

PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERGEOMETRIK

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**



Disusun Oleh :

GEBRIELA NINA SUHARLINA

NIM : 961414008

NIRM : 960051120501120008

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2002**

SKRIPSI

PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERGEOMETRIK

Oleh:

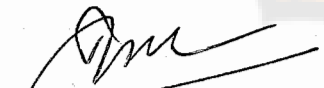
Gabriela Nina Suharlina

NIM: 961414008

NIRM: 960051120501120008

Telah disetujui oleh:

Pembimbing


Drs. A. Tutoyo, M.Sc

tanggal 27-9-2002

SKRIPSI

PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERGEOMETRIK

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Gebriela Nina Suharlina

NIM: 961414008

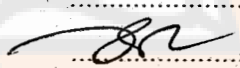
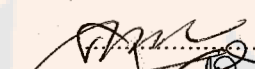
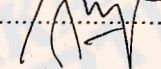
NIRM: 960051120501120008

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 21 September 2002

dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Atmadi, M.Si	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT	
Anggota 1	: Drs.A. Tutoyo, M.Sc.	
2	: Wanty Widjaja, M.Ed	
3	: M. Andy Rudhito, S.Pd	

Yogyakarta, 21 September 2002

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharama

Dekan,




Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 21 September 2002

Penulis



Gabriela Nina Suharlina

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Janganlah kamu kuatir akan hari besok, karena hari besok mempunyai kesusahan sendiri. Kesusahan sehari cukuplah untuk sehari. (Matius 6:34)

Hal lain bisa mengubah kita, tapi kita bermula dan berakhir dengan keluarga.
(Anthony Brandt)

Kupersembahkan kepada yang terkasih:

*Bapak dan Ibu, A Nano,
adik-adikku Baban, Tati, Eli dan De Siska*

ABSTRAK

Persamaan diferensial hipergeometrik merupakan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel yang mempunyai bentuk $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$.

Persamaan diferensial hipergeometrik ini, merupakan satu-satunya persamaan diferensial yang mempunyai tiga titik singular regular sekaligus yaitu 0, 1 dan ∞ .

Dengan menggunakan metode Frobenius, kita akan peroleh penyelesaian deret

pangkat berbentuk $y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ dengan r adalah akar dari

persamaan indisial dari masing-masing titik singular regular. Pasangan akar dari persamaan indisial masing-masing titik singular regular $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ dan

$x_0 = \infty$ adalah $(0, c-a-b)$ dan (a, b) . Penyelesaian kedua persamaan diferensial akan tergantung dengan kedua nilai r . Sehingga akan diperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular $x_0 = 0$ yang disimbolkan dengan

$y(x) = AF(a, b; c; x) + Bx^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)$ dengan c bukan bilangan bulat. Jika $c = 1$, maka penyelesaian dapat dilihat pada persamaan 3.(19).

Untuk titik singular regular $x_0 = 1$, diperoleh penyelesaian umum dengan bentuk

$y(x) = AF(a, b; 1+a+b-c; 1-x) + Bx^{c-a-b}F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-x)$ dengan $c-a-b$ bukan bilangan bulat. Jika $c-a-b = 0$ maka bentuk penyelesaian dinyatakan pada persamaan 3.(24) dan penyelesaian umum di sekitar titik singular regular $x_0 = \infty$ berbentuk

$y(x) = A\left(\frac{1}{x}\right)^a F\left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x}\right) + B\left(\frac{1}{x}\right)^b F\left(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{x}\right)$ dengan

$a \neq b$ dan $a-b$ bukan bilangan bulat. Jika $a = b$ maka penyelesaian dapat dilihat pada persamaan 3.(38).

Jika persamaan diferensial linear homogen orde kedua mempunyai bentuk $(x-A)(x-B)y'' + (C+Dx)y' + Ey = 0$, dengan $A \neq B$, maka dengan mengubah

variabel x menjadi $t = \frac{x-A}{B-A}$ kita akan memperoleh bentuk persamaan

diferensial hipergeometrik. Persamaan diferensial Legendre dan persamaan diferensial Tschebysev adalah contoh persamaan diferensial yang dapat diubah menjadi persamaan diferensial hipergeometrik.

Beberapa fungsi seperti fungsi $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ dan e^x dapat diubah menjadi fungsi hipergeometrik.

ABSTRACT

Hypergeometric differential equation is the second order homogeneous linear with coefficient variable which has form

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0.$$

This hypergeometric differential equation is the only differential equations which has three regular singular points at once, that is 0, 1 and ∞ . By using Frobenius method, power series solution will be found in the form of

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{with } r \text{ the root of indicial equation from each}$$

regular singular points. The set roots of the indicial equation from regular singular points $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ and $x_0 = \infty$ are $(0, 1-c)$, $(0, 1-c)$, $(0, c-a-b)$ and (a, b) . The second solutions of differential equation will be depended on the two r values. So that the general solution of hypergeometric differential equation near regular singular $x_0 = 0$ is symbolized as

$$y(x) = AF(a, b; c; x) + Bx^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x) \quad \text{with } c \text{ is not an integer. If } c = 1, \text{ then the solution can see on 3.(19).}$$

For regular singular point $x_0 = 1$, general solution is in the form $y(x) = AF(a, b; 1+a+b-c; 1-x) + Bx^{c-a-b}F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-x)$ with $c-a-b$ is not an integer. If $c-a-b = 0$ then the solution is expressed in the form on 3.(24) and the general solution near regular singular point $x_0 = \infty$ has the form of

$$y(x) = A\left(\frac{1}{x}\right)^a F\left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x}\right) + B\left(\frac{1}{x}\right)^b F\left(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{x}\right) \quad \text{with}$$

$a \neq b$ and $a-b$ is not an integer. If $a = b$ then the solution is expressed in the form on 3.(38).

If the second order of homogeneous linear differential equation has a similar form of $(x-A)(x-B)y'' + (C+Dx)y' + Ey = 0$, with $A \neq B$, then by changing x variable into $t = \frac{x-A}{B-A}$, hypergeometric differential equation will be found.

Legendre Differential equation and Tschebysev differential equation are the example of differential equations that can be changed to hypergeometric differential equation.

Other function are like $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ and e^x functions can changes to be hypergeometric function.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Kasih karena rahmat dan kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Persamaan Diferensial Hipergeometrik”.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Dalam proses pembuatan skripsi ini, penulis menyadari banyak memperoleh bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan kerendahan hati, penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. A. Tutoyo, M.Sc selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak M. Andy Rudhito, S.Pd dan Ibu Wanty Widjaja, M.Ed selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritik.
3. Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku Kaprodi Pendidikan Matematika yang telah memberikan dorongan bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi.
4. Bapak dan Ibu Dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
5. Bapak Sunardjo dan Bapak Sugeng atas bantuan yang diberikan.
6. Bapak dan Ibu terkasih atas segala kasih sayang dan bimbingan yang selalu diberikan.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

7. Temanku Vinda, dan Letty yang selalu memberikan bantuan dan dorongan. Terima kasih atas persahabatan yang kita jalin selama ini.
8. Teman-temanku Pendidikan Matematika angkatan '96, terutama Menuk, Heni dan Tutut.
9. Semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya masih banyak kekurangan dan kelemahan dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan segala masukan, saran dan kritik yang dapat membangun untuk menyempurnakannya.

Akhir kata, penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri maupun bagi pembaca semuanya.

Penulis

Gabriela Nina Suharlina



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI.....	x
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perumusan Masalah.....	4
1.3. Tujuan Penulisan	4
1.4. Manfaat Penulisan	5
1.5. Pembatasan Masalah.....	5
1.6. Metode Penulisan.....	6
BAB II LANDASAN TEORI	7
2.1. Deret Pangkat.....	7
2.2. Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Kedua dengan Koefisien Variabel	21
BAB III PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERGEOMETRIK	61
3.1. Penyelesaian Deret Persamaan Diferensial Hipergeometrik	61
3.1.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik Singular Regular $x=0$	64
3.1.2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik Singular Regular $x=1$	69

3.1.3. Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik Singular Regular $x = \infty$	72
3.2. Persamaan Diferensial yang dapat direduksi ke dalam Persamaan Diferensial Hipergeometrik.....	86
3.2.1. Persamaan Diferensial Legendre	87
3.2.2. Persamaan Diferensial Tschebyshev.....	92
3.3. Relasi Fungsi Hipergeometrik dengan Fungsi lain	96
BAB IV PENUTUP.....	100
DAFTAR PUSTAKA.....	103



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu manfaat matematika adalah untuk menggambarkan situasi kehidupan nyata dengan bahasa yang lebih sederhana yaitu dalam bentuk matematika yang disebut pemodelan. Salah satu materi pemodelan yang digunakan untuk masalah dalam kehidupan nyata adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan atau diferensial dari satu atau lebih fungsi. Beberapa contoh dari persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$(y')^3 + xy = 3 \quad (1)$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos x \quad (2)$$

$$y'' = (1 + (y')^2) + x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan banyak cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Persamaan (1), (2) dan (3) di atas merupakan contoh dari persamaan biasa. Jika fungsi yang belum diketahui tergantung pada dua atau lebih variabel bebas, maka persamaan disebut persamaan diferensial parsial, seperti yang ditunjukkan oleh persamaan (4).

Persamaan diferensial juga dapat diklasifikasikan berdasarkan orde dan derajat (degree). Yang dimaksud dari orde suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial. Persamaan (1) di atas menunjukkan persamaan diferensial orde pertama dan persamaan (2), (3) dan (4) merupakan persamaan diferensial orde kedua. Sedangkan yang dimaksud dengan derajat (degree) suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari tingkat tertinggi turunan yang muncul dalam persamaan. Dari persamaan di atas, persamaan (1) merupakan persamaan diferensial berderajat tiga dan persamaan (2), (3) dan (4) merupakan persamaan diferensial berderajat satu.

Persamaan diferensial dapat terbagi lagi menjadi dua kelompok besar yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear. Persamaan diferensial biasa tingkat n disebut linear dalam y jika persamaan diferensial itu dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (5)$$

dimana $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ dan $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu interval x dan $a_n(x) \neq 0$ pada interval itu. Fungsi $a_n(x)$ disebut fungsi-fungsi koefisien. Dan persamaan diferensial yang tidak linear disebut persamaan diferensial nonlinear.

Jika pada persamaan (5) di atas diketahui $f(x)=0$ maka persamaan diferensial itu disebut persamaan diferensial linear homogen dan jika $f(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial non homogen. Bila semua koefisien $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ adalah tetap maka persamaan disebut

persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan, dilain pihak adalah persamaan diferensial dengan koefisien peubah (variabel).

Kemudian kita perhatikan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel. Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel adalah sebagai berikut :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \text{ dimana } a_2(x) \neq 0.$$

Persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel ini sangat bermanfaat dalam matematika terapan. Dari beberapa persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel yang dikenal, ada persamaan diferensial yang disebut dengan persamaan diferensial hipergeometrik, yang berbentuk $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$ dengan a, b dan c adalah konstanta.

Pada umumnya tak ada jalan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel secara eksplisit, kecuali persamaan diferensial yang berbentuk sangat khusus; sebagai contoh, persamaan diferensial tipe Euler dan persamaan diferensial orde kedua yang telah diketahui salah satu penyelesaiannya. Namun ada metode lain yang berguna dalam penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel, yaitu dengan menggunakan metode deret pangkat.

Mengingat pentingnya persamaan diferensial hipergeometrik dalam matematika terapan, maka perlulah kiranya kita mempelajari secara mendalam persamaan diferensial hipergeometrik tersebut dan mempelajari hubungan fungsi-fungsi lain dengan fungsi hipergeometrik serta persamaan diferensial linear

homogen orde kedua dengan koefisien variabel yang lain yang dapat direduksi ke dalam persamaan hipergeometrik.

1.2 Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan persamaan diferensial hipergeometrik dan bagaimana penyelesaiannya?
2. Persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel mana yang dapat direduksi ke dalam persamaan diferensial hipergeometrik?
3. Fungsi-fungsi mana yang dapat dihubungkan dengan fungsi hipergeometrik?

1.3 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk mengetahui persamaan diferensial hipergeometrik dan penyelesaiannya dengan menggunakan metode deret pangkat. Penulisan ini juga bertujuan untuk mengetahui persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel yang dapat direduksi ke persamaan hipergeometrik dan fungsi-fungsi yang dapat dihubungkan dengan fungsi hipergeometrik.

1.4 Manfaat Penulisan

Bagi penulis, penulisan ini sangat bermanfaat untuk mengetahui dan lebih mendalami salah satu persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel, yaitu persamaan diferensial hipergeometrik. Selain itu penulis dapat mengetahui persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel yang dapat direduksi ke persamaan hipergeometrik dan fungsi-fungsi yang dapat dihubungkan dengan fungsi hipergeometrik.

1.5 Pembatasan Masalah

Dalam penulisan ini, permasalahan yang akan dibahas hanya akan dibatasi pada penyelesaian persamaan diferensial linier homogen orde kedua dengan koefisien variabel menggunakan metode deret pangkat, yang berguna dalam menyelesaikan persamaan diferensial hipergeometrik. Penulis menganggap penyelesaian dari persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel menggunakan metode reduksi dan penyelesaian untuk persamaan bertipe Euler dengan metode memisalkan $x = e^t$ atau mengasumsikan penyelesaian berbentuk $y = x^r$, sudah dipahami.

Ada 3 hal yang akan dibahas dalam penulisan ini, yaitu :

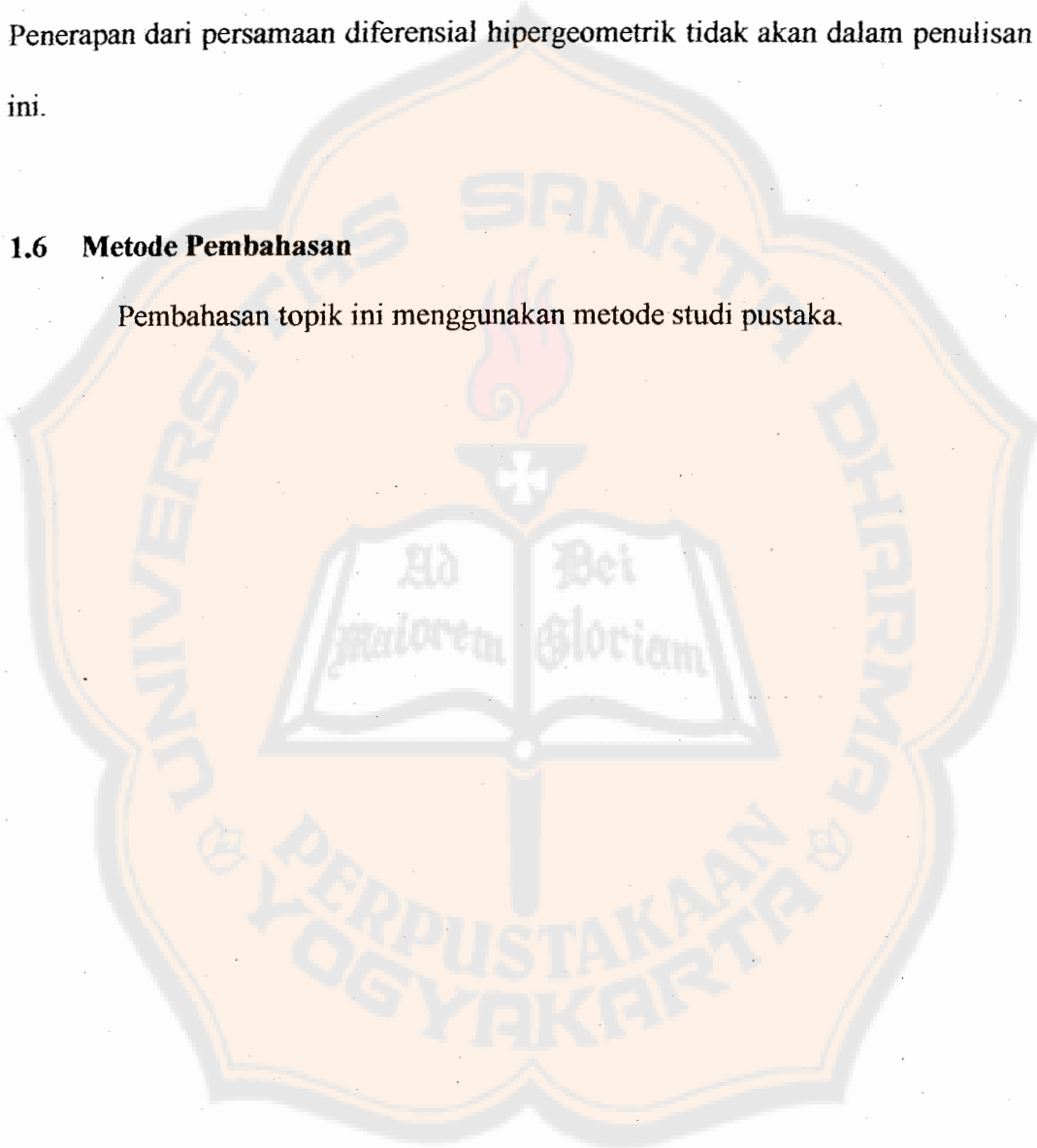
1. Penyelesaian dari persamaan diferensial hipergeometrik dan beberapa sifatnya..
2. Persamaan diferensial linear homogen yang dapat direduksi ke dalam persamaan diferensial hipergeometrik dan terbatas pada persamaan diferensial Legendre dan persamaan diferensial Tschebysev.

3. Fungsi-fungsi khusus yang dapat dihubungkan dengan fungsi hipergeometrik yang terbatas pada fungsi-fungsi yang telah diketahui seperti fungsi $\sin x$, $\cos x$, e^x dan $\ln x$.

Penerapan dari persamaan diferensial hipergeometrik tidak akan dalam penulisan ini.

1.6 Metode Pembahasan

Pembahasan topik ini menggunakan metode studi pustaka.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dibahas suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel dengan menggunakan metode deret tak hingga. Cara ini disebut metode penyelesaian dengan deret. Dalam hal ini teorema-teorema dan sifat-sifat yang berlaku pada deret dengan suku-suku konstan berlaku juga untuk deret dengan suku-suku variabel.

Sedangkan metode penyelesaian untuk persamaan diferensial Euler dan penyelesaian persamaan diferensial dengan metode reduksi tidak akan dibahas.

Sebelum dijelaskan bagaimana memperoleh penyelesaian dengan deret untuk persamaan diferensial dengan koefisien variabel, maka akan dibahas terlebih dahulu beberapa sifat deret pangkat yang akan digunakan.

2.1 Deret Pangkat

Jika $a_0, a_1, a_2, \dots$ adalah konstanta-konstanta dan x adalah suatu variabel,

maka deret berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ disebut deret pangkat

dalam x . Teorema berikut adalah hasil dasar pada konvergensi deret pangkat.

Teorema 2.1.1

Untuk setiap deret pangkat dalam x , tepat satu pernyataan berikut benar.

- Deret konvergen hanya untuk $x = 0$.
- Deret konvergen mutlak untuk semua x .
- Deret konvergen mutlak untuk semua x dalam suatu interval terbuka tertentu $(-R, R)$ dan divergen bila $x < -R$ atau $x > R$.

Pada titik-titik $x = R$ dan $x = -R$ deret dapat konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen tergantung pada deret khusus.

Bukti :

Diketahui deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jika nilai numerik disubstitusikan untuk x dalam deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka diperoleh deret dengan suku-suku konstan yang dapat konvergen atau divergen. Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak, deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ akan konvergen mutlak apabila dipenuhi syarat

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \text{ ada.}$$

Dan deret pangkat akan divergen apabila $|x| > R$. Apabila $|x| = R$, untuk dapat mengetahui apakah deret konvergen atau divergen dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan setiap $x = R$ atau $x = -R$ ke dalam deret yang diketahui.

$$a_n x^n \quad x - x_0$$

a. Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R = 0$ maka didapat $|x| = 0$, sehingga deret pangkat akan

konvergen mutlak apabila $x = 0$ dan divergen bila $x \neq 0$. Jadi (a) terpenuhi.

b. Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R = \infty$ maka didapat $|x| < \infty$, sehingga setiap nilai x yang

diberikan akan menyebabkan deret pangkat konvergen mutlak. Jadi (b) terpenuhi.

c. Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ maka didapat $|x| < R$ atau $-R < x < R$ sehingga nilai x

yang memenuhi adalah nilai x yang terdapat dalam interval $-R < x < R$.

Jadi (c) terpenuhi.

Himpunan semua bilangan x yang menyebabkan suatu deret pangkat konvergen disebut interval konvergensi deret. Bilangan R dari syarat (c) dalam teorema 2.1.1 di atas disebut jari-jari konvergensi dari deret. Jika deret (a) berlaku, maka $R = 0$ dan jika syarat (b) berlaku maka $R = \infty$.

Contoh 2.1.1

Tentukan jari-jari konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n}$.

Penyelesaian :

Diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n}$. Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak,

maka untuk setiap bilangan real x

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x}{2} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = |x| \infty.$$

Maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{2^n}$ akan konvergen bila $x = 0$, dan divergen untuk semua x bila

$x \neq 0$. Akibatnya interval konvergensi adalah titik tunggal $x = 0$ dan jari-jari konvergensinya $R = 0$.

Contoh 2.1.2

Tentukan jari-jari konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Penyelesaian :

Diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak,

maka untuk setiap bilangan real x

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Karena $\rho = 0 < 1$ untuk semua x maka deret konvergen mutlak untuk semua x .

Jadi interval konvergensi $(-\infty, +\infty)$ dan jari-jari konvergensi $R = +\infty$.

Contoh 2.1.3

Tentukan jari-jari konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

Penyelesaian :

Diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$. Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak,

maka untuk setiap bilangan real x

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{3^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |3x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3|x|.$$

Deret akan konvergen apabila $\rho < 1$, sehingga harus dipenuhi $\rho = 3|x| < 1$. Jadi deret

$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ akan konvergen mutlak apabila $|x| < \frac{1}{3}$ atau $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ dan divergen bila

$|x| > \frac{1}{3}$ yaitu $x < -\frac{1}{3}$ atau $x > \frac{1}{3}$. Dan untuk $|x| = \frac{1}{3}$ yaitu $x = -\frac{1}{3}$ atau $x = \frac{1}{3}$ dapat

dilakukan dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini dalam deret yang diberikan.

- Jika $x = -\frac{1}{3}$, maka deret berbentuk

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n &= 1 + 3 \cdot -\frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3^3 \cdot -\frac{1}{3^3} + 3^4 \cdot \frac{1}{3^4} + \dots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{aligned}$$

merupakan deret yang divergen.

- Jika $x = \frac{1}{3}$, maka deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

merupakan deret yang divergen.

Maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ merupakan deret yang konvergen mutlak dengan interval

konvergensi $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ dan jari-jari konvergensi $R = \frac{1}{3}$.

Apabila kita bekerja pada deret pangkat dalam $(x - x_0)$ yang mempunyai bentuk umum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, maka sifat-sifat konvergen dari deret pangkat dalam $(x - x_0)$ ini dapat diperoleh dari teorema 2.1.1 dengan mensubstitusikan $\bar{x} = x - x_0$ dan deret pangkat berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$. Sehingga ada 3 kemungkinan yang terjadi untuk kekonvergenan suatu deret pangkat dalam $(x - x_0)$ yaitu :

- Deret konvergen hanya untuk $x = 0$ atau $x = x_0$.
- Deret konvergen mutlak untuk semua x .
- Deret konvergen mutlak untuk semua x dalam suatu interval terbuka tertentu $(x_0 - R, R + x_0)$ dan divergen bila $x < (x_0 - R)$ atau $x > (R + x_0)$.

Pada titik-titik $x = (x_0 - R)$ dan $x = (R + x_0)$ deret dapat konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen tergantung pada deret khusus.

Dari tiga kemungkinan di atas, kita dapatkan jari-jari konvergensinya berturut-turut adalah 0, $+\infty$ dan R .

Contoh 2.1.4

Tentukan jari-jari konvergensi deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3} (x-2)^n$.

Penyelesaian :

Diketahui deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3} (x-2)^n$.

Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)(x-2)^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{(2n+1)(x-2)^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3(2n+2)(2n+3)(x-2)^n}{(n+1)^3} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^3} = |x-2| \infty.$$

Deret konvergen mutlak bila $\rho < 1$, sehingga deret akan konvergen bila

$|x-2| = 0$ atau $x = 2$. Jadi deret divergen bila $x \neq 2$. Jadi deret

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3} (x-2)^n$ merupakan deret yang konvergen mutlak dengan jari-jari

konvergensi $R = 0$.

Contoh 2.1.5

Tentukan jari-jari konvergensi deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^n}{(2n+1)!}$.

Penyelesaian:

Diketahui deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^n}{(2n+1)!}$. Dengan menggunakan uji rasio konvergen

$$\text{mutlak } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^{n+1} (x-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{\pi^n (x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Karena $\rho = 0 < 1$ untuk semua x maka deret konvergen mutlak untuk semua x .

Jadi deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^n}{(2n+1)!}$ konvergen mutlak dengan interval konvergensi $(-\infty, +\infty)$

dan jari-jari konvergensi $R=\infty$.

Contoh 2.1.6

Tentukan jari-jari konvergensi deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$.

Penyelesaian :

Diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$. Dengan menggunakan uji rasio untuk konvergen mutlak

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+2)} \cdot \frac{(n+1)}{(x+1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \cdot (x+1) \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \\ &= |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = |x+1|. \end{aligned}$$

Jadi deret konvergen mutlak bila $|x+1| < 1$ atau $-1 < x+1 < 1$ atau $-2 < x < 0$.

Deret itu divergen bila $|x+1| > 1$ yaitu untuk $x < -2$ atau $x > 0$. Untuk $|x+1|=1$, yaitu untuk $x = -2$ atau $x = 0$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini dalam deret yang diberikan.

- Jika $x = -2$, maka deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

merupakan deret harmonis selang-seling yang konvergen bersyarat.

- Jika $x = 0$, maka deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0+1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

merupakan deret harmonis yang divergen.

Maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$ merupakan deret yang konvergen dengan

interval konvergensi $-2 \leq x < 0$ atau $[-2, 0)$ Dan jari-jari konvergensi $R = 1$.

Dalam deret pangkat terjadi relasi sama. Dua deret $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ dan

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ disebut sama jika $b_n = c_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Operasi deret yang perlu diketahui adalah :

Jika $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ adalah dua deret pangkat yang konvergen,

berturut-turut ke $f(x)$ dan $g(x)$, untuk $|x - x_0| < \mu, \mu > 0$, maka

a. Deret jumlah konvergen ke jumlah $f(x) + g(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) (x - x_0)^n = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) (x - x_0) + (b_2 + c_2) (x - x_0)^2 +$$

$$(b_3 + c_3) (x - x_0)^3 + (b_4 + c_4) (x - x_0)^4 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \{b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^4 \dots\} + \\
 &\quad \{c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + c_4(x-x_0)^4 \dots\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \\
 &= f(x) + g(x).
 \end{aligned}$$

b. Deret selisih konvergen ke selisih $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)(x-x_0)^n &= (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)(x-x_0) + (b_2 - c_2)(x-x_0)^2 + \\
 &\quad (b_3 - c_3)(x-x_0)^3 + (b_4 - c_4)(x-x_0)^4 + \dots \\
 &= \{b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^4 \dots\} - \\
 &\quad \{c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + c_4(x-x_0)^4 \dots\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \\
 &= f(x) - g(x).
 \end{aligned}$$

c. Deret hasil kali konvergen ke $f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \text{ dengan } d_n &= b_0c_n + b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} + \dots + b_nc_0 = \sum_{k=0}^n b_kc_{n-k} \\
 \sum_{k=0}^n b_kc_{n-k} &= b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x-x_0) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)(x-x_0)^2 + \dots \\
 &= (b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots)(c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots) \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \right) = f(x) \cdot g(x).
 \end{aligned}$$

e. Turunan $f(x)$ sama dengan turunan suku demi suku deret.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + \dots + b_n (x - x_0)^n + \dots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= b_1 + 2b_2 (x - x_0) + 3b_3 (x - x_0)^2 + \dots + nb_n (x - x_0)^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nb_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

f. Integral $f(x)$ sama dengan integral suku demi suku deret

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \{b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + \dots + b_n (x - x_0)^n + \dots\} dx \\ &= b_0 (x - x_0) + \frac{b_1}{2} (x - x_0)^2 + \frac{b_2}{3} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{b_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + \dots + C \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C. \end{aligned}$$

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergen ke suatu fungsi $f(x)$, maka kita

dapat menyatakan fungsi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Ini berarti bahwa suatu fungsi $f(x)$

dapat didekati dengan jumlah parsial deret pangkat. Untuk mendekati suatu fungsi dengan deret pangkat, dapat kita gunakan ekspansi deret Taylor atau ekspansi dari deret Maclaurin.

Definisi 2.1.1

Jika $f(x)$ berturunan pada semua tingkat di $x = x_0$, maka deret Taylor untuk fungsi $f(x)$ disekitar titik $x = x_0$ didefinisikan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Definisi 2.1.2

Jika $f(x)$ berturunan pada semua tingkat di $x_0 = 0$, maka deret Maclaurin untuk fungsi $f(x)$ disekitar titik $x_0 = 0$ didefinisikan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Contoh 2.1.7

Tentukan deret Taylor di sekitar $x = 1$ untuk $\frac{1}{x}$.

Penyelesaian :

Andaikan $f(x) = \frac{1}{x}$ sehingga

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

$$f(1) = 1.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$f'(1) = -1.$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

$$f''(1) = 2!.$$

$$f'''(x) = -\frac{3 \cdot 2}{x^4},$$

$$f'''(1) = -3!.$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5},$$

$$f^{(4)}(1) = 4!.$$

...

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!.$$

$$\text{Jadi deret yang dicari } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n)} n! (x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n)} (x-1)^n$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \dots$$

Contoh 2.1.8

Tentukan deret Maclaurin untuk $\cos x$.

Penyelesaian : Andaikan $f(x) = \cos x$ sehingga

$$f(x) = \cos x,$$

$$f(0) = \cos 0 = 1.$$

$$f'(x) = -\sin x,$$

$$f'(0) = -\sin 0 = 0.$$

$$f''(x) = -\cos x,$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1.$$

$$f'''(x) = \sin x,$$

$$f'''(0) = \sin 0 = 0.$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x,$$

$$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1.$$

...

$$f^{(n)}(x) = \pm \cos x \text{ atau } \pm \sin x,$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ untuk } n = 1, 3, 5, \dots \text{ dan}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}n} 1 \text{ untuk } n = 0, 2, 4, \dots$$

$$\text{Jadi deret yang dicari } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Definisi 2.1.5 (Fungsi Analitik)

Suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada suatu interval terbuka yang memuat titik x_0 dikatakan analitik pada x_0 , jika fungsi $f(x)$ ini dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sekitar x_0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ ada dan konvergen ke } f(x) \text{ untuk semua } x \text{ di}$$

dalam interval terbuka termasuk x_0 .

Contoh 2.1.9

Fungsi $(1-x)^{-1}$ adalah fungsi yang analitik pada $x = 0$, karena fungsi ini

dapat dinyatakan sebagai $f(x) = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ dengan $-1 < x < 1$,

jadi fungsi $(1-x)^{-1}$ analitik pada x_0 untuk setiap x_0 di dalam interval

$$-1 < x_0 < 1.$$

Fungsi-fungsi e^x , $\cos x$ dan $\sin x$ merupakan fungsi analitik pada setiap titik x_0 di dalam interval $-\infty < x_0 < \infty$. Demikian juga dengan semua fungsi polinomial merupakan fungsi analitik di mana-mana, serta fungsi rasional kecuali pada nilai x yang menyebabkan penyebut dari fungsi rasional menjadi nol.

2.2. Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Kedua dengan Koefesien

Variabel

Suatu persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefesien variabel mempunyai bentuk :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

atau dalam bentuk normal

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

dengan $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$.

Dalam bagian berikut ini akan dicari deret sebagai penyelesaian persamaan diferensial (1) dengan menggunakan metode deret pangkat dalam $(x - x_0)$, dimana x_0 suatu bilangan real. Akan kita lihat bahwa bentuk penyelesaian akan sangat tergantung pada macam titik x_0 terhadap persamaan diferensial tersebut.

Definisi 2.2.1

Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan (1) jika kedua fungsi

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \quad (3)$$

analitik pada titik x_0 . Jika paling sedikit satu fungsi dari (3) tidak analitik pada titik x_0 , maka x_0 disebut sebuah titik singular dari persamaan diferensial (1).

Contoh 2.2.1

Carilah titik-titik biasa dan titik singular dari persamaan diferensial

$$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0.$$

Penyelesaian :

Diketahui $y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$. Disini $P(x) = x$ dan $Q(x) = x^2 + 2$.

Kedua fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinom sehingga fungsi-fungsi tersebut analitik dimana-mana. Maka semua bilangan real adalah titik biasa dari persamaan diferensial di atas.

Contoh 2.2.2

Carilah titik biasa dan titik singular dari persamaan diferensial berikut ini:

$$(1 - x^2)y'' + xy' + p^2y = 0.$$

Penyelesaian :

Dari persamaan diferensial di atas terlebih dahulu harus diubah ke bentuk normal,

sehingga didapatkan $y'' + \frac{x}{(1 - x^2)}y' + \frac{p^2}{(1 - x^2)}y = 0$.

Di sini $P(x) = \frac{x}{(1 - x^2)}$ dan $Q(x) = \frac{p^2}{(1 - x^2)}$.

Fungsi $P(x)$ analitik untuk semua bilangan real kecuali pada $x = \pm 1$ dan $Q(x)$ analitik disetiap titik kecuali pada $x = \pm 1$. Maka $x = -1$ dan $x = 1$ adalah titik singular dari persamaan diferensial tersebut. Semua titik kecuali $x = \pm 1$ adalah titik biasa.

Kemudian akan ditunjukkan bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel dengan metode deret di sekitar titik biasa.

Dalam hal ini kita asumsikan bahwa penyelesaian persamaan diferensial (1) adalah suatu deret yang berbentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

yang konvergen untuk setiap $|x - x_0| < \mu$, $\mu > 0$.

Teorema berikut menggambarkan bentuk penyelesaian disekitar sebuah titik biasa.

Teorema 2.2.1

Jika fungsi-fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik pada $x = x_0$ sehingga $P(x)$ dan $Q(x)$ dapat dinyatakan sebagai deret pangkat dalam $(x - x_0)$ dalam interval $|x - x_0| < \mu$. Maka persamaan diferensial (2) bersama dengan syarat awal $y(x_0) = a_0$ dan $y'(x_0) = a_1$ (4)

mempunyai penyelesaian tunggal $y(x)$ yang analitik pada x_0 yang

berbentuk $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ pada interval yang sama yaitu

$$|x - x_0| < \mu.$$

Bukti :

Dalam kebanyakan masalah, kita asumsikan bahwa $x_0 = 0$ dan untuk kasus

$x_0 = a$ dengan a suatu konstanta, dapat dibuktikan dengan mengambil variabel

pengganti $x = x - a$. Dalam pembuktian teorema ini, kita ambil $x_0 = 0$.

Diketahui $x_0 = 0$ adalah titik biasa dari persamaan diferensial (1), maka $P(x)$ dan $Q(x)$ yang didefinisikan pada persamaan (2) akan analitik pada $x_0 = 0$.

$$\text{Misalkan } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)^n \text{ dan } Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)^n, \quad |x| < \mu. \quad (5)$$

Andaikan penyelesaiannya $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$, dimana a_0 dan a_1 adalah konstanta-konstanta seperti diberikan pada (4) maka,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(x)^n.$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2}(x)^n$$

dan

$$\begin{aligned} P(x)y'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(x)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x)y(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2}(x)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Substitusikan pada persamaan diferensial (2), kita dapatkan :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right] x^n = 0.$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} = 0.$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + a_k q_{n-k}] = 0.$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + a_k q_{n-k}].$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\sum_{k=0}^n \{(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + a_k q_{n-k}\} \right]; n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Untuk selanjutnya relasi (6) ini disebut sebagai relasi berulang.

Relasi berulang (6) dapat disederhanakan menjadi

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \{(k+1)a_{k+1}p_{n-k-2} + a_k q_{n-k-2}\} \right]; n = 2, 3, 4, \dots \quad (7)$$

dengan relasi ini $a_2, a_3, a_4, \dots$ dapat ditentukan sebagai kombinasi linear dari a_0 dan a_1 .

Sekarang akan ditunjukkan bahwa deret dengan koefesien itu konvergen untuk

$|x| < \mu$. Jika deret $P(x)$ dan $Q(x)$ konvergen untuk $|x| < \mu$, maka untuk sembarang

$|x| = x_0 < \mu$ ada konstanta $M > 0$ sedemikianhingga

$$|p_j| \mu_0^j \leq M \text{ dan } |q_j| \mu_0^j \leq M; j = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Gunakan (8) pada (7) dan diperoleh

$$|a_n| \leq \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(k+1)|a_{k+1}|}{\mu_0^{n-k-2}} + \frac{|a_k|}{\mu_0^{n-k-2}} \right\} \right] + \frac{M|a_{n-1}| \mu_0}{n(n-1)}; n = 2, 3, \dots \quad (9)$$



Sekarang kita definisikan konstanta positif $|A_n|$ dari persamaan $A_0 = |a_0|$ dan

$A_1 = |a_1|$ dan

$$A_n = \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(k+1)A_{k+1}}{\mu_0^{n-k-2}} + \frac{A_k}{\mu_0^{n-k-2}} \right\} \right] + \frac{MA_{n-1}\mu_0}{n(n-1)}; n = 2, 3, \dots \quad (10)$$

Dari (9) dan (10) hal tersebut jelas bahwa $|a_n| \leq A_n$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Selanjutnya kita mengganti n dengan $n+1$, dan didapat

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(k+1)A_{k+1}}{\mu_0^{n-k-1}} + \frac{A_k}{\mu_0^{n-k-1}} \right\} \right] + \frac{MA_n\mu_0}{n(n+1)}$$

dan dari sini

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(k+1)A_{k+1}}{\mu_0^{n-k-1}} + \frac{A_n}{\mu_0^{n-k-1}} \right\} \right] + \frac{M}{n(n+1)} [nA_n + A_{n-1}] + \frac{MA_n\mu_0}{n(n+1)} \quad (11)$$

Kombinasi antara (10) dan (11), diperoleh

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \left[\frac{n(n-1)}{M\mu_0} A_n - A_{n-1} \right] + \frac{M}{n(n+1)} [nA_n + A_{n-1}] + \frac{MA_n\mu_0}{n(n+1)},$$

dimana sama dengan

$$A_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1)\mu_0} A_n + \frac{nMA_n}{n(n+1)} + \frac{MA_n\mu_0}{n(n+1)} = \left[\frac{n(n-1) + Mn\mu_0 + M\mu_0^2}{n(n+1)\mu_0} \right] A_n \quad (12)$$

Jadi

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n(n-1) + nM\mu_0 + M\mu_0^2}{n(n+1)\mu_0}$$

sehingga diperoleh

$$\left| \frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_nx^n} \right| = \frac{n(n-1) + nM\mu_0 + M\mu_0^2}{\mu_0 n(n+1)} |x| \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_nx^n} \right| = \frac{|x|}{\mu_0}.$$

Maka dengan uji rasio untuk konvergen mutlak, diperoleh bahwa deret pangkat

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < \mu_0$. Dengan uji banding diperoleh deret

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < \mu_0$. Jika μ_0 sembarang dalam interval

$0 < \mu_0 < \mu$, maka deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak pada interval $|x| < \mu$.

Jadi terbukti bahwa $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah penyelesaian dari persamaan diferensial (1) dan konvergen untuk $|x| < \mu$.

Contoh 2.2.3

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan metode deret

$$\text{persamaan diferensial } (1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \quad (13)$$

di sekitar titik $x_0 = 0$.

Penyelesaian:

Diketahui persamaan $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$.

Maka bentuk normalnya $y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{m(m+1)}{(1-x^2)}y = 0$ sehingga

$$P(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)} \text{ dan } Q(x) = \frac{m(m+1)}{(1-x^2)}.$$

Fungsi $P(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$ analitik dimana-mana kecuali pada titik $x = -1$ dan $x = 1$.

Fungsi $Q(x) = \frac{m(m-1)}{(1-x^2)}$ analitik dimana-mana kecuali pada titik $x = -1$ dan $x = 1$.

Kedua fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik dimana-mana kecuali di titik $x = \pm 1$. Jadi semua titik selain $x = \pm 1$ adalah titik biasa dan titik $x = \pm 1$ adalah titik singular dari persamaan diferensial yang diketahui.

Karena dari soal diketahui kondisi awal berlaku untuk titik $x = 0$, maka kita akan menentukan penyelesaian deret di sekitar titik biasa $x = 0$.

Dengan teorema 2.2.1, maka penyelesaiannya

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dengan mendiferensialkan suku demi suku diperoleh

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ dan } y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (13), maka diperoleh

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} m(m+1) a_n x^n = 0.$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 2n a_n x^n +$$

$$m(m+1) a_0 + m(m+1) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} m(m+1) a_n x^n = 0.$$

$$2a_2 + m(m+1)a_0 + (6a_3 - 2a_1 + m(m+1)a_1)x +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} + [-n(n-1) - 2n + m(m+1)]a_n\}x^n = 0.$$

$$2a_2 + m(m+1)a_0 + (6a_3 - 2a_1 + m(m+1)a_1)x +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} + [(m+n+1)(m-n)]a_n\}x^n = 0.$$

maka relasi berulangnya adalah

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + [(m-n)(m+n+1)]a_n = 0$$

$$\text{atau } a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad n \geq 2.$$

Jika diambil a_0 dan a_1 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_2 = -\frac{m(m+1)}{2!}a_0,$$

$$a_3 = -\frac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(m-2)(m+3)}{3 \cdot 4}a_2 = \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(m-3)(m+4)}{4 \cdot 5}a_3 = \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}a_1,$$

...

Diperoleh penyelesaian deretnya adalah

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{m(m+1)}{2!}a_0 x^2 - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1 x^3 + \dots$$

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 + \dots \right] +$$

$$a_1 \left[x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 + \dots \right]$$

atau $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ dengan

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{m(m+1)}{2!} x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!} x^4 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-2) \dots (m-2n+2)(m+1)(m+3) \dots (m+2n+1)}{(2n)!} x^{2n}, \\ y_2(x) &= x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!} x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!} x^5 + \dots \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m-3)(m-1) \dots (m-2n+1)(m+2)(m+4) \dots (m+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Contoh 2.2.4

Tentukan penyelesaian deret sekitar $x_0 = 1$ dari persamaan diferensial

$$y'' - xy = 0. \quad (14)$$

Penyelesaian:

Diketahui persamaan $y'' - xy = 0$. Di sini $P(x)=0$ dan $Q(x)=-x$, sehingga kedua fungsi analitik dimana-mana. Karena kedua fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik dimana-mana, maka $x_0 = 1$ adalah titik biasa dari persamaan diferensial di atas.

Maka dengan teorema 2.2.1 dapat dijamin bahwa penyelesaiannya berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

Dengan mendiferensialkan suku demi suku diperoleh:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n.$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x-1)^n.$$

Jika disubstitusikan ke persamaan diferensial (14), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - x \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0.$$

Kita dapat menyatakan koefesien x menjadi $x = 1+(x-1)$, sehingga persamaan (14) di atas berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - [1+(x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n = [1+(x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}.$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n. \quad (15)$$

Dengan menyamakan kedua ruas pada persamaan (15) diperoleh:

$$2a_2 = a_0 \text{ dan } (n+1)(n+2)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 dan a_1 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_2 = \frac{a_0}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_0 + a_1}{6},$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},$$

$$a_5 = \frac{a_2 + a_3}{12} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120},$$

Diperoleh penyelesaian deret dari persamaan (14) adalah

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
 &= a_0 + a_1(x-1) + \frac{a_0}{2}(x-1)^2 + \left(\frac{a_0 + a_1}{6}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}\right)(x-1)^4 \\
 &\quad + \left(\frac{a_0}{120} + \frac{a_1}{30}\right)(x-1)^5 + \dots \\
 &= a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots \right] \\
 &\quad + a_1 \left[1 + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \dots \right],
 \end{aligned}$$

atau $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ dengan

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots, \\
 y_2(x) &= 1 + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \dots
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan kita bahas metode penyelesaian di sekitar titik singular.

Kita tidak dapat menentukan penyelesaian deret dari persamaan (1) di sekitar titik singular x_0 , dengan menggunakan metode penyelesaian di sekitar titik biasa.

Untuk dapat mendapatkan penyelesaian di sekitar titik singular dari persamaan (1), maka terlebih dahulu kita klasifikasikan titik singular x_0 itu.

Definisi 2.2.2

Suatu titik singular x_0 dari persamaan diferensial (1) dikatakan titik singular regular, jika fungsi yang didefinisikan oleh

$$(x - x_0)P(x) = (x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } (x - x_0)^2 Q(x) = (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \quad (16)$$

keduanya analitik pada x_0 . Jika salah satu atau kedua fungsi dari (16) tidak analitik pada x_0 , maka x_0 disebut titik singular tak regular.

Contoh 2.2.5

Tentukan titik singular regular dari persamaan diferensial

$$(x^2 - 1)^2 y'' + (x + 1)y' - y = 0$$

Penyelesaian :

Diketahui persamaan $(x^2 - 1)^2 y'' + (x + 1)y' - y = 0$.

Maka bentuk normalnya $y'' + \frac{(x + 1)}{(x^2 - 1)^2} y' - \frac{1}{(x^2 - 1)^2} y = 0$.

Disini $P(x) = \frac{(x + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)(x^2 - 1)} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 - 1)}$ dan

$$Q(x) = -\frac{1}{(x^2 - 1)^2}$$

Fungsi $P(x)$ analitik di mana-mana kecuali pada titik $x = 1$ dan $x = -1$.

Fungsi $Q(x)$ analitik di mana-mana kecuali pada titik $x = 1$ dan $x = -1$.

Jadi titik $x = 1$ dan $x = -1$ adalah titik singular dari persamaan diferensial yang diketahui.

Selanjutnya, berdasarkan definisi 2.2.2

- untuk $x_0 = 1$, diperoleh

$$(x-1)P(x) = (x-1) \frac{1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1}{(x^2-1)}$$

Fungsi di atas tidak analitik pada titik $x = 1$. Jadi $x_0 = 1$ adalah titik singular tak regular dari persamaan diferensial yang diketahui.

- untuk $x_0 = -1$, diperoleh

$$(x+1)P(x) = (x+1) \frac{1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \text{ dan}$$

$$(x+1)^2 Q(x) = -(x+1)^2 \frac{1}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Karena kedua fungsi ini analitik pada $x = -1$, maka titik $x_0 = -1$ adalah titik singular regular dari persamaan yang diketahui.

Jika diketahui x_0 adalah titik tak hingga, maka kita dapat menggunakan

transformasi $x = \frac{1}{t}$, sehingga nilai $x = \infty$ berkorespondensi dengan $t = 0$. Jika

$x = \frac{1}{t}$, maka kita dapatkan rumus:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} \right) (-t^2) \\ &= t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (18)$$

Substitusikan ke dalam persamaan (2) dan diperoleh

$$\left[t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \right] + \left[P\left(\frac{1}{t}\right) \left(-t^2 \frac{dy}{dt} \right) \right] + Q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0.$$

$$t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[2t^3 - t^2 P\left(\frac{1}{t}\right) \right] \frac{dy}{dt} + Q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0.$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} y = 0.$$

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \right] y' + \frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} y = 0. \quad (19)$$

Kita definisikan bahwa titik tak hingga merupakan titik biasa, titik singular regular atau titik singular tak regular pada persamaan (2), sesuai dengan jenis titik pada persamaan (19).

Maka titik tak hingga atau $x = \infty$ adalah titik biasa dari (2) jika

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{dan} \quad \frac{1}{t^4} Q\left(\frac{1}{t}\right) \quad (20)$$

analitik di sekitar $t = 0$ dan titik singular regular dari (2), jika

$$2 - \frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{dan} \quad \frac{1}{t^2} Q\left(\frac{1}{t}\right) \quad (21)$$

analitik di sekitar $t = 0$ dan t merupakan titik singular.

Selanjutnya akan dibahas suatu metode deret untuk menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial (1) di sekitar titik singular regular x_0 .

Metode ini dikemukakan oleh George Frobenius pada tahun 1873 dan biasa disebut metode Frobenius. Pada kesempatan ini, pembahasan tidak mencakup

penyelesaian deret dari persamaan diferensial (1) disekitar titik singular tak regular.

Jika x_0 adalah titik singular regular, maka persamaan (1), dapat dituliskan ke dalam bentuk $(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)b(x)y' + c(x)y = 0$. (22)

Dengan $b(x)$ dan $c(x)$ analitik di $x = x_0$, dimana $b(x) = (x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan

$$c(x) = (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} .$$

Sekarang kita akan menentukan penyelesaian dari persamaan (22) di sekitar titik x_0 . Kita akan memperlihatkan bahwa persamaan diferensial (22) ini mempunyai sekurangnya satu penyelesaian deret di sekitar x_0 yang berbentuk

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , 0 < |x - x_0| < \mu \text{ dengan } r \text{ suatu konstanta.}$$

Untuk memudahkan pembahasan, kita ambil $x_0 = 0$ karena untuk $x_0 \neq 0$ dapat digunakan metode yang sama dengan mengambil variabel pengganti $\bar{x} = x - x_0$.

Pada kesempatan ini juga, hanya akan dibahas kasus $x - x_0 < \mu$. Untuk kasus $x - x_0 > -\mu$ dapat digunakan metode yang sama dengan cara mengubah $x - x_0$ menjadi $-(x - x_0) > 0$. Oleh karena itu kita dapat menyederhanakan notasi $|x - x_0| = x - x_0$.

Karena diketahui $x_0 = 0$ adalah titik singular dari persamaan (1), maka persamaan (22) berbentuk

$$x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0 . \quad (23)$$

Dengan melihat persamaan (5), diketahui bahwa

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ dan } c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, 0 < |x| < \mu. \quad (24)$$

Andaikan penyelesaiannya

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, 0 < x < \mu.$$

Dengan mendiferensialkan suku demi suku diperoleh

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2},$$

maka

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\ &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x b(x) y' &= x \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \right] \\ &= x^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+r) b_{n-k} a_k \right] x^n \right\}, \end{aligned}$$

dan

$$c(x) y = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \right] = x^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_{n-k} a_k \right] x^n \right\}.$$

Substitusikan pada persamaan (18), kita dapatkan :

$$\begin{aligned}
 & x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^n + x^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+r)b_{n-k}a_k \right] x^n \right\} \\
 & + x^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_{n-k}a_k \right] x^n \right\} = 0. \\
 & x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^n + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+r)b_{n-k}a_k \right] x^n \right\} + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_{n-k}a_k \right] x^n \right\} \right) = 0. \\
 & x^{r+n} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+r)b_{n-k}a_k \right] \right\} + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_{n-k}a_k \right] \right\} \right) = 0. \\
 & x^{n+r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n (k+r)b_{n-k}a_k + \sum_{k=0}^n c_{n-k}a_k \right\} = 0. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret maka diperoleh

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n (k+r)b_{n-k}a_k + \sum_{k=0}^n c_{n-k}a_k = 0.$$

Untuk $n = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 & r(r-1)a_0 + rb_0a_0 + c_0a_0 = 0 \text{ atau} \\
 & r(r-1) + rb_0 + c_0 = 0. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n \{(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\}a_k = 0. \quad (27)$$

Selanjutnya didefinisikan $P(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0$.

Persamaan $P(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0 = 0$ disebut sebagai persamaan indisial untuk persamaan (23). Nilai-nilai r yang menyebabkan $P(r) = 0$ disebut sebagai akar-akar persamaan indisial.

Catatan :

Pada kesempatan ini, kita hanya membahas akar-akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$ yang merupakan bilangan real.

Jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$ dan $r_1 \neq r_2$, maka dipilih $r_1 > r_2$.

Dari persamaan (27) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \{(n+r)b_0 + c_0\}a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\}a_k = 0. \quad (28)$$

Dengan menggunakan definisi $P(r) = 0$ sebelumnya, maka

$$P(n+r) = (n+r)(n+r-1) + (n+r)b_0 + c_0.$$

Maka persamaan (28) menjadi

$$P(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\}a_k = 0. \quad (29)$$

$$P(n+r)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\}a_k, \quad (30)$$

$$\text{sehingga } a_n = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \{(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\}a_k}{P(n+r)} \quad n \geq k,$$

$$\text{dengan } P(n+r) \neq 0, \text{ untuk } n=1,2,3,\dots \quad (31)$$

Dengan mengambil kostanta sembarang $a_0 \neq 0$ maka dengan menggunakan relasi (31) dapat ditentukan koefesien $a_1, a_2, a_3, \dots$

Dengan demikian kita dapat menentukan penyelesaian yang berbentuk

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Teorema berikut ini akan menunjukkan bagaimana cara menentukan penyelesaian deret kedua yang bebas linear dari persamaan (23), jika diketahui akar-akar real r_1 dan r_2 .

Teorema 2.2.2

Andaikan x_0 adalah titik singular dari persamaan diferensial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (1)$$

Misalkan r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$ adalah akar-akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$ yang berkaitan dengan titik singular regular x_0 .

a. Andaikan $r_1 - r_2 \neq N$, dengan N adalah bilangan bulat positif, maka persamaan diferensial (1) mempunyai dua penyelesaian bebas linear

yang berbentuk $y_1(x) = |x - x_0|^{\eta_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ dan

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\eta_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

b. Andaikan $r_1 - r_2 = 0$

Maka persamaan diferensial (1) mempunyai dua penyelesaian bebas

linear yang berbentuk $y_1(x) = |x - x_0|^{\eta_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ dan

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\eta_2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (x - x_0)^n.$$

c. Andaikan $r_1 - r_2 = N$, dengan N adalah bilangan bulat positif

Maka persamaan diferensial (1) mempunyai dua penyelesaian bebas

linear yang berbentuk $y_1(x) = |x - x_0|^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ dan

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Bukti :

Dalam pembuktian ini, diambil $x_0 = 0$ sebagai titik singular regular dari persamaan diferensial (1). Untuk $x_0 \neq 0$ dapat dibuktikan dengan jalan yang sama dan dengan mengambil variabel pengganti $\bar{x} = x - x_0$.

a) Diketahui r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$ sedemikian sehingga $r_1 - r_2 \neq N$, dengan N adalah bilangan bulat positif.

Maka $P(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0 = (r-r_1)(r-r_2)$ sehingga kita peroleh

$$P(r_1 + n) = (r_1 + n - r_1)(r_1 + n - r_2) = n(n + r_1 - r_2). \quad (32)$$

$$\text{Dari hasil akhir ini, maka } n(n - |r_1 - r_2|) \leq |P(r_1 + n)|. \quad (33)$$

Dari (24) diketahui bahwa $b(x)$ dan $c(x)$ konvergen untuk $|x| < \mu$. Akibatnya

untuk sembarang $|x| = \mu_0 < \mu$, ada konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga

$$|b_{n-k}| \mu_0^{n-k} \leq M \text{ dan } |c_{n-k}| \mu_0^{n-k} \leq M \text{ atau } |b_{n-k}| \leq M \mu_0^{k-n} \text{ dan } |c_{n-k}| \leq M \mu_0^{k-n}$$

Dengan menggunakan persamaan (30) dan pertidaksamaan (33) diperoleh

$$n(n - |r_1 - r_2|) |a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} [(k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-n}] |a_k|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sekarang kita pilih bilangan bulat positif N sedemikian sehingga

$N-1 \leq |r_1 - r_2| < N$ dan didefinisikan konstanta positif A_j yang memenuhi

$A_j = |a_j|$ untuk $j=0,1,2,3,\dots$ dan

$$j(j - |r_1 - r_2|)A_j = M \sum_{k=0}^{j-1} (k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-j} A_k, \text{ untuk } j = N, N+1, N+2, \dots \quad (34)$$

Maka diperoleh $|a_n| \leq A_n$, untuk $n = 0,1,2,3,\dots$.

Selanjutnya dengan mengganti j dengan n dan $n-1$ pada persamaan (34), akan diperoleh :

$$A_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-n}}{n(n - |r_1 - r_2|)} A_k \text{ dan } A_{n-1} = M \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-n+1}}{(n-1)(n-1 - |r_1 - r_2|)} A_k.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{A_{n-1}} &= \frac{M \sum_{k=0}^{n-1} (k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-n} A_k}{n(n - |r_1 - r_2|)} \cdot \frac{(n-1)(n-1 - |r_1 - r_2|)}{M \sum_{k=0}^{n-2} (k + |r_1| + 1) \mu_0^{k-n+1} A_k} \\ &= \frac{(n-1)(n-1 - |r_1 - r_2|) + M(n + |r_1|)}{\mu_0 n(n - |r_1 - r_2|)} \end{aligned}$$

$$\text{dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n x^n}{A_{n-1} x^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-1 - |r_1 - r_2|) + M(n + |r_1|)}{\mu_0 n(n - |r_1 - r_2|)} |x| = \frac{|x|}{\mu_0}.$$

Berdasarkan teorema uji rasio untuk konvergen mutlak maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$

konvergen mutlak untuk $|x| < \mu_0$, dan dengan uji banding diperoleh deret

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < \mu_0$. Jika μ_0 sembarang di $0 < \mu_0 < \mu$,

maka deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen untuk $|x| < \mu$.

Akhirnya, karena $|x|^{\eta_1}$ konvergen untuk $|x| < \mu$, maka $y_1(x) = |x|^{\eta_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

juga konvergen pada $|x| < \mu$. Jadi terbukti bahwa $y_1(x) = |x|^{\eta_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

adalah penyelesaian deret dari persamaan diferensial (1) yang konvergen untuk $0 < |x| < \mu$. Selanjutnya karena diketahui $r_1 - r_2 \neq N$, dengan N suatu

bilangan bulat, maka $P(r_2 + n) \neq 0$. Akibatnya kita dapat mengganti nilai r_1 dengan r_2 di dalam pembuktian di atas, sehingga diperoleh penyelesaian

deret kedua yang berbentuk $y_2(x) = |x|^{\eta_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yang juga konvergen pada

$0 < |x| < \mu$.

b) Diketahui akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$ adalah $r_1 = r_2$. Maka

$$P(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0 = (r-r_1)^2 \text{ dan } \frac{\partial P(r)}{\partial r} = 2(r-r_1) \text{ sehingga}$$

$$P(r_1) = \left[\frac{\partial P(r)}{\partial r} \right]_{r=r_1} = 0. \quad (35)$$

Sama dengan pembuktian di atas, dapat ditentukan penyelesaian deret yang

pertama yang berbentuk $y_1(x) = |x|^{\eta_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\eta_1}$.

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian deret kedua.

Misalkan kita nyatakan persamaan (23) sebagai berikut :

$$L[y] \equiv x^2 y'' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] xy' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] y = 0 \text{ dengan } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (36)$$

atau dapat dituliskan

$$L[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}] a_k \right\} x^{n+r}$$

$$L[y] = \{r(r-1)a_0 + (rb_0 + c_0)a_0\}x^r +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}] a_k \right\} x^{n+r}$$

Dengan menggunakan relasi (29) dan $a_0 P(r) = a_0 \{r(r-1) + b_0 r + c_0\}$ maka persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$L[y] = a_0 P(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}] a_k \right\} x^{n+r} \quad (37)$$

Andaikan $P(n+r) \neq 0$, maka dari persamaan (37) diperoleh

$$L[y] = a_0 P(r)x^r \quad (38)$$

Jika persamaan (38) dari turunan parsialnya terhadap r , diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial r} [L[y]] = L \left[\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right] = a_0 x^r \left[\frac{\partial P(r)}{\partial r} + P(r) \ln x \right]$$

$$\text{Dari persamaan (35) diperoleh } L \left[\left(\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right] = 0$$

sehingga $\left(\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right)_{r=r_1}$ merupakan penyelesaian deret yang kedua.

$$\text{Karena } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \text{ maka } \frac{\partial y(x)}{\partial r} = x^r \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial r} x^n.$$

Jadi penyelesaian deret yang kedua adalah

$$y_2(x) = \left[\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right]_{r=r_1} = x^{r_1} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial a_n}{\partial r} \right]_{r=r_1} x^n \quad \text{atau}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} x^n \quad \text{dengan} \quad \overline{a_n} = \left[\frac{\partial a_n}{\partial r} \right]_{r=r_1} \quad \text{untuk} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Karena a_0 tidak tergantung pada r , maka $\overline{a_0}$ selalu 0.

Karena $y_1(x)$ analitik pada $0 < |x| < \mu$, maka penyelesaian deret yang kedua yaitu $y_2(x)$ juga analitik pada $0 < |x| < \mu$.

- c) Diketahui r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$, sedemikian sehingga $r_1 - r_2 = N$, dengan N bilangan bulat positif. Dengan cara yang sama pada pembuktian (a) di atas diperoleh $P(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0 = (r-r_1)(r-r_2)$. Kita dapat menentukan penyelesaian deret yang pertama yang berkaitan dengan akar r_1 , yang berbentuk

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad \text{yang konvergen pada} \quad 0 < |x| < \mu.$$

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian deret kedua yang berkaitan dengan akar r_2 .

Andaikan $P(r+n) \neq 0$ dan a_0 sebagai konstanta sembarang, maka dengan relasi berulang (30) yang berbentuk

$$P(n+r)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \{ (k+r)b_{n-k} + c_{n-k} \} a_k \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

diperoleh $a_n(r_2)$ sebagai perkalian linear dari a_0 , untuk $n=1,2,3,\dots,N-1$.

Karena diketahui $r_1 - r_2 = N$ dengan N bilangan bulat, maka

$P(r_2 + N) = P(r_1) = 0$ sehingga $a_N(r_2)$ tidak dapat ditentukan dengan

menggunakan persamaan (30). Untuk menghindari kesulitan ini, kita pilih

$a_0(r) = r - r_2$, sehingga dengan relasi berulang (30) di atas diperoleh:

$$a_1(r) = -\frac{(rb_1 + c_1)a_0}{P(r+1)} = -\frac{(rb_1 + c_1)(r - r_2)}{P(r+1)} = \overline{a_1}(r)(r - r_2),$$

$$a_2(r) = \frac{-(rb_2 + c_2)a_1 - [(r+1)b_1 + c_1]a_0}{P(r+2)} = \overline{a_2}(r)(r - r_2),$$

...

$$a_{N-1}(r) = \overline{a_{N-1}}(r)(r - r_2).$$

Karena diketahui $r_1 - r_2 = N$, maka $P(N+r) = (r - r_2)(N + r - r_2)$ dan

$$a_N(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{N-1} [(k+1)b_{N-k} + c_{N-k}]a_k(r)}{P(N+r)},$$

$$a_N(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{N-1} [(k+1)b_{N-k} + c_{N-k}]a_k(r)}{(r - r_2)(N + r - r_2)},$$

$$(r - r_2)a_N(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{N-1} [(k+1)b_{N-k} + c_{N-k}]a_k(r)}{(N + r - r_2)}.$$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh bahwa :

Untuk $0 \leq n \leq N-1$, jika $r \rightarrow r_2$ maka $a_n(r) = \overline{a_n}(r)(r - r_2) \rightarrow 0$.

Untuk $n=N$, jika $r \rightarrow r_2$ maka $a_N(r)(r - r_2) \rightarrow$ suatu konstanta.

Jika dimisalkan konstanta tersebut C , maka $C = \lim_{r \rightarrow r_2} a_N(r)(r - r_2)$.

Untuk $n > N$, jika $r \rightarrow r_2$ maka $P(r+n) \neq 0$ dan $a_n(r) \rightarrow a_N(r_2)$.

Jika kita ambil $a_N(r_2)$ sebagai konstanta sembarang, maka dengan menggunakan relasi berulang (30) kembali, diperoleh $a_{N+n}(r_2)$ merupakan kelipatan linear $a_N(r_2)$, untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Selain itu kita dapat tentukan juga, bahwa

$$\begin{aligned} x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n &= x^{r_2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n(r_2) x^n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \\ &= x^{r_2} \left[0 + \sum_{n=N}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \\ &= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N}(r_2) x^{n+N} \\ &= x^{r_2+N} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N}(r_2) x^n \\ &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N}(r_2) x^n \\ &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_r^*(r_2) x^n \text{ dengan } a_r^*(r_2) = a_{n+N}(r_2), r = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Tetapi karena koefesiennya berturut-turut diperoleh dari relasi berulang (30), maka persamaan terakhir menjadi

$$x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n = C y_1(x) \text{ dengan } C = \lim_{r \rightarrow r_2} a_N(r)(r - r_2). \quad (39)$$

Selanjutnya sama dengan pembuktian di (b) di atas, misalkan

$$L[y] \equiv x^2 y'' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] xy' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] y = 0 \text{ dengan } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Maka diperoleh $L[y] = a_0 P(r) x^r$.

Dari pemisalan $a_0(r) = r - r_2$ maka diperoleh $[y(x)] = x^r (r - r_2) P(r)$.

Karena r_2 akar dari persamaan indisial $P(r) = 0$, maka

$$L \left[\left(\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right)_{r=r_2} \right] = \left[P(r) x^r + (r - r_2) \frac{\partial P(r)}{\partial r} x^r + (r - r_2) \ln x P(r) x^r \right]_{r=r_2}.$$

Akibatnya, $L \left[\left(\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right)_{r=r_2} \right] = 0$, sehingga $\left(\frac{\partial y(x)}{\partial r} \right)_{r=r_2}$ adalah penyelesaian deret yang kedua.

Tetapi karena $\frac{\partial y(x)}{\partial r} = x^r \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial r} x^n$, maka penyelesaian

deret yang kedua adalah $y_2(x) = x^{r_2} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial a_n}{\partial r} \right)_{r=r_2} x^n$.

Dari persamaan (39), kita peroleh $y_2(x) = C y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} x^n$

dengan $C = \lim_{r \rightarrow r_2} a_n(r)(r - r_2)$ dan $\overline{a_n} = \left[\frac{\partial a_n}{\partial r} \right]_{r=r_2}$ untuk $n=0, 1, 2, 3, \dots$.

Karena $y_1(x)$ analitik pada $0 < |x| < \mu$, maka penyelesaian deret yang kedua

yaitu $y_2(x)$ juga analitik pada $0 < |x| < \mu$.

Contoh 2.2.6

Tentukan penyelesaian deret di sekitar $x_0 = 0$ untuk persamaan diferensial

$$(x+2)x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0.$$

Penyelesaian:

Diketahui persamaan diferensial $(x+2)x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0$.

Bentuk normal persamaan di atas adalah $y'' - \frac{1}{(x+2)x}y' + \frac{(x+1)}{(x+2)x}y = 0$.

Sehingga diperoleh $P(x) = -\frac{1}{(x+2)x}$ dan $Q(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)x^2}$.

Kedua fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik di setiap titik kecuali pada titik $x = 0$ dan $x = -2$. Jadi titik $x = 0$ dan $x = -2$ adalah titik singular.

Selanjutnya kita klasifikasikan titik singular $x = 0$ dengan menggunakan definisi berikut :

$$(x - x_0)P(x) = -x \frac{1}{(x+2)x} = -\frac{1}{(x+2)} \text{ dan}$$

$$(x - x_0)^2 Q(x) = x^2 \frac{(x+1)}{(x+2)x^2} = \frac{(x+1)}{(x+2)}.$$

Karena kedua fungsi ini analitik pada $x = 0$, maka titik $x = 0$ merupakan titik singular regular dari persamaan diferensial yang diketahui.

Dengan teorema 2.2.2 maka penyelesaian deretnya berbentuk $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.

Dengan mendiferensialkan suku demi suku diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Jika disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui, maka diperoleh :

$$(x+2)x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2)a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2r(r-1)a_0 x^r - ra_0 x^r + a_0 x^r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2)a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2r(r-1)-r+1]a_0 x^r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2)a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

$$[2r(r-1)-r+1]a_0 x^r +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n + [(n+r-1)(n+r-2) + 1]a_{n-1} \} x^{n+r} = 0.$$

Dari hasil akhir ini diperoleh bahwa persamaan indisialnya adalah



$$P(r) = 2r(r-1) - r + 1 = (2r-1)(r-1) = 0. \quad (a)$$

Sehingga relasi berulangnya adalah:

$$[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n = -[(n+r-1)(n+r-2) + 1]a_{n-1}$$

$$\text{atau } a_n = -\frac{(n+r)^2 - 3(n+r) + 3}{(2n+2r-1)(n+r-1)} a_{n-1} \quad \text{untuk } n \geq 1. \quad (b)$$

Dari persamaan indisial di atas, maka diperoleh bahwa akar-akar dari persamaan

$$\text{indisial adalah } r_1 = 1 \text{ dan } r_2 = \frac{1}{2}.$$

Untuk $r_1 = 1$, maka relasi berulang (b) menjadi

$$a_n = -\frac{(n+1)^2 - 3(n+1) + 3}{(2n+1)n} a_{n-1}, \quad \text{untuk } n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 konstanta sembarang maka diperoleh

$$a_1 = -\frac{1}{3} a_0,$$

$$a_2 = -\frac{3}{10} a_1 = \frac{1}{10} a_0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{30} a_0,$$

$$a_4 = -\frac{13}{36} a_3 = \frac{13}{1080} a_0,$$

...

Dengan teorema 2.2.2 (a), maka penyelesaian deret yang pertama

$$\text{adalah } y_1(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^3 + \frac{13}{1080}x^4 + \dots \right\} \quad \text{atau}$$

$$y_1(x) = a_0 \left\{ x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{30}x^4 + \frac{13}{1080}x^5 + \dots \right\}$$

Untuk $r_2 = \frac{1}{2}$, maka relasi berulang (b) menjadi

$$a_n = -\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(n + \frac{1}{2}\right) + 3}{\left(2n + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)\left(n + \frac{1}{2} - 1\right)} a_{n-1} \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{atau } a_n = -\frac{(2n+1)^2 - 6(2n+1) + 12}{4n(2n-1)} a_{n-1} \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

Jika diambil a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = -\frac{3}{4} a_0,$$

$$a_2 = -\frac{7}{24} a_1 = \frac{7}{32} a_0,$$

$$a_3 = -\frac{19}{60} a_1 = -\frac{133}{1920} a_0,$$

...

Dengan teorema 2.2.2.(a) maka penyelesaian deret kedua dari persamaan diferensial di atas adalah

$$y_2(x) = |x|^{\frac{1}{2}} a_0 \left\{ 1 - \frac{3}{4} x + \frac{7}{32} x^2 - \frac{133}{1920} x^3 + \dots \right\} \quad \text{atau}$$

$$y_2(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} x + \frac{7}{32} x^2 - \frac{133}{1920} x^3 + \dots \right\}$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = a_0 \left\{ x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{10} x^3 - \frac{1}{30} x^4 + \frac{13}{1080} x^5 + \dots \right\} \quad \text{dan}$$

$$y_2(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{32}x^2 - \frac{133}{1920}x^3 + \dots \right\}$$

Contoh 2.2.7

Tentukan penyelesaian deret di sekitar $x_0 = 0$ untuk persamaan diferensial

$$x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0.$$

Penyelesaian:

Diketahui persamaan diferensial $x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0$.

Bentuk normal persamaan diferensial di atas adalah $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{(1-x)}{x^2}y = 0$.

Sehingga diperoleh $P(x) = -\frac{1}{x}$ dan $Q(x) = \frac{(1-x)}{x^2}$.

Kedua fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik di setiap titik kecuali pada titik $x = 0$, sehingga titik $x = 0$ adalah titik singular.

Selanjutnya kita klasifikasikan titik singular $x = 0$ dengan menggunakan definisi berikut :

$$(x - x_0)P(x) = -x \frac{1}{x} = -1 \text{ dan } (x - x_0)^2 Q(x) = x^2 \frac{(1-x)}{x^2} = (1-x).$$

Karena kedua fungsi ini analitik pada $x = 0$, maka titik $x = 0$ merupakan titik singular regular dari persamaan diferensial yang diketahui.

Dengan menggunakan teorema 2.2.2, maka penyelesaian deretnya berbentuk

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Dengan mendiferensialkan suku demi suku, diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Jika ini disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui, maka diperoleh :

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$r(r-1)a_0 x^r - ra_0 x^r + a_0 x^r +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0.$$

$$r(r-1)a_0 x^r - ra_0 x^r + a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n - a_{n-1}\} x^{n+r} = 0.$$

$$[r(r-1) - r + 1]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n - a_{n-1}\} x^{n+r} = 0.$$

Dari hasil akhir ini, diperoleh bahwa persamaan indisialnya adalah

$$P(r) = r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2 = 0 \quad (c)$$

dan relasi berulangnya adalah

$$[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n = a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{atau } a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r-1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (d)$$

Jika kita ambil a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{a_0}{r^2},$$

$$a_2 = \frac{a_1}{(r+1)^2} = \frac{a_0}{r^2(r+1)^2},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{(r+2)^2} = \frac{a_0}{r^2(r+1)^2(r+2)^2},$$

Secara umum diperoleh

$$a_n = \frac{a_0}{r^2(r+1)^2(r+2)^2 \dots (r+n-1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (e)$$

Dari persamaan indisial (c) di atas, maka diperoleh akar-akar dari persamaan indisialnya adalah $r_1 = r_2 = 1$.

Untuk $r_1 = 1$, maka relasi berulang (d), menjadi

$$a_n = \frac{a_0}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots n^2} = \frac{a_0}{(n!)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga dengan teorema 2.2.2.(b), penyelesaian deret yang pertama adalah

$$y_1(x) = |x|^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{(n!)^2} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1}$$

Jika $a_0 = 1$ maka penyelesaian yang pertama adalah $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1}$.

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian deret yang kedua.

Dari persamaan (e) di atas, jika diambil $a_0 = 1$ maka diperoleh

$$a_n = \frac{1}{r^2(r+1)^2(r+2)^2 \dots (r+n-1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ln a_n = -2 \ln r - 2 \ln(r+1) - 2 \ln(r+2) - \dots - 2 \ln(r+n-1).$$

$$\frac{a'_n}{a_n} = -\frac{2}{r} - \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r+2} - \dots - \frac{2}{(r+n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\overline{a_n} = a'_n = -2a_n \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{(r+n-1)} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Dengan mengambil $r = 1$ dan $a_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $n \geq 1$, maka diperoleh

$$\overline{a_n} = -2 \frac{1}{(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}, n \geq 1.$$

Dengan teorema 2.2.2.(b) penyelesaian deret yang kedua adalah

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} (1) x^{n+1}.$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\} x^{n+1}.$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1} \text{ dan } y_2(x) = y_1(x) \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\} x^{n+1}.$$

Contoh 2.2.8.

Tentukan penyelesaian deret di sekitar $x_0 = 0$ untuk persamaan diferensial

$$xy'' + 3y' - xy = 0.$$

Penyelesaian :

Diketahui persamaan diferensial $xy'' + 3y' - xy = 0$, maka bentuk normalnya

$$\text{adalah } y'' + \frac{3}{x} y' - y = 0.$$

Sehingga kita peroleh $P(x) = \frac{3}{x}$ dan $Q(x) = -1$.

Fungsi $P(x)$ analitik di setiap titik kecuali ~~ada~~ untuk $x = 0$ dan fungsi $Q(x)$

analitik di setiap titik. Jadi $x = 0$ adalah titik singular dari persamaan diferensial

yang diketahui. Selanjutnya kita definisikan dua fungsi sebagai berikut :

$$(x - x_0)P(x) = x \cdot \frac{3}{x} = 3 \text{ dan } (x - x_0)^2 Q(x) = -x^2 \cdot 1 = -x^2.$$

Kedua fungsi tersebut analitik di setiap titik. Jadi titik $x = 0$ adalah titik singular regular dari persamaan diferensial yang diketahui. Berdasarkan teorema 2.2.2,

$$\text{maka penyelesaian deretnya berbentuk } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Dengan mendiferensialkan suku demi suku, diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Jika ini disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui, maka diperoleh :

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1} = 0.$$

$$r(r-1) a_0 x^{r-1} + (r+1) r a_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + 3 r a_0 x^{r-1} + 3(r+1) a_1 x^r +$$

$$3 \sum_{n=2}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1} = 0.$$

$$[r(r-1) + 3r] a_0 x^{r-1} + [(r+1)r + 3(r+1)] a_1 x^r +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r)] a_n - a_{n-2}\} x^{n+r-1} = 0.$$

Dengan menyamakan koefisien kedua ruas dari persamaan terakhir, diperoleh

$$[r(r-1) + 3r] a_0 = 0,$$

$$[(r+1)r + 3(r+1)]a_1 = 0 \text{ dan}$$

$$[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r)]a_n - a_{n-2} = 0.$$

Dari persamaan di atas, diperoleh persamaan indisial

$$P(r) = r(r-1) + 3r = r(r+2) = 0 \quad (f)$$

dan relasi berulang yang berbentuk

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r+2)}, n = 2, 3, 4, \dots \quad (g)$$

Dari persamaan indisial (f) di atas, diperoleh akar-akar dari persamaan indisial yaitu adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = -2$.

Jika diketahui $r_1 = 0$, $r_2 = -2$ dan a_0 konstanta sembarang, maka diperoleh $a_{2n+1} = 0$.

Jika a_0 konstanta sembarang, maka relasi berulang (g), berbentuk

$$a_2 = \frac{a_0}{(r+2)(r+4)},$$

$$a_4 = \frac{a_2}{(r+4)(r+6)} = \frac{a_0}{(r+2)(r+4)^2(r+6)},$$

$$a_6 = \frac{a_4}{(r+6)(r+8)} = \frac{a_0}{(r+2)(r+4)^2(r+6)^2(r+8)},$$

...

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(r+2)(r+4)^2(r+6)^2 \dots (r+2n)^2(r+2n+2)} \quad (h)$$

Untuk $r_1 = 0$ dan jika diambil $a_0 = 1$, maka relasi berulang (h) menjadi

$$a_{2n} = \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2n+2)} = \frac{1}{2^{2n} n! (2n)!}.$$

Berdasarkan teorema 2.2.2.(c), maka penyelesaian deret yang pertama adalah

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} n! (n+1)!} x^{2n}$$

Selanjutnya kita akan menentukan penyelesaian deret yang kedua. Karena diketahui $r_1 = 0$ dan $r_2 = -2$, sehingga $r_1 - r_2 = 2$ dan $N = 2$. Untuk menentukan penyelesaian deret kedua, kita gunakan hasil teorema 2.2.2.(c).

Misalkan $a_0 = r - r_2 = r + 2$, dan

$$C = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2) a_N(r) = \lim_{r \rightarrow -2} (r + 2) a_2(r) = \lim_{r \rightarrow -2} \frac{1}{r + 4} = \frac{1}{2}$$

Dari $a_0 = r + 2$, maka relasi berulang (h), menjadi

$$a_{2n} = \frac{(r+2)}{(r+2)(r+4)^2(r+6)^2 \dots (r+2n)^2(r+2n+2)}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{(r+4)^2(r+6)^2 \dots (r+2n)^2(r+2n+2)}$$

$$\ln a_{2n} = -2 \ln(r+4) - 2 \ln(r+6) - \dots - 2 \ln(r+2n) - \ln(r+2n+2)$$

$$\frac{a'_{2n}}{a_{2n}} = -\frac{2}{r+4} - \frac{2}{r+6} - \dots - \frac{2}{r+2n} - \frac{1}{r+2n+2} = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k+r} - \frac{1}{r+2n+2}$$

$$a'_{2n} = \frac{1}{(r+4)^2(r+6)^2 \dots (r+2n)^2(r+2n+2)} \left[-2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k+r} - \frac{1}{r+2n+2} \right]$$

sehingga diperoleh

$$\overline{a_0} = a'_0(-2) = 0$$

$$\overline{a_{2n}} = a'_{2n}(-2) = \frac{1}{(4)^2(6)^2 \dots (2n-2)^2(2n)} \left[-2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2n} \right]$$

$$\begin{aligned} a'_{2n}(-2) &= \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)} \left[-2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2n} \right] \\ &= -\frac{2}{2^{2n} (n)(n+1)!} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} \right]. \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.2.2.(c), maka penyelesaian deret yang kedua adalah

$$y_2(x) = \frac{1}{2} y_1(x) \ln x + |x|^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{2^{2n} (n)(n+1)!} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} \right] \right].$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} n! (n+1)!} x^{2n},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} y_1(x) \ln x + |x|^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{2^{2n} (n)(n+1)!} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} \right] \right].$$

BAB III

PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERGEOMETRIK

Dalam bab III ini, akan dipelajari salah satu persamaan diferensial linear homogen orde kedua, dan disebut persamaan diferensial hipergeometrik.

Persamaan diferensial hipergeometrik mempunyai bentuk:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1)$$

dengan a , b dan c adalah konstanta.

Pembahasan dalam bab ini akan terbagi menjadi tiga bagian, yaitu :

- Mencari penyelesaian deret persamaan diferensial hipergeometrik
- Mencari persamaan diferensial yang dapat direduksi ke dalam persamaan diferensial hipergeometrik.
- Mencari fungsi-fungsi yang dapat dihubungkan dengan fungsi hipergeometrik.

3.1 Penyelesaian Deret Persamaan Diferensial Hipergeometrik

Suatu persamaan diferensial hipergeometrik, mempunyai bentuk :

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1)$$

dengan a , b dan c adalah konstanta.

Kita akan menentukan penyelesaian deret dari persamaan diferensial hipergeometrik dan pembahasan dibatasi jika $r_1 - r_2 = 0$ dan $r_1 - r_2 \neq \mathbb{N}$.

Bentuk normal persamaan diferensial hipergeometrik adalah:

$$y'' + \frac{[c - (a+b+1)x]}{x(1-x)}y' - \frac{ab}{x(1-x)}y = 0, \quad (2)$$

sehingga didapatkan $P(x) = \frac{[c - (a + b + 1)x]}{x(1 - x)}$ dan $Q(x) = -\frac{ab}{x(1 - x)}$. (3)

Kedua fungsi tersebut analitik disetiap titik, kecuali di titik $x = 0$ dan $x = 1$. Jadi titik $x = 0$ dan $x = 1$ adalah titik singular. Selanjutnya kita tentukan jenis titik singular dari $x = 0$ dan $x = 1$.

Berdasarkan persamaan 2.(16),

- Untuk $x_0 = 0$, kita dapatkan

$$(x - x_0)P(x) = x \frac{[c - (a + b + 1)x]}{x(1 - x)} = \frac{c - (a + b + 1)x}{(1 - x)} \text{ dan}$$

$$(x - x_0)^2 Q(x) = -x^2 \frac{ab}{x(1 - x)} = -\frac{abx}{(1 - x)}.$$

Kedua fungsi analitik di $x_0 = 0$. Jadi $x = 0$ adalah titik singular regular.

- Untuk $x_0 = 1$, kita dapatkan

$$(x - x_0)P(x) = (x - 1) \frac{[c - (a + b + 1)x]}{x(1 - x)} = -\frac{c - (a + b + 1)x}{x}$$

$$(x - x_0)^2 Q(x) = -(x - 1)^2 \frac{ab}{x(1 - x)} = \frac{(x - 1)ab}{x}.$$

Kedua fungsi analitik di $x_0 = 1$. Jadi $x = 1$ adalah titik singular regular.

Untuk mengetahui jenis titik $x = \infty$, kita dapat mentransformasikan $x = \frac{1}{t}$

sehingga $x = \infty$ berkorespondensi dengan $t = 0$. Dengan mensubstitusikan $x = \frac{1}{t}$

ke dalam persamaan (3), diperoleh

$$P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{[ct^2 - (a+b+1)t]}{(t-1)} \text{ dan } Q\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{abt^2}{(t-1)}. \quad (4)$$

Kemudian (4) disubstitusikan ke persamaan 2.(19), sehingga diperoleh

$$y'' + \frac{[(1-a-b)-(2-c)t]}{t(1-t)} y' + \frac{ab}{t^2(1-t)} y = 0 \quad (5)$$

atau

$$t^2(1-t)y'' + [(1-a-b)t - (2-c)t^2] y' + aby = 0. \quad (6)$$

Selanjutnya diperoleh,

$$p(t) = \frac{[(1-a-b)-(2-c)t]}{t(1-t)} \text{ dan } q(t) = \frac{ab}{t^2(1-t)}.$$

Fungsi $p(t)$ analitik di setiap titik kecuali di titik $t = 0$ dan $t = 1$. Fungsi $q(t)$

analitik di setiap titik kecuali di titik $t = 0$ dan $t = 1$. Maka titik $t = 0$ dan $t = 1$

adalah titik singular. Selanjutnya kita klasifikasikan jenis titik singular $t = 0$.

Dengan menggunakan persamaan 2.(21), diperoleh

$$t \cdot p(t) = t \cdot \frac{(1-a-b)-(2-c)t}{t(1-t)} = \frac{(1-a-b)-(2-c)t}{(1-t)}.$$

$$t^2 \cdot q(t) = t^2 \cdot \frac{ab}{t^2(1-t)} = \frac{ab}{(1-t)}.$$

Kedua fungsi analitik di titik $t = 0$. Jadi titik $t = 0$ merupakan titik singular regular.

Akibatnya titik $x = \infty$ adalah titik singular regular dari persamaan diferensial hipergeometrik.

Jadi persamaan diferensial mempunyai tiga titik singular regular, yaitu $x = 0$,

$x = 1$ dan $x = \infty$.

Selanjutnya akan dicari penyelesaian persamaan diferensial hipergeometrik di setiap titik singular regular $x = 0$ dan $x = 1$ dan $x = \infty$.

3.1.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik Singular Regular $x = 0$

Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial hipergeometrik digunakan teorema 2.2.2, dimana penyelesaian deretnya berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.

Dengan mendiferensialkan suku demi suku, maka diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Dengan mensubstitusikan deret-deret di atas ke dalam persamaan (1), diperoleh

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + [c - (a+b+1)x] \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + c \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - (a+b+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1) a_{n-1} x^{n+r-1} + c \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - (a+b+1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r-1} - ab \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0.$$

$$r(r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1} + cr a_0x^{r-1} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c(n+r)a_nx^{n+r-1} - (a+b+1)\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1} - ab\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

$$[r(r-1)+cr]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)+c(n+r)]a_nx^{n+r-1} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r-2)+(a+b+1)(n+r-1)+ab]a_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

$$[r(r-1)+cr]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(n+r)(n+r-1)+c(n+r)]a_n - \right. \\ \left. [(n+r-1)(n+r-2)+(a+b+1)(n+r-1)+ab]a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0.$$

Dari persamaan terakhir di atas, diperoleh persamaan indisial

$$P(r) = r(r-1) + cr = r(r+c-1) = 0 \quad (7)$$

Relasi berulang persamaan di atas adalah

$$[(n+r)(n+r-1)+c(n+r)]a_n = [(n+r-1)(n+r-2)+(a+b+1)(n+r-1)+ab]a_{n-1},$$

$$\text{atau } a_n = \frac{(n+r+a-1)(n+r+b-1)}{(n+r)(n+r+c-1)} a_{n-1} \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Jika diambil a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{(r+a)(r+b)}{(1+r)^2} a_0,$$

$$a_2 = \frac{(r+a+1)(r+b+1)}{(2+r)^2} a_1 = \frac{(r+a)(r+a+1)(r+b)(r+b+1)}{(1+r)^2(2+r)^2} a_0,$$

$$a_3 = \frac{(r+a+2)(r+b+2)}{(3+r)^2} a_2 = \frac{(r+a)(r+a+1)(r+a+2)(r+b)(r+b+1)(r+b+2)}{(1+r)^2(2+r)^2(r+3)^2} a_0$$

...

$$a_n = \frac{(r+a)(r+a+1)\dots(n+r+a-1)(r+b)(r+b+1)\dots(n+r+b-1)}{(1+r)^2(2+r)^2\dots(n+r)^2} a_0. \quad (9)$$

Dari persamaan indisial (7) diperoleh bahwa akar-akar dari persamaan indisial adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = 1 - c$.

Untuk $r_1 = 0$, maka relasi berulang (8) menjadi

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} a_0 \quad (10)$$

Jika kita gunakan fungsi faktorial $(\alpha)_n$, yang didefinisikan untuk bilangan bulat tidak negatif n dengan

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n-1), \quad n \geq 1 \text{ dan}$$

$$(\alpha)_0 = 1, \alpha \neq 0,$$

maka persamaan (10) dapat ditulis dengan bentuk

$$a_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} a_0, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

Jadi penyelesaian pertama dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = 0$ jika $a_0 = 1$ adalah

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Penyelesaian persamaan diferensial hipergeometrik disebut **fungsi hipergeometrik**, yang diberi simbol $F(a, b; c; x)$. Jadi penyelesaian pertama dari persamaan diferensial hipergeometrik di atas di sekitar titik singular $x = 0$ dihasilkan $y_1(x) = F(a, b; c; x)$, dengan c bukan 0 dan bilangan bulat negatif. (13)

Selanjutnya akan dicari penyelesaian kedua dari persamaan di atas, dengan akar persamaan indisial $r_2 = 1 - c$.

Untuk $r_2 = 1 - c$, relasi berulang (8) menjadi.

$$a_n = \frac{(1+a-c)(2+a-c)\dots(n+a-c)(1+b-c)(2+b-c)\dots(n+b-c)}{n!(2-c)(3-c)\dots(n+1-c)} a_0.$$

$$a_n = \frac{(1+a-c)_n (1+b-c)_n}{n!(2-c)_n} a_0. \quad (14)$$

Maka penyelesaian kedua dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = 0$ jika $a_0 = 1$ adalah

$$y_2(x) = x^{1-c} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a-c)(2+a-c)\dots(n+a-c)(1+b-c)(2+b-c)\dots(n+b-c)}{n!(2-c)(3-c)\dots(n+1-c)} x^n \right)$$

$$= x^{1-c} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a-c)_n (1+b-c)_n}{n!(2-c)_n} x^n \right) = x^{1-c} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_n (1+b-c)_n}{n!(2-c)_n} x^n \right)$$

$$= F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x), \text{ dengan } c \text{ bukan bilangan bulat positif.} \quad (15)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = 0$ adalah

$$y = c_1 F(a, b; c; x) + c_2 x^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x) \quad (16)$$

dengan c bukan bilangan bulat.

Dari persamaan (16) untuk $c = 1$, maka penyelesaian mempunyai bentuk $y = c_1 F(a, b; c; x) + c_2 F(a, b; c; x)$. Penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian tak bebas linear. Oleh karena itu perlu ditinjau penyelesaian yang bebas linear.

Jika $c = 1$, maka diperoleh akar-akar persamaan indisial (7) yang sama yaitu $r_1 = r_2 = 0$. Dengan melihat persamaan (12) diperoleh penyelesaian pertama

$$\text{yang berbentuk } y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} x^n.$$

Sehingga menurut teorema 2.2.2.(b), penyelesaian kedua dari persamaan di atas

$$\text{berbentuk } y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} x^n.$$

Dari persamaan (8) jika diambil $a_0 = 1$, maka diperoleh

$$a_n = \frac{(r+a)(r+a+1) \dots (n+r+a-1)(r+b)(r+b+1) \dots (n+r+b-1)}{(1+r)^2 (2+r)^2 \dots (r+n)^2}.$$

$$\ln a_n = \left\{ \begin{array}{l} \ln(r+a) + \ln(r+a+1) + \dots + \ln(n+r+a-1) + \\ \ln(r+b) + \ln(r+b+1) + \dots + \ln(n+r+b-1) \\ - [2 \ln(1+r) + 2 \ln(2+r) + \dots + 2 \ln(n+r)] \end{array} \right\}$$

$$\frac{a'_n}{a_n} = \left[\frac{\frac{1}{(r+a)} + \frac{1}{(r+a+1)} + \dots + \frac{1}{(n+r+a-1)}}{\frac{1}{(r+b)} + \frac{1}{(r+b+1)} + \dots + \frac{1}{(n+r+b-1)}} \right] - \left[\frac{2}{(1+r)} + \frac{2}{(2+r)} + \dots + \frac{2}{(n+r)} \right].$$

Dengan mengambil $r = 0$, maka diperoleh

$$\overline{a_n} = a'_n = a_n \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right] \right\}.$$

Dari penyelesaian pertama diketahui $a_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2}$, $n \geq 1$ maka diperoleh

$$\overline{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right] \right\}.$$

Berdasarkan teorema 2.2.2.(b), penyelesaian deret yang kedua adalah

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}(0) x^n \text{ dengan}$$

$$\overline{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right] \right\} \quad (18)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik disekitar titik singular regular $x = 0$ adalah

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x), \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstanta sembarang dan}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} x^n \text{ dan } y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}(0) x^n \quad (19)$$

dengan

$$\overline{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right]$$

3.1.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik

Singular Regular $x = 1$

Untuk mempermudah dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular $x = 1$, dapat dilakukan dengan mengubah variabel x menjadi $z = 1 - x$. Ini berarti jika $x = 1$ berkorespondensi dengan $z = 0$. Jika $z = 1 - x$, persamaan (1) menjadi

$$(1-z)zy'' - [c - (a+b+1)(1-z)]y' - aby = 0.$$

$$(1-z)zy'' - [(c-a-b-1) + (a+b+1)z]y' - aby = 0.$$

$$z(1-z)y'' + [(a+b+1-c) - (a+b+1)z]y' - aby = 0.$$

Misalkan $c_1 = a + b + 1 - c$, maka persamaan terakhir menjadi

$$z(1-z)y'' + [c_1 - (a+b+1)z]y' - aby = 0 \quad (20)$$

Dapat kita lihat bahwa persamaan (20) identik dengan persamaan (1).

Karena $x = 1$ maka berkorespondensi dengan $z = 0$, sehingga untuk mendapatkan penyelesaian deret di sekitar $z = 0$ dapat digunakan cara yang sama seperti mencari penyelesaian deret disekitar titik singular regular $x = 0$. Akibatnya

penyelesaian yang berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ dengan akar-akar persamaan indisial

$$r_1 = 0 \text{ dan } r_2 = 1 - c_1.$$

Untuk $r_1 = 0$, diperoleh penyelesaian deret yang pertama di sekitar titik singular regular $z = 0$ yang berbentuk

$$y_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c_1(c_1+1)(c_1+2)\dots(c_1+n-1)} z^n.$$

Karena $c_1 = a + b + 1 - c$, maka persamaan di atas, menjadi

$$y_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!(a+b+1-c)(a+b+2-c)(a+b+3-c)\dots(a+b+n-c)} z^n.$$

Karena $z = 1 - x$, maka persamaan di atas berbentuk

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!(a+b+1-c)(a+b+2-c)(a+b+3-c)\dots(a+b+n-c)} (1-x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (a+b+1-c)_n} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (a+b+1-c)_n} (1-x)^n \end{aligned}$$

$$= F(a, b; a+b+1-c; 1-x), \text{ } a-b-c \text{ bukan bilangan bulat negatif.} \quad (22)$$

Untuk $r_2 = 1 - c_1$, diperoleh penyelesaian kedua dari persamaan diferensial

hipergeometrik di sekitar titik singular regular $z = 0$ yang berbentuk

$$y_2(z) = z^{1-c_1} +$$

$$z^{1-c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a-c_1)(2+a-c_1)\dots(n+a-c_1)(1+b-c_1)(2+b-c_1)\dots(n+b-c_1)}{n!(2-c_1)(3-c_1)\dots(n+1-c_1)} z^n.$$

Karena $c_1 = a + b + 1 - c$, maka persamaan di atas menjadi

$$y_2(z) = z^{c-a-b} +$$

$$z^{c-a-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-b)(1+c-b)\dots(n+c-b-1)(c-a)(1+c-a)\dots(n+c-a-1)}{n!(1+c-a-b)(2+c-a-b)\dots(n+c-a-b)} z^n.$$

Karena $z = 1 - x$, maka persamaan di atas berbentuk

$$y_2(x) = (1-x)^{c-a-b} +$$

$$(1-x)^{c-a-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-b)(1+c-b)\dots(n+c-b-1)(c-a)(1+c-a)\dots(n+c-a-1)}{n!(1+c-a-b)(2+c-a-b)\dots(n+c-a-b)} (1-x)^n$$

$$= (1-x)^{c-a-b} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-b)_n (c-a)_n}{n! (1+c-a-b)_n} (1-x)^n \right)$$

$$= (1-x)^{c-a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-b)_n (c-a)_n}{n! (1+c-a-b)_n} (1-x)^n$$

$$= (1-x)^{c-a-b} F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-x),$$

$$c-a-b \text{ bukan bilangan bulat negatif.} \quad (22)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = 1$ adalah

$$y = A F(a, b; 1+a+b-c; 1-x) + B (1-x)^{c-a-b} F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-x) \quad (23)$$

dengan A dan B konstanta sembarang dan $c-a-b$ bukan bilangan bulat.

Jika $c_1 = 1$ atau $c-a-b = 0$, maka penyelesaian umum disekitar titik singular regular $z = 0$ mempunyai bentuk yang sama dengan persamaan 3.(19) atau mempunyai penyelesaian umum di sekitar titik singular regular $x = 1$ adalah

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} (1-x)^n \quad \text{dan} \quad y_2(x) = y_1(x) \ln|1-x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-x)^n \quad (24)$$

dengan

$$\frac{1}{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right] \right\}$$

3.1.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Hipergeometrik di sekitar Titik

Singular Regular $x = \infty$

Untuk mempermudah memperoleh penyelesaian persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = \infty$ kita transformasikan $x = \frac{1}{t}$.

Akibatnya persamaan (1), menjadi persamaan (6) yang berbentuk

$$t^2(1-t)y'' + [(1-a-b)t - (2-c)t^2]y' + aby = 0, \quad (6)$$

sehingga $x = \infty$ berkorespondensi dengan $t = 0$.

Penyelesaian persamaan diferensial di atas berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$.

Dengan mendiferensialkan suku demi suku, maka diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad \text{dan} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$$

Substitusikan ke dalam persamaan (6), sehingga diperoleh

$$t^2(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2} + [(1-a-b)t - (2-c)t^2] \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} + ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r+1} + (1-a-b) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n t^{n+r} - (2-c) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n t^{n+r+1} + ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} + (1-a-b) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n t^{n+r} + ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1)a_{n-1} t^{n+r} - (2-c) \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} t^{n+r} = 0.$$

$$r(r-1)a_0 t^r + (1-a-b)a_0 t^r + ab a_0 t^r + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} + (1-a-b) \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n t^{n+r} + ab \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1)a_{n-1} t^{n+r} - (2-c) \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} t^{n+r} = 0.$$

$$[r(r-1) + r(1-a-b) + ab]a_0 t^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) + (1-a-b)(n+r) + ab]a_n t^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-2)(n+r-1) + (2-c)(n+r-1)]a_{n-1} t^{n+r} = 0.$$

Dari persamaan di atas diperoleh persamaan indisial

$$P(r) = r(r-1) + r(1-a-b) + ab = (r-a)(r-b) = 0 \quad (25)$$

dan relasi berulang

$$a_n = \frac{(n+r-2)(n+r-1) + (2-c)(n+r-1)}{(n+r-1)(n+r) + (1-a-b)(n+r) + ab} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\text{atau } a_n = \frac{(n+r-1)(n+r-c)}{(n+r-a)(n+r-b)} a_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

Jika a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{r(1+r-c)}{(1+r-a)^2} a_0,$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{(r+1)(2+r-c)}{(2+r-a)^2} a_1 = \frac{(r)(r+1)(1+r-c)(2+r-c)}{(1+r-a)^2(2+r-a)^2} a_0, \\
 a_3 &= \frac{(r+2)(3+r-c)}{(3+r-a)^2} a_2 = \frac{(r)(r+1)(r+2)(1+r-c)(2+r-c)(3+r-c)}{(1+r-a)^2(2+r-a)^2(3+r-a)^2} a_0, \\
 &\dots \\
 a_n &= \frac{(r)(r+1)\dots(n+r-1)(1+r-c)(2+r-c)\dots(n+r-c)}{(1+r-a)^2(2+r-a)^2\dots(n+r-a)^2} a_0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan indisial (25) di atas diperoleh akar-akar dari persamaan indisial

$$r_1 = a \text{ dan } r_2 = b.$$

Untuk $r_1 = a$, maka relasi berulang (27) menjadi

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{a(1+a)\dots(n+a-1)(1+a-c)(2+a-c)\dots(n+a-c)}{n!(1+a-b)(2+a-b)\dots(n+a-b)} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
 &= \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{n! (1+a-b)_n} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)
 \end{aligned}$$

Maka penyelesaian pertama di sekitar titik singular regular $t = 0$, jika $a_0 = 1$

adalah

$$y_1(t) = t^a \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (n+a-c)_n}{n! (1+a-b)_n} t^n \right) = t^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (n+a-c)_n}{n! (1+a-b)_n} t^n. \quad (29)$$

Untuk $r_2 = b$ maka relasi berulang (27), menjadi

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{b(1+b)\dots(n+b-1)(1+b-c)(2+b-c)\dots(n+b-c)}{n!(1+b-a)(2+b-a)\dots(n+b-a)} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
 &= \frac{(b)_n (1+b-c)_n}{n! (1+b-a)_n} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)
 \end{aligned}$$

Maka penyelesaian deret kedua di sekitar titik singular regular $t = 0$, jika $a_0 = 1$

adalah

$$y_2(t) = t^b \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n (1+b-c)_n}{n! (1+b-a)_n} t^n \right) = t^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (1+b-c)_n}{n! (1+b-a)_n} t^n \quad (31)$$

Maka penyelesaian deret dari persamaan diferensial hipergeometrik (1), di sekitar titik singular regular $x = \infty$ adalah

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \left(\frac{1}{x} \right)^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{n! (1+a-b)_n} \left(\frac{1}{x} \right)^n \right) \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^a F \left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x} \right) \text{ dan} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left(\frac{1}{x} \right)^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (1+b-c)_n}{n! (1+b-a)_n} \left(\frac{1}{x} \right)^n \right) \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^b F \left(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{x} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik di sekitar titik singular regular $x = \infty$ adalah

$$y = A \left(\frac{1}{x} \right)^a F \left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x} \right) + B \left(\frac{1}{x} \right)^b F \left(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{x} \right) \quad (34)$$

dengan A dan b konstanta sembarang.

Jika diketahui $a = b$, maka kedua penyelesaian persis sama dan diperoleh akar-akar persamaan indisial $r_1 = r_2 = a = b$. Sehingga untuk mencari penyelesaian dari persamaan tersebut harus menggunakan teorema 2.2.2.(b).

Jika diketahui akar persamaan indisial $r_1 = a$ dan dengan melihat persamaan (29), diperoleh penyelesaian pertama yang berbentuk

$$y_1(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} t^{n+a} \quad (29)$$



Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian deret yang kedua.

Dari persamaan (27) di atas, jika diambil $a_0 = 1$, maka diperoleh

$$a_n = \frac{(r)(r+1) \dots (n+r-1)(1+r-c)(2+r-c) \dots (n+r-c)}{(1+r-a)^2(2+r-a)^2 \dots (n+r-a)^2}$$

Sehingga

$$\ln a_n = \left\{ \begin{aligned} & \left[\ln r + \ln(r+1) + \dots + \ln(n+r-1) + \right. \\ & \left. \ln(1+r-c) + \ln(2+r-c) + \dots + \ln(n+r-c) \right] - \\ & \left[2 \ln(1+r-a) + 2 \ln(2+r-a) + \dots + 2 \ln(n+r-a) \right] \end{aligned} \right\}, \text{ ada}$$

$$\frac{a'_n}{a_n} = \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n+r-1} + \frac{1}{1+r-c} + \frac{1}{2+r-c} + \dots + \frac{1}{n+r-c} \right] - 2 \left[\frac{1}{1+r-a} + \frac{1}{2+r-a} + \dots + \frac{1}{n+r-a} \right]$$

$$\frac{a'_n}{a_n} = a_n \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n+r-1} + \frac{1}{1+r-c} + \frac{1}{2+r-c} + \dots + \frac{1}{n+r-c} \right] \\ & - 2 \left[\frac{1}{1+r-a} + \frac{1}{2+r-a} + \dots + \frac{1}{n+r-a} \right] \end{aligned} \right\}$$

Dengan mengambil $r = a$ dan $a_n = \frac{(a)_n(1+a-c)_n}{(n!)^2}$, maka diperoleh

$$\frac{a'_n}{a_n} = \frac{(a)_n(1+a-c)_n}{(n!)^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{n+a-c} + \right. \\ & \left. \frac{1}{1+a-c} + \frac{1}{2+a-c} + \dots + \frac{1}{n+a-c} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Dengan menggunakan teorema 2.2.2.(b) penyelesaian deret yang kedua adalah

$$y_2(t) = y_1(t) \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{a_n}(a)t^n \text{ dengan}$$

$$\bar{a}_n = \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{n+a-c} + \frac{1}{1+a-c} + \frac{1}{2+a-c} + \dots + \frac{1}{n+a-c} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}$$

Akibatnya penyelesaian dari persamaan diferensial hipergeometrik (1) disekitar titik singular regular $x = \infty$ adalah

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{x} \right)^{n+a} = \left(\frac{1}{x} \right)^a F \left(a, 1+a-c; 1; \frac{1}{x} \right) \quad (36)$$

$$y_2(x) = y_1 \ln \left(\frac{1}{x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n (a) \left(\frac{1}{x} \right)^n \text{ dengan} \quad (37)$$

$$\bar{a}_n = \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{n+a-c} + \frac{1}{1+a-c} + \frac{1}{2+a-c} + \dots + \frac{1}{n+a-c} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik disekitar titik singular regular $x = \infty$ adalah

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} x^n \text{ dan } y_2(x) = y_1 \ln \left(\frac{1}{x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n (a) \left(\frac{1}{x} \right)^n$$

dengan

$$\bar{a}_n = \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{n+a-c} + \frac{1}{1+a-c} + \frac{1}{2+a-c} + \dots + \frac{1}{n+a-c} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}$$

Contoh 3.1.1

Tentukan penyelesaian disekitar $x_0=0$ untuk persamaan diferensial

$$\text{hipergeometrik } x(1-x)y'' + \left[\frac{1}{2} - 3x\right]y' - y = 0.$$

Penyelesaian :

Diketahui persamaan diferensial hipergeometrik $x(1-x)y'' + \left[\frac{1}{2} - 3x\right]y' - y = 0$.

Titik $x_0=0$ adalah titik singular regular. Jadi penyelesaian persamaan diferensial

$$\text{di atas berbentuk } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Dengan mendiferensialkan suku demi suku, maka diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan (1), diperoleh

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \left[\frac{1}{2} - 3x\right] \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$- 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2) a_{n-1} x^{n+r-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$- 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0.$$

$$r(r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + \frac{1}{2}ra_0x^{r-1} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r)a_nx^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r} = 0.$$

$$[r(r-1) + \frac{1}{2}r]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + \frac{1}{2}(n+r)]a_nx^{n+r-1} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r-2) + 3(n+r-1) + 1]a_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

Jadi

$$[r(r-1) + \frac{1}{2}r]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) + \frac{1}{2}(n+r)]a_n - [(n+r-1)(n+r-2) + 3(n+r-1) + 1]a_{n-1}\}x^{n+r-1} = 0.$$

Dari persamaan terakhir di atas, diperoleh persamaan indisial

$$P(r) = r(r-1) + \frac{1}{2}r = r(r - \frac{1}{2}) = 0 \quad (39)$$

dengan relasi berulang

$$[(n+r)(n+r-1) + \frac{1}{2}(n+r)]a_n = [(n+r-1)(n+r-2) + 3(n+r-1) + 1]a_{n-1}$$

$$\text{atau } a_n = \frac{(n+r)^2}{(n+r)(n+r-\frac{1}{2})}a_{n-1} \quad n \geq 1. \quad (40)$$

Dari persamaan indisial (39) diperoleh bahwa akar-akar dari persamaan indisial

adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = \frac{1}{2}$.

Untuk $r_1 = 0$, maka relasi berulang (40) menjadi

$$a_n = \frac{n^2}{n(n-\frac{1}{2})}a_{n-1} \quad n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{1^2}{1 \cdot \frac{1}{2}} a_0,$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2 \cdot \frac{3}{2}} a_1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} a_0,$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3 \cdot \frac{5}{2}} a_2 = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} a_0,$$

...

$$a_n = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2}{n! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n - \frac{1}{2})} a_0 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n - \frac{1}{2})} a_0 = \frac{(1)_n (1)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} a_0.$$

Jadi penyelesaian deret pertama dari persamaan diferensial hipergeometrik di atas

$$\begin{aligned} \text{adalah } y_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} x^n \\ &= F(1, 1; \frac{1}{2}; x). \end{aligned} \quad (41)$$

Selanjutnya akan dicari penyelesaian kedua dari persamaan diferensial di atas.

Untuk $r_2 = \frac{1}{2}$ maka relasi berulang (40) menjadi

$$a_n = \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{n(n + \frac{1}{2})} a_{n-1} \quad n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 sebagai konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{\frac{3}{2}^2}{1 \cdot \frac{3}{2}} a_0,$$

$$a_2 = \frac{\frac{5}{2}^2}{2 \cdot \frac{5}{2}} a_1 = \frac{\frac{3}{2}^2 \cdot \frac{5}{2}^2}{1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} a_0,$$

$$a_3 = \frac{7^2}{3 \cdot \frac{7}{2}} a_2 = \frac{\frac{3^2}{2} \cdot \frac{5^2}{2} \cdot \frac{7^2}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} a_0,$$

...

$$a_n = \frac{\frac{3^2}{2} \cdot \frac{5^2}{2} \cdot \frac{7^2}{2} \dots (n + \frac{1}{2})^2}{n! \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \dots (n + \frac{1}{2})} a_0 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \dots (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \dots (n + \frac{1}{2})}{n! \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \dots (n + \frac{1}{2})} a_0 = \frac{(\frac{3}{2})_n (\frac{3}{2})_n}{n! (\frac{3}{2})_n} a_0.$$

Jadi penyelesaian deret kedua dari persamaan diferensial hipergeometrik di atas

$$\text{adalah } y_2 = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2})_n (\frac{3}{2})_n}{n! (\frac{3}{2})_n} x^n \right) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2})_n (\frac{3}{2})_n}{n! (\frac{3}{2})_n} x^n = x^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; x\right). \quad (42)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial hipergeometrik di atas adalah

$$y = AF\left(1, 1; \frac{1}{2}; x\right) + Bx^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; x\right) \quad (43)$$

dengan A dan B adalah konstanta sembarang.

Setelah kita membahas penyelesaian persamaan diferensial hipergeometrik, maka berikut ini akan disajikan sifat fungsi hipergeometrik.

Catatan: Dalam beberapa sifat fungsi hipergeometrik digunakan fungsi gamma

dan fungsi beta. Fungsi gamma didefinisikan $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$

dan dengan relasi berulang diperoleh $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$

Fungsi beta yang didefinisikan $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0.$

Hubungan antara fungsi gamma dan fungsi beta didefinisikan sebagai

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Sifat 3.1.1

Jika diketahui fungsi hipergeometrik $F(a, b; c; x)$, maka berlaku :

- a. Simetri terhadap dua parameter pertama, yaitu

$$F(a, b; c; x) = F(b, a; c; x).$$

Bukti:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_n}{n! (c)_n} x^n \\ &= F(b, a; c; x). \end{aligned}$$

- b. Jika fungsi $F(a, b; c; x)$ diturunkan diperoleh

$$\frac{d}{dx} F(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x).$$

Bukti :

$$\begin{aligned} F(a, b; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n \\ \frac{d}{dx} F(a, b; c; x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n-1)! (c)_n} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{n! (c)_{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

Karena $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$, maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{d}{dx} F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_n b(b+1)_n}{n! c(c+1)_n} x^n$$

$$= \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b+1)_n}{n! (c+1)_n} x^n$$

$$= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x).$$

Secara umum untuk turunan ke-n, dengan mudah diperoleh

$$\frac{d^n}{dx^n} F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a+n, b+n; c+n; x).$$

c. Sajian Integral fungsi hipergeometrik

$$F(a, b; c; x) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt \quad c > b > 0.$$

Bukti:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n! \Gamma(c+n)} \right) \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} \left(\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(b)} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} \left(\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} \frac{B(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} x^n$$

$$= \frac{1}{B(b, c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} x^n \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{B(b, c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} x^n \int_0^1 (1-t)^{c-b-1} t^{b+n-1} dt \\
 &= \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} (xt)^n \right) dt.
 \end{aligned}$$

Dari teori deret diketahui bahwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} (xt)^n = (1-xt)^{-a}, \text{ maka persamaan terakhir menjadi}$$

$$F(a, b; c; x) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt.$$

Persamaan terakhir di atas disebut integral Euler untuk fungsi hipergeometrik.

Jika kita transformasikan $x = \frac{t}{b}$ ke dalam persamaan (1), maka persamaan

(1) berbentuk

$$t \left(1 - \frac{t}{b} \right) y'' + \left[c - \left(1 + \frac{a+1}{b} \right) t \right] y' - ay = 0. \quad (44)$$

Persamaan ini mempunyai tiga titik singular yaitu $t = 0$, $t = b$ dan $t = \infty$.

Persamaan (44) mempunyai penyelesaian disekitar titik singular regular $t = 0$

$$\text{berbentuk } F\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right). \quad (45)$$

Jika kita mengambil $b \rightarrow \infty$, maka persamaan (44) berbentuk

$$t y'' + [c - t] y' - ay = 0 \quad (46)$$

dan mempunyai penyelesaian berbentuk

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right). \quad (47)$$

Suatu fungsi hipergeometrik $F(a, b; c; x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} F(a, b; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{n! \Gamma(c+n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} x^n \end{aligned}$$

sehingga fungsi (45) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} F\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \left(\frac{t}{b}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a+c)} t^n \right) \left(\frac{\Gamma(b+n)}{b^n \Gamma(b)} \right) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}. \end{aligned}$$

$$\text{dan } \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(b+n)}{b^n \Gamma(b)} = 1.$$

Maka (47) dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(c+n)} t^n \right) \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(c+n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} t^n \\ &= F(a; c; t). \end{aligned} \tag{48}$$

Sehingga penyelesaian kedua dari persamaan diferensial hipergeometrik

$$\text{berbentuk } t^{1-c} F(a-c+1; 2-c; t). \tag{49}$$

Dari penjelasan di atas, persamaan (46) disebut Persamaan diferensial hipergeometrik terpadu dan fungsi (48) disebut fungsi hipergeometrik terpadu.

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial hipergeometrik terpadu (46) di sekitar titik singular regular $t = 0$ adalah

$$y = AF(a; c; t) + Bt^{1-c}F(a - c + 1; 2 - c; t) \quad (50)$$

dengan A dan B konstanta sembarang.

Sebagai catatan, titik $t = \infty$ merupakan titik singular tak regular dari persamaan diferensial hipergeometrik terpadu (46).

3.2 Persamaan Diferensial yang dapat direduksi ke dalam Persamaan Diferensial Hipergeometrik

Dari persamaan (1) pada pasal 3.1, kita dapat mengetahui bahwa persamaan diferensial hipergeometrik mempunyai koefisien dari y'' , y' dan y masing-masing adalah polinom berderajat 2, 1 dan 0, juga polinom dari y'' mempunyai bilangan pembuat nol yang berbeda.

Beberapa persamaan diferensial yang mempunyai karakteristik tersebut, dapat diubah menjadi persamaan diferensial hipergeometrik. Dengan mengubah variabel bebas, sehingga dapat diselesaikan di sekitar titik singular regular dalam bentuk fungsi hipergeometrik.

Untuk lebih jelas, kita tuliskan persamaan umum dalam bentuk :

$$(x - A)(x - B)y'' + (C + Dx)y' + Ey = 0 \quad (51)$$

di mana $A \neq B$. Jika kita mengubah variabel bebas dari x ke t dengan bentuk

$$t = \frac{x - A}{B - A},$$

maka $x = A$ berkorespondensi dengan $t = 0$ dan $x = B$ berkorespondensi dengan

$t = 1$. Dengan mentransformasikan $t = \frac{x - A}{B - A}$ ke dalam persamaan (51), maka

diperoleh persamaan yang diasumsikan berbentuk

$$t(1-t)y'' + (F + Gt)y' + Hy = 0. \quad (52)$$

dimana F, G dan H adalah kombinasi konstanta dari persamaan (51). Persamaan (52) merupakan persamaan diferensial hipergeometrik dengan a, b dan c didefinisikan

$$F = c, \quad G = -(a + b + 1) \quad \text{dan} \quad H = -ab.$$

Sehingga kita dapat mencari penyelesaian di sekitar titik singular $t = 0$ dan $t = 1$ dalam bentuk fungsi hipergeometrik. Ini berarti bahwa persamaan (51) dapat diselesaikan dalam fungsi hipergeometrik yang sama disekitar titik $x = A$ dan $x = B$.

Beberapa persamaan diferensial yang dapat direduksi ke dalam persamaan diferensial hipergeometrik adalah persamaan Legendre dan persamaan Tscheyshev.

3.2.1 Persamaan Diferensial Legendre

Persamaan diferensial Legendre mempunyai bentuk

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \quad (53)$$

dengan m adalah konstanta.

Persamaan diferensial Legendre, mempunyai titik singular regular di sekitar $x = 1$

dan $x = -1$. Dengan mentransformasikan $t = \frac{1}{2}(1-x)$ maka persamaan (53)

menjadi persamaan hipergeometrik yang berbentuk

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' + m(m+1)y = 0 \quad (54)$$

sehingga $x = 1$ berkorespondensi dengan $t = 0$ dan $x = -1$ berkorespondensi dengan $t = 1$.

Pada kesempatan ini, penyelesaian hanya terbatas di sekitar titik singular regular $x = 1$. Jadi persamaan (54) mempunyai penyelesaian di sekitar titik

singular regular $t = 0$ yang berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$.

Dengan mendiferensialkan suku demi suku maka diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-2}.$$

Jika disubstitusikan ke persamaan (54), maka diperoleh

$$t(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-2} + (1-2t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r} + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + m(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n+r-1} = 0.$$

$$(r-1)r a_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + r a_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + m(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n+r-1} = 0.$$

$$[(r-1)r+r] a_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) + (n+r)] a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-2)(n+r-1) + 2(n+r-1) - m(m+1)] a_{n-1} t^{n+r-1} = 0.$$

$$[(r-1)r+r]a_0t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(n+r-1)(n+r)+(n+r)]a_n - [(n+r-2)(n+r-1)+2(n+r-1)-m(m+1)]a_{n-1} \right\} t^{n+r-1} = 0.$$

Dari persamaan terakhir, diperoleh bahwa persamaan indisial

$$P(r) = (r-1)r+r = r^2 = 0 \quad (55)$$

dan relasi berulangnya adalah

$$a_n = \frac{(n+r+m)(n+r-m-1)}{(n+r)^2} a_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (56)$$

Jika diambil a_0 konstanta sembarang, maka diperoleh

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(m+r+1)(-m+r)}{(r+1)^2} a_0, \\ a_2 &= \frac{(m+r+2)(-m+r+1)}{(r+2)^2} a_1 = \frac{(m+r+1)(m+r+2)(-m+r)(-m+r+1)}{(r+1)^2(r+2)^2} a_0, \\ &\dots \\ a_n &= \frac{(m+r+1)(m+r+2)\dots(m+r+n)(-m+r)(-m+r+1)\dots(-m+r+n-1)}{(r+1)^2(r+2)^2\dots(r+n)^2} a_0, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (57)$$

Dari persamaan indisial di atas, maka diperoleh bahwa akar-akar dari persamaan

indisial adalah $r_1 = r_2 = 0$.

Untuk $r_1 = 0$ dan $a_0 = 1$ maka relasi berulang (56), menjadi

$$a_n = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(-m)(-m+1)\dots(-m+n-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga penyelesaian pertama dari persamaan (54) berbentuk

$$y_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(-m)(-m+1)\dots(-m+n-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2} t^n.$$

Penyelesaian pertama dari persamaan diferensial Legendre di sekitar $x = 1$ adalah

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(-m)(-m+1)\dots(-m+n-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n.$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n.$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n.$$

$$y_1(x) = F\left(m+1, -m; 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (58)$$

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian yang kedua.

Dari persamaan (57) di atas, jika diambil $a_0 = 1$ maka diperoleh

$$a_n = \frac{(m+r+1)(m+r+2)\dots(m+r+n)(-m+r)(-m+r+1)\dots(-m+r+n-1)}{(r+1)^2 (r+2)^2 \dots (r+n)^2}, \quad n \geq 1.$$

$$\ln a_n = \left\{ \begin{aligned} & \left[\ln(m+r+1) + \ln(m+r+2) + \dots + \ln(m+r+n) + \right. \\ & \quad \left. \ln(-m+r) + \ln(-m+r+1) + \dots + \ln(-m+r+n-1) \right] \\ & \quad - 2[\ln(r+1) + \ln(r+2) + \dots + \ln(r+n)] \end{aligned} \right\}.$$

$$\frac{a'_n}{a_n} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r+m+1} + \frac{1}{r+m+2} + \dots + \frac{1}{r+m+n} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{-m+r} + \frac{1}{-m+r+1} + \dots + \frac{1}{-m+r+n-1} \right] - 2 \left[\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{r+n} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$a'_n = a_n \left\{ \left[\frac{1}{r+m+1} + \frac{1}{r+m+2} + \dots + \frac{1}{r+m+n} + \frac{1}{-m+r} + \frac{1}{-m+r+1} + \dots + \frac{1}{-m+r+n-1} \right] - 2 \left[\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{r+n} \right] \right\}$$

Jika diambil $r=0$ dan $a_n = \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n}$ maka diperoleh

$$a'_n = a_n = \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left\{ \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{-m} + \frac{1}{-m} + \dots + \frac{1}{-m+n-1} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}$$

Jadi penyelesaian kedua dari persamaan (54) adalah

$$y_2(t) = y_1(t) \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} t^n \text{ dengan}$$

$$\overline{a_n} = \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left\{ \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{-m} + \frac{1}{-m} + \dots + \frac{1}{-m+n-1} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\},$$

dan penyelesaian kedua dari persamaan (53) adalah

$$y_2(x) = y_1(x) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) t + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \text{ dengan}$$

$$\overline{a_n} = \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left\{ \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{-m} + \frac{1}{-m} + \dots + \frac{1}{-m+n-1} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}.$$

(59)

Jadi penyelesaian umum dari (53) adalah

$y = Ay_1 + By_2$ dimana A dan B adalah konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n \text{ dan } y_2(x) = y_1(x) \ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

dengan

$$a_n = \frac{(m+1)_n (-m)_n}{n! (1)_n} \left\{ \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{-m} + \frac{1}{-m} + \dots + \frac{1}{-m+n-1} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] \right\}.$$

3.2.2 Persamaan Diferensial Tschebyshev

Persamaan diferensial Tschebyshev mempunyai bentuk

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0 \quad (60)$$

dengan p adalah konstanta.

Persamaan diferensial Tschebyshev mempunyai titik singular regular di sekitar $x = 1$ dan $x = -1$. Dengan mentransformasikan $t = \frac{1}{2}(1-x)$ maka persamaan (60) menjadi persamaan hipergeometrik yang berbentuk

$$t(1-t)y'' + \left(\frac{1}{2}-t\right)y' + p^2y = 0. \quad (61)$$

Sehingga $x = 1$ berkorespondensi dengan $t = 0$ dan $x = -1$ berkorespondensi dengan $t = 1$. Jadi persamaan (61) mempunyai penyelesaian di sekitar titik

singular regular $t = 0$ yang berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$.

Dengan mendiferensialkan suku demi suku maka diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \text{ dan } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-2}.$$

Jika disubstitusikan ke persamaan (61), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 & t(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-2} + \left(\frac{1}{2}-t\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} + p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0. \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \\
 & \quad - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r} + p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0. \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \\
 & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + p^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n+r-1} = 0. \\
 & (r-1) r a_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2)(n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + \frac{1}{2} r a_0 t^{r-1} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} t^{n+r-1} + p^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n+r-1} = 0. \\
 & \left[(r-1) r + \frac{1}{2} r \right] a_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + \frac{1}{2} (n+r) \right] a_n t^{n+r-1} \\
 & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r-2)(n+r-1) + (n+r-1) - p^2 \right] a_{n-1} t^{n+r-1} = 0. \\
 & \left[(r-1) r + \frac{1}{2} r \right] a_0 t^{r-1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+r-1)(n+r) + \frac{1}{2} (n+r) \right\} a_n - \left\{ (n+r-2)(n+r-1) + (n+r-1) - p^2 \right\} a_{n-1} \Big\} t^{n+r-1} = 0.
 \end{aligned}$$

Dari hasil akhir, diperoleh bahwa persamaan indisialnya adalah

$$P(r) = (r-1)r + \frac{1}{2}r = r(r - \frac{1}{2}) = 0 \quad (62)$$

dan relasi berulangnya adalah

$$(n+r-\frac{1}{2})(n+r) a_n = (n+r+p-1)(n+r-p-1) a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\text{atau } a_n = \frac{(n+r+p-1)(n+r-p-1)}{(n+r-\frac{1}{2})(n+r)} a_{n-1}, n \geq 1. \quad (63)$$

Dari persamaan indisial di atas, diperoleh bahwa akar-akar dari persamaan indisial adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = \frac{1}{2}$.

Untuk $r_1 = 0$, maka relasi berulang (63) menjadi

$$a_n = \frac{(n+p-1)(n-p-1)}{n(n-\frac{1}{2})} a_{n-1}, n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{p(-p)}{1 \cdot \frac{1}{2}} a_0,$$

$$a_2 = \frac{(p+1)(-p+1)}{2 \cdot \frac{3}{2}} a_1 = \frac{p(p+1)(-p)(-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})} a_0,$$

$$a_3 = \frac{(p+2)(-p+2)}{3 \cdot \frac{5}{2}} a_2 = \frac{p(p+1)(p+2)(-p)(-p+1)(-p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})} a_0,$$

...

$$a_n = \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)(-p)(-p+1) \dots (-p+n-1)}{n! (\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) \dots (\frac{2n-1}{2})} a_0.$$

Maka penyelesaian pertama dari persamaan (61) berbentuk

$$y_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)(-p)(-p+1) \dots (-p+n-1)}{n! (\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) \dots (\frac{2n-1}{2})} t^n.$$

Untuk $r_2 = \frac{1}{2}$, maka relasi berulang (63) menjadi

$$a_n = \frac{(n+p-\frac{1}{2})(n-p-\frac{1}{2})}{n(n+\frac{1}{2})} a_{n-1}, n \geq 1.$$

Jika diambil a_0 konstanta sembarang, maka diperoleh

$$a_1 = \frac{(p + \frac{1}{2})(-p + \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{3}{2}} a_0,$$

$$a_2 = \frac{(p + \frac{3}{2})(-p + \frac{3}{2})}{2 \cdot \frac{5}{2}} a_1 = \frac{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2})(-p + \frac{1}{2})(-p + \frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot (\frac{3}{2})(\frac{5}{2})} a_0,$$

$$a_3 = \frac{(p + \frac{5}{2})(-p + \frac{5}{2})}{3 \cdot \frac{7}{2}} a_2 = \frac{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2})(p + \frac{5}{2})(-p + \frac{1}{2})(-p + \frac{3}{2})(-p + \frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\frac{3}{2})(\frac{5}{2})(\frac{7}{2})} a_0,$$

...

$$a_n = \frac{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2}) \dots (p + n - \frac{1}{2})(-p + \frac{1}{2})(-p + \frac{3}{2})(-p + n - \frac{1}{2})}{n! (\frac{3}{2})(\frac{5}{2}) \dots (\frac{2n+1}{2})} a_0.$$

Maka penyelesaian kedua dari persamaan (61) berbentuk

$$y_2(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2}) \dots (p + n - \frac{1}{2})(-p + \frac{1}{2})(-p + \frac{3}{2})(-p + n - \frac{1}{2})}{n! (\frac{3}{2})(\frac{5}{2}) \dots (\frac{2n+1}{2})} t^n \right].$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan (61) adalah

$$y(t) = A \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)(-p)(-p+1) \dots (-p+n-1)}{n! (\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) \dots (\frac{2n-1}{2})} t^n \right] + B t^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2}) \dots (p + n - \frac{1}{2})(-p + \frac{1}{2})(-p + \frac{3}{2})(-p + n - \frac{1}{2})}{n! (\frac{3}{2})(\frac{5}{2}) \dots (\frac{2n+1}{2})} t^n \right].$$

Sehingga diperoleh penyelesaian Tschebyshev yang berbentuk

$$y = A \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p)_n (-p)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \right] + B \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + \frac{1}{2})_n (-p + \frac{1}{2})_n}{n! (\frac{3}{2})_n} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \right].$$

$$y = A \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n (-p)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \right] + B \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p + \frac{1}{2})_n (-p + \frac{1}{2})_n}{n! (\frac{3}{2})_n} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \right].$$

$$y = A F(p, -p; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) + B \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} F(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad (64)$$

dimana A dan B adalah konstanta sembarang.

3.3 Relasi Fungsi Hipergeometrik dengan Fungsi lain

Beberapa fungsi yang kita ketahui dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi hipergeometrik, yaitu :

a $(1+x)^p = F(-p, b, b; -x)$

b $\ln(1+x) = xF(1, 1; 2; -x)$

c $\sin^{-1}x = xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2)$

d $\tan^{-1}x = xF(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2)$

e $e^x = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, b; a; \frac{x}{b})$

f $\sin x = x \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, a; \frac{3}{2}; \frac{-x^2}{4a^2})$

g $\cos x = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, a; \frac{1}{2}; \frac{-x^2}{4a^2})$

Bukti :

a.
$$\begin{aligned} (1+x)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)(-p+1)\dots(-p+n-1)}{n!} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)_n}{n!} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)_n (b)_n}{n! (b)_n} (-x)^n \\ &= F(-p, b, b; -x). \end{aligned}$$

b.
$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} (-x)^n \\
 &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)\Gamma(2)}{n!\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(n+2)} (-x)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{n! (2)_n} (-x)^n \\
 &= xF(1,1;2;-x).
 \end{aligned}$$

$$\text{c. } \sin^{-1} x = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; x^2\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (2n+1)} (x^2)^n$$

sedangkan $2n+1 = 2\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$ maka

$$\begin{aligned}
 \sin^{-1} x &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} (x^2)^n \\
 &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! \left(\frac{3}{2}\right)_n} (x^2)^n \\
 &= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{d. } \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} (-x^2)^n$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} (-x^2)^n$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! \left(\frac{3}{2}\right)_n} (-x^2)^n$$

$$= xF\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

$$e. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1(a)_n}{n!(a)_n} x^n$$

diketahui $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(b+n)}{b^n \Gamma(b)} = 1$, maka

$$e^x = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+b)(a)_n}{n! b^n \Gamma(b)(a)_n} x^n \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_n}{n! (a)_n} \left(\frac{x}{b} \right)^n \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(b, a; a, \frac{x}{b}\right).$$

$$f. \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!(2n+1)}$$

diketahui $(2n+1)! = n! 4^n \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$, jadi

$$\sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{n! 4^n \Gamma(n+\frac{3}{2})} (-x^2)^n$$

$$= x \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a) \Gamma(n+a) \Gamma(\frac{3}{2})}{n! a^n \Gamma(a) a^n \Gamma(a) 4^n \Gamma(n+\frac{3}{2})} (-x^2)^n \right]$$

$$= x \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (a)_n}{n! (\frac{3}{2})_n} \left(\frac{-x^2}{4a^2} \right)^n \right]$$

$$= x \left[\lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a; \frac{3}{2}, \frac{-x^2}{4a^2} \right) \right].$$

$$g. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!}$$

diketahui $(2n)! = n! 4^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, jadi

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n! 4^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} (-x^2)^n \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a) \Gamma(n+a) \Gamma(\frac{1}{2})}{n! a^n \Gamma(a) a^n \Gamma(a) 4^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} (-x^2)^n \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (a)_n}{n! (\frac{1}{2})_n} \left(\frac{-x^2}{4a^2} \right)^n \right] \\ &= \left[\lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a; \frac{1}{2}; \frac{-x^2}{4a^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil beberapa kesimpulan berikut ini :

Suatu persamaan diferensial hipergeometrik berbentuk

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1)$$

dengan a, b dan c adalah konstanta.

Persamaan diferensial hipergeometrik ini mempunyai tiga titik singular regular $0, 1$ dan ∞ . Dengan menggunakan metode Frobenius, persamaan diferensial (1) dapat dicari penyelesaiannya pada masing-masing titik singular regular.

Jika diketahui $x_0 = 0$ titik singular regular, maka dengan mensubstitusikan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ ke dalam persamaan (1) diperoleh akar-akar dari

persamaan indisial $r_1 = 0$ dan $r_2 = 1 - c$ dan diperoleh penyelesaian yang berbentuk $y = AF(a, b; c; x) + Bx^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)$ (2)

dengan c bukan bilangan bulat.

Jika diketahui $c = 1$, maka penyelesaian umum persamaan diferensial hipergeometrik berbentuk $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} x^n \quad \text{dan} \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}(0) x^n \quad (3)$$



dengan

$$\frac{1}{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right]$$

Jika diketahui $x_0 = 1$ titik singular regular, maka dengan mengubah variabel

$z = 1 - x$ dan mensubstitusikan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ ke dalam persamaan (1) diperoleh

akar-akar dari persamaan indisial $r_1 = 0$ dan $r_2 = c - a - b$ dan akhirnya diperoleh penyelesaian yang berbentuk

$$y = AF(a, b; 1 + a + b - c; 1 - x) + B(1 - x)^{c-a-b} F(c - b, c - a; 1 + c - a - b; 1 - x) \quad (4)$$

dengan $c - a - b$ bukan bilangan bulat.

Jika $c - a - b = 0$, maka penyelesaian umum berbentuk

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan A dan B konstanta sembarang dan

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} (1-x)^n \quad \text{dan} \quad y_2(x) = y_1(x) \ln |1-x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} (1-x)^n \quad (5)$$

dengan

$$\frac{1}{a_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} \right] - \left[2 + 1 + \dots + \frac{2}{n} \right] \right\}$$

Jika diketahui $x_0 = \infty$ titik singular regular, maka dengan

mentransformasikan $t = \frac{1}{x}$ ke dalam persamaan (1) diperoleh persamaan

$$t^2(1-t)y'' + [(1-a-b)t - (2-c)t^2]y' + aby = 0 \quad (6)$$

dan dengan mensubstitusikan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$ ke dalam persamaan (6) diperoleh

akar-akar dari persamaan indisial $r_1 = a$ dan $r_2 = b$ sehingga diperoleh penyelesaian persamaan (1) yang berbentuk

$$y = A \left(\frac{1}{x} \right)^a F \left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x} \right) + B \left(\frac{1}{x} \right)^b F \left(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{x} \right) \quad (7)$$

dengan $a \neq b$ dan $a-b$ bukan bilangan bulat.

Jika diketahui $r_1 = r_2 = a = b$, maka penyelesaian umum persamaan diferensial hipergeometrik berbentuk $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dengan

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} x^n \text{ dan } y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n (1) x^n \text{ dengan} \quad (8)$$

$$\bar{a}_n = \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{n+a-c} + \frac{1}{1+a-c} + \frac{1}{2+a-c} + \dots + \frac{1}{n+a-c} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right] \right\}$$

Suatu persamaan diferensial linear homogen yang berbentuk

$$(x-A)(x-B)y'' + (C+Dx)y' + Ey = 0 \text{ di mana } A \neq B \text{ dapat diubah menjadi}$$

persamaan diferensial hipergeometrik dengan mengubah variabel bebas x ke t

dengan bentuk $t = \frac{x-A}{B-A}$, sehingga diperoleh persamaan yang diasumsikan

$$\text{berbentuk } t(t-1)y'' + (F+Gt)y' + Hy = 0 \text{ dengan } F=c, \quad G=-(a+b+1) \text{ dan}$$

$$H = -ab.$$

Fungsi-fungsi yang telah kita ketahui seperti fungsi $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ dan e^x dan beberapa fungsi lainnya dapat diubah ke bentuk fungsi hpergeometrik dengan menyatakan fungsi yang diketahui dalam bentuk deret pangkat kemudian menggunakan operasi-operasi yang berlaku pada deret pangkat.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdulah, Renreng., *Metode Matematika dalam Fisika.*, Angkasa Bandung., 1990
- Agarwal, Ravi.P & Ramesh C. Gupta., *Essentials of Ordinary Differential Equations.*, MacGraw-Hill Book Company., Singapore., 1991
- Anton, Howard., *Calculus with Analytic Geometry.*, John Wiley & Son, Inc., 1980
- Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equation.*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall., 1961
- Finizio, N & G.Ladas., *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern* (diterjemahkan Dra. Widiarti Santoso)., Edisi ke-2., Erlangga., Jakarta., 1988
- Kreyszig, E., *Matematika Teknik Lanjutan* (diterjemahkan Bambang Sumantri)., Edisi ke-6., Buku ke-1., PT Gramedia Pustaka Utama., Jakarta., 1993
- Kreyszig, E., *Matematika Teknik Lanjutan* (diterjemahkan Bambang Sumantri)., Edisi ke-6., Buku ke-2., PT Gramedia Pustaka Utama., Jakarta., 1993
- Miller, Richard.K., *Introduction to Differential Equations.*, Second edition., Prentice-Hall, Inc., New Jersey., 1991
- Nagle, R. Kent & Edward B Saff., *Fundamentals of Differential Equations.*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., California., 1986
- Rice, Bernard J & Jerry D Strange., *Ordinary Differential equations with Applications.*, Brooks/Cole Publishing co. Monterey., California., 1986
- Ross, Shepley L., *Introduction to Ordinary Differential Equations.*, Third edition., John Wiley and Sons, Inc., 1980
- Simmons, G.F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes.*, Tata McGraw-Hill., New Delhi., 1974

