PENDIAGONALAN MATRIKS DAN PENERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

Yustina Vinda Yunekawati

NIM : 961414005

NIRM : 960511205011200 05

Program Studi Pendidikan Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Yogyakarta

2001

SKRIPSI

PENDIAGONALAN MATRIKS

DAN PENERAPANNYA

Oleh

Yustina Vinda Yunekawati

NIM : 961414005

NIRM : 960511120501120005

Telah disetujui oleh

Pembimbing tanggal September 2001

(Drs. B. Susanta)

SKRIPSI

PENDIAGONALAN MATRIKS DAN PENERAPANNYA

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

Yustina Vinda Yunekawati

NIM : 961414005

NIRM : 96051120501120005

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 19 September 2001 dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. R. Rohandi, M.Ed.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	....
Anggota	: Drs. B. Susanta	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. Th. Sugiarto, M.T	....

Yogyakarta, 19 September 2001

Fakultas Keguruan dan Ilmu pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

(Dr. A. M. Slamet Soewandi)

……………………janganlah berpikir mungkinkah itu terjadi…melainkan bagaimana agar itu mungkin terjadi………..

…………pemahaman sejati jauh lebih bermakna daripada sekedar kata-kata , dan penting karena hasilnya, bukan sekedar retorika yang indah. Mereka yang bisa menumpahkan kebahagiaan mereka dalam kata-kata sebenarnya hanya merasakan sedikit kebahagiaan. Cinta sejati yang kurasakan telah bertumbuh begitu besar, sampai-sampai setengahnya pun tak bisa kugambarkan dengan kata-kata……..(Juliet dalam Romeo And Juliet oleh William Shakespeare)

Kupersembahkan sebagai tanda kasihku kepada

- *Bapak dan Ibu tercinta…….terima kasih atas segalanya*
- Dhik Bety tersayang……juga Ferry dan Tasya……atas kasih sayangnya
- Ade Letty …atas dukungan dan kasihnya selama ini…dengan cara yang kadang aneh…………………………
- Seseorang yang aku nggak tahu namanya…………kaulah rahasia terbesar hidupku …. yang tak mungkin aku ungkapkan…kusimpan erat perasaanku……maski ajal menantiku….

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, September 2001

Penulis

(Yustina Vinda Yunekawati)

ABSTRAK

Kebutuhan akan adanya matriks dan bentuk kuadrat yang sederhana menyebabkan timbulnya masalah pendiagonalan matriks.

Penerapan pendiagonalan matriks antara lain untuk mengetahui jenis ekstrim fungsi dalam n variabel dengan cara mengetahui tanda elemen pada diagonal utama dari matriks Hess. Dengan pendiagonalan matriks pada persamaan kuadrat dalam 2 variabel dan 3 variabel dapat diketahui grafik dari persamaan kuadrat tersebut.

Penyelesaian sistem persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan pendiagonalan matriks. Pada genetika, pendiagonalan matriks berguna untuk menghitung pewarisan sifat dan penyakit genetika makhluk hidup sampai pada generasi ke-n.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kasih karena atas berkatnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Dalam proses pembuatan skripsi ini, penulis menyadari banyak memperoleh bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, dengan kerendahan hati, penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. B. Susanta selaku dosen pembimbing yang dengan kesabaran dan kedisiplinannya telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku Kaprodi Pendidikan Matematika yang telah memberikan dorongan bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi.
3. Drs. St. Susento, M.Si yang telah memberikan dorongan dan kesempatan kepada penulis untuk belajar mandiri.
4. Bapak dan Ibu Dosen atas bimbingannya selama penulis belajar di sini.
5. Sekretariat JPMIPA atas bantuannya.
6. Staf. Perpustakaan USD atas segala bantuan dan fasilitas yang diberikan.
7. Bapak dan Ibu yang telah memberikan segala yang dimiliki.
8. Dhik Bety yang telah memberikan dorongan untuk segera menyelesaikan tugas ini, juga Ferry dan Tasya.
9. Ade Letty atas segala perhatian dan bantuannya, dari awal penyusunan skripsi sampai dengan selesainya. Terima kasih atas persahabatan dan persaudaraan ini sebagai anugerah terindah yang pernah kurasakan.

10.Heni atas perhatian dan doanya, Nina atas dukungannya, dan Aris yang selalu error ketika aku error. Terima kasih atas persahabatan dan saat-saat terindah yang pernah terjalin.

11.Heru atas SMS yang kadang datang pada saat aku kehabisan ide dan menyegarkan pikiranku.

12.Semua teman-teman Pendidikan Matematika '96 dan teman-teman yang selalu menanyakan "kapan wisudanya".

13.Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang selama ini telah membantu penulis.

Penulis menyadari sepenuhnya, meskipun dalam penyusunan skripsi ini telah diusahakan dengan sebaik mungkin, akan tetapi masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu segala kritik dan saran yang sifatnya membangun akan penulis terima dengan senang hati,

Akhir kata, penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat baik bagi penulis sendiri maupun bagi pembaca semuanya.

Yogyakarta, September 2001

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dalam mempelajari aljabar linear, kita mengenal suatu bentuk tertentu yang dinamakan bentuk kuadrat. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ dan $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ merupakan contoh bentuk kuadrat dalam 2 variabel dan 3 variabel.

Bentuk kuadrat seperti contoh di atas dapat ditulis dengan lambang matriks sebagai X^tAX dengan A merupakan matriks dari bentuk kuadrat dan X adalah $[x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n]^t$ dengan n adalah banyak variabel. Dalam contoh bentuk kuadrat dalam 3 variabel di atas, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ dan $X = [\,x_1 \ \ x_2 \ \ x_3\,]^t$

Tentunya bentuk kuadrat yang rumit seperti contoh di atas akan menyulitkan dalam menyelesaikan persoalan yang ada. Persoalan yang ada itu antara lain mencari optimisasi fungsi dalam n variabel, mengenali irisan kerucut dan permukaan kuadrat, menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan, dan genetika. Yang kita butuhkan adalah bentuk kuadrat yang sederhana yaitu bentuk kuadrat yang tidak memuat suku-suku campuran. Matriks dari bentuk kuadrat yang sederhana berupa matriks diagonal. Tidak hanya bentuk kuadrat saja yang dapat kita sederhanakan, tetapi matriks juga dapat kita sederhanakan.

Kebutuhan akan adanya matriks dan bentuk kuadrat yang lebih sederhana itulah yang mendorong kita untuk mempelajari bagaimana proses membawa matriks A tersebut menjadi matriks diagonal. Hal itu menimbulkan masalah pendiagonalan matriks.

B. PERUMUSAN MASALAH

Yang menjadi masalah dalam penulisan skripsi ini adalah

1. Apakah yang dimaksud dengan pendiagonalan matriks?
2. Bagaimana cara mendiagonalkan matriks tersebut?
3. Apa saja penerapan pendiagonalan matriks tersebut?

C. TUJUAN PENULISAN SKRIPSI

Tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah memahami pendiagonalan matriks dan cara membawa bentuk kuadrat menjadi bentuk yang lebih sederhana. Tujuan lain adalah dapat menerapkan pendiagonalan matriks tadi dalam mencari optimisasi fungsi dalam n variabel, mengenali irisan kerucut dan permukaan kuadrat, menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan, dan genetika.

D. RUANG LINGKUP SKRIPSI

Dalam skripsi ini, yang dibahas hanyalah bentuk kuadrat dengan koefisien real. Materi yang telah didapat dalam kuliah tidak diberikan secara mendalam dan ditulis dengan tujuan untuk mengingatkan saja. Teorema yang tidak secara langsung berhubungan dengan pendiagonalan matriks sengaja tidak diberikan buktinya. Dalam penghitungan akar-akar persamaan karakteristik dilakukan hanya pada persamaan karakteristik yang dapat diselesaikan secara aljabar.

Bab I berupa pendahuluan yang berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan skripsi, ruang lingkup skripsi, materi prasyarat, dan metode penulisan.

Pada bab II diberikan uraian secara singkat mengenai jenis matriks, determinan matriks, invers matriks, sistem persamaan linear, bentuk eselon baris, ruang vektor, kombinasi linear, ruang Euclides, vektor ortogonal, vektor baris, vektor kolom, dan transformasi linear.

Pendiagonalan matriks melalui nilai eigen dan vektor eigen, matriks similar, pendiagonalan secara ortogonal, pendiagonalan melalui reduksi Lagrange, dan pendiagonalan melalui eliminasi Gauss-Jordan dibahas dalam bab III.

Bab IV yang merupakan inti dari penulisan skripsi ini berisi beberapa penerapan pendiagonalan matriks, antara lain dalam mencari optimisasi fungsi dalam n variabel, mengenali irisan kerucut dan permukaan kuadrat, menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan, dan genetika.

Bab V adalah penutup yang berupa kesimpulan dari apa yang telah dibahas dalam skripsi ini.

E. MATERI PRASYARAT

Materi prasyarat dalam membahas pendiagonalan matriks ini adalah matriks , aljabar linear dan geometri analitik.

F. METODE PENULISAN

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode studi pustaka.

BAB II

MATRIKS DAN TRANSFORMASI LINEAR

Pada bab ini akan diulang kembali beberapa hal yang akan digunakan pada pembahasan pendiagonalan matriks dan penerapannya, antara lain matriks dan invers matriks, sistem persamaan linear, bentuk eselon baris dan transformasi linear. Tidak banyak yang disajikan dalam bab ini karena hanya untuk mengingat kembali apa yang telah kita pelajari.

A. MATRIKS DAN INVERS MATRIKS

Matriks adalah susunan elemen-elemen dalam baris-baris dan kolom-kolom. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berordo m x n dan ditulis sebagai :

$$A_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Huruf i menyatakan indeks baris dan j menyatakan indeks kolom, dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

Jenis matriks

Matriks persegi adalah matriks yang berukuran n x n. Himpunan elemen a_{ii} disebut diagonal utama, $i = 1,2,\ldots,n$

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen diagonal utamanya tidak semuanya nol dan elemen lainnya sama dengan nol.

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya 1 dan dilambangkan dengan I.

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya sama dengan nol.

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua unsur di bawah diagonal utama adalah nol.

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang semua unsur di atas diagonal utama adalah nol.

Suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ disebut *simetrik* jika $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall_i = 1, 2, ..., n$ dan $j = 1, 2, ...,n$.

Matriks $A^t_{n \times m}$ disebut *transpose* suatu matriks $A_{m \times n}$ yang didapat dengan mempertukarkan baris dan kolom.

Determinan matriks

Determinan matriks persegi A dilambangkan dengan $|A|$ adalah suatu bilangan yang didapat dari elemen-elemen A dengan pengerjaan tertentu, yaitu

- Untuk $A_{1 \times 1} = [a]$ maka $|A| = a$
- Untuk $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$
- Untuk $A_{n \times n}$ maka $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \; |M_{i1}|$

dengan M_{i1} adalah matriks yang didapat dari matriks A dengan mencoret baris ke i dan kolom 1.

Suatu matriks persegi A berordo n disebut *singgular* bila dan hanya bila $|A| = 0$, dan disebut *non singgular* bila dan hanya bila $|A| \neq 0$.

Matriks persegi A dan B berordo n disebut *saling kongruen* bila dan hanya bila ada matriks P yang non singgular sedemikian hingga $B = P^t AP$.

Invers Matriks

Invers suatu matriks persegi A berordo n adalah matriks A^{-1} yang memenuhi $A^{-1} A = AA^{-1} = I_n$.

Matriks yang non singgular akan mempunyai invers, sedangkan matriks singgular tidak akan mempunyai invers.

Dalam mencari invers suatu matriks persegi dapat dilakukan dengan menggunakan matriks adjoin, partisi matriks ataupun operasi baris.

Operasi-operasi baris elementer yang dapat dilakukan terhadap suatu matriks adalah

1. Mempertukarkan dua baris
2. Mengalikan suatu baris dengan $k \in \Re$ dan $k \neq 0$
3. Menambah suatu baris dengan k kali baris lain

Operasi ini dapat juga dikenakan terhadap kolom-kolom matriks dan dinamakan operasi kolom elementer. Operasi-operasi itu akan membawa matriks semula menjadi matriks lain yang ekuivalen dengan matriks semula.

Suatu matriks identitas yang dikenai satu kali operasi baris elementer atau operasi kolom elementer disebut *matriks elementer*.

Setiap kita mengenakan transformasi elementer berarti kita mengalikan matriks semula dengan matriks elementer. Jika yang dilakukan adalah operasi baris maka matriks elementer tersebut dikalikan dari sebelah kiri dari matriks semula dan jika operasi kolom, maka matriks elementer itu dikalikan dari sebelah kanan dari matriks semula.

B. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Perhatikan definisi berikut

Definisi 2.1

Persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah persamaan yang dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ yang tidak semuanya nol dan $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \Re$.

*Suatu sistem m persamaan linear dalam n varia*bel adalah kumpulan persamaan yang berbentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

dengan $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ yang tidak semuanya nol dan $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, b_n \in \Re$.

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau AX = B

Susunan matriks C = [A| B] disebut *matriks lengkap* .

Sistem persamaan linear yang tidak mempunyai penyelesaian disebut sistem persamaan yang *inkonsisten* sedangkan yang mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *konsisten* dan penyelesaian itu dapat tunggal atau banyak.

Yang dimaksud penyelesaian di sini adalah suatu pasangan terurut $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ yang memenuhi sistem persamaan linear tersebut dengan $t_i \in \Re$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

C. BENTUK ESELON BARIS

Suatu sistem persamaan linear yang dibahas dalam subbab sebelumnya dapat diselesaikan antara lain dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks lengkap dari sistem persamaan linear tersebut.

Proses untuk mentransformasikan matriks lengkap tadi ke dalam bentuk matriks segitiga atas yang juga disebut sebagai bentuk eselon baris dinamakan *eliminasi Gauss.* Sedangkan proses untuk mentransformasikan matriks lengkap ke dalam bentuk matriks identitas yang juga disebut bentuk eselon baris tereduksi dinamakan *eliminasi Gauss-Jordan.*

Penyelesaian sistem persamaan linear yang telah direduksi melalui eliminasi Gauss dapat diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi balik.

D. TRANSFORMASI LINEAR

Dalam subbab ini, kita akan mengingat kembali beberapa konsep yang berhubungan dengan ruang vektor dan transformasi linear. Terlebih dahulu perhatikan definisi berikut

Definisi 2.2

Himpunan semua n-tupel terurut $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ disebut *ruang vektor -n* dan dinyatakan dengan $\Re^n$, n berupa bilangan bulat positif.

Definisi 2.3

Diketahui $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ adalah sebarang vektor dalam $\Re^n$. *Jumlah dan perkalian dengan skalar* dari **u** dan **v** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 \ , \ u_2 + v_2 \ , \ \ldots \ , \ u_n + v_n)^t$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1 \ , \ ku_2 \ , \ \ldots \ , \ ku_n)^t$$

untuk $k \in \Re$.

Definisi 2.4

Diketahui n vektor dalam $\Re^n$ yaitu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \in \Re^n$. Suatu susunan b = $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{x}_n$ disebut *kombinasi linear* dari $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ untuk $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Re$

Definisi 2.5

Vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \in \Re^n$ disebut *tak bebas linear* bila dan hanya bila terdapat $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Re$ yang tidak semuanya 0 sehingga $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

Vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \in \Re^n$ disebut *bebas linear* bila dan hanya bila $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ mengakibatkan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Re$ yang semuanya 0.

Teorema 2.1

Diketahui $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor dalam $\Re^n$. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ bebas linear bila $A = (a_{ij})$ non singgular dengan $\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_j$ dan i = 1,2,...,n

Bukti tidak diberikan.

Kita akan mendefinisikan ruang Euclides.

Definisi 2.6

Diketahui $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ adalah sebarang vektor dalam $\Re^n$. *Hasil kali dalam (inner product)* didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u.v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

dan norma Euclides dari vektor **u** didefinisikan sebagai

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u.u})^{1/2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}}$$

Definisi 2.7

Ruang-n $\Re^n$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar, hasil kali dalam dan norma Euclides didefinisikan sebagai *ruang-n Euclides.*

Definisi 2.8

Diketahui $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ sebarang vektor dalam $\Re^n$. **u** dan **v** *saling ortogonal* bila dan hanya bila $\mathbf{u.v} = \mathbf{0}$.

Definisi 2.9

Himpunan vektor-vektor yang dua-dua saling ortogonal dan masing-masing mempunyai norma 1 disebut *himpunan ortonormal.*

Suatu vektor $\mathbf{u} \in \Re^n$ dengan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dalam $\Re^n$ dapat dinyatakan dengan menggunakan notasi matriks $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n]^t$ Hal itu terjadi karena operasi matriks **u** + **v** = $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$ dan

ku= k $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ . \\ . \\ . \\ ku_n \end{bmatrix}$ untuk $k \in \Re^n$, sama seperti operasi vektor yang didefinisikan dalam $\Re^n$.

Definisi 2.10

Diketahui A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ adalah matriks berordo m x n.

Vektor $\mathbf{r}_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}]$

$\mathbf{r}_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{2n}]$

.

.

.

$\mathbf{r}_n = [a_{m2} \quad a_{m2} \quad \ldots \quad a_{mn}]$

yang berasal dari baris – baris dalam A disebut *vektor baris* dan

vektor $\mathbf{c}_1 = [a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1}]$

$\mathbf{c}_2 = [a_{12} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{m2}]$

.

.

.

$\mathbf{c}_n = [a_{1n} \quad a_{2n} \quad \dots \quad a_{mn}]$

yang berasal dari kolom-kolom dalam A disebut *vektor kolom.*

Selanjutnya kita akan membahas suatu tipe pemetaan tertentu yang disebut transformasi linear. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 2.11

Diketahui $T : V \rightarrow W$ adalah suatu fungsi dari ruang vektor V ke ruang vektor W. Fungsi T disebut transformasi linear bila dan hanya bila

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(ii) $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in V$ dan $k \in \Re$

Pada suatu transformasi linear T dari $\Re^n \rightarrow \Re^m$ terkait suatu matriks A berordo m x n. Perhatikan teorema berikut.

Teorema 2.2

Jika ada transformasi linear T dari $\Re^n \rightarrow \Re^m$ maka ada matriks A berordo m x n sedemikian hingga $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^n$ ($\mathbf{x}$ adalah vektor kolom ke-j dari A yang didefinisikan sebagai $\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j)$ dengan $\mathbf{e}_j$ adalah basis ke-j untuk $j = 1, 2, ..., n$)

Bukti

Untuk $j = 1, 2, ..., n$ maka $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})^t = T(\mathbf{e}_j)$.

Jika $\mathbf{x} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n)$ dan $\mathbf{x} \in \Re^n$ maka

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + ... + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n$$

$$= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)\,[x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n]^t$$

Jika $T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ kita namakan A, maka

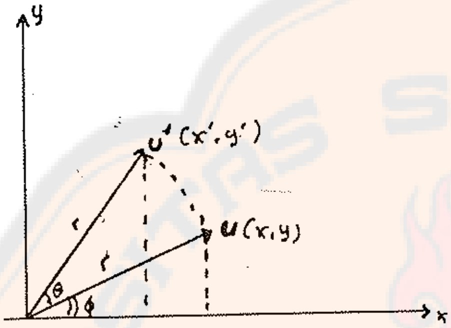
$T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$

Jadi ada matriks A berordo m x n sedemikian hingga $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $\forall \mathbf{x} \in \Re^n$. ■

Teorema di atas menunjukkan suatu hubungan antara matriks A dengan suatu transformasi linear T. Untuk menentukan kolom pertama dari A, kita melihat pada elemen baris pertama $\mathbf{e}_1$ dalam $\Re^n$, kemudian dibentuk $\mathbf{a}_1 = T(\mathbf{e}_1)$, demikian seterusnya.

Matriks A tersebut sering disebut sebagai matriks transformasi linear. Salah satu transformasi linear yang penting dalam $\Re^2$ dan $\Re^3$ adalah operasi yang secara geometris menghasilkan rotasi. Operator yang merotasikan setiap titik dalam $\Re^2$ melalui sudut tetap θ dari titik pusat O disebut operator rotasi pada $\Re^2$.

Sekarang kita tinjau operator rotasi yang merotasikan setiap titik dengan sudut tetap θ. Untuk mencari persamaan yang menghubungkan **u** dan $\mathbf{u}' = T(\mathbf{u})$, kita anggap bahwa ϕ adalah sudut dari sumbu x positif ke **u** dan panjang **u'** dan **u** masing-masing adalah r.



Transformasi tersebut akan membawa suatu titik ke titik lain dalam satu sistem koordinat yang sama. Kita juga dapat membentuk suatu matriks transformasi untuk T, yaitu A = $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, atau

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

BAB III

PENDIAGONALAN MATRIKS

Suatu bentuk $q = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \ldots\ldots + c_{nn}x_n^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_n$ .... didefinisikan sebagai bentuk kuadrat dalam variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan $c_{ij} \in \Re$, $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

Bentuk di atas dapat juga ditulis sebagai $q = X^t CX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i x_j$ dengan X merupakan vektor kolom $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^t$ dan C adalah matriks persegi berordo n.

Suatu bentuk kuadrat yang lebih sederhana akan sangat menguntungkan dalam berbagai hal. Bentuk kuadrat yang sederhana adalah bentuk kuadrat yang tidak mengandung suku-suku dengan variabel yang berbeda. Adanya penyederhanaan ini menyebabkan terbentuknya matriks baru yang lebih sederhana dari matriks C, yaitu matriks diagonal D.

Penyederhanaan bentuk kuadrat tersebut dapat dilakukan melalui beberapa cara, yaitu melalui nilai eigen dan vektor eigen, reduksi Lagrange atau melengkapi bentuk kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna dan melalui elininasi Gauss-Jordan. Ketiga macam cara di atas akan dibahas pada bab ini.

A. PENDIAGONALAN MELALUI NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Sebelum membahas pendiagonalan matriks, terlebih dahulu dibahas nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks persegi berordo n. Berikut diuraikan definisi nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 3.1

Diketahui A matriks persegi berordo n. Suatu skalar λ dinamakan *nilai eigen* dari A jika dan hanya jika ada vektor tak nol **x** dalam $\Re^n$ sedemikian hingga A**x** = λ**x**. Vektor yang demikian itu disebut *vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen* λ.

Berikut ini adalah sebuah teorema yang dapat menolong kita mencari nilai eigen suatu matriks persegi berordo n.

Teorema 3.1

Diketahui A matriks persegi berordo n dan I adalah matriks identitas berordo n. Suatu skalar λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila $|\lambda I - A| = 0$

Bukti :

Menurut definisi 3.1, λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila terdapat vektor tak nol **x** dalam $\Re^n$ sedemikian hingga

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{.....(3.1)}$$

Persamaan ini ekuivalen dengan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ .....(3.2)

yang mempunyai penyelesaian non trivial bila dan hanya bila $(\lambda I - A)$ adalah matriks singgular, yaitu bila $|\lambda I - A| = 0$

Jadi λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila $|\lambda I - A| = 0$ ■

Jika $|\lambda I - A|$ kita uraikan, maka akan terdapat polinomial berderajat n dalam variabel λ dan dinamakan polinomial karakteristik. Persamaan $|\lambda I - A| = 0$ disebut persamaan karakteristik dari matriks A.

Selanjutnya kita akan membahas cara untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen. Vektor tak nol **x** merupakan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika memenuhi sifat $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$.

Ruang penyelesaian $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ disebut ruang eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Nilai eigen suatu matriks adalah akar-akar dari persamaan karakteristik. Jadi jika A adalah matriks persegi berordo n, maka A mempunyai paling banyak n nilai eigen yang berbeda.

Ada berbagai kemungkinan nilai eigen suatu matriks persegi berordo n yaitu

1. mempunyai n akar real yang berbeda
2. mempunyai n akar real dan ada yang sama
3. ada akar imajiner yang berbeda
4. ada akar imajiner dan ada yang sama

Dalam skripsi ini, yang dibahas hanyalah untuk nilai eigen real.

Contoh 3.1

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 6 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda + 1) + 18 = 0$$

$$(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = 5$ dan $\lambda = 2$. Kita akan mencari vektor eigen **x** yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ yaitu nilai **x** yang memenuhi $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sehingga $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang disederhanakan menjadi

$x_1 = 2$ s dan $x_2 = s$, $s \in \Re$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \Re$

Dengan cara seperti di atas, kita dapat menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ yaitu vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \Re$

Selanjutnya akan diberikan definisi matriks similar.

Definisi 3.2

Matriks persegi A dan B berordo n disebut *saling similar* jika ada matriks P yang non singgular sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

Dari definisi di atas, dapat dikatakan bahwa jika matriks A similar terhadap B maka B juga similar terhadap A.

Teorema 3.2

Matriks persegi A dan B berordo n yang saling similar mempunyai nilai eigen yang sama.

Bukti

Karena A dan B saling similar maka $B = P^{-1}AP$

$$
\begin{aligned}
\lambda I - B &= \lambda I - P^{-1}AP \\
&= P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP \\
&= P^{-1}(\lambda I - A)P \\
|\lambda I - B| &= |P^{-1}|\,|\lambda - A|\,|P| \\
&= |\lambda I - A|
\end{aligned}
$$

Karena $|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = 0$ maka A dan B mempunyai nilai eigen yang sama. ■

Teorema 3.3

Diketahui A matriks persegi berordo n. Jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, maka A similar terhadap suatu matriks diagonal D.

Bukti

Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan $\mathbf{x}_i = \{x_{1i}\ \ x_{2i}\ \ x_{3i}\ \ \ldots\ \ x_{ni}\}^t$ $\forall i = 1,2, \ldots, n$ sedemikian hingga $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$

Misalkan $P = [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{x}_n]$.

$$AP = [A\mathbf{x}_1\ \ A\mathbf{x}_2\ \ldots\ A\mathbf{x}_n] = [\lambda_1\mathbf{x}_1\ \ \lambda_2\mathbf{x}_2\ \ldots\ \lambda_n\mathbf{x}_n]$$

$$= [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

Jadi $AP = PD$ atau $P^{-1} AP = D$ ■

Dari bukti di atas, elemen diagonal utama dari matriks diagonal D berupa nilai-nilai eigen dari matriks persegi A berordo n.

Diketahui A matriks persegi berordo n. Kita akan menentukan matriks P sedemikian hingga $P^{-1} AP = D$, dengan D adalah matriks diagonal. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 3.3

Suatu matriks persegi A berordo n dikatakan dapat *didiagonalkan* jika dan hanya jika terdapat matriks P yang dapat dibalik (*invertible*) sedemikian hingga $P^{-1} AP = D$ dengan D adalah matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalkan A.

Yang dimaksud dengan pendiagonalan matriks adalah proses membawa matriks persegi A berordo n menjadi suatu matriks diagonal D. Berikut ini adalah sebuah teorema yang merupakan alat dasar dalam mendiagonalkan suatu matriks persegi.

Teorema 3.4

Diketahui A adalah matriks persegi berordo n. Matriks A dapat didiagonalkan bila dan hanya bila matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui A adalah matriks persegi berordo n dan A dapat didiagonalkan.

Akan dibuktikan matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Karena A dapat didiagonalkan berarti ada matriks P yang dapat dibalik sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, yang ekuivalen dengan $AP = PD$, dengan D adalah matriks diagonal

Misalkan $P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

maka $PD = \begin{bmatrix} x_{11}\lambda_1 & x_{12}\lambda_2 & \dots & x_{1n}\lambda_n \\ x_{21}\lambda_1 & x_{22}\lambda_2 & \dots & x_{2n}\lambda_n \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ x_{n1}\lambda_1 & x_{n2}\lambda_2 & \dots & x_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \dots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \dots & \lambda_n x_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \dots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \;\; x_{2i} \;\; \ldots \;\; x_{ni}]^t \;\; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah vektor kolom dari matriks P. Vektor kolom dari PD adalah $\lambda_1\mathbf{x}_1$, $\lambda_2\mathbf{x}_2$, ... $\lambda_n\mathbf{x}_n$ sedangkan vektor kolom dari AP adalah $A\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2$, ... , $A\mathbf{x}_n$.

Karena AP = PD maka $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n$

Padahal P adalah matriks yang dapat dibalik sehingga $|P| \neq 0$.

Jadi $\forall_i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{x}_i$ adalah vektor tak nol sehingga $\mathbf{x}_i$ adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i. Karena P dapat dibalik maka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ bebas linear. Jadi A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

$\Leftarrow$ Diketahui A adalah matriks persegi berordo n dan A menmpunyai n vektor eigen yang bebas linear. Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan.

Misalkan A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, yaitu $\{\, \mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{x}_n \,\}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. misalkan $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \;\; x_{2i} \;\; \ldots \;\; x_{ni}\,]^t \;\; \forall_i = 1, 2, \ldots, n$ dan

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

maka kolom-kolom dari hasil kali AP adalah $A\mathbf{x}_i$. Tetapi $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n$ sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & 0 \ldots \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

dan D adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utama adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Karena vektor-vektor kolom dari matriks P bebas linear, maka P adalah matriks yang dapat dibalik. Misalkan P^{-1} adalah invers dari P karena $AP = PD$ maka $P^{-1} AP = D$

Jadi A dapat didiagonalkan. ∎

Dari bukti di atas, kita telah mendapatkan langkah-langkah dalam mendiagonalkan matriks persegi A berordo n yaitu :

Langkah 1 : Mencari n vektor eigen yang bebas linear dari A yaitu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Langkah 2 : Membentuk matriks P dengan elemen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sebagai vektor kolom.

Langkah 3 : Matriks $P^{-1}AP$ tersebut elemennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ yang juga merupakan elemen diagonal utama matriks diagonal dan λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan x_i $\forall_i = 1, 2, ..., n$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$. Kita akan mencari vektor eigen $\mathbf{x}$ yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ yaitu nilai $\mathbf{x}$ yang memenuhi $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sedemikian hingga $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang disederhanakan menjadi $-3x_1 + x_2 = 0$ dan menghasilkan $x_1 = s$ dan $x_2 = 3s$, $s \in \Re$. Jadi vektor eigennya adalah vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan kita dapat memilih $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Kita akan mencari vektor eigen $\mathbf{x}$ yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ yaitu nilai $\mathbf{x}$ yang memenuhi $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sedemikian hingga $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang disederhanakan menjadi $x_1 + 0\,x_2 = 0$ dan menghasilkan $x_1 = 0$ dan x_2 adalah sebarang nilai sehingga dapat kita tulis sebagai $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \Re$ dan kita dapat memilih $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dari vektor eigen yang telah kita dapatkan, dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

$|P| = 1 - 0 \neq 0$ sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor yang saling bebas linear.

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga $P^{-1}\ AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

Jadi A dapat didiagonalkan karena ada matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $P^{-1}\ AP = D$ dengan D adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan nilai eigen dari matriks A.

Yang perlu diingat adalah matriks P yang dicari tidak tunggal karena kita dapat memilih sebarang vektor kolom yang membentuk P, asalkan masih memenuhi syarat dari **x**.

Contoh 3.3

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & +2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks P yang mendiagonalkan A !

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor tak nol yang memenuhi $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang jika disederhanakan menjadi $0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$ dan $0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$ yang akan memberikan penyelesaian $x_2 = x_3 = 0$ dan x_1 adalah sebarang nilai atau dapat kita tukis sebagai $\mathbf{x_1} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, artinya kita dapat memilih sebarang nilai $s \in \Re$ dan kita dapat memilih $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dengan cara seperti di atas kita dapat menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ yaitu vektor tak nol yang yang memenuhi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang jika disederhanakan menjadi $x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0$ dan $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ yang akan memberikan penyelesaian untuk $x_3 = t$ maka $x_1 = -2t$ dan $x_2 = u$, artinya kita dapat memilih sebarang nilai untuk u dan kita dapat menulis $\mathbf{x_2} = t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $t \in \Re$ dan $u \in \Re$, dan kita dapat memilih $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. Kita mendapatkan matriks P = $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. $|P| \neq 0$ sehingga v_1, v_2, dan v_3 adalah vektor-vektor yang bebas linear. $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ sehingga $P^{-1}AP =$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = D$$

Jadi ada matriks $P = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$ dengan D adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya merupakan nilai eigen dari matriks A.

Tidak semua matriks dapat didiagonalkan. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.4

Perlihatkan bahwa $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ tidak dapat didiagonalkan!

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 3)\ (\lambda - 2)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah vektor tak nol yang memenuhi $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang jika disederhanakan akan memberikan penyelesaian $x_2 = x_3 = 0$ dan x_1 sebarang nilai sehingga kita dapat membentuk $\mathbf{x_1} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \in \Re$ dan kita dapat memilih $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ yaitu vektor tak nol yang memenuhi

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang jika disederhanakan akan memberikan penyelesaian $x_1 = x_2 = 0$ dan x_3 sebarang nilai. Jadi vektor eigennya adalah vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x_2} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Terlihat hanya ada dua vektor eigen yang bebas linear.

Berdasarkan teorema 3.4 matriks persegi A berordo n dapat didiagonalkan jika mempunyai n buah vektor eigen yang bebas linear. Pada contoh ini n = 3, tetapi hanya ada dua vektor eigen yang bebas linear. Jadi A tidak dapat didiagonalkan.

Teorema 3.5

Diketahui A adalah matriks persegi berordo n. Jika $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_k}$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ yang berbeda dengan $k \leq n$ maka $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_k}\}$ bebas linear.

Bukti

Akan dibuktikan dengan kontradiksi

Andaikan $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ tak bebas linear. Karena vektor eigen merupakan vektor tak nol maka $\{\mathbf{x_i}\}$ bebas linear. Misalkan r adalah bilangan bulat terbesar sedemikian hingga $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_r}\}$ bebas linear dan diandaikan $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_k}$ tak bebas linear, berarti $r \leq k \leq n$. Dari definisi r, maka $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_{r+1}}\}$ tak bebas linear, artinya ada skalar $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ yang tidak semuanya nol sedemikian hingga.

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots + c_{r+1}\mathbf{x_{r+1}} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots(3.3)$$

Pada persamaan (3.3), kita kalikan kedua ruas dengan A sehingga

$$Ac_1\mathbf{x_1} + Ac_2\mathbf{x_2} + \ldots + Ac_{r+1}\mathbf{x_{r+1}} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots(3.4)$$

Karena $A\mathbf{x_1} = \lambda_1\mathbf{x_1}, A\mathbf{x_2} = \lambda_2\mathbf{x_2}, \ldots, A\mathbf{x_{r+1}} = \lambda_{r+1}\mathbf{x_{r+1}}$ maka persamaan (3.4) dapat dituliskan sebagai

$$c_1\lambda_1\mathbf{x_1} + c_2\lambda_2\mathbf{x_2} + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{x_{r+1}} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots(3.5)$$

Pada persamaan (3.3), kedua ruas kita kalikan dengan λ_{r+1} dan kemudian untuk mengurangi persamaan (3.5) maka didapat

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{x_1} + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{x_2} + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{x_r} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots(3.6)$$

Karena $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_r}\}$ bebas linear maka dari persamaan (3.6) didapat

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

Karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ adalah nilai-nilai eigen yang berbeda, maka didapat

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0 \quad \ldots\ldots(3.7)$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai itu ke dalam persamaan (3.3) maka didapat $c_{r+1}\,\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{0}$

Karena vektor eigen $\mathbf{x}_{r+1}$ adalah vektor tak nol, maka $c_{r+1} = 0$.

Jadi terdapat kontradiksi karena diketahui bahwa $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ tidak semuanya nol. Karenanya $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_n$ bebas linear ■

Selanjutnya kita akan membahas pendiagonalan ortogonal. Terlebih dahulu, perhatikan definisi berikut :

Definisi 3.3

Matriks persegi A berordo n yang mempunyai sifat $A^{-1} = A^t$ disebut *matriks ortogonal.*

Definisi 3.4

Matriks persegi A berordo n disebut dapat *didiagonalkan secara secara ortogonal* bila dan hanya bila ada matriks ortogonal P dan matriks diagonal D sedemikian hingga $A = PDP^t$ atau $D = P^tAP$

Teorema 3.6

Nilai eigen matriks simetrik selalu real.

Bukti tidak diberikan

Teorema 3.7

Matriks persegi A berordo n dapat diagonalkan secara ortogonal bila dan hanya bila A mempunyai n buah vektor eigen yang ortonormal.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui matriks persegi A berordo n dapat didiagonalkan. Akan dibuktikan A mempunyai n buah vektor eigen yang ortonormal. Karena A dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka ada matriks ortogonal P sedemikian hingga $D = P^tAP = P^{-1}AP$. Dengan melihat bukti teorema 3.2, maka vektor kolom dari P adalah vektor eigen dari A. Karena P adalah matriks ortogonal maka vektor kolomnya ortonormal, sehingga A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

$\Leftarrow$ Diketahui A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal yaitu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan secara ortogonal. Dari bukti teorema 3.2, maka matriks P yang terbentuk dari vektor eigen tersebut sebagai vektor kolom akan mendiagonalkan A. Karena vektor eigen itu adalah ortonormal, maka P adalah matriks ortogonal. Karena P ortogonal, maka P mendiagonalkan A secara ortogonal. ∎

Teorema 3.8

Diketahui A adalah matriks simetrik berordo n. Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda dari matriks A saling ortogonal.

Bukti

Misalkan $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ adalah dua vektor eigen yang berbeda dari matriks simetrik A yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda.

Untuk membuktikan teorema tersebut, kita harus menunjukkan $\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2 = 0$

Karena $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ adalah vektor-vektor eigen

maka $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ dan $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$

$(A\mathbf{x}_1)^t = (\lambda_1\mathbf{x}_1)^t$

$\mathbf{x}_1{}^t A^t = \lambda_1\mathbf{x}_1{}^t$

$\mathbf{x}_1{}^t A = \lambda_1\mathbf{x}_1{}^t$ (A matriks simetrik)

$\mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_2 = \lambda_1\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2$ ....(i)

$\mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1{}^t\ \lambda_2\mathbf{x}_2$ .... (ii)

Dari persamaan (i) dan (ii) didapat

$\lambda_1\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1{}^t\ \lambda_2\mathbf{x}_2$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2 = 0$

$\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2 = 0$ (karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$) ■

<u>**Contoh 3.5**</u>

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan suatu matriks ortogonal P sedemikian hingga $P^tAP = D$!

Penyelesaian

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)((\lambda-2)^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$

Jadi nilai eigen dari matriks A adalah 1, 2 dan 3.

Kita akan mencari vektor eigen $\mathbf{x_1}$ yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ yaitu nilai $\mathbf{x}$ yang tidak sama dengan nol dan memenuhi $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\mathbf{x_1} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \Re$ dan kita pilih

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda_2 = 2$, vektor eigen yang bersesuaian adalah $\mathbf{x_2} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \in \Re$ dan kita pilih $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ adalah semua vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x_3} = u\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $u \in \Re$ dan kita pilih

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Kita dapat memeriksa bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dan $\mathbf{v_3}$ masing-masing saling ortogonal yaitu $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3} = 0$. Vektor-vektor eigen ortonormal dari vektor eigen $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dan $\mathbf{v_3}$ adalah :

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^t = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 0 \quad 1]^t$$

$$\mathbf{u_2} = [0 \quad 1 \quad 0]^t$$

$$\mathbf{u_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 0 \quad -1]^t$$

$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ dan $\mathbf{u_3}$ ini merupakan vektor kolom dari matriks ortogonal P sehingga

$$P = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Kita dapat menunjukkan bahwa P^tAP adalah suatu matriks diagonal.

$$P^tAP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2\sqrt{2} & 0\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \quad D$$

yang merupakan matriks diagonal dengan elemen pada diagonal utamanya berupa nilai-nilai eigen dari A.

B. PENDIAGONALAN MELALUI REDUKSI LAGRANGE

Perhatikan kembali definisi bentuk kuadrat

Definisi 3.5

Suatu bentuk $q = c_{11}\, x_1^2 + c_{22}\, x_2^2 + \ldots. + c_{nn}\, x_n^2 + c_{12}\, x_1x_2 + c_{23}\, x_2\, x_3 + \ldots + c_{(n-1)\,n}\, x_{n-1}\, x_n$ didefinisikan sebagai *bentuk kuadrat* dalam n variabel x_1 , x_2 , ... , x_n dengan $c_{ij} \in \Re$ $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

Jika kita mensubstitusikan a_{ii} untuk c_{ii} dan $a_{ji} + a_{ij}$ untuk c_{ij} $i \neq j$ dan $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} c_{ij}$, maka bentuk kuadrat tersebut dapat ditulis sebagai

$$q = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + \ldots + a_{nn}\, x_n^2 + a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{(n-1)\,n}\; x_{n-1}\, x_n$$
$$+ \; a_{n\,(n-1)}\, x_n\, x_{n-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = X^t AX$$

A di sini merupakan matriks simetrik dan X adalah vektor kolom $[x_1\; x_2\; \ldots\; x_n]^t$. Jadi matriks dari bentuk kuadrat dapat dibuat simetrik.

Bentuk kuadrat di atas dapat disederhanakan menggunakan teknik tertentu yaitu reduksi Lagrange atau melengkapi bentuk kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna. Dengan teknik ini, bentuk di atas direduksi menjadi

$$h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \ldots + h_ny_n^2 \qquad h_j \neq 0 \quad 1 \leq j \leq n \qquad h_j \in \Re.$$

Pereduksian ini langsung dari bentuk kuadrat, bukan dari matriks bentuk kuadrat. Pada dasarnya, reduksi Lagrange bertujuan untuk menghilangkan suku - suku yang memuat variabel yang berbeda dengan cara mengelompokkan suku-suku yang ada menjadi suatu bentuk kuadrat sempurna.

Jika bentuk kuadrat terdiri dari n variabel, maka akan terdapat maksimal n bentuk kuadrat sempurna. Dengan memisalkan bentuk kuadrat sempurna yang telah didapat dengan variabel baru, maka bentuk baru tersebut berupa bentuk kanonik. Dengan kata lain, transformasi linear $Y = B^{-1}X$ (selanjutnya B^{-1} kita namakan C) akan membawa bentuk kuadrat di atas dengan A adalah matriks simetrik menjadi $q = (BY)^t ABY = Y^t (B^t AB)Y$. Matriks $B^t AB$ ini merupakan matriks diagonal dan transformasi yang telah dilakukan tadi akan berupa matriks segitiga atas.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.6

Diketahui bentuk kuadrat $q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$.. Dengan menerapkan reduksi Lagrange, maka didapat

$$\begin{aligned} q &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - x_2^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

maka bentuk kuadrat tadi direduksi menjadi $q = y_1^2 - y_2^2$

Matriks diagonal yang terbentuk adalah $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks transformasinya $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Matriks simetriknya adalah $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan

$B^{-1} = C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 3.7

Diketahui bentuk kuadrat $q = x_1^2 + 4x_1\,x_2 + 8\,x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 18\,x_3^2$.

Bentuk kuadrat q dapat juga ditulis sebagai $q = [x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Dengan menerapkan reduksi Lagrange, maka

$$
\begin{aligned}
q &= (x_1^2 + 2x_1\,(2x_2 + 4x_3)) + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 18\,x_3^2 \\
&= (x_1 + (2x_2 + 4x_3))^2 - (2x_2 + 4\,x_3)^2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 18x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 - 4x_2^2 - 16x_2\,x_3 - 16\,x_3^2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 18x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 20x_2\,x_3 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 + 2\,(x_2^2 + x_3^2 - 10x_2\,x_3) \\
&= (x_1 + 2x_2 + 4\,x_3)^2 + 2\,((x_2 - 5x_3)^2 - 24\,x_3^2) \\
&= (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 + 2\,(x_2 - 5\,x_3)^2 - 48x_3^2
\end{aligned}
$$

Jadi transformasinya $= \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = \quad\ \ x_2 - 5x_3 \\ y_3 = \qquad\quad\ \ x_3 \end{cases}$ dan akan mereduksi bentuk kuadrat tadi menjadi $q = y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$

Matriks diagonal yang terbentuk adalah $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{bmatrix}$ dan $B^{-1} = C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 3.8

Diketahui $q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4$.

Dengan reduksi Lagrange maka

$q = 2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_4) + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4$

$= 2(x_1^2 + 2x_1 + (2x_2x_4 + 3x_3 + 2x_4)) + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2^2 + 8x_2x_4 - 16x_3x_4$

$= 2(x_1 + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4))^2 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 32x_4^2 - 6x_2x_3 - 24x_2x_4 - 40x_3x_4$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)) + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + (x_3 + 4x_4))^2 + 3(x_3 + 4x_4)^2 + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4x_3^2 + 16x_4^2 - 16x_3x_4$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_3x_4)$

$= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2$

Jadi transformasi $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = \quad\ x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = \quad\quad\quad x_3 - 2x_4 \\ y_4 = \quad\quad\quad\quad\quad x_4 \end{cases}$ mereduksi bentuk kuadrat di atas

menjadi $q = 2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$.

Matriks diagonal yang terbentuk adalah $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Matriks simetrik

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & -4 \\ 6 & 9 & 19 & -8 \\ 4 & -4 & -8 & -24 \end{bmatrix}$ dengan matriks transformasi $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

telah direduksi menjadi D dan $B^{-1} = C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Contoh 3.9

Diketahui $q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$

Dengan menerapkan reduksi Lagrange didapat

$q = (x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3)) + 4(x_2)^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$

$= (x_1 + (2x_2 + 2x_3))^2 - (2x_1 + 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$

$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$ (*)

Bentuk tersebut tidak dapat secara langsung dilanjutkan dengan reduksi Lagrange, namun dibentuk dulu menjadi bentuk yang memuat suku-suku dalam x_2^2 dan x_3^2, melalui suatu transformasi linear dan non singgular, yang tidak tunggal, artinya kita dapat memilih satu tranformasi linear non singgular. Misalkan kita pilih transformasi $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_2 + z_3$ sehingga dari persamaan (*) akan didapat

$$q = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8\, z_2z_3$$

$$= (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8(z_2^2 + z_2z_3 + \frac{1}{4}z_3^2) - 2z_3^2$$

$$= (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8(z_2 + \frac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2$$

Transformasi $\begin{cases} y_1 = z_1 + 4z_2 + 2z_3 \\ y_2 = \quad z_1 + \frac{1}{2}z_3 \\ y_3 = \quad z_3 \end{cases}$ akan mereduksi bentuk kuadrat di atas menjadi

$q = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$ dan $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ mereduksi bentuk kuadrat menjadi

$q = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$

C. PENDIAGONALAN MELALUI ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Selanjutnya, kita akan mencoba membawa bentuk kuadrat yang telah didefinisikan sebelumnya menjadi bentuk kuadrat yang sederhana melalui cara lain yaitu melalui elininasi Gauss-Jordan.

Dalam menyederhanakan bentuk kuadrat melalui elininasi Gauss-Jordan, kita memulai dari matriks simetrik A yaitu matriks dari bentuk kuadrat tersebut. Yang akan kita lakukan adalah mencari matriks non singgular P sedemikian hingga P^t AP = D, dengan D adalah matriks diagonal. Kita dapat membawa matriks simetrik A menjadi matriks diagonal melalui sebarisan pasangan-pasangan transformasi elementer dengan tiap pasangannya terdiri dari transformasi baris yang diikuti transformasi kolom yang sama. Matriks diagonal D ini merupakan matriks dari bentuk kuadrat yang telah disederhanakan.

Matriks D dapat kita tulis sebagai hasil kali antara matriks elementer baris, matriks simetrik A dan matriks elementer kolom. Hal itu terjadi karena setiap kita mengenakan transformasi elementer, maka kita mengalikan matriks tersebut dengan matriks elementer. Matriks D yang berbentuk tidak tunggal karena kita dapat melakukan transformasi kolom dan transformasi baris secara bebas asalkan dapat membawa matriks simetrik A menjadi matriks diagonal D.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut

Contoh 3.10

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Carilah matriks P sedemikian hingga $P^t AP = D$!

Penyelesaian

Dalam pereduksian A ke D, kita bawa $[A|\,I]$ menjadi $[D|\,P^t]$ dengan menggunakan H_{22} (-2) dan K_{21} (-2) untuk memperoleh nol pada baris pertama dan kolom pertama. Selanjutnya H_{32} (-1) dan K_{32} (-1) membawa matriks itu menjadi matriks diagonal.

$$[A|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Perhatikan bahwa $P = K_{21}(-2)\, K_{32}(-1)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan $P^t = H_{32}(-1)\, H_{21}(-2)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = H_{32}(-1)\, H_{21}(-2)\, A\, K_{21}(-2)\, K_{32}(-1)$$

Setelah kita mempelajari ketiga macam cara untuk mendiagonalkan suatu matriks persegi berordo n, ternyata matriks transformasi pada pendiagonalan melalui reduksi Lagrange dan elininasi Gauss-Jordan tidak harus ortogonal. Tanda pada elemen diagonal utama dari matriks diagonal yang didapat melalui ketiga cara di atas akan tetap sama, walaupun elemennya tidak sama.

BAB IV

PENERAPAN PENDIAGONALAN MATRIKS

A. OPTIMISASI FUNGSI n VARIABEL

Pada bab sebelumnya, kita telah mendefinisikan suatu bentuk kuadrat. Bentuk kuadrat tersebut dapat ditulis sebagai $q = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ dan A dapat dibuat simetrik. Subbab ini akan membahas tanda dari bentuk kuadrat serta hubungannya dengan optimisasi fungsi n variabel.

1. Tanda Bentuk Kuadrat

Seringkali suatu bentuk kuadrat mempunyai sifat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \geq 0$ ataupun $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$ untuk $\mathbf{x} \neq 0$. Perhatikan definisi berikut :

Definisi 4.1

Diketahui $q = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ dan A matriks simetrik berordo n. Bentuk $q=\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ disebut :

(i) Definit positif jika $q > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(ii) Definit negatif jika $q < 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(iii) Semi definit positif jika $q \geq 0 \ \forall \mathbf{x}$ dan ada $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sedemikian hingga $q = 0$

(iv) Semi definit negatif jika $q \leq 0 \ \forall \mathbf{x}$ dan ada $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sedemikian hingga $q = 0$

(v) Indefinit jika ada $\mathbf{x}$ sedemikian hingga $q > 0$ dan untuk $\mathbf{x}$ yang lain $q < 0$

Matriks simetrik A di atas sering disebut sebagai matriks definit positif atau definit negatif tergantung dari nilai q-nya atau bentuk kuadratnya. Jadi jika bentuk kuadrat tersebut adalah definit negatif, maka secara langsung dikatakan bahwa matriks A adalah matriks definit negatif.

Perhatikan contoh berikut :

Contoh 4.1

1. $q = 3x_1^2 + 3x_2^2$ adalah definit positif karena $3x_1^2 + 3x_2^2 > 0$ kecuali untuk $x_1 = x_2 = 0$
2. $q = -3x_1^2 - x_2^2$ adalah definit negatif karena $-3x_1^2 - x_2^2 < 0$ kecuali untuk $x_1 = x_2 = 0$
3. $q = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$ adalah indefinit karena terdapat misalnya (1,1) sedemikian hingga $q = 12$ dan terdapat misalnya (1,-1) sedemikian hingga $q = -6$

Dalam bab III telah dijelaskan bahwa suatu bentuk kuadrat dapat disederhanakan sehingga hanya memiliki suku-suku dengan variabel yang sama dan tidak mengandung suku-suku dengan variabel campuran. Dengan kata lain, matriks dari bentuk kuadrat yaitu matriks A dibawa menjadi matriks diagonal D. Teorema berikut menunjukkan adanya hubungan antara nilai eigen dan bentuk kuadrat.

Teorema 4.1

Diketahui q = $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ adalah bentuk kuadrat dan A merupakan matriks simetrik berordo n. Bentuk kuadrat q akan

(i) Definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen dari A positif

(ii) Definit negatif jika dan hanya jika semua nilai eigen dari A negatif

(iii) Semi definit negatif jika dan hanya jika nilai eigen dari A negatif dan sedikitnya 1 yang bernilai 0

(iv) Semi definit positif jika dan hanya jika nilai eigen dari A positif dan sedikitnya 1 yang bernilai 0

(v) Indefinit jika dan hanya jika nilai eigen dari A ada yang positif dan ada yang negatif.

Bukti

(i) $\Rightarrow$ Diketahui q adalah definit positif dan λ adalah nilai eigen dari A. Untuk vektor eigen $\mathbf{x}$ yang bersesuaian dengan λ maka $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{x}^t \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \lambda\,\|\mathbf{x}\|^2$ sehingga $\lambda = \dfrac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ yang selalu positif.

$\Leftarrow$ Diketahui semua nilai eigen dari A adalah positif. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ merupakan himpunan ortonormal dari vektor eigen A. Jika $\mathbf{x}$ adalah vektor yang tak nol dalam $\Re^n$ maka $\mathbf{x}$ dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

dengan $\alpha_i = \mathbf{x}^t\,\mathbf{x}_i$ untuk i = 1, 2, ..., n dan

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$$

sehingga

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n)^t(\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{x}_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2\lambda_i$$

$$\geq (\min \lambda_i)\ \|\mathbf{x}\|^2 > 0$$

Jadi q adalah definit positif

(ii) $\Rightarrow$ Diketahui q adalah definit negatif dan λ adalah nilai eigen dari A. Karena q adalah definit negatif maka –q adalah definit positif. Untuk vektor eigen $\mathbf{x}$ yang bersesuaian dengan λ maka $\mathbf{x}^t(-A)\mathbf{x} = -\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ = $-\lambda\,\mathbf{x}^t\mathbf{x} = -\lambda\|\mathbf{x}\|^2$ sehingga $\lambda = -\dfrac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ yang selalu negatif.

$\Leftarrow$ Diketahui semua nilai eigen dari A adalah negatif dan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ merupakan himpunan ortonormal dari vektor eigen A. Jika $\mathbf{x}$ adalah vektor yang tak nol dalam $\Re^n$ maka

$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ dengan $\alpha_i = \mathbf{x}^t\mathbf{x}_i$ untuk i = 1, 2, ..., n

dan $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2 = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ sehingga

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n)^t(\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{x}_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2\lambda_i$$

$$\leq (\min \lambda_i)\ \|\mathbf{x}\|^2 > 0$$

Jadi q adalah definit negatif.

(iii) Diketahui nilai eigen dari A negatif dan sedikitnya 1 bernilai 0.

Diketahui λ_1 adalah nilai eigen yang negatif dan $\mathbf{x}_1$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 maka $\mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1{}^t\lambda_1\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1{}^t\,\mathbf{x}_1 = \lambda_1\,\|\mathbf{x}_1\|^2 < 0$.

Karena $\mathbf{x}_1{}^t A\,\mathbf{x}_1 < 0$ berarti q = $\mathbf{x}_1{}^t A\,\mathbf{x}_1$ bernilai negatif.

Diketahui λ_2 adalah nilai eigen yang bernilai 0 dan $\mathbf{x}_2$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2 maka $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2{}^t\lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2{}^t\,\mathbf{x}_2 = \lambda_2\,\|\mathbf{x}_2\|^2 = 0$. Karena $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 = 0$ berarti q = $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2$ bernilai 0

Karena $q \le 0$ maka q adalah semi definit negatif.

(iv) Diketahui nilai eigen dari A positif dan sedikitnya 1 bernilai 0.

Diketahui λ_1 adalah nilai eigen yang positif dan $\mathbf{x}_1$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 maka $\mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1{}^t\lambda_1\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1{}^t\,\mathbf{x}_1 = \lambda_1\,\|\mathbf{x}_1\|^2 > 0$.

Karena $\mathbf{x}_1{}^t A\,\mathbf{x}_1 > 0$ berarti q = $\mathbf{x}_1{}^t A\,\mathbf{x}_1$ bernilai positif.

Diketahui λ_2 adalah nilai eigen yang bernilai 0 dan $\mathbf{x}_2$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2 maka $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2{}^t\lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2{}^t\,\mathbf{x}_2 = \lambda_2\,\|\mathbf{x}_2\|^2 = 0$. Karena $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 = 0$ berarti q = $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2$ bernilai 0

Karena $q \ge 0$ maka q adalah semi definit positif.

(v) Diketahui nilai eigen dari A ada yang positif dan ada yang negatif.

Diketahui λ_1 adalah nilai eigen yang positif dan $\mathbf{x}_1$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 maka $\mathbf{x}_1{}^t A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1{}^t \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1{}^t \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \|\mathbf{x}_1\|^2 > 0$.

Karena $\mathbf{x}_1{}^t A\, \mathbf{x}_1 > 0$ berarti $q = \mathbf{x}_1{}^t A\, \mathbf{x}_1$ bernilai positif.

Diketahui λ_2 adalah nilai eigen yang negatif dan $\mathbf{x}_2$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2 maka $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2{}^t \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2{}^t \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \|\mathbf{x}_2\|^2 < 0$. Karena $\mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2 < 0$ berarti $q = \mathbf{x}_2{}^t A\mathbf{x}_2$ bernilai negatif.

Karena $q = \mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$ dapat bernilai positif dan dan dapat negatif, maka q adalah indefinit. ■

Contoh 4.2

Tentukan tanda bentuk kuadrat $q = \mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$ jika diketahui A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}!$$

Penyelesaian

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)-(\lambda-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-1)((\lambda-2)^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 3$.

Karena semua nilai eigen dari A positif maka q disebut definit positif.

2. Optimisasi Fungsi n variabel

Kita dapat memandang bentuk kuadrat sebagai fungsi bernilai real dari $\Re^n$ dengan aturan q(x): $\Re^n \rightarrow \Re$ atau $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$. Permasalahan yang akan kita bahas selanjutnya adalah masalah optimasi fungsi lebih dari 1 variabel dan fungsi ini adalah fungsi bernilai real dan terdiferensialkan secukupnya.

Diketahui f(x) adalah fungsi vektor bernilai real dari **x**, $\mathbf{x} \in \Re^n$ dan $(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ adalah titik kitar dari **x** sedemikian hingga

$$\Delta\mathbf{x} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \dots \quad \delta_n]^t \text{ dan}$$

$$\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = [x_1+\delta_1 \quad x_2+\delta_2 \quad \dots \quad x_n+\delta_n]^t$$

Deret Taylor untuk fungsi n variabel dapat ditulis sebagai

$$f(x_1+\delta_1, \quad x_2+\delta_2, \dots \quad ,x_n+\delta_n) = f(x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots \quad ,x_n) +$$

$$\left(\delta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \frac{1}{2!}\left[\delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta_n\right)\right.$$

$$+ \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta_n\right) + \ldots$$

$$\left. + \delta_n \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta_n\right)\right] + \ldots$$

$$= f(\mathbf{x}) + (\Delta \mathbf{x})^t \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left[\delta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\delta_1 + \delta_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\delta_1 + \ldots + \delta_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\delta_1 + \right.$$

$$\left(\delta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\delta_2 + \delta_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}\delta_2 + \ldots + \delta_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}\delta_2\right) +$$

$$\left. \ldots + \left(\delta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\delta_n + \delta_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}\delta_n + \ldots + \delta_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}\delta_n\right)\right] + \ldots$$

$$= f(\mathbf{x}) + (\Delta \mathbf{x})^t \nabla f(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}(\Delta \mathbf{x})^t H(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \ldots$$

dengan $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}^t$ dan

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

$H(\mathbf{x})$ sering juga disebut matriks Hess

Teorema 4.2

Diketahui H adalah matriks Hess dan titik $\mathbf{x}_0$ adalah titik stasioner. H($\mathbf{x}_0$) adalah Hessian dari fungsi f pada $\mathbf{x}_0$

(i) Jika H ($\mathbf{x}_0$) adalah definit positif maka $\mathbf{x}_0$ adalah minimum lokal dari f.

(ii) Jika H ($\mathbf{x}_0$) adalah definit negatif maka $\mathbf{x}_0$ adalah maksimum lokal dari f.

(iii) Jika H ($\mathbf{x}_0$) adalah indefinit maka $\mathbf{x}_0$ adalah titik pelana dari f.

Bukti

(i) Diketahui H($\mathbf{x}_0$) adalah Hessian dari fungsi f pada $\mathbf{x}_0$ dan $\mathbf{x}_0$ adalah titik stasioner. Untuk $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ maka

$$f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=(\Delta\mathbf{x})^t\nabla f(\mathbf{x}_0)+\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.1)$$

Karena $\mathbf{x}_0$ adalah titik stasioner berarti $\nabla f(\mathbf{x}_0)=0$ sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis sebagai

$$f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}\ +\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.2)$$

Diketahui H ($\mathbf{x}_0$) adalah definit positif dan $\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}$ merupakan bentuk kuadrat dalam $\Delta\mathbf{x}$, sehingga dari definisi 4.1, $\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} > 0$

Berarti $f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)>0 \quad \forall\Delta\mathbf{x}\neq 0$ atau $f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})>f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\Delta\mathbf{x}\neq 0$

Karena $f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})>f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\Delta\mathbf{x}\neq 0$ maka $\mathbf{x}_0$ adalah titik minimum.

(ii) Diketahui H ($\mathbf{x}_0$) adalah definit negatif dan $\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}$ merupakan bentuk kuadrat dalam $\Delta\mathbf{x}$, sehingga dari definisi 4.1 $\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} < 0$

Berarti $f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)<0 \quad \forall\Delta\mathbf{x}\neq 0$ atau $f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})<f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\Delta\mathbf{x}\neq 0$

Karena $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \Delta\mathbf{x} \neq 0$ maka $\mathbf{x}_0$ adalah titik maksimum.

(iii). Diketahui $\mathbf{x}_0$ adalah titik stasioner dari f dan H $(\mathbf{x}_0)$ adalah indefinit. Berarti $\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} > 0$ untuk $\Delta\mathbf{x} \neq 0$ dan $\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} < 0$ untuk $\Delta\mathbf{x}$ yang lain. Karena $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \Delta\mathbf{x} \neq 0$ atau $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) \quad \Delta\mathbf{x} \neq 0$ dan $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$ untuk $\Delta\mathbf{x}$ yang lain atau $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ untuk $\Delta\mathbf{x}$ yang lain, maka $\mathbf{x}_0$ merupakan titik pelana dari f. ■

Contoh 4.3

Diketahui $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\,2} + x_1x_3 - 3\cos x_2 + x_3^{\,2}$. Tentukan jenis ekstrem dari fungsi di atas!

Penyelesaian

Turunan parsial tingkat pertama dari f adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3\sin x_2 \qquad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 + 2x_3$$

Titik stasioner dari f didapat pada $x_1 = x_3 = 0$ dan $x_2 = 2k\pi$. Jadi $\mathbf{x}_0 = (0, 2k\pi, 0)^t$

Turunan parsial tingkat keduanya adalah

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} = 3\cos x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^{\,2}} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Untuk $\mathbf{x}_0 = (0, 2k\pi, 0)$, matriks Hess dari f adalah $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Persamaan karakteristik dari H adalah

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) - (\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)((\lambda - 2)^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

Karena nilai eigen dari H semua positif maka $H(\mathbf{x}_0)$ adalah definit positif dan $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_3 - 3\cos x_2 + x_3^2$ mempunyai minimum lokal di $\mathbf{x}_0 = (0, 2k\pi, 0)$ dan $f(0, 2k\pi, 0) = -3$.

Contoh 4.4

Diketahui $f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4}(x_1^{-4} + x_2^{-4} + x_3^{-4}) + x_2 x_3 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 =$ 0. Tentukan jenis ekstrem dari fungsi di atas!

Penyelesaian

Turunan parsial tingkat pertama dari f adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1^{-5} - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_2^{-5} + x_3 - 2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_3^{-5} + x_2 - 2$$

Titik stasioner dari f didapat pada $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Jadi $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^t$

Turunan parsial tingkat keduanya adalah

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -5x_1^{-6} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -5x_2^{-6} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -5x_3^{-6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 1$$

Untuk $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$, matriks Hess dari f adalah $H = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Persamaan karakteristik dari H adalah

$$(\lambda + 5)^3 - (\lambda + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -5 \quad \lambda_3 = -6$$

Karena nilai eigen dari H semuanya negatif maka $H(\mathbf{x}_0)$ adalah definit negatif dan $f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4}(x_1^{-4} + x_2^{4} + x_3^{-4}) + x_2x_3 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$ mempunyai maksimum lokal di $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$ dan $f(1, 1, 1) = -\frac{19}{4}$

B. BANGUN KUADRAT

Pada bagian ini, kita akan menerapkan pengetahuan kita tentang aljabar linear pada masalah geometri yaitu bagaimana mengenali jenis suatu grafik di bidang XY dan di ruang XYZ jika diketahui persamaannya.

1. Bangun kuadrat dalam R^2

Perhatikan definisi berikut

Definisi 4.2

Persamaan kuadrat dalam dua variabel x dan y adalah suatu persamaan yang berbentuk

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ....(4.3)

dengan a, b, c, d, e dan f adalah konstanta real dan paling sedikit satu dari a, b dan c tidak sama dengan nol.

Pada persamaan (4.3) di atas, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ disebut bagian berderajat 2, $dx + ey$ disebut bagian berderajat 1 dan f disebut suku tetap.

Grafik dari persamaan (4.3) disebut irisan kerucut. Irisan kerucut tersebut adalah elips, parabola atau hiperbola, atau elips terurai, parabola terurai, atau hiperbola terurai. Untuk selanjutnya, yang dibahas adalah irisan kerucut yang tidak terurai. Letak dan bentuk dari irisan kerucut tersebut tergantung dari koefisien-koefisiennya. Ada beberapa kemungkinan yang terjadi, yaitu :

(i) Jika d = e = 0 atau bagian berderajat 1 sama dengan nol.

Persamaan (4.3) akan menjadi

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$ ....(4.4)

Diandaikan ada titik (x_1, y_1) yang terletak pada grafik yang memenuhi persamaan (4.4). Titik $(-x_1, -y_1)$ akan terletak pula pada grafik tersebut. Dengan kata lain grafik tersebut akan mempunyai titik pusat di O(0,0).

(ii) Jika b = 0

Persamaan (4.3) akan menjadi

$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ....(4.5)

Dari persamaan (4.5) akan didapat sumbu-sumbu simetri yang sejajar sumbu koordinat.

Persamaan (4.3) dapat kita tuliskan sebagai

$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$ ....(4.6)

dengan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ dan $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

Karena A adalah matriks simetrik maka ada matriks ortogonal P sedemikian hingga A dapat didiagonalkan secara ortogonal menjadi matriks diagonal D. Karena $P^tAP = D$, maka $P^tAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari A dan vektor-vektor kolom dari P adalah vektor-vektor eigen yang ortonormal dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2.

Diketahui $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. Dari persamaan (4.5) dan dengan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut didapat

$(P\,\mathbf{y})^t A(P\,\mathbf{y}) + K(P\mathbf{y}) + f = 0$ dengan $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} + KP\mathbf{y} + f = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t D\mathbf{y} + KP\mathbf{y} + f = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + (dp_{11} + ep_{21}) x' + (dp_{12} + ep_{22}) y' + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d' x' + e' y' + f = 0 \quad \text{.......(4.7)}$$

dengan $\begin{matrix} d' = dp_{11} + ep_{22} \\ e' = dp_{12} + ep_{22} \end{matrix}$

Persamaan (4.7) di atas merupakan persamaan yang didapat dengan mentransformasikan grafik dari persamaan (4.3) menjadi grafik baru. Kita akan memeriksa kemungkinan-kemungkinan yang akan terjadi untuk irisan kerucut yang tidak terurai.

(i) Jika λ_1 dan λ_2 keduanya tidak sama dengan nol.

Dari persamaan (4.7) didapat

$$\lambda_1 \left((x')^2 + \frac{d' x'}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left((y')^2 + \frac{e' y'}{\lambda_2} \right) + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(x' + \frac{\frac{1}{2} d'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\frac{1}{2} e'}{\lambda_2} \right)^2 + f - \left(\frac{\frac{1}{2} d'}{\lambda_1} \right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{2} e'}{\lambda_2} \right)^2 = 0$$

Dengan mengadakan translasi dengan rumus $x' + \frac{\frac{1}{2} d'}{\lambda_1} = x''$ dan $y' + \frac{\frac{1}{2} e'}{\lambda_2} = y''$

maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 = M \quad \text{.......(4.8)}$$

dengan $M = \left(\frac{\frac{1}{2} d'}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2} e'}{\lambda_2} \right)^2 - f$

Kita juga akan mencari kemungkinan grafik yang akan terbentuk dari persamaan (4.8) (a). Jika λ_1 dan λ_2 bertanda sama maka persamaan (4.8) dapat diubah menjadi

$\frac{(x'')^2}{M/\lambda_1}+\frac{(y'')^2}{M/\lambda_2}=1$ yang merupakan persamaan elips.

Jika $\lambda_1 = \lambda_2$ maka grafik yang terjadi adalah sebuah lingkaran.

(b) Jika λ_1 dan λ_2 tandanya tidak sama maka persamaan (4.8) dapat diubah menjadi

$$\frac{(x'')^2}{M/\lambda_1}+\frac{(y'')^2}{M/\lambda_2}=1$$

Untuk $M/\lambda_1 < 0$ dan $M/\lambda_2 > 0$, persamaan itu merupakan persamaan suatu hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu utama. Jika $M/\lambda_1 > 0$ dan $M/\lambda_2 < 0$ maka sumbu x merupakan sumbu utama hiperbola tersebut.

(ii) Salah satu dari λ_1 dan λ_2 sama dengan nol

(a) $\lambda_1 = 0$

Persamaan (4.7) akan menjadi

$$\lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

$$\lambda_2\left(y'+\frac{\frac{1}{2}e'}{\lambda_2}\right)^2 = -d'x' + \left(\frac{\frac{1}{2}e'}{\lambda_2}\right)^2 - f$$

$$= -d'\left(x' - \frac{\left(\frac{1}{2}e'/\lambda_2\right)^2}{d'} + \frac{f}{d'}\right)$$

Dengan mengadakan translasi dengan rumus $y' + \frac{\frac{1}{2}e'}{\lambda_2} = y''$ dan $x' - \frac{\left(\frac{1}{2}e'/\lambda_2\right)^2}{d'} + \frac{f}{d'} = x''$, maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda_2 (y'')^2 = -d'(x'') \quad \ldots\ldots (4.9)$$

Persamaan (4.9) merupakan persamaan parabola dengan sumbu simetri sumbu x

(b) $\lambda_2 = 0$

Analog dengan (a) di atas, dan didapat persamaan parabola dengan sumbu simetri sumbu y

Yang perlu diperhatikan adalah kita menentukan matriks P yang $|P| = 1$ agar transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ adalah suatu rotasi. Dari uraian di atas, dapat disimpulkan langkah-langkah dalam mengenali jenis (termasuk di dalamnya ukuran/susunan terhadap sumbu koordinat) suatu grafik persamaan kuadrat. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

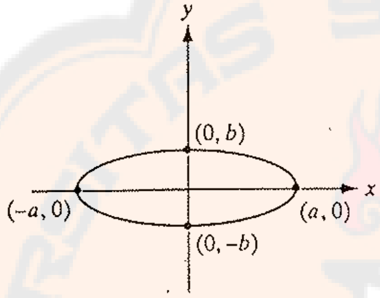
Langkah 1. Mencari matriks $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ yang mendiagonalkan A secara ortogonal.

Langkah 2. Jika perlu mempertukarkan kolom-kolom dari P sedemikian hingga $|P| = 1$.

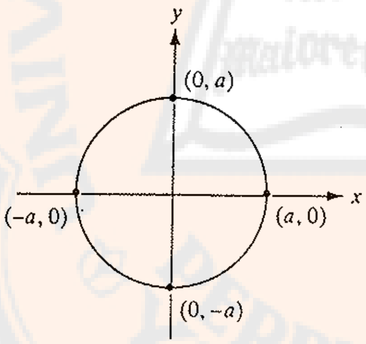
Langkah 3. Mensubstitusikan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ke dalam persamaan (4.6) dan menyelesaikan (menyederhanakan).

Setelah kita menyederhanakan persamaan kuadrat tersebut, akan didapat suatu bentuk baru yang merupakan bentuk kanonik dari irisan kerucut. Grafik dari persamaan kuadrat yang telah disederhanakan tersebut akan berupa salah satu dari bentuk berikut :

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Grafik persamaan ini berupa elips

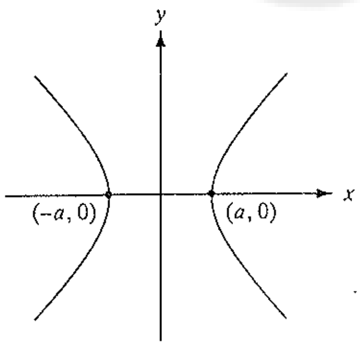


Jika $a^2 = b^2 = 1$ maka grafiknya berupa lingkaran.



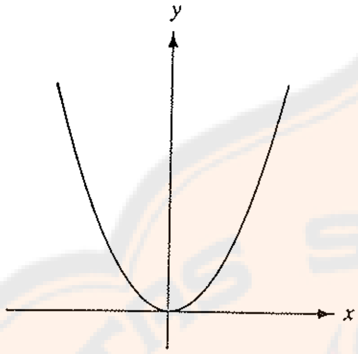
(ii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Grafik berupa hiperbola

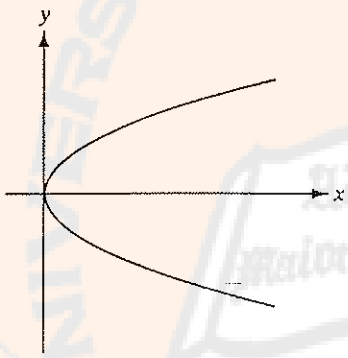


(iii) $x^2 = ay$ atau $y^2 = ax$. Grafiknya berupa parabola

- $x^2 = ay$



- $y^2 = ax$



Perhatikan contoh berikut

Contoh 4.5

Sebutkan jenis grafik yang persamaannya $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$!

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^t A x + K x - 5 = 0 \qquad \text{...(4.10)}$$

Jadi nilai eigen dari A adalah 10 dan 5. Kita dapat memilih vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 10$ misalnya $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Matriks P yang mendiagonalkan A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Karena $|P| = 1$ maka kita tidak perlu menukarkan kolomnya.

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ke dalam persamaan (4.10) didapat

$$\mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} + KP\mathbf{y} - 5 = 0 \quad \text{..........(4.11)}$$

dan karena $P^tAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ maka persamaan (4.11) menjadi

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 5 = 0$$

atau $10(x')^2 + 5(y')^2 - 10\sqrt{5}\, y' - 5 = 0$ ....(4.12)

Persamaan (4.12) dapat ditulis sebagai

$10x' + 5(y' - \sqrt{5})^2 - 25 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 10(x')^2 + 5(y' - \sqrt{5})^2 = 30$ ....(4.13)

Dengan mengadakan translasi $y'' = (y' - \sqrt{5})$ dan $x'' = x'$ maka dari persamaan (4.13) didapat

$$10(x'')^2 + 5(y'')^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{3} + \frac{(y'')^2}{6} = 1$$

Grafik dari persamaan di atas berupa elips dengan a = $\sqrt{3}$ dan b = $\sqrt{6}$

Contoh 4.6

Sebutkan jenis grafik yang persamaannya $x^2 + xy + y^2 = 6$!

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^t A\mathbf{x} - 6 = 0 \qquad \text{...(4.14)}$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda\text{-}1)^2 - \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \tfrac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \tfrac{3}{2})(\lambda - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \tfrac{3}{2} \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$. Kita dapat memilih vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ misalnya $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = \frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriks P yang mendiagonalkan A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Karena $|P| = 1$ maka kita tidak perlu menukarkan kolomnya dan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ adalah suatu rotasi.

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ke dalam persamaan (4.14) didapat

$$\mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} - 6 = 0 \quad \text{...}(4.15)$$

dan karena $P^tAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ maka persamaan (4.15) menjadi

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

atau $\frac{3}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{12} = 1 \quad \text{...}(4.16)$$

Grafik dari persamaan (4.16) berupa elips dengan $a = 2$ dan $b = 2\sqrt{2}$.

Contoh 4.7

Sebutkan jenis grafik yang persamaannya $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$!

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat dituliskan kembali sebagai $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 8 = 0$.........(4.17) dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Nilai eigen dari A adalah 3 dan -2. Kita dapat memilih vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ misalnya $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -2$ adalah $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Matriks P yang mendiagonalkan A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Karena $|P| = 1$ maka kita tidak perlu menukarkan kolomnya dan teransformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ adalah suatu rotasi.

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ke dalam persamaan (4.17) didapat

$$\mathbf{y}'(P'AP)\mathbf{y} + 8 = 0 \qquad \text{.......(4.18)}$$

dan karena $P'AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ maka persamaan (4.18) menjadi

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0 \qquad \text{.......(4.19)}$$

atau $-2(x')^2 + 3(y')^2 + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{4} - \frac{3(y')^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{\frac{8}{3}} = 1 \qquad \text{.......(4.20)}$$

Grafik dari persamaan (4.20) berupa hiperbola dengan $a = 2$ dan $b = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

2. Bangun kuadrat dalam R^3

Selanjutnya akan dibahas persamaan kuadrat dalam 3 variabel. Perhatikan definisi berikut :

Definisi 4.3

Persamaan kuadrat dalam 3 variabel x, y, z adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad \text{.................(4.21)}$$

dengan a, b,...,j adalah konstanta real dan a, b, c, d, e, f tidak semuanya nol.

Pada persamaan (4.21) di atas, $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ disebut bagian berderajat 2, $gx + hy + iz$ disebut bagian berderajat 1 dan j disebut suku tetap.

Grafik dari persamaan kuadrat dalam 3 variabel disebut permukaan kuadrat atau permukaan berderajat dua. Permukaan kuadrat yang tidak terurai yaitu elipsoida, paraboloida eliptik, paraboloida hiperbolik, hiperboloida berdaun satu, dan hiperboloida berdaun dua. Permukaan kuadrat ini selalu diperlukan dalam kalkulus dan geometri analitik.

Letak dan bentuk dari permukaan kuadrat tersebut tergantung dari koefisien-koefisiennya. Ada beberapa kemungkinan yang terjadi, yaitu :

(i) Jika $g = h = i = 0$ atau bagian berderajat 1 sama dengan nol.

Persamaan (4.21) akan menjadi

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + j = 0 \quad \text{..................................(4.22)}$$

Diandaikan ada titik (x_1, y_1, z_1) yang terletak pada grafik yang memenuhi persamaan (4.22). Titik $(-x_1, -y_1, -z_1)$ akan terletak pula pada grafik tersebut. Dengan kata lain grafik tersebut akan mempunyai titik pusat di O(0,0,0).

(ii) Jika $d = e = f = 0$

Persamaan (4.21) akan menjadi

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0 \qquad (4.23)$$

Dari persamaan (4.23) akan didapat bidang-bidang simetri yang sejajar sumbu koordinat.

Persamaan (4.21) dapat kita tuliskan sebagai

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \qquad (4.24)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \text{ dan } \quad K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$$

Pada persamaan (4.24), A adalah matriks simetrik. Oleh karena itu ada matriks ortogonal P sedemikian hingga A dapat didiagonalkan secara ortogonal menjadi matriks diagonal D. Karena $P^tAP = D$ maka $P^tAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

dengan λ_1, λ_2, dan λ_3 adalah nilai eigen dari A dan vektor kolom dari P adalah vektor eigen yang ortonormal dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3.

Diketahui $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. Dari persamaan (4.24) dan dengan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut didapat $(P\mathbf{y})^t A(P\mathbf{y}) + K(P\mathbf{y}) + j = 0$ dengan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t (P^t AP)\mathbf{y} + KP\mathbf{y} + j = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t D\mathbf{y} + KP\mathbf{y} + j = 0$$

$$\Leftrightarrow [x' \quad y' \quad z'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [g \quad h \quad i] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + j = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + (gp_{11} + hp_{21} + ip_{31})x' +$$
$$(gp_{21} + hp_{22} + ip_{23})y' + (gp_{31} + hp_{32} + ip_{33})z' + j = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \quad \text{.............................(4.26)}$$

dengan $g' = gp_{11} + hp_{21} + ip_{31}$

$h' = gp_{21} + hp_{22} + ip_{23}$

$i' = gp_{31} + hp_{32} + ip_{33}$

Persamaan (4.26) merupakan persamaan dari permukaan kuadrat yang baru. Kita akan memeriksa kemungkinan-kemungkinan yang akan terjadi.

(i) Jika λ_1, λ_2 dan λ_3 ketiganya tidak sama dengan nol.

Dari persamaan (4.26) didapat

$$\lambda_1 \left((x')^2 + \frac{g'x'}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left((y')^2 + \frac{h'y'}{\lambda_2} \right) + \lambda_3 \left((z')^2 + \frac{i'z'}{\lambda_3} \right) + j = 0$$

yang ekuivalen dengan

$$\lambda_1\left(x'+\frac{\frac{1}{2}g'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'+\frac{\frac{1}{2}i'}{\lambda_3}\right)+j-\left(\frac{\frac{1}{2}g'}{\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{\frac{1}{2}i'}{\lambda_3}\right)^2=0$$

Dengan mengadakan translasi dengan rumus $x'+\frac{\frac{1}{2}g'}{\lambda_1}=x''$, $y'+\frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2}=y''$,

dan $z'+\frac{\frac{1}{2}i'}{\lambda_3}=z''$ maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2=M \quad \text{.......(4.27)}$$

dengan $M=\left(\frac{\frac{1}{2}d'}{\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}e'}{\lambda_2}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}e'}{\lambda_3}\right)^2-j$

Kita juga akan mencari kemungkinan grafik yang akan terbentuk dari persamaan (4.27)

(a). Jika λ_1, λ_2 dan λ_3 bertanda sama maka persamaan (4.27) dapat diubah menjadi

$\frac{(x'')^2}{M/\lambda_1}+\frac{(y'')^2}{M/\lambda_2}+\frac{(z'')^2}{M/\lambda_3}=1$ yang merupakan persamaan elipsoida.

Jika $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ maka grafik yang terjadi adalah sebuah bola.

(b) Jika ada dua nilai eigen yang tandanya sama dan nilai eigen yang satu berlainan tanda

- Jika ada dua nilai eigen yang bertanda positif, misalkan λ_1 dan λ_2, dan satu nilai eigen bertanda negatif, misalkan λ_3, maka persamaan (4.27) dapat diubah menjadi

$\frac{(x'')^2}{M/\lambda_1} + \frac{(y'')^2}{M/\lambda_2} - \frac{(z'')^2}{M/\lambda_3} = 1$ yang berupa persamaan hiperboloida berdaun satu.

- Jika ada dua nilai eigen yang bertanda positif, misalkan λ_1 dan λ_2, dan satu nilai eigen bertanda negatif, misalkan λ_3, maka persamaan (4.27) dapat diubah menjadi

  $-\frac{(x'')^2}{M/\lambda_1} - \frac{(y'')^2}{M/\lambda_2} + \frac{(z'')^2}{M/\lambda_3} = 1$ yang berupa persamaan hiperboloida berdaun dua.

(ii) Salah satu dari λ_1, λ_2, dan λ_3 sama dengan nol

(a) $\lambda_1 = 0$

Persamaan (4.26) akan menjadi

$$\lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2\left(y' + \frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_3}\right)^2 = -g'x' + \left(\frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}i'}{\lambda_3}\right)^2 - j$$

$$= -g'\left(x' - \frac{(\frac{1}{2}h'/\lambda_2)^2}{g'} - \frac{(\frac{1}{2}i'/\lambda_3)^2}{g'} + \frac{j}{g'}\right)$$

Dengan mengadakan translasi dengan rumus

$$y' + \frac{\frac{1}{2}h'}{\lambda_2} = y'' \;,\; z' + \frac{\frac{1}{2}i'}{\lambda_2} = z'' \;,\text{ dan } x' - \frac{(\frac{1}{2}h'/\lambda_2)^2}{g'} - \frac{(\frac{1}{2}i'/\lambda_3)^2}{g'} + \frac{j}{g'} = x'',$$

maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 = -g'(x'') \qquad (4.28)$$

- Jika λ_2 dan λ_3 bertanda sama, maka persamaan (4.28) akan menjadi $\frac{(y'')^2}{\lambda_2/g'} + \frac{(z'')^2}{\lambda_3/g'} = x''$ yang merupakan persamaan paraboloida eliptik.
- Jika λ_2 dan λ_3 berlawanan tanda, maka persamaan (4.28) akan menjadi $\frac{(y'')^2}{\lambda_2/g'} - \frac{(z'')^2}{\lambda_3/g'} = \pm x''$ yang merupakan persamaan paraboloida hiperbolik.

(b) $\lambda_2 = 0$

Analog dengan (a) di atas, dan jika λ_1 dan λ_3 bertanda sama, maka persamaan (4.28) merupakan persamaan paraboloida eliptik. Jika λ_1 dan λ_3 berlawanan tanda, maka persamaan (4.28) merupakan persamaan paraboloida hiperbolik.

(c) $\lambda_3 = 0$

Analog dengan (a) di atas, dan jika λ_1 dan λ_2 bertanda sama, maka persamaan (4.28) merupakan persamaan paraboloida eliptik. Jika λ_1 dan λ_2 berlawanan tanda, maka persamaan (4.28) merupakan persamaan paraboloida hiperbolik.

Yang perlu diperhatikan adalah kita menentukan matriks P yang $|P| = 1$ agar transformasi $\mathbf{x} = P\ \mathbf{y}$ adalah suatu rotasi. Dari uraian di atas, dapat disimpulkan langkah-langkah dalam mengenali jenis suatu grafik persamaan kuadrat. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

Langkah 1. Mencari matriks $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ yang mendiagonalkan A secara ortogonal.

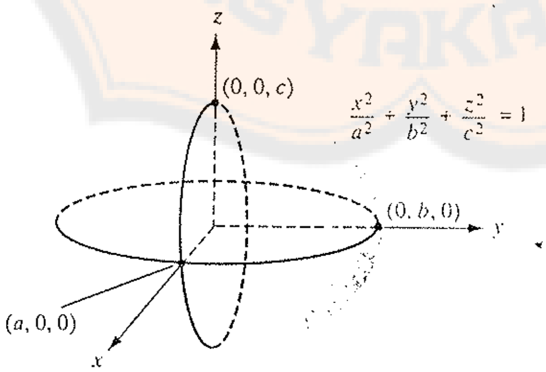
Langkah 2. Jika perlu, mempertukarkan kolom-kolom dari P sedemikian hingga $|P| = 1$.

Langkah 3. Mensubstitusikan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ tersebut ke dalam persamaan (4.24) dan menyelesaikan (menyederhanakan).

Setelah kita menyederhanakan persamaan kuadrat tersebut, akan didapat suatu bentuk baru yang merupakan bentuk kanonik dari persamaan kuadrat tersebut. Grafik dari persamaan kuadrat yang telah disederhanakan akan berupa salah satu dari bentuk berikut

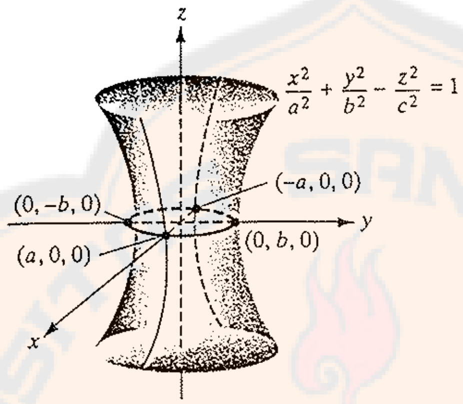
(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Grafiknya berupa elipsoida. Jika a = b = c, maka grafiknya berupa bola.



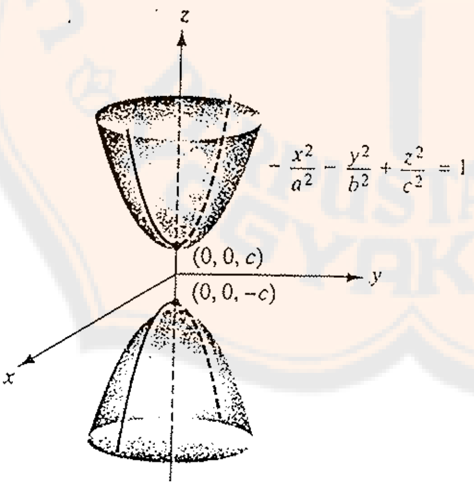
(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Grafiknya berupa hiperboloida berdaun satu.



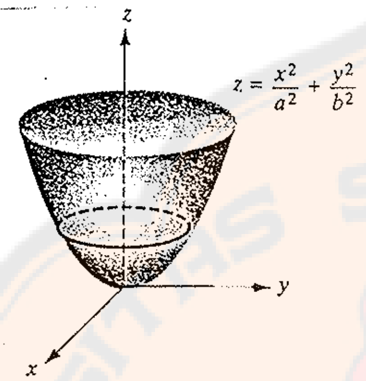
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Grafiknya berupa hiperboloida berdaun dua



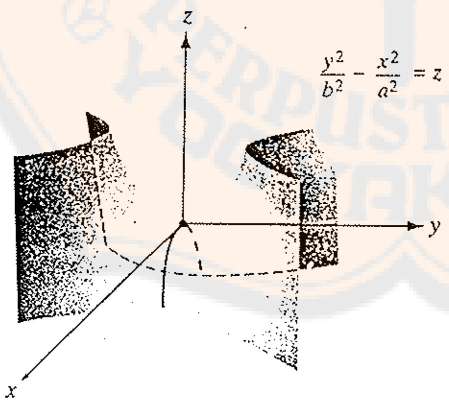
(iii) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $\quad y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ $\quad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

Grafiknya berupa paraboloida eliptik



$\pm z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $\quad \pm y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$ $\quad \pm x = \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$

Grafiknya berupa paraboloida hiperbolik



Perhatikan contoh berikut

Contoh 4.8

Diketahui persamaan kuadrat dalam 3 variabel adalah $3x^2+3y^2+5z^2-4xy-25=0$. Tentukan jenis grafiknya!

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai $\mathbf{x}'A\mathbf{x}-25=0$ dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah vektor tidak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan kita dapat memilih $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ adalah vektor tidak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan kita pilih $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matriks P yang mendiagonalkan A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|P| = 1$ maka kita tidak perlu mempertukarkan kolom-kolomnya dan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ adalah suatu rotasi.

Dengan mensubstitusikan persamaan $\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$ ke dalam $\mathbf{x}^t\mathrm{A}\mathbf{x} - 25 = 0$ didapat

$$(\mathrm{P}\mathbf{y})^t\mathrm{A}(\mathrm{P}\mathbf{y}) - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t\mathrm{P}^t\mathrm{A}\mathrm{P}\mathbf{y} - 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^t\mathrm{D}\mathbf{y} - 25 = 0$$

Hal itu terjadi karena $\mathrm{P}^t\mathrm{AP} = \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Karena $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ maka kita peroleh persamaan baru dari bentuk

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 25 = 0 \text{ yaitu}$$

$$(x')^2 + 5(y')^2 + 5(z')^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2 + 5(y')^2 + 5(z')^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{5} + \frac{(z')^2}{5} = 1$$

yang merupakan persamaan elipsoida dengan $a = 5$ dan $b = c = \sqrt{5}$.

Contoh 4.9

Klasifikasikan permukaan kuadrat yang persamaannya $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz - 3x + 2y - 4z = 5$!

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} = 5$ dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } K = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 5$.

Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 5$ berturut-turut adalah $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ dan $\mathbf{x}_3$ saling ortogonal. Matriks P yang akan mendiagonalkan A secara ortogonal adalah

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena $|P| = 1$ maka kita tidak perlu mempertukarkan kolom-kolomnya dan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ adalah suatu rotasi.

Dengan mensubstitusikan persamaan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ke dalam $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} = 5$ didapat $(P\mathbf{y})^t A(P\mathbf{y}) + K(P\mathbf{y}) = 5$ dan karena $P^t AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

maka persamaan $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} = 5$ menjadi

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 5$$

atau $2(y')^2 + 5(z')^2 - 2\sqrt{5}\,x' + 2y' - \sqrt{5}z' = 5$

$$\Leftrightarrow 2\left(y'+\frac{1}{2}\right)^2+5\left(z'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2=2\sqrt{5}\left(x'+\frac{23}{8\sqrt{5}}\right)$$

Dengan mengadakan translasi $y''=(y'+\frac{1}{2})$, $x''=x'+\frac{23}{8\sqrt{5}}$ dan $z''=z'-\frac{1}{2\sqrt{5}}$

didapat $\frac{(y'')^2}{\sqrt{5}}+\frac{(z'')^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=x'$ yang merupakan persamaan paraboloida eliptik

dengan $b^2=\sqrt{5}$ dan $c^2=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

C. PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

Pada bagian ini kita akan membahas bagaimana menerapkan pendiagonalan matriks dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan. Yang dimaksud dengan suatu *persamaan diferensial* adalah persamaan yang memuat derivatif dari satu atau lebih peubah bebas.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear Tingkat Pertama

Salah satu bentuk persamaan diferensial yang paling sederhana adalah

$$y' = ay \quad \text{.......... (4.29)}$$

dengan $y'=\frac{dy}{dx}$ dan $a \in \Re$

Penyelesaian dari persamaan (4.29) adalah

$$y = ce^{ax} \quad \text{.......... (4.30)}$$

dengan $a, c \in \Re$. Penyelesaian ini dinamakan penyelesaian umum dari persamaan (4.29). Yang dimaksud dengan *penyelesaian suatu persamaan* *diferensial* adalah sebarang fungsi f yang terdefinisikan yang bila disubstitusikan dalam persamaan diferensial akan membuatnya menjadi suatu identitas.

Jika pada persamaan (4.29) diberikan syarat tambahan misalnya $y(0) = y_0$ maka penyelesaiannya dinamakan penyelesaian khusus yaitu

$$y = y_0 e^{ax} \qquad \text{(4.31)}$$

Bentuk umum dari sistem n persamaan diferensial linear homogen tingkat pertama dengan koefisien konstan adalah

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \qquad \text{(4.32)} \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

dengan $y_i = f_i(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang akan dicari dan a_{ij} adalah konstanta real, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

Bentuk (4.32) dapat kita tuliskan dalam notasi matriks yaitu

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

atau $Y' = AY$ .... (4.33)

dengan $Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Sistem dalam persamaan (4.33) disebut sistem yang diagonal jika A merupakan matriks diagonal. Jika A merupakan matriks diagonal, maka persamaan (4.32) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 \\ y_2' &= a_{22} y_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{nn} y_n \end{aligned} \qquad \text{.......} (4.34)$$

dan persamaan (4.34) akan menjadi atau $Y' = DY$ .... (4.35)

dengan $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Sistem dalam persamaan (4.35) mudah diselesaikan secara langsung karena pada masing-masing persamaannya berbentuk seperti persamaan (4.34) yang mempunyai penyelesaian umum seperti pada persamaan (4.30). Penyelesaian persamaan (4.35) adalah

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{a_{11}x} \\ y_2 &= c_2 e^{a_{22}x} \\ &\vdots \\ y_n &= c_n e^{a_{nn}x} \end{aligned}$$

dengan $c_i \in \Re$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$

Contoh 4.10

Diketahui sistem berikut

$$y_1' = -3y_1$$

$$y_2' = 4y_2$$

$$y_3' = y_3$$

Tuliskan sistem tersebut dalam notasi matriks kemudian selesaikanlah !

Penyelesaian

Sistem tersebut jika dituliskan dalam notasi matriks adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan matriks diagonal, maka penyelesaian sistem di atas adalah

$$y_1 = c_1 e^{-3x}$$

$$y_2 = c_2 e^{4x}$$

$$y_3 = c_3 e^{2x}$$

atau dalam notasi matriks

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-3x} \\ c_2 e^{4x} \\ c_3 e^{2x} \end{bmatrix}$$

Seandainya sistem (4.32) tidak merupakan sistem yang diagonal, maka penyelesaiannya tidak semudah cara di atas. Kita tetap dapat menyelesaikannya dengan menggunakan substitusi yang sesuai, yang pada akhirnya membuat matriks A dapat didiagonalkan.

Diketahui A dapat didiagonalkan dan P adalah matriks non singgular sedemikian hingga

$$P^{-1}AP = D \qquad (4.36)$$

dan D adalah matriks diagonal.

Pada persamaan (4.32) yaitu $Y' = AY$, kedua ruas dikalikan dengan P^{-1} dan didapat

$$P^{-1}Y' = P^{-1}AY$$

$$P^{-1}Y' = P^{-1}A(PP^{-1})Y$$

$$= (P^{-1}AP)P^{-1}Y \qquad (4.37)$$

Kita harus mensubstitusikan $Y = PU$ .... (4.38)

dengan $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$ sedemikian hingga sistem (4.37) akan menjadi sistem persamaan diferensial yang matriks koefisiennya berupa matriks diagonal.

Karena P adalah matriks non singgular dan elemennya berupa konstanta, maka dari persamaan (4.38) didapat $Y' = PU'$ .... (4.39)

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.33), (4.38) dan (4.39) ke dalam persamaan (4.37) didapat

$$P^{-1}PU' = (P^{-1}AP)P^{-1}PU$$

$$U' = DU \qquad (4.40)$$

Karena persamaan (4.40) sudah merupakan sistem yang diagonal maka kita dapat mencari penyelesaiannya dengan menggunakan metode yang telah dibahas sebelumnya. Yang perlu diperhatikan adalah kita harus mencari matriks P sebagai matriks yang akan mendiagonalkan matriks koefisien A.

Dari pembahasan di atas, kita mendapatkan langkah-langkah untuk memecahkan sistem persamaan diferensial linear $Y' = AY$ dengan A bukan merupakan matriks diagonal namun dapat didiagonalkan. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari matriks P yang mendiagonalkan A

Langkah 2. Membuat substitusi $Y = PU$ dengan $Y' = PU'$ sehingga didapat sistem baru $U' = DU$ dengan $D = P^{-1}AP$

Langkah 3. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial $U' = DU$

Langkah 4. Mengembalikannya ke persamaan semula yaitu $Y = PU$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut

<u>Contoh 4.11</u>

Selesaikan sistem berikut ini !

$$y_1' = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

Penyelesaian

Sistem tersebut dapat ditulis sebagai $Y' = AY$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ serta } Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 8$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor tak nol $\mathbf{x}$ yang memenuhi $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi kita dapat memilih $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 8$ adalah vektor tak nol yang memenuhi $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi dapat dipilih $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kita dapat membentuk $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan P inilah yang akan mendiagonalkan A dan

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = D$$

Dengan substitusi $Y = PU$ dan $Y' = PU'$ didapat $U' = DU$ sehingga

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

atau

$$u_1' = 2u_1$$
$$u_2' = 2u_2$$
$$u_3' = 8u_3$$

yang mempunyai penyelesaian umum

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{2x} \\ u_3 &= c_3 e^{8x} \end{aligned} \quad \text{atau} \quad U = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{2x} \\ c_3 e^{8x} \end{bmatrix}$$

Jadi $Y = PU$ menghasilkan

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{2x} \\ c_3 e^{8x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} + c_3 e^{8x} \\ c_2 e^{2x} + c_3 e^{8x} \\ (-c_1 - c_2)e^{2x} + c_3 e^{8x} \end{bmatrix}$$

atau $y_1 = c_1 e^{2x} + c_3 e^{8x}$

$y_2 = c_2 e^{2x} + c_3 e^{8x}$

$y_3 = (-c_1 - c_2)e^{2x} + c_3 e^{8x}$

2. Persamaan Diferensial Linear Homogen tingkat-n dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen tingkat-n dengan koefisien konstan adalah

$$y^{(n)} + A_n y^{(n-1)} + \ldots + A_3 y'' + A_2 y' + A_1 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.41)$$

dengan $A_i \in \Re$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $A_1 \neq 0$.

Persamaan (4.41) tersebut dapat ditransformasikan sedemikian hingga ekuivalen dengan sistem persamaan diferensial linear tingkat pertama dengan koefisien konstan oleh suatu transformasi $Y' = AY$ dengan mensubstitusikan

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.42)$$

Secara umum, jika kita mempunyai sistem persamaan diferensial linear homogen tingkat-n dengan koefisien seperti pada persamaan (4.41), maka dengan menggunakan transformasi seperti pada bentuk (4.42) kita akan mendapatkan suatu sistem baru yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & . & . & . & -A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{.............................}(4.43)$$

Sebuah kasus sederhana, pada persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan tingkat 2 yang berbentuk $y''+py'+qy=0$ ....(4.44)

Dengan mensubstitusikan $y_1 = y$ dan $y_2 = y'$ didapat

$$y_1' = y' = y_2 \text{ ....} (4.45)$$

$$y_2' = y'' = -py' - qy$$

$$= -py_2 - qy_1$$

yang dapat juga ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ ....}(4.46)$$

yang merupakan kejadian khusus dari persamaan (4.43) untuk $n = 2$.

<u>Contoh 4.12</u>

Selesaikanlah persamaan diferensial $y''-y'-6y=0$!

Penyelesaian

Pada persamaan diferensial tersebut, $A_1 = -6$, $A_2 = -1$ dan jika ditulis dalam persamaan (4.30) menjadi

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_1 = 3$.Kita dapat memilih vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -2$ yaitu $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = 3$ kita pilih $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sehingga kita dapat membentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ yang akan mendiagonalkan A dan

$$P^{-1}AP = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

Dengan substitusi Y=PU dan Y' = PU' menghasilkan U' = DU

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{matrix} U_1' = -2U_1 \\ U_2' = 3U_2 \end{matrix}$$

yang mempunyai penyelesaian umum $U_1 = c_1\, e^{2x}$

$$U_2 = c_2\, e^{3x}$$

atau $U = \begin{bmatrix} c_1\, e^{2x} \\ c_2\, e^{3x} \end{bmatrix}$

Jadi Y=PU menghasilkan $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$

$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

$y_2 = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$

Dari bentuk (4.42) yaitu substitusi $y_1 = y$ dan $y_2 = y'$ maka $y = y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial $y''-y'-6y = 0$. Sedangkan $y_2 = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$ merupakan derivatif dari y_1.

Contoh 4.13

Diketahui $y_1'' = -2y_2 + y_1' + 2y_2'$

$y_2'' = 2y_1 + 2y_1' - y_2'$

Selesaikanlah sistem persamaan tersebut jika diketahui $y_1(0) = 1$ $y_1'(0) = -3$ $y_2(0) = 0$ $y_2'(0) = 2$!

Penyelesaian

Dengan menggunakan substitusi $y_3 = y_1'$ dan $y_4 = y_2'$ akan memberikan sistem persamaan diferensial linear tingkat pertama yang ekuivalen dengan sistem di atas, yaitu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -2y_2 + y_3 + 2y_4 \end{aligned} \qquad \text{.........(4.47)}$$

$y_4' = 2y_1 + 2y_3 - y_4$

Matriks koefisien dari persamaan (4.47) adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ dan nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, dan $\lambda_4 = -2$. Vektor eigen-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, dan $\lambda_4 = -2$ berturut-turut adalah

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ sehingga kita dapat membentuk

matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ yang akan mendiagonalkan A dan

$$P^{-1}AP = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

Dengan substitusi $Y = PU$ dan $Y' = PU'$ menghasilkan $U' = DU$

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \\ U_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{aligned} U_1' &= U_1 \\ U_2' &= -U_2 \\ U_3' &= 2U_3 \\ U_4' &= -2U_4 \end{aligned}$$

yang mempunyai penyelesaian umum

$$\begin{aligned} U_1 &= c_1e^{x} \\ U_2 &= c_2e^{-x} \\ U_3 &= c_3e^{2x} \\ U_4 &= c_4e^{-2x} \end{aligned} \quad \text{atau } U = \begin{bmatrix} c_1e^{x} \\ c_2e^{-x} \\ c_3e^{2x} \\ c_4e^{-2x} \end{bmatrix}$$

Jadi $Y = PU$ menghasilkan $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{x} \\ c_2e^{-x} \\ c_3e^{2x} \\ c_4e^{-2x} \end{bmatrix}$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai $y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 0$ $y_1'(0) = -3$ dan

$y_2'(0) = 2$ pada persamaan

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{x} + 2c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + 2c_4e^{-2x} \\ y_2 &= 2c_1e^{x} - c_2e^{-x} + c_3e^{2x} - c_4e^{-2x} \\ y_1' &= c_1e^{x} - 2c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x} - 4c_4e^{-2x} \\ y_2' &= 2c_1e^{x} + c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x} + 2c_4e^{-2x} \end{aligned}$$

didapat $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$, dan $c_4 = 1$

Sehingga penyelesaian khusus dari sistem persamaan yang dimaksud adalah

$$y_1 = e^x - e^{2x} + e^{-2x}$$
$$y_2 = 2e^x - e^{2x} - e^{-2x}$$
$$y_3 = e^x - 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$
$$y_4 = 2e^x - 2e^{2x} + 2e^{-2x}$$

D. GENETIKA

Dalam subbab ini kita akan membahas pewarisan sifat dan penyakit genetika pada makhluk hidup sampai generasi ke-n. Untuk menghitung sampai pada generasi ke-n membutuhkan suatu perhitungan yang cukup rumit. Kita akan membahas proses penyederhanaan perhitungan tersebut melalui pendiagonalan matriks. Sebelumnya akan diperkenalkan terlebih dahulu beberapa istilah yang sering digunakan, antara lain:

- Gen : unit terkecil dari genetika. Simbol untuk suatu gen dinyatakan dengan sebuah huruf, misalnya A dan a.
- Genotip : susunan genetika suatu individu yang tidak dapat diamati secara langsung. Genotip suatu individu dinyatakan dengan huruf dobel, misalnya Aa, aa, AA.
- Homozigotik : sifat individu yang genotipnya terdiri dari gen-gen yang sama dari tiap jenis gen, misalnya AA, aa.
- Heterozigotik: sifat individu yang genotipnya terdiri dari gen-gen yang berlainan dari tiap jenis gen, misalnya Aa.
- Kromosom : Benda halus berbentuk lurus seperti batang atau bengkok dan terdiri dari zat yang mudah mengikat warna.

- Autosom : Kromosom yang tidak ada hubungannya dengan penentuan jenis kelamin. Dalam intisel ada 46 kromosom dan yang merupakan autosom ada 44 buah.
- Alel : Anggota dari sepasang gen.

Dasar genetika yang dipakai dalam penulisan ini adalah Hukum Mendel I karena yang dibahas dalam subbab ini adalah perkawinan individu berdasarkan satu karakteristik sifat saja. Hukum ini disebut juga hukum segresi atau pemisahan gen yang sealel.

Ada tiga masalah yang akan dibahas dalam subbab ini yaitu warisan autosomal, penyakit terpendam autosomal dan pewarisan sifat yang terangkai dengan kromosom X. Dalam warisan autosomal, setiap individu akan memiliki salah satu dari ketiga macam genotip yang mungkin yaitu AA, Aa atau aa. Gen A disebut dominan terhadap a dan a disebut resesif terhadap A. Pada pewarisan sifatnya, seorang individu akan menerima satu gen dari induk jantan dan satu dari induk betina dengan kemungkinan yang sama. Keturunan yang terjadi tidak pernah disebutkan jenis kelaminnya karena sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada autosom diwariskan oleh induknya tanpa membedakan jenis kelamin.

Masih berkaitan dengan warisan autosomal, kita juga akan membahas penyakit terpendam autosomal yaitu penyakit genetika yang ditentukan oleh gen resesif pada suatu individu. Penyakit ini akan terdapat pada individu yang memiliki minimal satu dari induknya bergenotip heterozigotik (Aa) ataupun resesif homozigotik (aa).

Selain gen-gen autosom, dikenal pula gen-gen yang terdapat di dalam kromosom kelamin yang dinamakan rangkai kelamin. Pada pewarisan sifat yang terangkai dengan kromosom X, induk jantan hanya memiliki sebuah kromosom X saja sehingga ia hanya dapat normal (A -) atau penderita (a -).

1. Pewarisan sifat autosomal

Yang dimaksud dengan sifat autosomal adalah sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada autosom. Sifat keturunan ini akan dapat dijumpai pada individu jantan atau betina karena mereka memiliki autosom yang sama.

Pada pewarisan ini, setiap individu baru yang terbentuk akan mewarisi satu kromosom dari setiap pasangan kromosom induknya yang terjadi secara kebetulan. Jika induknya bergenotip AA, maka keturunannya akan mewarisi kromosom A dari induk itu dan satu lagi dari induk yang lain. Misalnya induk yang lain bergenotip Aa maka keturunannya akan mewarisi kromosom A atau a dengan kemungkinan yang sama. Keturunan yang mungkin terjadi hanyalah bergenotip AA atau Aa saja dan tidak mungkin bergenotip aa.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan tabel berikut yang merupakan genotip keturunan jika induknya bergenotip seperti yang tertera berikut:

Tabel 1

(Tabel genotip yang diwariskan oleh kedua induk pada keturunannya)

Betina / Jantan	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

Betina / Jantan	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

Betina / Jantan	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

Betina / Jantan	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Betina / Jantan	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

Betina / Jantan	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

Dari tabel 1 di atas, kita akan mendaftar peluang-peluang dari genotip yang mungkin diwarisi oleh keturunan dari genotip yang dimiliki oleh kedua induknya dan didapat tabel 2 berikut:

Tabel 2

(Tabel peluang genotip keturunan yang diwariskan oleh kedua induk)

Genotip induk / Keturunan	AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Kita akan menurunkan rumus untuk bagian individu yang genotipnya AA, Aa dan aa dalam generasi ke-n untuk n = 0, 1, 2, ...

Dimisalkan

a_n : bagian dari tumbuhan yang bergenotip AA pada generasi ke-n.

b_n : bagian dari tumbuhan yang bergenotip Aa pada generasi ke-n.

c_n : bagian dari tumbuhan yang bergenotip aa pada generasi ke-n.

a_o, b_o, c_o : distribusi mula-mula dari genotip-genotip tersebut.

$a_n + b_n + c_n = 1$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Dalam menentukan distribusi genotip ini, ada 3 kemungkinan genotip induk yang digunakan sebagai kontrol yaitu induk yang minimal salah satunya bergenotip AA, Aa atau aa. Dengan menggunakan tabel 2 dapat ditentukan distribusi genotip dari setiap generasi dari distribusi genotip induk dan disusun sistem persamaan dalam a_n, b_n dan c_n dengan variabel bebasnya a_{n-1}, b_{n-1} dan c_{n-1}, atau

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\ \mathbf{x}^{(n-1)} \qquad \forall\, n = 1,2,3,\ldots \tag{4.48}$$

dengan $\mathbf{x}^{(n)} = [a_n \quad b_n \quad c_n]^t$, $\mathbf{x}^{(n-1)} = [a_{n-1} \quad b_{n-1} \quad c_{n-1}]^t$, dan M adalah matriks dari distribusi genotip induk.

Dari persamaan (4.35) didapat $\mathbf{x}^{(n)} = M\,\mathbf{x}^{(n-1)} = M^2\,\mathbf{x}^{(n-2)} = M^3\,\mathbf{x}^{(n-3)}$

$$= \ldots = M^n\,\mathbf{x}^{(o)} \tag{4.49}$$

sehingga jika kita ingin mencari $\mathbf{x}^{(n)}$, cukup mencari pernyataan eksplisit untuk M^n dengan cara mendiagonalkan matriks M dan mencari matriks D sedemikian hingga

$$M = P\,D\,P^{-1}$$

$$M^2 = (P\,D\,P^{-1})\,(P\,D\,P^{-1})$$

$$= P\,D^2\,P^{-1}$$

$$M^2 = M^2\,M$$

$$= P\,D^3\,P^{-1}$$

.

.

.

$$M^n = P\,D^n\,P^{-1} \tag{4.50}$$

dengan D adalah matriks diagonal dan $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}^n$ dengan

λ_i merupakan nilai-nilai eigen dari M dan i = 1, 2, 3,. . .,n

Selanjutnya, kita akan mencari matriks P yang mendiagonalkan M dan dengan mensubstitusikan persamaan (4.50) ke dalam persamaan (4.49) didapat

$\mathbf{x}^{(n)} = P\, D^n\, P^{-1}\, \mathbf{x}^{(o)}$ ....(4.51)

$\mathbf{x}^{(n)}$ ini adalah rumus distribusi genotip pada generasi ke-n.

Contoh 4.14

Ada seorang petani yang mempunyai populasi tumbuhan yang luas dan terdiri dari distribusi ketiga macam genotip yang mungkin yaitu AA, Aa dan aa. Dia ingin mencoba meningkatkan program pengembangbiakan dengan menyuburkan tumbuhan yang bergenotip Aa dengan harapan hasil yang didapat akan lebih meningkat. Turunkanlah rumus untuk bagian tumbuhan yang genotipnya AA,Aa dan aa dalam generasi ke-n dan carilah distribusi genotip jika $n \to \infty$ dan n = 0, 1, 2, ...

Penyelesaian

Dari tabel 2, kita dapatkan

Keturunan \ Induk	AA-Aa	Aa-Aa	Aa-aa
AA	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Dengan memisalkan a_n , b_n dan c_n masing-masing adalah bagian dari tumbuhan yang bergenotip AA, Aa dan aa dalam generasi ke-n dan dengan menggunakan persamaan dalam a_n, b_n dan c_n didapat

$$
\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{2}\, a_{n-1} + \tfrac{1}{4}\, b_{n-1} \\
b_n &= \tfrac{1}{2}\, a_{n-1} + \tfrac{1}{2}\, b_{n-1} + \tfrac{1}{2}\, c_{n-1} \qquad \text{.............................(4.52)} \\
c_n &= \tfrac{1}{4}\, b_{n-1} + \tfrac{1}{2}\, c_{n-1}
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.52) di atas menyatakan bahwa $\frac{1}{2}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip AA akan bergenotip AA dan $\frac{1}{4}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip Aa akan bergenotip AA; $\frac{1}{2}$ dari tumbuhan yang bergenotip AA akan mempunyai keturunan bergenotip Aa dan $\frac{1}{2}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip Aa akan bergenotip Aa dan $\frac{1}{2}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip aa akan bergenotip Aa; serta genotip aa akan diperoleh dari $\frac{1}{4}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip Aa dan $\frac{1}{2}$ dari keturunan tumbuhan yang bergenotip aa.

Persamaan (4.52) di atas dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = M\,\mathbf{x}^{(n-1)}$ dengan $\mathbf{x}^{(n)} = [a_n \quad b_n \quad c_n]^t$, $\mathbf{x}^{(n-1)} = [a_{n-1} \quad b_{n-1} \quad c_{n-1}]^t$ dan $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari M adalah $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$ dan $\lambda_3=1$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=0$ adalah vektor tak nol yang memenuhi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dan akan dipenuhi untuk

$x_1 = s, x_2 = -2s, x_3 = s$, $s \in \Re$. Jadi $\mathbf{x}_1 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \Re$ dan kita dapat memilih vektor eigen $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2=\frac{1}{2}$ dapat kita pilih $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_3=1$ dapat kita pilih $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriks P yang terbentuk adalah $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ sedemikian hingga

$$P^{-1}MP=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=D$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diketahui ke dalam persamaan (4.51) didapat

$$\mathbf{x}^{(n)}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0\\ 0 & 0 & 1^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_o\\ b_o\\ c_o\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & (\frac{1}{2})^n & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_o\\ b_o\\ c_o\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\frac{1}{2})^{n+1}a_o-(\frac{1}{2})^{n+1}c_o+\frac{1}{4}(a_o+b_o+c_o)\\ \frac{1}{2}(a_o+b_o+c_o)\\ \frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{n+1}a_o+(\frac{1}{2})^{n+1}c_o\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+(\frac{1}{2})^{n+1}(a_o-c_o)\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{n+1}(a_o-c_o)\end{bmatrix}$$

Jadi didapat $a_n=\frac{1}{4}+(\frac{1}{2})^{n+1}(a_o-c_o)$

$$b_n=\frac{1}{2} \qquad \text{.......................................(4.53)}$$

$$c_n=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{n+1}(a_o-c_o)$$

untuk n = 1, 2, 3, …

Persamaan (4.53) di atas merupakan rumus eksplisit untuk bagian pada masing-masing genotip dalam generasi ke-n yang dinyatakan dalam bagian-bagian generasi awal yaitu a_o, b_o dan c_o. Pada generasi ke-n, jika $n \to \infty$ maka $(\frac{1}{2})^n$ mendekati 0 sehingga dari persamaan (4.53) didapat

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \frac{1}{4} \\ b_n \to \frac{1}{2} \\ c_n \to \frac{1}{4} \end{array}\right. \qquad \text{jika } n \to \infty$$

Dengan kata lain jika tanaman yang disuburi adalah tanaman yang bergenotip Aa, pada $n \to \infty$ masih terdapat tanaman yang bergenotip aa sebesar $\frac{1}{4}$ bagian, Aa $\frac{1}{2}$ bagian dan AA $\frac{1}{4}$ bagian.

2. Penyakit terpendam autosomal

Penyakit genetika ini akan dialami oleh individu yang kedua induknya heterozigotik. Biasanya kedua induk tersebut akan tampak normal walaupun mereka pembawa gen resesif (carier).

Andaikan kedua induknya bergenotip AA, tidak mungkin keturunannya menderita penyakit tersebut. Hal ini terjadi seperti pada warisan autosomal, yaitu keturunannya akan mewarisi satu kromosom dari induk yang satu dengan kemungkinan yang sama dan satu kromosom dari induk yang lain dengan kemungkinan yang sama pula. Individu yang normal akan bergenotip AA, sedangkan yang menderita penyakit tersebut bergenotip aa. Individu dengan genotip Aa merupakan individu yang membawa penyakit namun tidak menderita.

Contoh penyakit genetika yang disebabkan oleh gen resesif ini antara lain fibrosis statis, penyakit anemia sel sabit, anemia Cooley dan Tay Sachs. Orang yang menderita penyakit ini akan meninggal sebelum mencapai dewasa.

Kita akan meminimalkan individu yang menderita penyakit genetika tersebut, bahkan jika dimungkinkan tidak akan ada lagi generasi pembawa penyakit genetika tersebut.

Andaikan ada sebuah program yang memutuskan untuk meminimalkan terjadinya keturunan yang bergenotip aa, artinya individu yang bergenotip Aa tidak boleh menikah dengan individu yang bergenotip aa. Dengan kata lain individu normal boleh menikah dengan sesamanya atau dengan individu yang heterozigotik. Dengan adanya aturan seperti itu diharapkan semua anak masa depan tidak ada yang menderita penyakit tersebut walaupun ada individu yang membawa penyakit tersebut.

Dalam tabel 2, untuk keturunan yang berasal dari sedikitnya salah satu induk bergenotip AA dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi M menyatakan kemungkinan keturunan yang bergenotip AA atau Aa. Nilai eigen dari M adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Seperti pada warisan autosomal, kita dapat mencari pernyataan eksplisit untuk M^n dan mencari matriks P yang mempunyai invers sedemikian hingga $M^n = P D^n P^{-1}$.

Matriks P yang telah kita dapatkan adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ serta } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Karena $\mathbf{x}^{(n)} = P D^n P^{-1} \mathbf{x}^{(o)}$ maka

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_o + b_o - (\frac{1}{2})^n b_o \\ (\frac{1}{2})^n b_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{2})^n b_o \\ (\frac{1}{2})^n b_o \end{bmatrix} \qquad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Jadi didapat

$$a_n = 1 - (\tfrac{1}{2})^n b_o$$

$$b_n = (\tfrac{1}{2})^n b_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.54)$$

untuk n = 1, 2, 3, ...

Persamaan (4.54) merupakan rumus eksplisit untuk bagian populasi pada masing-masing genotip pada generasi ke-n yang dinyatakan dalam bagian generasi awal yaitu b_o. Pada generasi ke-n, jika $n \to \infty$ maka dari persamaan (4.54) didapat

$$a_n \to 1$$

$$b_n \to 0 \qquad \text{jika } n \to \infty$$

Dengan kata lain untuk generasi ke-n diharapkan tidak ada lagi individu yang membawa penyakit tersebut apalagi yang menderita penyakit genetika itu.

3. Pewarisan sifat yang terangkai dengan kromosom X

Sebagian besar sifat keturunan yang disebabkan oleh gen yang terangkai pada kromosom X disebabkan oleh gen resesif. Dalam kasus ini, individu jantan hanya memiliki satu kromosom dan yang betina dua kromosom. Pada pewarisan sifat yang terangkai dengan kromosom X, induk jantan hanya memiliki sebuah kromosom X saja sehingga ia hanya dapat normal (A -) atau penderita (a -).

Ciri khas bagi pewarisan sifat yang terangkai dengan kromosom X adalah cara pewarisan bersilang (crisscross inhereditance) artinya sifat induk jantan akan diwariskan kepada semua keturunan yang betina dan sifat induk betina akan diwariskan kepada semua keturunan jantan. Keturunan yang jantan akan menerima salah satu gen pembawa sifat dari induk betina dari kemungkinan yang sama dan keturunan betina akan menerima satu-satunya gen dari induk jantan dan satu lagi dari salah satu gen pembawa sifat dari induk betina dengan kemungkinan yang sama.

Keturunan yang dihasilkan perlu dibedakan dalam dua kategori jenis kelamin yaitu jantan dan betina karena pada pewarisan sifat ini gen-gen tersebut terangkai dalam kromosom kelamin X.

a. Pewarisan sifat yang memperhatikan genotip tertentu

Pada pewarisan ini, genotip kedua induknya diperhatikan dalam menentukan keturunan yang mungkin akan terjadi

Berikut adalah tabel yang menyatakan peluang genotip keturunan yang terjadi jika induknya diketahui bergenotip tertentu.

Tabel 3

(Tabel peluang genotip keturunan yang terjadi jika induknya diketahui bergenotip tertentu)

			Genotip Induk					
			(A,AA)	(A,Aa)	(A,aa)	(a,AA)	(a,Aa)	(a,aa)
Keturunan	Jantan	A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
		a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
	Betina	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
		Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
		aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

<u>**Contoh 4.15**</u>

Diketahui program perkawinan sebagai berikut: keturunan dari induk jantan dan betina dikelompokkan menjadi dua kelas berdasarkan jenis kelamin yaitu jantan dan betina. Dari masing-masing kelompok dipilih satu dan kemudian dijodohkan lagi, begitu seterusnya. Induk semula mempunyai kemungkinan yang sama sebagai salah satu di antara induk yang mempunyai keenam genotip yang mungkin yaitu $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}^t$. Carilah rumus untuk kemungkinan pasangan saudara kandung yang dijodohkan (A, AA), (A, Aa), (A, aa), (a, AA), (a, Aa), dan (a, aa) untuk generasi ke-n dan hitunglah limit $\mathbf{x}^{(n)}$ jika $n \to \infty$!

Penyelesaian

Pasangan saudara kandung yang dijodohkan dalam setiap generasi berikutnya mempunyai kemungkinan-kemungkinan tertentu sebagai salah satu dari antara keenam jenis tadi.

Kita akan menghitung kemungkinan keturunan pada generasi ke-n untuk induk yang merupakan salah satu dari keenam jenis genotip yang mungkin. Kita bentuk a_n , b_n , c_n, d_n , e_n , dan f_n berturut-turut merupakan kemungkinan saudara kandung yang dijodohkan dalam generasi ke-n adalah (A, AA), (A, Aa), (A, aa), (a, AA), (a, Aa), dan (a, aa).

Dari tabel 3 kita dapat membentuk tabel baru yang merupakan peluang pasangan saudara kandung yang dijodohkan dalam generasi (n-1) sebagai berikut

Tabel 4

(Tabel peluang pasangan saudara kandung

yang dijodohkan dalam generasi (n-1))

Genotip Keturunan yang Akan Dijodohkan pada Generasi ke-n	Genotip Pasangan Saudara Sekandung yang Dijodohkan dalam Generasi (n-1)					
	(A,AA)	(A,Aa)	(A,aa)	(a,AA)	(a,Aa)	(a,aa)
(A,AA)	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
(A,Aa)	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0
(A,aa)	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
(a,AA)	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
(a,Aa)	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0
(a,Aa)	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1

Kemungkinan pasangan saudara kandung yang dijodohkan dalam generasi ke-n dapat dinyatakan seperti pada persamaan (4.48) dengan

$$\mathbf{x}^{(n)} = [a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n \quad e_n \quad f_n]^t \text{ dan } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$|\lambda I - M| = (\lambda-1)^2(16\lambda^4 - 8\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 1)$ dan persamaan karakteristik dari M adalah $(\lambda-1)^2(16\lambda^4 - 8\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})(\lambda+\tfrac{1}{2})\left(\lambda-\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)\left(\lambda+\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)=0$$

Jadi nilai eigen dari M adalah $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=\frac{1}{2}$, $\lambda_4=-\frac{1}{2}$, $\lambda_5=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ dan $\lambda_6=\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ adalah $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$ dan $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{v}_4 = [-1 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 1]^t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{v}_4 = [1 \quad -6 \quad -3 \quad 3 \quad 6 \quad -1]^t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_5 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ adalah

$$\mathbf{v}_5 = \left[\tfrac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \quad 1 \quad \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \quad \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \quad 1 \quad \tfrac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\right]^t.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_6 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$ adalah

$$\mathbf{v}_6 = \left[\tfrac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \quad 1 \quad \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \quad \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \quad 1 \quad \tfrac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\right]^t.$$

Jadi matriks P yang terbentuk adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$
P^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\
0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & 0 \\
0 & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & 0 \\
0 & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & 0
\end{bmatrix}
$$

Dari persamaan (4.51) didapat

$\mathbf{x}^{(n)} = P\, D^n P^{-1}\, \mathbf{x}^{(o)}$

$$
= \begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\
0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\
0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\
0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})
\end{bmatrix}'
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^n
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\
0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & 0 \\
0 & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & 0 \\
0 & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & -(\frac{1}{2})^{n} & (-\frac{1}{2})^{n} & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^{n} \\
0 & 0 & (\frac{1}{2})^{n-1} & -6(-\frac{1}{2})^{n} & \left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^{n} \\
0 & 0 & -(\frac{1}{2})^{n} & -3(-\frac{1}{2})^{n} & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^{n} \\
0 & 0 & (\frac{1}{2})^{n} & 3(-\frac{1}{2})^{n} & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1-(\sqrt{5})\right)^{n} \\
0 & 0 & -(\frac{1}{2})^{n-1} & 6(-\frac{1}{2})^{n} & \left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^{n} \\
0 & 1 & (\frac{1}{2})^{n} & -(-\frac{1}{2})^{n} & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^{n} & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^{n}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12}(\sqrt{5}+1) \\ \frac{1}{12}(1-\sqrt{5})
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^{2n+2}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})^{n+1}(-3+\sqrt{5})\right) \\
(\frac{1}{2})^{2n}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}\right) \\
(\frac{1}{2})^{2n}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}\right) \\
(\frac{1}{2})^{2n}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}\right) \\
(\frac{1}{2})^{2n}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}\right) \\
\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^{2n+2}\,\frac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})^{n+1}(-3+\sqrt{5})\right)
\end{bmatrix}
$$

Jadi kemungkinan pasangan saudara kandung yang dijodohkan untuk generasi ke-n akan bergenotip

$$(A,AA) = \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^{2n+2}\,\tfrac{1}{12}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})\right]$$

$$(A,Aa) = \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2})^{2n}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}\right)$$

$$(A,aa) = (\tfrac{1}{2})^{2n}\,\tfrac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}\right)$$

$$(a,AA) = (\tfrac{1}{2})^{2n}\,\tfrac{1}{12}\left((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}\right)$$

$$(a,Aa) = \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2})^{2n}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}\right)$$

$$(a,aa) = \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^{2n+2}\,\tfrac{1}{12}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})^{n+1}(-3-\sqrt{5})\right]$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Untuk $n \to \infty$ maka $\mathbf{x}^{n} \to \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right]^{t}$. Jadi dalam limitnya kemungkinan bahwa pasangan-pasangan saudara kandung tersebut bergenotip (A, AA) dan (a, aa).

Jika $\mathbf{x}^{(o)}$ tidak diketahui, akan sangat sulit untuk menghitung $\mathbf{x}^{(n)}$ dan kita dapat menghitung limit $\mathbf{x}^{(n)}$ jika diketahui $\mathbf{x}^{(o)}$ namun tanpa menghitung rumus kemungkinan pasangan bersaudara kandung dengan genotip tertentu pada generasi ke-n.

Pada matriks diagonal D, untuk $n \to \infty$ didapat elemen pada kolom 3, 4, 5, dan 6 mendekati 0 sehingga

$$D^n \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}^{(n)} \to P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x}^{(o)}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \\ d_o \\ e_o \\ f_o \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} a_o + \frac{2}{3}b_o + \frac{1}{3}c_o + \frac{2}{3}d_o + \frac{1}{3}e_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_o + \frac{1}{3}b_o + \frac{2}{3}c_o + \frac{1}{3}d_o + \frac{2}{3}e_o \end{bmatrix}$$

Artinya, dalam limitnya semua pasangan bersaudara kandung akan bergenotip (A, AA) dan (a, aa). Dalam contoh di atas, untuk $a_o = b_o = c_o = d_o = e_o = f_o = \frac{1}{6}$ didapat

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}) \end{bmatrix}$$

$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^t$ yang sama seperti pada perhitungan sebelumnya.

b. Pewarisan sifat yang tidak memperhatikan genotipnya

Salah satu jenis pewarisan sifat yang berkait dengan kromosom X adalah penyakit buta warna hijau biru. Seperti yang telah kita ketahui, penyakit buta warna ini dibawa oleh gen resesif. Untuk mengetahui distribusi penderita buta warna pada generasi ke-n, kita perlu membagi populasi yang ada menjadi dua kelompok berdasarkan jenis kelamin, yaitu jantan dan betina.

Keturunan betina akan menerima satu-satunya gen dari induk jantan dan salah satu gen dari induk betina dengan kemungkinan yang sama.

Diketahui

a_n : bagian dari populasi jantan yang menderita buta warnapada generasi ke-n

b_n : bagian dari populasi jantan yang menderita buta warnapada generasi ke-n

dan diketahui pula bahwa keturunan jantan hanya menerima salah satu gen dari induk yang sama yang jika dibawa ke dalam model matematika akan berbentuk

$$a_n = b_{n-1} \qquad (4.55)$$

Keturunan betina menerima satu gen dari induk jantan dan satu dari induk betina dengan kemungkinan yang sama, sehingga dalam model matematika menjadi

$$b_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} \qquad (4.56)$$

Dari persamaan (4.55) dan (4.56) dapat kita susun dengan notasi matriks sebagai

$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ atau $\mathbf{x}^{(n)} = M\,\mathbf{x}^{(n-1)}$ yang ekuivalen dengan $\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(o)}$

dengan $\mathbf{x}^{(o)} = \begin{bmatrix} a_o \\ b_o \end{bmatrix}$ dan D merupakan matriks diagonal yang elemennya berupa nilai-nilai eigen dari M. Nilai-nilai eigen dari M adalah $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ dan $\lambda_2 = 1$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{v}_1 = [2 \quad -1]'$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$ adalah $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]'$

Matriks P yang mendiagonalkan M adalah

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_o \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (-\frac{1}{2})^{n-1} + 1 & 2 - (-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 1 - (-\frac{1}{2})^n & 2 + (-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_o \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a_o + 2b_o + (-\frac{1}{2})^{n-1}a_o - (-\frac{1}{2})^{n-1}b_o \\ a_o + 2b_o - (-\frac{1}{2})^n a_o + (-\frac{1}{2})^n b_o \end{bmatrix}$$

Jadi didapat

$$a_n = \tfrac{1}{3}(a_o + 2b_o + (-\tfrac{1}{2})^{n-1}(a_o - b_o))$$

$$b_n = \tfrac{1}{3}(a_o + 2b_o - (-\tfrac{1}{2})^{n}(a_o - b_o)) \quad \text{.....................................(4.57)}$$

untuk n = 1, 2, 3, ...

Persamaan (4.44) merupakan rumus eksplisit pada masing-masing populasi jantan dan betina pada generasi ke-n yang dinyatakan dalam populasi awal masing-masing.

Pada generasi ke-n, jika $n \to \infty$ maka $(-\frac{1}{2})^n \to 0$ dan $(-\frac{1}{2})^{n-1} \to 0$ sehingga dari persamaan (4.57) didapat

$$a_n \to \tfrac{1}{3}a_o + \tfrac{2}{3}b_o$$

$$b_n \to \tfrac{1}{3}a_o + \tfrac{2}{3}b_o \quad \text{untuk } n \to \infty$$

Artinya bagian dari populasi jantan yang menderita buta warna pada generasi ke-n untuk $n \to \infty$ adalah $\frac{1}{3}$ bagian populasi jantan awal ditambah $\frac{2}{3}$ bagian populasi betina awal. Hal itu berlaku juga untuk populasi betina yang menderita buta warna pada generasi ke-n dengan catatan populasi awal adalah penderita buta warna, baik jantan maupun betina.

BAB V

PENUTUP

Suatu bentuk kuadrat dalam n variabel dapat disederhanakan dan menyebabkan terjadinya pendiagonalan matriks. Ada tiga cara yang dapat dilakukan untuk mendiagonalkan matriks yaitu melalui nilai eigen dan vektor eigen, reduksi Lagrange dan eliminasi Gauss-Jordan.

Suatu skalar λ disebut nilai eigen dari matriks persegi A berordo n jika dan hanya jika ada vektor tak nol **x** dalam $\Re^n$ sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektor yang seperti itu disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Suatu matriks persegi A berordo n dapat didiagonalkan jika dan hanya jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$ dengan D adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan nilai-nilai eigen dari A.

Suatu bentuk kuadrat dapat disederhanakan menggunakan teknik tertentu yaitu reduksi Lagrange. Reduksi Lagrange bertujuan menghilangkan suku-suku yang memuat variabel campuran dengan cara mengelompokkan suku-suku yang ada menjadi suatu bentuk kuadrat sempurna.

Bentuk kuadrat dapat juga disederhanakan melalui eliminasi Gauss-Jordan dengan cara mencari matriks non singgular P sedemikian hingga $P^tAP = D$. Matriks simetrik A dibawa menjadi matriks diagonal melalui sebarisan pasangan-pasangan transformasi elementer dengan tiap pasangnya terdiri dari transformasi baris dan diikuti transformasi kolom yang sama.

Berikut ini adalah kesimpulan dari beberapa hal mengenai penerapan dari pendiagonalan matriks.

Untuk mengetahui jenis ekstrem fungsi dalam n variabel dapat dilakukan dengan mengetahui tanda elemen pada diagonal utama dari matriks Hess fungsi dalam n variabel tersebut.

Grafik suatu persamaan kuadrat dalam 2 variabel dan 3 variabel dapat dikenali dengan melakukan pendiagonalan matriks.

Sistem persamaan diferensial linear tingkat pertama dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan cara mendiagonalkan matriks koefisien dari sistem persamaan diferensial tersebut. Tetapi jika matriks tersebut tidak dapat didiagonalkan, maka sistem persamaan diferensial tersebut harus diselesaikan dengan cara lain.

Persamaan diferensial linear tingkat n dengan koefisien konstan juga dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan transformasi tertentu sedemikian hingga persamaan diferensial linear tersebuit ekuivalen dengan sistem persamaan diferensial linear tingkat pertama.

Penerapan pendiagonalan matriks terdapat juga pada genetika yaitu untuk menghitung pewarisan sifat dan penyakit genetika makhluk hidup sampai pada generasi ke-n.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, Edisi Kelima, Jakarta: Erlangga, 1994.

Anton, Howard, *Dasar-dasar Aljabar Linear*, Edisi Ketujuh Jilid 1, Jakarta: Interaksara, 2000.

Anton, Howard, and Rorres,C., *Penerapan Aljabar Linear*, Jakarta: Erlangga, 1988.

Ayres, F., *Teori dan Soal-soal Matriks*, Schaum's Outline Series, 1962.

Budhi, Wono Setyo, *Aljabar Linear*, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama, 1995.

Chong, Edwin K. P.,and Zak, Stanislaw H., *An Introduction to Optimization*, John Wiley&Son, 1996.

Edward, C. H. Jr., and Penney, D. E., *Elementary Linear Algebra*, New Jersey: Prentice Hall, 1988.

Hadiwidjojo, Moeharti, Drs, M. A., *Ilmu Ukur Analitik Bidang Bagian II*, Yogyakarta: FPMIPA-IKIP, 1974.

Hadiwidjojo, Moeharti, Drs, M. A., *Ilmu Ukur Analitik Ruang*, Yogyakarta: FPMIPA-IKIP, 1974.

Hadley, G., *Aljabar Linear*, Jakarta: Erlangga, 1983.

Kolman, Bernard, *Elementary Linear Algabra*, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

Leon, Steven J., *Linear Algebra with Applications*, Fourth Edition, New York: Macmillan Publishing Company, 1994.

Mital, K. V., *Optimization Methods in Operations Research and Systems Analysis*, Wiley Eastern Limited, 1978.

Moore, Hal G., and Yaqub, Adil, *A First Course in Linear Algebra*, New York: HarperCollins Publishers, 1992.

Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 1993.

Surya, Ir., *Genetika Manusia*, Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 1994.

Taha, Hamdy A., *Riset Operasi Suatu Pengantar*, Edisi Kelima Jilid 2, jakarta: Binarupa Aksara, 1997.