathbf{x} \in R^n$ adalah penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten maka $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ dan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimum. Dengan demikian penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ seperti yang akan dibahas dalam teorema berikut:

Teorema 4.1.2

Penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ adalah suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ yang merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten.

Bukti :

Andaikan vektor **x** merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten maka terdapat suatu vektor $A\mathbf{x} \in K(A)$ yang paling dekat dengan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ sehingga $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimum. Menurut teorema 4.1.1 vektor $A\mathbf{x} \in K(A)$ yang letaknya paling dekat dengan vektor **b** adalah vektor proyeksi dari vektor **b** terhadap ruang kolom matriks A, yaitu $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$. Karena vektor $\mathbf{x} \in R^n$ memenuhi persamaan $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ maka vektor **x** merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$. □

Teorema 4.1.2

SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten mempunyai penyelesaian kuadrat terkecil tunggal **x** bila dan hanya bila $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ dan $\mathbf{x} \in R(A^t)$.

Bukti :

(⇒): Andaikan vektor $\mathbf{x} \in R^n$ adalah penyelesaian kuadrat terkecil tunggal dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka vektor $\mathbf{x} \in R^n$ akan memenuhi SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ sehingga vektor $A\mathbf{x} \in K(A)$. Penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ adalah himpunan vektor $\mathbf{u} + N(A) = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}$ / vektor $\mathbf{u} \in R^n$ dan vektor $\mathbf{v} \in N(A)\}$. Anggota dari himpunan vektor $\mathbf{u} + N(A)$ yang merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah suatu vektor $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ -proy $_{N(A)}\mathbf{u}$ = proy $_{N(A)\perp}\mathbf{u}$. Menurut teorema 3.4.3$K(A^t) = N(A)^\perp$, sehingga $\mathbf{x}$ = proy $_{K(A^t)}$ $\mathbf{u}$, jadi vektor $\mathbf{x} \in K(A^t)$.

($\Leftarrow$): Penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ yang inkonsisten adalah himpunan vektor $\mathbf{u} + N(A)$. Karena vektor $\mathbf{x} \in K(A^t)$ merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{u} + N(A)$ = proy $_{K(At)}$ $\mathbf{u}$. Andaikan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in K(A^t)$ merupakan penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ maka diperoleh persamaan $A\mathbf{u} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ dan $A\mathbf{v} = \text{proy}_w\mathbf{b}$. Dari kedua persamaan tersebut diperoleh persamaan $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \text{proy}_w\mathbf{b} - \text{proy}_w\mathbf{b} = \mathbf{0}$ atau $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in N(A)$. Padahal diketahui vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in R(A^t)$ maka vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in R(A^t)$ atau $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in N(A)^\perp$. Vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in N(A) \cap N(A)^\perp$, jadi $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Terbukti bahwa penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ tunggal bila $\mathbf{x} \in K(A^t)$. Dengan demikian karena penyelesaian dari SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_w\mathbf{b}$ tunggal maka penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ juga tunggal. □

Contoh 4.1.1

Suatu perusahaan mempunyai persediaan material S sebanyak 2000 unit, material T sebanyak 1000 unit dan material U sebanyak 500 unit, material tersebut akan digunakan untuk memproduksi P dan Q. Setiap produksi P membutuhkan 1 unit S, 0 unit T, dan 1 unit U, sedangkan produksi Q membutuhkan 1 unit S, 2 unit T dan 1 unit U. Akan dicari jumlah produksi P dan Q yang dihasilkan dengan menggunakan persediaan material S, T dan U.

Permasalahan diatas jika dibawa kedalam bentuk matriks menjadi SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, yaitu: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$, dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$.

SPL diatas inkonsisten karena vektor $\mathbf{b} \notin K(A)$. Akan dicari penyelesaian kuadrat terkecil $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sedemikian hingga jarak dari $p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ke $\begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ minimum. Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ yang memenuhi $p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan paling dekat dengan $\begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ adalah vektor proyeksi dari $\begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ ke K(A). Diketahui vektor-vektor kolom dari matriks A adalah $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Basis ortonormal dari K(A) adalah $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Proyeksi ortogonal dari vektor **b** terhadap ruang kolom matriks A adalah:

$\text{Proy}_w\mathbf{b} = (\mathbf{b}^t\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{b}^t\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$

$$\operatorname{Proy}_{w}\begin{pmatrix}2000\\1000\\500\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}2000 & 1000 & 500\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}2000 & 1000 & 500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}2500\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1000\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}2500\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1000\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

p dan q dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\operatorname{Proy}_{w}\mathbf{b}=p\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\left(1250-\frac{1000}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1000}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh $p = 1250 - 500 = 750$ dan $q = 500$.

Jadi penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL diatas adalah $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}750\\500\end{pmatrix}$.

Dengan memproduksi P sejumlah 750 unit dan Q sejumlah 500 unit, maka persediaan material S, T, U yang diperlukan adalah

$$750\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+500\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1250\\1000\\1250\end{pmatrix}.$$

Persediaan material S masih tersisa 750 unit dan persediaan material U kekurangan 750 unit. Dengan demikian untuk memproduksi P sejumlah 750 unit dan Q sejumlah 500 unit diperlukan penambahan material U sebanyak 750 unit dan pengurangan material S sebanyak 750 unit.

Jika vektor **x** merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** yang inkonsisten maka vektor $\mathbf{x} \in R^n$ memenuhi SPL A**x** = $\text{proy}_w\mathbf{b}$ dan meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Dari persamaan A**x** = $\text{proy}_w\mathbf{b}$ diperoleh persamaan A**x** - **b** = $\text{proy}_w\mathbf{b} - \mathbf{b}$. Karena vektor $A\mathbf{x} \in K(A)$ dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$, maka menurut teorema 3.5.4 $A\mathbf{x} - \mathbf{b} \in K(A)^{\perp}$. Berdasarkan teorema 3.4.3 $A\mathbf{x} - \mathbf{b} \in N(A^t)$ maka penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** memenuhi persamaan $A^t(A\mathbf{x}-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ atau $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. SPL $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ disebut *sistem persamaan normal* (SPN).

Berdasarkan teorema 3.4.4 SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ merupakan SPL yang konsisten, karena matriks $A^tA_{n \times n}$ simetris dan mempunyai invers.

Akibat 4.1.3

Jika vektor-vektor kolom matriks A bebas linear dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ maka penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** yang inkonsisten adalah $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$.

Bukti:

Penyelesaian dari SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ dapat diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dari sebelah kiri dengan $(A^tA)^{-1}$, yaitu $(A^tA)^{-1}A^tA\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$ atau $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian dari SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ yang juga merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** yang inkonsisten. $\square$

Contoh 4.1.2

Akan dicari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL dibawah:

$$x_1 + 2\,x_2 = 2$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$

Jika SPL tersebut diubah kedalam bentuk matriks akan diperoleh SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. SPN-nya $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian kuadrat terkecilnya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{66 - 36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 24 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Proyeksi ortogonal vektor $\mathbf{b}$ terhadap K(A) adalah

$$\hat{\mathbf{b}} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 22 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Jarak antara vektor $\mathbf{b}$ dengan vektor $\hat{\mathbf{b}}$ adalah

$$\left\|\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}22\\15\\31\end{pmatrix}\right\| = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{10}$$

Panjang vektor **x** adalah $\|\mathbf{x}\| = \left\|\begin{pmatrix}8/10\\7/10\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{113}$

Jadi penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL tersebut adalah

$$x_1 = \frac{8}{10} \text{ dan } x_2 = \frac{7}{10}.$$

Suatu SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang konsisten dengan matriks $A_{n \times n}$ mempunyai invers akan mempunyai penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Begitu pula SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten, dengan matriks A_{mxn} yang vektor- vektor kolomnya bebas linear dan berdasarkan teorema 4.1.2 mempunyai penyelesaian kuadrat terkecil tunggal.

Definisi 4.1.1

Matriks A^{-}_{nxm} dikatakan *pendekatan invers matriks* A_{mxn} jika terdapat suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ sehingga $\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten.

Dengan menggunakan pendekatan invers matriks A diperoleh penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu $\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{b}$, dengan A^{-} pendekatan invers matriks A. Berdasarkan akibat 4.1.3 vektor $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$

merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten dengan vektor-vektor kolom matriks A bebas linear. Sehingga diperoleh persamaan $A^{-}\mathbf{b} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$, jadi $A^{-} = (A^tA)^{-1}A^t$.

Berdasarkan definisi di atas suatu vektor $\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A^{-} pendekatan invers matriks A. Matriks A^{-} dapat ditulis sebagai perkalian dua matriks yaitu matriks A^{-}_{nxm} dengan matriks identitas I_m sebagai berikut:

$$A^{-}_{nxm} = A^{-}I = [A^{-}\mathbf{e}_1 \mid A^{-}\mathbf{e}_2 \mid \dots \mid A^{-}\mathbf{e}_m]$$

dengan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ basis standar dalam R^m. Vektor-vektor kolom matriks A^{-} diperoleh dengan mencari penyelesaian dari persamaan $A\mathbf{x}_1 = \text{proy}_w\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \text{proy}_w\mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x}_m = \text{proy}_w\mathbf{e}_m$ sehingga $A^{-} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_m]$.

Berikut ini terdapat beberapa langkah yang penting untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten dengan mencari suatu pendekatan invers matriks A_{mxn}, yaitu :

Langkah 1:

Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, cari basis ortonormal dari ruang kolom matriks A_{mxn}, yaitu $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$.

Langkah 2:

Hitung proyeksi ortogonal vektor-vektor dari basis standar dalam R^m terhadap basis ortonormal dari ruang kolom matriks A.

$$\text{Proy}_w(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1^t\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{e}_1^t\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (\mathbf{e}_1^t\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n$$

$$\text{Proy}_w(\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2^t\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{e}_2^t\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (\mathbf{e}_2^t\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{Proy}_w(\mathbf{e}_m) = (\mathbf{e}_m{}^t\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{e}_m{}^t\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{e}_m{}^t\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n$$

Langkah 3:

Bentuk pendekatan invers matriks A yang vektor-vektor kolomnya diperoleh dari penyelesaian persamaan $A\mathbf{x}_1 = \mathrm{Proy}_w(\mathbf{e}_1)$, $A\mathbf{x}_2 = \mathrm{Proy}_w(\mathbf{e}_2)$, … , $A\mathbf{x}_m = \mathrm{Proy}_w(\mathbf{e}_m)$, yaitu $A^- = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{x}_m]$.

Langkah 4:

Hitung penyelesaian kuadrat terkecil $\mathbf{x} = A^-\mathbf{b}$.

Contoh 4.1.3

Akan dicari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan pendekatan invers matriks

A. Basis ortonormal dari vektor-vektor kolom matriks A adalah vektor $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Proyeksi ortogonal dari vektor-vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ terhadap basis ortonormal dari ruang kolom matriks A adalah:

$$\mathrm{proy}_w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left((1 \quad 0 \quad 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left((1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{proy}_{w}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{proy}_{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Penyelesaian dari

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

adalah $\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$.

Pendekatan invers matriks A adalah $A^{-}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$. Penyelesaian kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x}=A^{-}\mathbf{b}$, yaitu:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2000\\1000\\500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}750\\500\end{pmatrix}.$$

4.2 Metode Kuadrat Terkecil dengan Faktorisasi-QR

Pada bagian ini metode kuadrat terkecil yang digunakan untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan menggunakan faktorisasi-QR. Seperti yang telah dibahas dalam teorema 3.5.5 matriks A dapat difaktorkan menjadi hasil kali QR.

Matriks A dapat difaktorkan menjadi hasil kali QR dengan Q suatu matriks yang vektor-vektor kolomnya ortonormal dan R matriks segitiga atas yang mempunyai invers. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ menjadi $QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$. SPN-nya menjadi $(QR)^t(QR)\mathbf{x} = (QR)^t\mathbf{b}$ atau $R^tQ^tQR\mathbf{x} = R^tQ^t\mathbf{b}$. Karena $Q^tQ = I$, maka $R^tR\mathbf{x} = R^tQ^t\mathbf{b}$ atau $R\mathbf{x} = Q^t\mathbf{b}$, sehingga penyelesaian kuadrat terkecilnya adalah $\mathbf{x} = R^{-1}Q^t\mathbf{b}$.

Teorema 4.2.1

Jika SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsisten dengan matriks $A_{m\times n}$ yang vektor-vektor kolomnya bebas linear dan matriks $A = QR$ dengan matriks $Q_{m\times n}$ yang vektor-vektor kolomnya ortonormal dan matriks segitiga atas $R_{n\times n}$ yang mempunyai invers maka penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x} = R^{-1}Q^t\mathbf{b}$.

Bukti :

Diketahui SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsisten. Karena matriks $A = QR$ maka SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ menjadi $QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$. SPN dari SPL tersebut adalah

$$(QR)^tQR\mathbf{x} = (QR)^t\mathbf{b}$$

$$R^tR\mathbf{x} = R^tQ^t\mathbf{b}, \text{ karena } Q^tQ = I$$

$$R\mathbf{x} = Q^t\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = R^{-1}Q^t\mathbf{b}, \text{ karena R matriks yang mempunyai invers.}$$

Jadi penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x} = R^{-1}Q^t\mathbf{b}$. □

Contoh 4.5.1

Suatu matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dapat difaktorkan menjadi hasil kali QR yaitu $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dengan matriks $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ dan matriks $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah $\mathbf{x} = R^{-}Q^{t}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL diatas yaitu $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3 Metode Kuadrat Terkecil Terboboti

Pada bagian di depan telah dibahas mengenai penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan vektor-vektor kolom matriks $A_{m \times n}$ bebas linear dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ dengan metode kuadrat terkecil yang meminimumkan jarak dari $A\mathbf{x}$ ke $\mathbf{b}$. Dalam penerapannya proses untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dipengaruhi oleh beberapa hal yang berhubungan dengan SPL tersebut. Seperti halnya dalam penerapan bidang ekonomi, andaikan suatu perusahaan akan memproduksi 2 jenis barang, maka jumlah barang yang akan diproduksi harus disesuaikan dengan biaya produksi dan biaya materialnya. Secara matematis dalam penyelesaian kuadrat terkecil biaya produksi dan biaya material tersebut dianggap sebagai pembobot.

Definisi 4.3.1

Jika $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$ adalah matriks yang mempunyai invers, maka *SPL terboboti* dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten didefinisikan dengan $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$.

Definisi4.3.2

Diketahui SPL terboboti $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, dengan $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$ matriks yang mempunyai invers, vektor-vektor kolom matriks $A_{m \times n}$ bebas linear, dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ yang meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_P$ dan $\|\mathbf{x}\|_Q$ disebut *penyelesaian kuadrat terkecil terboboti.*

Definisi 4.3.3

Matriks $\tilde{A}_{nxm}$ dikatakan *pendekatan invers matriks terboboti* dari matriks A_{mxn} jika terdapat suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ sehingga $\mathbf{x} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil terboboti dari SPL terboboti $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ yang inkonsisten.

Penyelesaian kuadrat terkecil terboboti dapat diperoleh dengan mencari pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A yaitu $\tilde{A}$ dengan matriks pembobot $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$ yang mempunyai invers.

Teorema 4.3.1

Jika $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$ merupakan matriks pembobot dan $(PAQ^{-1})^{-}$ adalah pendekatan invers matriks dari matriks PAQ^{-1} maka pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A adalah $\tilde{A} = Q^{-1}(PAQ^{-1})^{-}P$.

Bukti:

Diketahui SPL terboboti $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$. Karena $(PAQ^{-1})^{-}$ adalah pendekatan invers matriks dari matriks PAQ^{-1} maka diperoleh persamaan $Q\mathbf{x} = (PAQ^{-1})^{-}P\mathbf{b}$. Karena Q matriks yang mempunyai invers maka diperoleh penyelesaian kuadrat terkecil terboboti $\mathbf{x} = Q^{-1}(PAQ^{-1})^{-}P\mathbf{b}$. Diketahui $\mathbf{x} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$ maka $Q^{-1}(PAQ^{-1})^{-}P\mathbf{b} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$, sehingga diperoleh $\tilde{A} = Q^{-1}(PAQ^{-1})^{-}P$. □

Akibat 4.3.2

Jika A suatu matriks yang mempunyai invers maka pendekatan invers matriks A adalah $\widetilde{A} = (A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP$.

Bukti :

Pendekatan invers matriks A adalah $A^- = (A^tA)^{-1}A$, pendekatan invers matriks $(PAQ^{-1})^-$ yaitu:

$$
\begin{aligned}
(PAQ^{-1})^- &= ((PAQ^{-1})^t(PAQ^{-1}))^{-1}(PAQ^{-1})^t \\
&= (Q^{-t}A^tP^tPAQ^{-1})^{-1}(Q^{-t}A^tP^t) \\
&= QA^{-1}P^{-1}P^{-t}A^{-t}Q^tQ^{-t}A^tP^t \\
&= Q(A^tP^tPA)^{-1}A^tP^t
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A} &= Q^{-1}(PAQ^{-1})^-P \\
&= Q^{-1}(Q(A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP) \\
&= Q^{-1}Q(A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP \\
&= (A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP.
\end{aligned}
$$

Jadi pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A adalah

$$\widetilde{A} = (A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP. \qquad \square$$

Contoh 4.3.1

Misalkan suatu perusahaan akan memproduksi 2 jenis barang dari suatu persamaan Ax = **b**, dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matriks yang menyatakan jumlah material yang diperlukan untuk membuat satu unit produksi, dan

$b = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ vektor yang menyatakan persediaan material. Andaikan biaya material dinyatakan dengan $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan biaya produksi dinyatakan dengan $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vektor $\mathbf{x}$ merupakan jumlah produksi yang akan dihasilkan dengan meminimumkan $\|\mathbf{x}\|_Q$ dan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_P$. Pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A adalah $\tilde{A} = (A^tP^tPA)^{-1}A^tP^tP$.

$$\tilde{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -10 & 16 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian kuadrat terkecil terbobotinya yaitu:

$$\mathbf{x} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -10 & 16 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 6000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Panjang kuadrat terkecil terbobotinya yaitu:

$$\|\mathbf{x}\|_Q = (\mathbf{x}^t Q\mathbf{x})^{½}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 300 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix} \right)^{½}$$

$$= 49.000^{½} = 700$$

Jadi panjang kuadrat terkecil terbobotinya yaitu $\|\mathbf{x}\|_Q = 700$, dengan jarak kuadrat terkecil terbobotinya $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_P^2 = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^t P(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$

$$A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1200 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

$$(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^t P(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -1200 & 0 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1200 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$= 1.440.000 + 180.000 = 1.620.000$$

diperoleh $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_P = 1272.79$.

4.4 Pencocokan Kurva dengan Metode Kuadrat Terkecil

Pada bagian di depan telah dibahas mengenai metode kuadrat terkecil yaitu suatu metode untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil dari suatu SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten. Salah satu penerapan metode kuadrat terkecil yang akan dibahas yaitu metode kuadrat terkecil yang digunakan dalam pencocokan kurva.

Tujuan dari pencocokan kurva adalah untuk memperoleh hubungan matematis suatu fungsi $y = f(x)$ antara variabel bebas x dan variabel tidak bebas y yang menggambarkan titik-titik data yang mungkin. Andaikan dari hasil percobaan diperoleh beberapa pasangan berurutan titik-titik data yaitu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Ada beberapa kemungkinan bentuk kurva yang terjadi berdasarkan pola titik data pada diagram pencar yang diperoleh, yaitu:

1. Suatu garis lurus $y = a + bx$
2. Suatu polinomial $y = c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$
3. Suatu fungsi eksponensial $P(t) = P_oe^{kt}$.

Dalam beberapa masalah hubungan fungsi sebenarnya tidak diketahui, maka dapat dipilih suatu fungsi pendekatan untuk dapat memperkirakan fungsi yang menyatakan hubungan antara variabel bebas x dan varibel tidak bebas y. Dengan memperhatikan pola titik data pada diagram pencarnya, dapat diperoleh suatu kurva yang "paling mendekati" data tetapi tidak harus melalui setiap titik data yang disebut dengan *fungsi pendekatan*. Fungsi pendekatan ini diperoleh dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, sehingga kurva yang dihasilkan merupakan *pencocokan kurva kuadrat terkecil* terhadap titik-titik data.

4.4.1 Pencocokan Kurva Kuadrat Terkecil dengan Garis Lurus.

Andaikan dilakukan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan garis lurus $y = a + bx$ terhadap titik-titik data yang diperoleh dari n kali percobaan

hal 76nya mana?

$$A^tA\,\mathbf{x} = A^t\mathbf{b} \qquad \text{..........3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1+\ldots+1 & x_1+x_2+\ldots+x_n \\ x_1+x_2+\ldots+x_n & x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+y_2+\ldots+y_n \\ x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} na + \sum x_i b &= \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right)a + \left(\sum x_i^2\right)b &= \sum x_i y_i \end{aligned}\right\} \text{. untuk } i = 1, 2, \ldots, n$$

Penyelesaian $\mathbf{x} = (a, b)^t$ dari persamaan...3) merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL...2). Vektor $\mathbf{x}$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil yang meminimumkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum (y_i - (a + bx_i))^2$, dengan $E_i = y_i - (a + bx_i)$ merupakan galat kesalahan dari persamaan…1). Garis $y = a + bx$ yang diperoleh disebut *pencocokan garis kuadrat terkecil* terhadap data.

Contoh 4.4.1.1

Akan dicari pencocokan garis lurus $y = a + bx$ terhadap data dibawah ini :

x	-2	- 1	-1	0	1	2	2	3
Y	3	-2	- 1	0	-1	0	2	1

Dengan mensubstitusikan data pada persamaan garis y = a + bx, diperoleh SPL berikut:

$$
\begin{aligned}
-3 &= a - 2b \\
-2 &= a - b \\
-1 &= a - b \\
0 &= a \\
1 &= a + b \\
0 &= a + 2b \\
2 &= a + 2b \\
1 &= a + 3b
\end{aligned}
$$

SPL diatas dapat diubah kedalam bentuk persamaan matriks A**x** = **b**, yaitu :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL A**x** = **b** dapat diperoleh dengan mencari penyelesaian dari SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss- Jordan diperoleh :

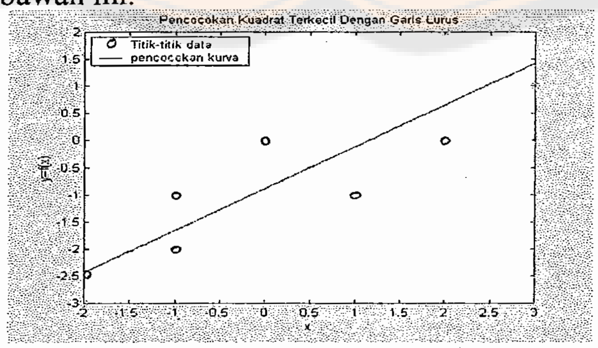
$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 4 & 24 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 4 & 24 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 22 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.89 \\ 0 & 1 & 0.78 \end{pmatrix}$$

penyelesaian dari SPN-nya yaitu $\mathbf{x} = (a,b)^t$ dengan $a = -0.89$ dan $b = 0.78$. Jadi persamaan garis kuadrat terkecilnya adalah $y = -0.89 + 0.78x$.

Dengan menggunakan program MATLAB akan diperoleh garis kuadrat terkecil dari data di atas. Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan garis lurus.

```
% Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan  Garis Lurus

» x=[-2 -1 -1 0 1 2 2 3];
» y=[-3 -2 -1 0 -1 0 2 1];
» n=1;
» z=polyfit(x,y,n)

z =
   -08864    0.7727
» a=z(1), b=z(2)

a =
   -08864
b =
   0.7727
» xi=linspace(-2,3);
» p=polyval(z,xi);
» plot(x,y,'or',xi,p,'-black');
» xlabel('x');
» ylabel('y=f(x)');
» h=legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Garis
      Lurus');
```

Diperoleh grafik garis lurus kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.3 di bawah ini.



Gambar.3 Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Garis Lurus

Contoh 4.4.1.2

Data berikut hasil pengukuran dua sifat dari pohon pinus ponderosa. Variabel x menyatakan diameter dari pohon tersebut dalam inci dan variabel y menyatakan volume dari pohon tersebut. Dibawah ini data diameter dan volume dari 20 pohon pinus ponderosa :

x	y	x	y
36	192	31	141
28	113	20	32
28	88	25	86
41	294	19	21
19	28	39	231
32	123	33	187
22	51	17	22
38	252	37	205
25	56	23	57
17	16	39	265

(Sumber : Giordano, Weir and Fox, *A First Course in Mathematical Modeling*, p.197)

Dengan memperhatikan diagram pencar dari data di atas pada gambar.4 maka model pencocokan kurva dari data tersebut yang sesuai adalah suatu persamaan garis lurus y = a + bx. Dengan menggunakan program MATLAB akan diperoleh garis kuadrat terkecil dari data di atas. Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan garis lurus.

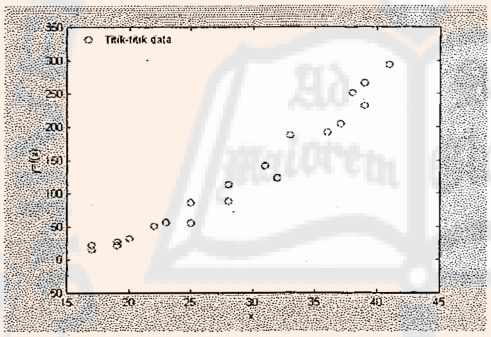
```
»% Pencocokan Kuadrat Terkecil Data 20 Pohon Pinus
   Ponderosa  Dengan Garis Lurus

» x=[36 28 28 41 19 32 22 38 25 17 31 20 25 19 39 33
    17 37 23 39];
» y=[192 113 88 294 28 123 51 252 56 16 141 32 86 21
    231 187 22 205 57 265];
» n=1;
» z=polyfit(x,y,n)

z =
   -191.1243  11.8413
```

```
» a=z(1), b=z(2)
a =
   -191.1243
b =
   11.8413
» xi=linspace(15,45);
» p=polyval(z,xi);
» plot(x,y,'o',xi,p,'-black');
» xlabel('x');
» ylabel('y=f(x)');
» h=legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil Data 20 Pohon
         Pinus Ponderosa Dengan Garis Lurus');
```

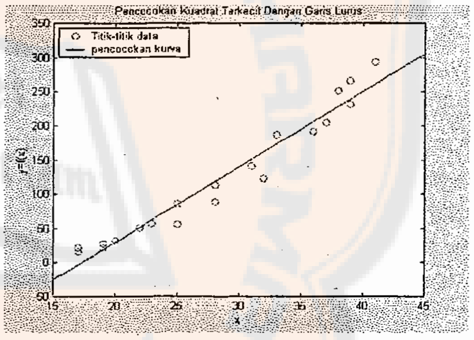
Persamaan pencocokan kurva garis lurus dari data diatas adalah

$$y = -191.1243 + 11.8413x.$$

Diperoleh grafik kuadrat terkecil dengan garis lurus yang dapat dilihat pada gambar.5 di bawah ini.



Gambar.4



Gambar.5

4.4.2 Pencocokan Kurva Kuadrat terkecil dengan Polinomial.

Andaikan dilakukan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ terhadap titik-titik data yang diperoleh dari n kali percobaan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Akan dicari koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sedemikian hingga jika n titik data disubstitusikan pada persamaan polinomial akan memenuhi SPL berikut :

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_m x_0^{\,m} \\ y_1 = a_1 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_1^{\,m} \\ . \\ . \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_m x_n^{\,m} \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots.4)$$

Jika ditulis dalam bentuk persamaan matriks menjadi A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots & x_0^{\,m} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots & x_1^{\,m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \ldots & x_n^{\,m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \text{yaitu}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots & x_0^{\,m} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots & x_1^{\,m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \ldots & x_n^{\,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

SPL pada sistem persamaan ...4) biasanya inkonsisten sehingga tidak ada koefisen a_0, a_1, … , a_m yang memenuhi sistem persamaan ...4) secara tepat. Oleh karena itu akan dicari koefisien a_0, a_1, … , a_m sehingga diperoleh persamaan polinomial $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ yang "terbaik" yang paling mendekati titik-titik data dengan kesalahan galat minimum. Akan dicari vektor $\mathbf{x} = (a_0, a_1, \ldots , a_m)^t$ yang merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari persamaan ...4) dan meminimumkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$. Akan dicari penyelesaian dari persamaan normal $A^tA\,\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1+1+..+1 & x_0+x_1+..+x_n & \dots & x_0^m+x_1^m+..+x_n^m \\ x_0+x_1+..+x_n & x_0^2+x_1^2+..+x_n^2 & \dots & x_0x_0^m+x_1x_1^m+..+x_nx_n^m \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_0^m+x_1^m+..+x_n^m & x_0x_0^m+x_1x_1^m+..+x_nx_n^m & \dots & x_0^mx_0^m+x_1^mx_1^m+..+x_n^mx_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0+y_1+..+y_n \\ x_0y_0+x_1y_1+..+x_ny_n \\ . \\ . \\ x_0^m y_0+x_1^m y_1+..+x_n^m y_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} na_0 + \sum x_i a_1 + \dots + \sum x_i^m a_m = \sum y_i \\ \sum x_i a_0 + \sum x_i^2 a_1 + \dots + \sum x_i x_i^m a_m = \sum x_i y_i \\ . \\ . \\ \sum x_i^m a_0 + \sum x_i x_i^m a_1 + \dots + \sum x_i^m x_i^m = \sum x_i^m y_i \end{array}\right\} \qquad \dots\dots 5)$$

Sehingga diperoleh koefisien a_0, a_1, … , a_m yang akan menghasilkan fungsi polinomial $y = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ dengan jumlah kuadrat kesalahan

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \sum (y_i - (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_I^m)^2$$

$$= \left(y_0 - (a_0 + a_1x_0 + \dots + a_mx_0^m)\right)^2 + \dots + (y_n - (a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m)\Big)^2$$

minimum. Fungsi polinomial yang dihasilkan disebut *pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial.* SPN dari persamaan…5) mempunyai penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$, jika matriks A^tA merupakan suatu matriks yang vektor-vektor kolomnya bebas linear. Akan ditunjukkan bahwa vektor-vektor kolom matriks A bebas linear.

Teorema 4.1.2

Andaikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_m & x_m^2 & . & x_m^m \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix}$ dengan n >m.

Submatriks dari matriks A adalah matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix}$$ yang vektor-vektor kolomnya bebas

linear jika dan hanya jika $x_0, x_1, \dots, x_m$ berbeda.

Bukti : (dengan kontraposisi)

($\Rightarrow$): Andaikan dua dari x_r sama, untuk r = 0, 1, 2, ... ,m maka matriks B akan mempunyai dua baris yang sama. Sehingga vektor-vektor kolom matriks B tidak bebas linear.

($\Leftarrow$): Sebaliknya andaikan B suatu matriks yang vektor-vektor kolomnya tidak bebas linear maka akan diperoleh sistem persamaan polinomial homogen sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_m x_0^m = 0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m = 0 \\ . \\ . \\ a_0 + a_1 x_m + \dots + a_m x_m^m = 0 \end{array}\right\}.$$

Ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

atau ditulis $\quad \mathrm{B} \, . \, \mathbf{a} = \mathbf{0}.$

Karena vektor-vektor kolom matriks B tidak bebas linear maka sistem persamaan diatas mempunyai penyelesaian **a** = $(a_0, a_1, \ldots, a_m)^t$ yang nontrivial, sehingga diperoleh persamaan polinomial $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ berderajat m. Polinomial P(x) berderajat m mempunyai akar-akar sebanyak m, tetapi untuk sistem persamaan polinomial homogen diatas terdapat bilangan $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sebanyak m + 1 bilangan yang memenuhi. Maka dua diantara m + 1 bilangan tersebut harus sama. □

Contoh 4.4.2.1

Berdasarkan data pada contoh 4.4.1.1 akan dicari pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kuadratik. SPL dari data tersebut jika disubstitusikan pada persamaan polinomial kuadratik $y = a + bx + cx^2$ akan diperoleh SPL berikut:

$$
\begin{aligned}
-3 &= a - 2b + 4c \\
-2 &= a - b + c \\
-1 &= a - b + c \\
0 &= a \\
-1 &= a + b + c \\
0 &= a + 2b + 4c \\
2 &= a + 2b + 4c \\
1 &= a + 3b + 9c.
\end{aligned}
$$

SPL diatas jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SPN dari SPL di atas yaitu $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 24 \\ 4 & 24 & 34 \\ 24 & 34 & 132 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 24 & -4 \\ 4 & 24 & 34 & 15 \\ 24 & 34 & 132 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 3 & -0.5 \\ 4 & 24 & 34 & 15 \\ 24 & 34 & 132 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 3 & -0.5 \\ 0 & 22 & 22 & 17 \\ 0 & 22 & 60 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 3 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0.773 \\ 0 & 22 & 60 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.5 & -0.886 \\ 0 & 1 & 1 & 0.773 \\ 0 & 0 & 38 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.5 & -0.886 \\ 0 & 1 & 1 & 0.773 \\ 0 & 0 & 1 & -0.105 \end{pmatrix} \sim$$

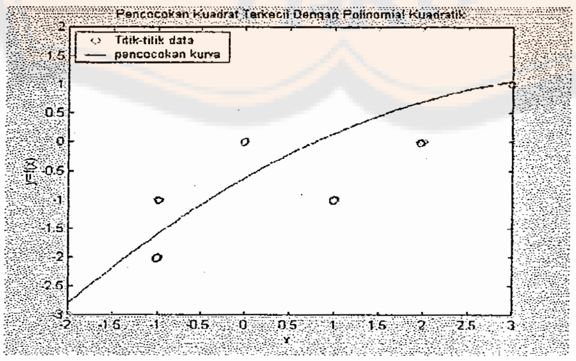
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.676 \\ 0 & 1 & 0 & 0.878 \\ 0 & 0 & 1 & -0.105 \end{pmatrix}$$ diperoleh $a = -0.676$, $b = 0.878$, $c = -0.105$.

Jadi persamaan polinomial kudratiknya adalah $y = -0.676 + 0.878x - 0.105x^2$.

Dengan menggunakan program MATLAB akan diperoleh polinomial kuadratik kuadrat terkecil dari data di atas. Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kuadratik.

```
»% Pencocokan Kurva Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial
    Kuadratik

» x=[-2 -1 -1 0 1 2 2 3];
» y=[-3 -2 -1 0 -1 0 2 1];
» n=2;
» z=polyfit(x,y,n)

z =
   -0.1053    0.8780   -0.6232
» a=z(3), b=z(2), c=z(1)

a =
   -0.6232
b =
    0.8780
c =
   -0.1053
» xi= linspace(-2,3);
» p=polyval(z,xi);
» plot(x,y,'or',xi,p,'-black');
» xlabel('x');
» ylabel('y=f(x)');
» h=legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial
       Kuadratik');
```

Diperoleh grafik kuadratik kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.6 di bawah ini.



Gambar 6. Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial Kuadratik

Contoh 4.4.2.2

Data dibawah ini menyajikan jumlah pembiakan sel ragi yang diukur secara terus menerus, dengan x menyatakan waktu dalam detik dan y menyatakan jumlah pembiakan sel ragi tiap detik.

x (waktu dalam detik)	y (Jumlah sel ragi)	x (waktu dalam detik)	y (Jumlah sel ragi)
0	9.60	10	513.30
1	18.30	11	559.70
2	29.00	12	594.80
3	47.20	13	629.40
4	71.10	14	640.80
5	119.10	15	651.10
6	174.60	16	655.90
7	257.30	17	659.60
8	350.70	18	661.80
9	441.00		

(Sumber : Giordano, Weir and Fox, *A First Course in Mathematical Modeling*, p.197)

Dengan memperhatikan diagram pencar dari data di atas pada Gambar.7 dapat dilihat pola titik-titik data yang menggambarkan suatu kurva polinomial kuadratik. Sehingga model kurva kuadrat terkecil yang cocok untuk data di atas adalah suatu polinomial kuadratik. Di bawah ini program MATLAB yang akan digunakan untuk mencari kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kuadratik dari data di atas.

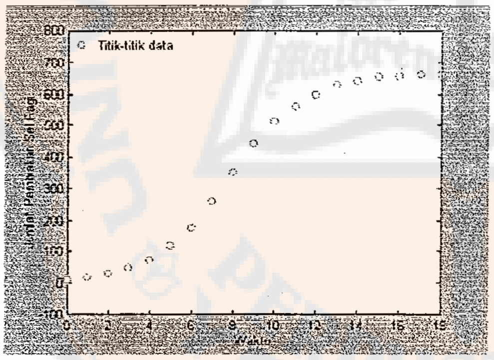
```
»%Pencocokan   Kuadrat   Terkecil   Dengan   Polinomial
  Kuadratik

» x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18];
» y=[9.6 18.3 29 47.2 71.1 119.1 174.6 257.3 350.7 441
     513.3 559.7 594.8 629.4 640.8 651.1 655.9 659.6
     661.8];
» n=2;
» z=polyfit(x,y,n)

z =
```

```
   -93.82   65.70  -1.12
» a=z(3), b=z(2), c=z(1)

a =
   -1.12
b =
    65.70
c =
   -93.82
» xi=linspace(0,18);
» p=polyval(z,xi);
» plot(x,y,'or',xi,p,'-black');
» xlabel('Waktu');
» ylabel('Jumlah Sel Ragi');
» h=legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
» title('y = -1.12+ 65.70x -93.82x^2');
```

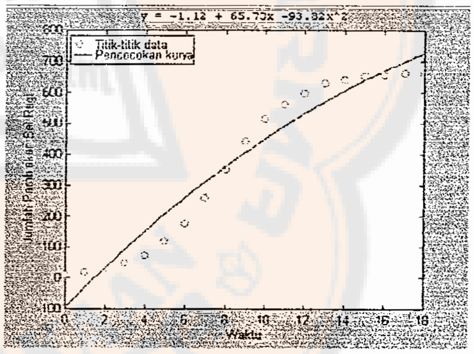
Persamaan polinomial kuadratik dari data di atas yaitu

$$y = -1.12 + 65.70\,x - 93.82\,x^2.$$

Diperoleh grafik kuadratik kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.8 di bawah ini.



Gambar. 7



Gambar.8

Contoh 4.4.2.3

Berdasarkan data pada contoh 4.4.1.1 akan dicari pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kubik. SPL dari data tersebut jika disubstitusikan pada persamaan polinomial kubik $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ akan diperoleh SPL berikut:

-3 = a –2b + 4c – 8d

-2 = a – b + c – d

-1 = a – b + c – d

0 = a

-1 = a + b + c + d

0 = a + 2b + 4c + 8d

2 = a + 2b + 4c + 8d

1 = a + 3b + 9c + 27d

SPL diatas ditulis dalam persamaan matriks menjadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & -1 & 0 & 1 & 8 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan normal $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & -1 & 0 & 1 & 8 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & -1 & 0 & 1 & 8 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 24 & 34 \\ 4 & 24 & 34 & 132 \\ 24 & 34 & 132 & 274 \\ 34 & 132 & 274 & 924 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 1 \\ 69 \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 24 & 34 & -4 \\ 4 & 24 & 34 & 132 & 15 \\ 24 & 34 & 132 & 274 & 1 \\ 34 & 132 & 274 & 924 & 69 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 3 & 4.25 & -0.5 \\ 0 & 22 & 22 & 115 & 17 \\ 0 & 22 & 60 & 172 & 13 \\ 0 & 115 & 172 & 7795 & 86 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 3 & 4.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 5.227 & 0.773 \\ 0 & 22 & 60 & 172 & 13 \\ 0 & 115 & 172 & 7795 & 86 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.5 & 1.64 & -0.89 \\ 0 & 1 & 1 & 5.23 & 0.77 \\ 0 & 0 & 38 & 57.06 & -4.01 \\ 0 & 0 & 57 & 178.37 & -2.89 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.11 & -0.62 \\ 0 & 1 & 0 & 3.73 & 0.88 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -0.105 \\ 0 & 0 & 0 & 92.89 & 3.09 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.11 & -0.62 \\ 0 & 1 & 0 & 3.73 & 0.88 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -0.105 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.03 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.62 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.03 \end{pmatrix}$$

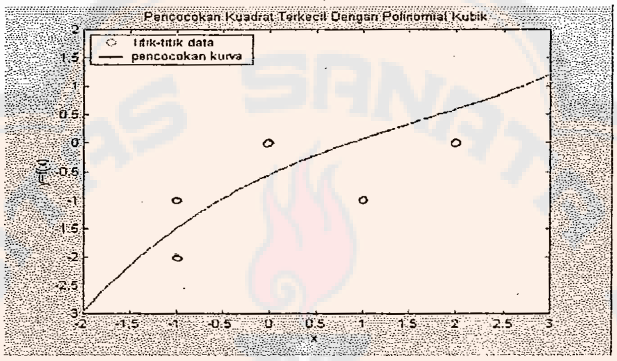
a = -0.62, b = 0.75, c = -0.14, d = 0.03. Persamaan polinomial kubik dari SPL diatas adalah $y = -0.62 + 0.75x - 0.14x^2 + 0.03x^3$.

Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kubik

```
% Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial Kubik

» x=[-2 -1 -1 0 1 2 2 3];
» y=[-3 -2 -1 0 -1 0 2 1];
» n=3;
» z=polyfit(x,y,n);
» xi=linspace(-2,3);
» z=polyfit(x,y,n)

z =
    0.0338    -0.1559    0.7521    -0.5518

» a=z(4), b=z(3), c=z(2), d=z(1)
a=
    -0.5518
b=
    0.7521
c=
    -0.1559
d=
    0.0338
» p=polyval(z,xi);
» plot(x,y,'or',xi,p,'-black');
» xlabel('x');
```

```
» ylabel('y=f(x)');
» h = legend('Titik-titik data','pencocokan kurva',2);
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial
       Kubik');
```

Diperoleh grafik kuadratik kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.9 di bawah ini.



Gambar .9 Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial Kubik

Contoh 4.4.2.4

Data berikut menunjukkan tahap-tahap studi kehidupan, dengan x menyatakan populasi dan y menyatakan kecepatan rata-rata dalam kaki per detik sampai jarak 50 kaki.

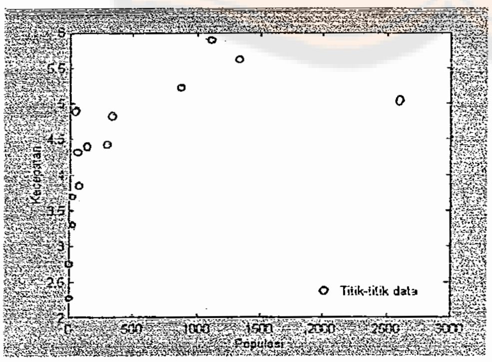
x	y	x	y
365	2.76	138000	4.39
2500	2.27	304500	4.42
5491	3.31	341948	4.81
14000	3.70	867023	5.21
23700	3.27	1092759	5.88
49375	4.90	1340000	5.62
70700	4.31	2602000	5.05
78200	3.85		

(Sumber : Giordano, Weir and Fox, A First Course in Mathematical Modeling, p.215)

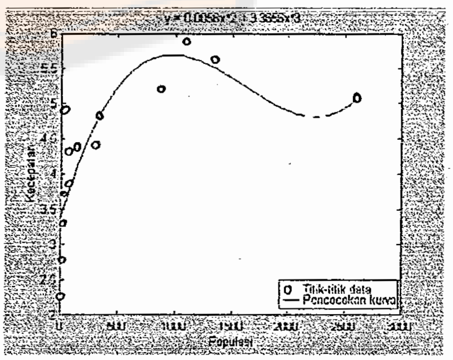
Diagram pencar dari data di atas pada gambar.10 menunjukkan bahwa model kurva kuadrat terkecil yang sesuai adalah polinomial kubik. Dengan menggunakan program MATLAB di bawah ini akan diperoleh pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kubik dari data di atas.

```
% Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial Kubik

» x=[0.365 2.5 5.491 14 23.7 49.375 70.7 78.2 138
    304.5 341.948 867.023 1092.759 1350 2602];

» y=[2.76 2.27 3.31 3.7 3.27 4.9 4.31 3.85 4.39 4.42
    4.81 5.21 5.88 5.62 5.05]
» n=3;
» z=polyfit(x,y,n)
z =

   0.0000    0.0000    0.0056    3.3664

» a=z(1), b=z(2), c=z(3), d=z(4)
a=
   0.0000
b=
   0.0000
c=
   0.0056
d=
   3.3664

» xi=linspace(0.365,2602);
» p=polyval(z,xi);

» plot(x,y,'or',xi,p,'-black');
» xlabel('Populasi ');
» ylabel('Kecepatan');
» h = legend('Titik-titik data','pencocokan kurva',2);
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Polinomial
      Kubik');
```

Diperoleh grafik kubik kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.11 di bawah ini.



Gambar.10



Gambar.11

4.4.3 Pencocokan Kurva Kuadrat Terkecil dengan Fungsi Eksponensial

Pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan persamaan eksponensial $P = P_o e^{kt}$ terhadap titik-titik data yang diperoleh dari n kali percobaan yaitu: $(t_1, P_1), (t_2, P_2), \ldots , (t_n, P_n)$. Karena P_o adalah koefisien dari fungsi yang nonlinear, maka untuk memperoleh nilai P_o dan k, persamaan eksponen $P = P_o e^{kt}$ dibawa kebentuk persamaan logaritma yaitu $\log P = \log P_o + \log e^{kt}$ atau $\log P = \log P_o + kt$ yang merupakan persamaan garis. Jika kita substitusikan n data yang diberikan pada persamaanlogaritma di atas akan diperoleh SPL:

$$\log P_1 = \log P_o + kt_1$$
$$\log P_2 = \log P_o + kt_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\log P_n = \log P_o + kt_n.$$

Jika ditulis dalam bentuk persamaan matriks akan diperoleh persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log P_1 \\ \log P_2 \\ . \\ . \\ \log P_o \end{pmatrix} \text{ dengan}$$

$$\text{matriks } A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & t_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \log P_1 \\ \log P_2 \\ . \\ . \\ \log P_o \end{pmatrix}.$$

Untuk mencari penyelesaian kuadrat terkecil $\mathbf{x} = (\log P_o,\ k)^t$ yang meminimumkan $\sum_{i=1}^{n}(\log P_i - (\log P_o + kt_i))^2$ dapat digunakan persamaan normal $A^tA\mathbf{x} = A^t\,\mathbf{b}$ dari SPL diatas yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ t_1 & t_2 & . & . & t_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & t_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ t_1 & t_2 & . & . & t_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log P_1 \\ \log P_2 \\ . \\ . \\ \log P_o \end{pmatrix}$$

$$n \log P_o + k\,\Sigma\, t_i = \Sigma \log P_i$$

$$\log P_o\,\Sigma\, t_i + k\,\Sigma\, t_i^2 = \Sigma\, t_i \log P_i$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan dapat diperoleh nilai log P_o dan nilai dari k, kemudian nilai P_o dapat dicari dengan mencari antilog dari log P_o.

Contoh 4.4.3.1

Akan dicari pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan menggunakan fungsi eksponen dari data dibawah ini :

t = x	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(t)=y	0.05	0.07	0.1	1	2.3	10	45
Log y	-1.3	-1.15	−1	0	0.36	1	1.65

Bentuk umum persamaan eksponen adalah $P = P_o\, e^{kt}$, jika diubah kedalam persamaan logaritma diperoleh persamaan $\log P = \log P_o + kt$. Jika data diatas disubstitusikan kedalam persamaan logaritma akan diperoleh SPL berikut:

$$-1.3 = \log P_o - 3k$$
$$-1.15 = \log P_o - 2k$$
$$-1 = \log P_o - k$$
$$0 = \log P_o$$
$$0.36 = \log P_o + k$$
$$1 = \log P_o + 2k$$
$$1.65 = \log P_o + 3k$$

yang ditulis dalam persamaan matriks menjadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3 \\ -1.15 \\ -1 \\ 0 \\ 0.36 \\ 1 \\ 1.65 \end{pmatrix}.$$

atau $\qquad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

SPN dari SPL di atas adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.3 \\ -1.15 \\ -1 \\ 0 \\ 0.36 \\ 1 \\ 1.65 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log P_o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ 14.51 \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -0.44 \\ 0 & 28 & 14.51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.063 \\ 0 & 28 & 14.51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.063 \\ 0 & 1 & 0.518 \end{pmatrix}$$

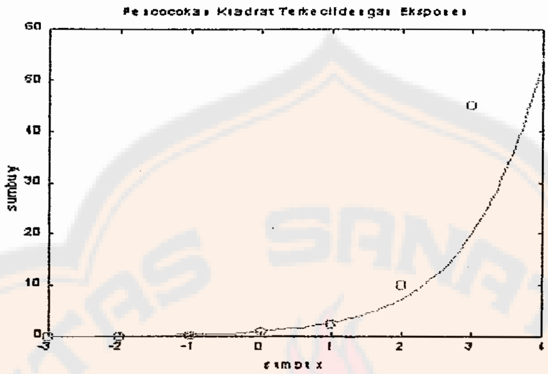
diperoleh $\log P_o = -0.063$ dan $k = 0.518$, kemudian dengan mencari antilog dari $\log P_o = -0.063$ diperoleh $P_o = 0.939$.

Persamaan eksponen yang diperoleh adalah $P = 0.939\ e^{0.518\,t}$.

Dengan menggunakan program MATLAB di bawah ini akan diperoleh pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan fungsi eksponen dengan menggunakan data di atas.

```
»%Pencocokan Kuadrat Terkecil dengan Eksponensial

» x =[-3 -2 -1 0 1 2 3];
» y =[0.05 0.07 0.1 1 2.3 10 45];
» n=1
» y1=log10(y)
y1
   -1.3010   -1.1549   -1.0000         0    0.3617
   1.0000    1.6532

» z=polyfit(x,y1,1)
z=
   0.5191   -0.0630

» t=exp(z)

t =
   1.6805    0.9389

» r=t(2)

r =
   0.9389

» k=z(1)

k =
    0.5191

» a=[r,k]

a =
     0.9389    0.5191

» xi=linspace(-3,4);
» yi=exp(yi);
» plot(x,y,'or',xi,yi,'-black');
» title('Pencocokan Kuadrat Terkecil dengan
        Eksponensial')
» xlabel('sumbu x')
» ylabel('sumbu y')
» h = legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
```

Diperoleh grafik eksponen kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.12 di bawah ini.



Gambar. 12 Pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan eksponen

Contoh 2.6.4.2

Data hasil panen ikan di teluk Chesapeake dari tahun 1940-1990 dapat dilihat dalam tabel berikut:

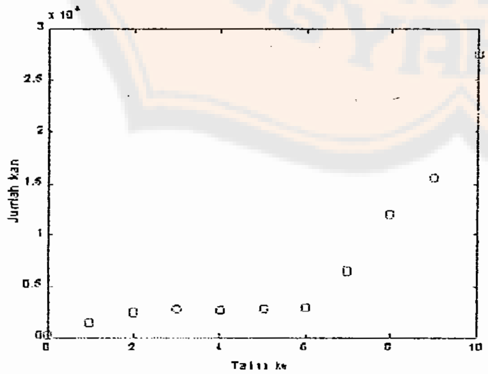
Tahun	x (Tahun ke)	y (Jumlah ikan x 10^4)
1940	0	1.5
1945	1	15
1950	2	25
1955	3	27.5
1960	4	27
1965	5	28
1970	6	29
1975	7	65
1980	8	120
1985	9	155
1990	10	275

(Sumber : Giordano, Weir and Fox, *A First Course in Mathematical Modeling*, p.197)

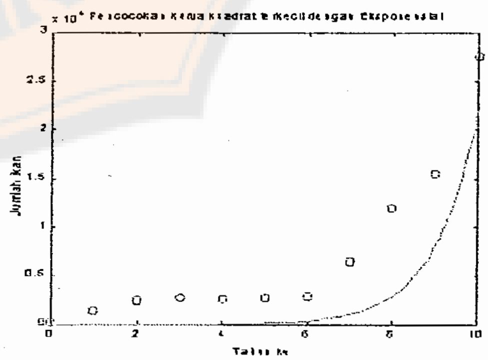
Diagram pencar dari data di atas pada gambar.13 menunjukkan bahwa model kurva kuadrat terkecil yang sesuai adalah eksponensial. Dengan menggunakan program MATLAB di bawah ini akan diperoleh pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan polinomial kubik dari data di atas.

```
» x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
» y=[1.5 15 25 27.5 27 28 29 65 120 155 275];
» y1=log10(y);
» z=polyfit(x,y1,1)
z =
    0.1654    0.7231

» t=exp(z)
t =
    1.1799    2.0609

» r=t(2)
r =
    2.0609

» k=z(1)
k =
    0.1654

» a=[r,k]
a =
    2.609     0.1654

» xi=linspace(0,10);
» yi=exp(xi);
» plot(x,y,'or',xi,yi,'-black');
» xlabel('Tahun ke')
» ylabel('Jumlah ikan x 10⁴')
» h = legend('Titik-titik data','Pencocokan kurva',2);
»  title('Pencocokan Kurva Kuadrat Terkecil dengan
        Eksponensial');
```

Diperoleh grafik eksponen kuadrat terkecil yang dapat dilihat pada gambar.14 di bawah ini.



Gambar.13



Gambar.14

4.4.4 Pencocokan Kurva Kuadrat Terkecil dengan Bidang.

Permasalahan dalam pencocokan kurva dapat mencakup lebih dari satu variabel bebas. Sebagai contoh jika diketahui n data hasil percobaan sebagai berikut $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots , (x_n, y_n, z_n)$. Data tersebut terdiri dari 2 variabel bebas dan satu variabel tidak bebas. Akan dicari suatu hubungan matematis antara variabel bebas x, y dan variabel tidak bebas z yaitu suatu fungsi z = a + bx + cy. Model tersebut menggambarkan sebuah bidang dalam ruang berdimensi dua dengan variabel-variabel bebas x dan y. Jika kita substitusikan titik-titik data akan diperoleh SPL yang terdiri dari n persamaan dengan 3 variabel.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bx_1 + cy_1 \\ z_2 = a + bx_2 + cy_2 \\ . \\ . \\ z_n = a + bx_n + cy_n \end{array}\right\}$$

ditulis dalam bentuk persamaan matriks dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian kuadrat terkecil $\mathbf{x} = (a, b, c)^t$ dari SPL di atas dapat diperoleh dengan mencari penyelesaian dari SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ yang berhubungan dengan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang akan menghasilkan suatu bidang z = a + bx + cy yang disebut *pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan* *bidang*, dengan jumlah kuadrat kesalahannya $\sum_{i=1}^{n}[z_i - (a + bx_i + cy_i)]^2$ minimum. Sistem persamaan normal $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ dari persamaan di atas adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1+\dots+1 & x_1+x_2+\dots+x_n & y_1+y_2+\dots+y_n \\ x_1+x_2+\dots+x_n & x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 & x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \\ y_1+y_2+\dots+y_n & x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n & y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1+z_2+\dots+z_n \\ x_1z_1+x_2z_2+\dots+x_nz_n \\ y_1z_1+y_2z_2+\dots+y_nZ_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &na + \sum x_i b + \sum y_i c = \sum z_i \\ &\sum x_i a + \sum x_i^2 b + \sum x_i y_i c = \sum x_i z_i \\ &\sum y_i a + \sum x_i y_i b + \sum y_i^2 = \sum y_i z_i \end{aligned}\right\}$$

Contoh 4.4.4.1

Akan dicari suatu bidang kuadrat terkecil dengan persamaan $z = a + bx + cy$ yang merupakan pencocokan kurva kuadrat terkecil dari data dibawah ini

x	-2	−1	0	1	2	0
y	-4	−1	1	0	1	2
z	1	0	2	3	4	1

Jika data tersebut disubstitusikan kedalam persamaan bidang akan diperoleh sistem persamaan berikut :

$$
\begin{aligned}
1 &= a - 2b - 4c \\
0 &= a - b - c \\
2 &= a \qquad + c \\
3 &= a + b \\
4 &= a + 2b + c \\
1 &= a \qquad + 2c
\end{aligned}
$$

Ditulis dalam bentuk persamaan matriks menjadi:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

SPL diatas dibawa ke bentuk persamaan normal menjadi :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 11 \\ -1 & 11 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.
$$

Penyelesaian dari SPN di atas dapat diperoleh dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & 11 & 23 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.17 & 1.83 \\ 0 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & 11 & 23 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.17 & 1.83 \\ 0 & 10 & 11 & 9 \\ 0 & 11 & 22.83 & 5.83 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.17 & 1.83 \\ 0 & 1 & 1.1 & 0.9 \\ 0 & 11 & 22.83 & 5.83 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.17 & 1.83 \\ 0 & 1 & 1.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 10.73 & -4.07 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.17 & 1.83 \\ 0 & 1 & 1.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 1 & -0.38 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.89 \\ 0 & 1 & 0 & 1.32 \\ 0 & 0 & 1 & -0.38 \end{pmatrix}.$$

diperoleh a = 1.89, b = 1.32, c = -0.38. Persamaan bidang kuadrat terkecil dari SPL di atas adalah $z = 1.89 + 1.32x - 0.38y$.

Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan bidang.

```
» %Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Bidang
» A=[1 -2 -4;1 -1 -1; 1 0 1; 1 1 0; 1 2 1; 1 0 2]
A =
     1    -2    -4
     1    -1    -1
     1     0     1
     1     1     0
     1     2     1
     1     0     2

» b=[1; 0; 2; 3; 4; 1]
b =
     1
     0
     2
     3
     4
     1
» x=A\b
x =
    1.7702
    1.3168
   -0.3789
» a=x(1), b=x(2), c=x(3)
a =
    1.7702
b =
    1.3168
c =
   -0.3789
```

Contoh 4.4.4.2

Sebuah perusahaan botol minuman ringan menganalisis pengiriman produk dan peleyanan operasi untuk mobil-mobil yang melekukan distribusi. Diduga bahwa yang mempengaruhi waktu pengiriman adalah jumlah unit produk yang tersedia dan jarak yang ditempuh oleh trayek pengemudi. Data di bawah ini menunjukkan hasil dari 25 observasi waktu pengiriman.

Waktu pengiriman (dalam menit)	Jumlah unit x_1	Jarak (km) x_2
9.95	2	50
24.45	8	110
31.75	11	120
35.00	10	550
25.02	8	295
16.86	4	200
14.38	2	375
9.60	2	52
24.35	9	100
27.50	8	300
17.08	4	412
37.00	11	400
41.95	12	500
11.66	2	360
21.65	4	205
17.89	4	400
69.00	20	600
10.30	1	585
34.93	10	540
46.59	15	250
44.88	15	290
54.12	16	510
56.63	17	590
22.13	6	100
21.15	5	400

(Sumber : Hines, William W, Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen, p. 453)

Program MATLAB di bawah ini menghasilkan pencocokan kurva kuadrat terkecil dengan bidang.

```
» %Pencocokan Kuadrat Terkecil Dengan Bidang
» A=[1 2 50; 1 8 110; 1 11 120; 1 10 550; 1 8 295; 1 4
    200; 1 2 375; 1 2 52; 1 9 100; 1 8 300; 1 4 412;
    1 11 400; 1 12 500; 1 2 360; 1 4 205; 1 4 400; 1
    20 600; 1 1 585; 1 10 540; 1 15 290; 1 16 510; 1
    17 590; 1 6 100; 1 5 400];

» b=[9.95; 24.45; 31.75; 35.00; 25.02; 16.86; 14.38;
    9.60; 24.35; 27.50; 17.08; 37.00; 41.95; 11.66;
    21.65; 17.89; 69.00; 10.30; 34.92; 46.59; 44.88;
    54.12; 56.63; 22.13; 21.15]

» x=A\b
x =
    2.26379
    2.74427
    0.01253

» a=x(1), b=x(2), c=x(3)
a =
    2.26379
b =
    2.74427
c =
   0.01253
```

Jadi persamaan bidang kuadrat terkecil dari data di atas adalah

$z = 2.26379 + 2.74427x_1 + 0.01253x_2$

BAB V

KESIMPULAN

Himpunan semua matriks berordo n x 1 disebut ruang-n Euclides, dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada matriks berlaku dalam ruang-n Euclides. Perkalian-skalar dalam R^n didefinisikan dengan $\mathbf{x}^t\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Perkalian skalar dalam R^n yang dimodifikasikan dengan cara memberikan bobot terhadap vektor-vektornya disebut perkalian-skalar terboboti yang didefinisikan dengan $(\mathbf{x}^t\mathbf{y})_w = w_1x_1y_1 + w_2x_2y_2 + \ldots + w_nx_ny_n$.

Himpunan vektor S dikatakan subruang-n Euclides jika S merupakan himpunan yang tidak kosong dan merupakan himpunan bagian dari R^n yang memenuhi sifat penjumlahan dan perkalian suatu vektor dengan skalar. Himpunan vektor dalam R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris matriks A disebut ruang baris matriks A (B(A)). Sedangkan himpunan vektor dalam R^n yang direntang oleh vektor-vektor kolom matriks A disebut ruang kolom matriks A (K(A)). Himpunan penyelesain dari sistem persamaan linear yang homogen disebut ruang nol (N(A)). Himpunan vektor dalam R^n dikatakan ortogonal jika vektor-vektor dalam himpunan tersebut saling ortogonal. Himpunan vektor dalam R^n yang ortogonal terhadap S subruang dari R^n disebut komplemen ortogonal dari S (dilambangkan $S^{\perp}$) . Komplemen ortogonal S merupakan subruang dari R^n.

Untuk suatu matriks A_{mxn}, ruang baris dan ruang nol dari matriks A saling komplemen ortogonal yaitu $N(A) = B(A)^{\perp}$ dan $N(A)^{\perp} = B(A)$. Begitu pula untuk ruang nol dari matriks A^t dan ruang kolom dari matriks A saling komplemen ortogonal, yaitu $N(A^t) = K(A)^{\perp}$ dan $N(A^t)^{\perp} = K(A)$. Jika S subruang dari R^n dan $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ suatu basis untuk S, maka dengan menggunakan proses Gram-Schmidt dapat diperoleh suatu basis ortonormal $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ untuk S. Setiap vektor $\mathbf{u} \in R^n$ dapat dinyatakan tepat dalam satu cara yaitu $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, dengan $\mathbf{s}_1 \in S$ dan $\mathbf{s}_2 \in S^{\perp}$. Diketahui suatu matriks A_{mxn}, dengan peringkat matriks A adalah n, dapat difaktorkan menjadi hasil kali QR dengan matriks Q_{mxn} yang vektor-vektor kolomnya membentuk basis ortonormal untuk K(A) dan matriks R_{nxn} suatu matriks segitiga atas yang mempunyai invers.

SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan matriks A_{mxn} dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ inkonsisten bila dan hanya bila $\mathbf{b} \notin K(A)$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ disebut penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten bila vektor $\mathbf{x}$ meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Metode kuadrat terkecil dengan proyeksi ortogonal vektor yaitu suatu metode untuk mencari vektor $\mathbf{w} = \text{proy}_W\mathbf{b} \in W$ dengan $W = K(A)$ subruang dari R^n, sehingga diperoleh persamaan $A\mathbf{x} = \text{proy}_W\mathbf{b}$ yang konsisten Penyelesain dari persamaan $A\mathbf{x} = \text{proy}_W\mathbf{b}$ merupakan penyelesain kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkosisten. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesain kuadrat terkecil yang tunggal bila $A\mathbf{x} = \text{proy}_W\mathbf{b}$ dan $\mathbf{x} \in K(A^t)$. Jika vektor-vektor kolom matriks A bebas linear dan vektor $\mathbf{b} \in R^m$ maka penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah penyelesaian dari SPN $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ yaitu $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in R^n$ merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang inkonsisten akan memenuhi persamaan $\mathbf{x} = A^{\text{-}}\mathbf{b}$, dengan $A^{\text{-}}$ adalah pendekatan invers matriks dari A.

Jika diketahui SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkosisten dengan vektor-vektor kolom matriks A_{mxn} bebas linear dapat difaktorkan menjadi $A = QR$ dengan suatu matriks Q_{mxn} yang vektor-vektor kolomnya ortonormal dan matriks R_{nxn} merupakan matriks segitiga atas yang mempunyai invers. Penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x} = R^{-1}Q^{-1}\mathbf{b}$.

Penyelesaian kuadrat terkecil terboboti adalah penyelesaian kuadrat terkecil dari SPL terboboti $PAQ^{-1}Q\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ dengan matriks pembobot $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$. Penyelesaian kuadrat terkecil terboboti $\mathbf{x} = \tilde{A}\,\mathbf{b}$ untuk setiap vektor $\mathbf{b} \in R^m$ meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_P$ dan $\|\mathbf{x}\|_Q$ dengan $\tilde{A}$ merupakan pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A. Jika $P \in M_m(R)$ dan $Q \in M_n(R)$ merupakan matriks pembobot dan $(PAQ^{-1})^{\text{-}}$ adalah pendekatan invers matriks dari matriks PAQ^{-1} maka pendekatan invers matriks terboboti dari matriks A adalah $\tilde{A} = Q^{-1}(PAQ^{-1})^{\text{-}}P$.

Pencocokan kurva terhadap titik-titik data diperoleh dengan mencari penyelesaian dari SPN-nya akan lebih mudah dibandingkan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dengan faktorisasi-QR. Hal ini dikarenakan dalam pencocokan kurva biasanya mencakup data yang banyak, sehingga dengan menggunakan SPN akan diperoleh suatu sistem persamaan yang lebih sederhana. Dengan memperhatikan diagram pencar dari titik-titik data ada beberapa kurva kuadrat terkecil yang diperoleh yaitu garis lurus $y = a + bx$, polinomial

$y = a_o + a_1x + \ldots + a_mx^m$, eksponensial $P(t) = P_oe^{kt}$ dan bidang $z = a + bx + cy$ yang dapat diselesaikan pula dengan menggunakan program matlab.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, Howard, Dasar-Dasar Aljabar Linear, edisi ketujuh, jilid 1, Jakarta: Penerbit Interaksara, 2000.

2. Anton, Howard, Dasar-Dasar Aljabar Linear, edisi ketujuh, jilid 2, Jakarta: Penerbit Interaksara, 2000.

3. Budi, Wono.S, Aljabar Linear, Jakarta: Penerbit Gramedia, 1995.

4. Edwards, C.H, Jr and Penney, David E, Elementary Linear Algebra, New Jersey: Pretice-Hall Inc, 1988.

5. Giordano, Frank R, A First Course in Mathematical Modeling, Second edition, California: Publishing Company, 1997.

6. Hanselman, Duanc, MATLAB, diterjemahkan oleh Josep Edyanto-edisi I cetakan 1, Yogyakarta: Penerbit Andi, 2000.

7. Herstein, I,N, Matrix Theory and Linear Algebra, New York: Macmillan Publishing Company, 1989.

8. Hines, William. W, Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen, diterjemahkan oleh Rudiansyah, edisi ke-2, Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

9. Jacob, Bill, Linear Function and Matrix Theory, New York: Springer-Verlag Inc, 1995.

10. Kolman, Bernard, Elementary Linear Algebra, Sixth edition, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1996.

11. Leon, Steven J., Linear Algebra with Applications, Fourth edition, New York: Macmillan Publishing Company, 1986.