KONSISTENSI GEOMETRI HIPERBOLIK

Skripsi

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Raymundus Aris Pambudi

NIM: 961414013

NIRM: 960051120501120013

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

KONSISTENSI GEOMETRI HIPERBOLIK

Oleh:

Raymundus Aris Pambudi

NIM: 961414013

NIRM: 960051120501120013

Telah disetujui oleh

Pembimbing I **Tanggal** 12 **Desember 2001**

(Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A.)

SKRIPSI

KONSISTENSI GEOMETRI HIPERBOLIK

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Raymundus Aris Pambudi

NIM: 961414013

NIRM: 960051120501120013

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 12 Desember 2001 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, MSi	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT	....
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw., MA	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: M. Andy Rudhito S.Pd	....

Yogyakarta, 12 Desember 2001

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Sanata Dharma

Dekan

(Dr. A.M. Slamet Soewandi)

Persembahan

Jika yang dipikirkan semua orang sama maka tak akan ada seorangpun yang mau berpikir

Walter Lippmann

Skripsi ini kupersembahan untuk

Ibu dan Bapak,

serta mBak Tutik, mBak Yuni dan

Mas Margana.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 - 12 - 2001

Penulis

Raymundus Aris Pambudi

Abstrak

Geometri Hiperbolik muncul karena pada mulanya para matematikawan meragukan postulat kelima Euclides. Mereka menganggap bahwa postulat tersebut merupakan suatu teorema, yang dapat dibuktikan. Namun usaha para matematikawan ini tidak berhasil. Tetapi dari usaha tersebut memunculkan geometri baru yang berbeda dengan Geometri Eulides, yang karena itulah disebut Geometri Non-Euclides. Geometri Hiperbolik merupakan salah satu dari geometri ini. Karena Geometri Hiperbolik berbeda dengan Geometri Euclides maka konsistensi dari geometri ini banyak dipertanyakan. Dan setelah diketemukan model yang sesuai untuk menunjukkan bahwa Geometri Hiperbolik konsisten, maka diakuilah konsistensi dari geometri ini. Konsistensi Geometri Hiperbolik salah satunya ditunjukkan dengan model konformal dari Poincare. Dengan model ini dapat ditunjukkan bahwa postulat dalam Geometri Euclides tetap valid dalam Geometri Hiperbolik.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah senantiasa melimpahkan berkat-Nya, sehingga skripsi dengan judul "Konsistensi Geometri Hiperbolik" ini dapat penulis selasaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan pencapaian gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan banyak penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak, penulis dapat melalui hambatan dan rintangan tersebut. Untuk itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas segala dorongan, perhatian , kasih serta segala dukungan baik moril , meteriil maupun spirituil kepada semua pihak antara lain:

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, MA., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang dengan tekun, sabar dan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Th. Sugiarto, MT., selaku Ketua Program Studi yang telah berkenan memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis selama persiapan ujian skripsi.
3. Bapak Sugeng dan Bapak Sunarjo atas bantuan yang diberikan selama ini, terlebih dalam masalah kesekretariatan.
4. Staf Perpustakaan Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan pelayanan dan fasilitas yang dibutuhkan penulis selama studi.
5. Bapak/Ibu dosen di Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis.

6. Kedua orang tua dan saudara-saudaraku yang telah memberikan dukungan dan bantuan dalam menyelesaikan studi.
7. Semua rekan-rekan di Universitas Sanata Dharma, khusunya Pendidikan Matematika angkatan '96 yang selama studi di Universitas Sanata Dharma telah banyak memberikan banyak masukan dan pengalaman kepada penulis, dan juga teman-teman di kost 124 yang telah memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis.
8. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan segala kerendahan hati.

Yogyakarta, 12 Desember 2001

Penulis

Raymundus Aris Pambudi

DAFTAR ISI

Lambang

$A, B, C, \ldots$	: titik-titik
$a, b, \ldots l, m, \ldots$	: garis-garis
$[ABC]$	: titik-titik A, B, C segaris dan B terletak di antara A dan C
$\overleftrightarrow{AB}$	: garis melalui A dan B
$\overline{AB}$	: ruas garis atau segmen AB
$\overrightarrow{AB}$	: sinar garis AB dengan pangkal A
A/B	: Sinar dengan pangkal A menjauhi B
AB	: panjang $\overline{AB}$
$\angle ABC$	: sudut ABC
$m\angle ABC$	: besar sudut ABC
ΔABC	: segitiga ABC
$\cong$	: kongruen
$\perp$	: tegak lurus
$\overset{\frown}{AB}$	: busur AB
$\square ABCD$	: sisiempat $ABCD$

Daftar Gambar

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG MASALAH

Geometri berasal dari kata latin "Geometria", Geo berarti tanah dan metria berarti pengukuran. Geometri kuno, dimulai untuk kebutuhan pengukuran pertanian di Babilonia dan Mesir. Geometri merupakan sistem deduktif. Artinya dalam suatu sistem deduktif harus ada pengertian-pengertian pangkal, yaitu unsur-unsur dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan. Dan untuk unsur-unsur lain yang menggunakan pengertian-pengertian pangkal tersebut, diperlukan definisi-definisi, yang memungkinkan kita untuk memberikan nama pada unsur-unsur sehubungan dengan pengertian pangkal itu. Selain itu harus ada relasi-relasi atau pernyataan-pernyataan yang dapat diterima tanpa bukti, yang disebut sebagai asumsi atau aksioma atau postulat. Relasi-relasi lain yang dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi-definisi atau postulat-postulat itu disebut dalil atau teorema.

Dalam geometri, himpunan postulat harus konsisten, artinya tidak boleh ada dua pernyataan yang bertentangan. Dan tidak boleh ada dua dalil yang bertentangan yang diturunkan dari himpunan pustulat itu. Geometri yang pertama kali dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif adalah geometri dari Euclides yang bertahan selama hampir 2000 tahun. Geometri Euclides mengandung postulat parallel. Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat parallel itu bukan postulat dan dapat dibuktikan dengan keempat postulat yang lain. Usaha untuk membuktikan postulat kelima dari Geometri Euclides ini masih bertahan kira-kira sampai tahun 1820. Tokoh-tokoh yang berusaha untuk membuktikannya ialah Proclus dari Aleksandria (410 - 485), Girolamo Saccheri dari Italia (1607 - 1733), Karl Freidrich Gauss dari Jerman (1777 - 1855), Wolfgang (Farkas) Bolyai dari Hongaria (1775 -1856) dan Yanos Bolyai dari Hongaria (1802 -1860) dan juga Nicolai Ivanovitch Lobachevsky dari Rusia (1793 -1856). Usaha-usaha ini tidak ada yang berhasil dan tampak keunggulan Euclides. Tetapi usaha ini mengakibatkan diketemukannya geometri lain yang sekarang disebut dengan Geometri Non-Euclides. Jadi Geometri Non- Euclides masih berdasarkan empat postulat dari Euclides dan hanya berbeda pada postulat yang kelima. Dengan demikian Geometri Non-Euclides termuat dalam Geometri Absolut atau Geometri Netral.

Geometri Non-Euclides ada dua macam, yaitu pertama , Geometri Hiperbolik atau Geometri Lobachevsky yang diketemukan oleh tiga tokoh dalam waktu yang hampir bersamaan, tetapi bekerja sendiri-sendiri.Tokoh-tokoh itu ialah Karl Friedrich Gauss dari Jerman, Yanos Bolyai dari Hongaria dan Nicolai Lobachevsky dari Rusia. Geometri Non-Euclides yang kedua adalah geometri yang diketemukan oleh G.F.B Bernhard Riemann (1826 - 1866) dari Jerman, yang disebut Geometri Elliptik atau Geometri Riemann. Dan yang akan dibahas di sini hanya Geometri Hiperbolik.

Seperti pada Geometri Euclides, Geometri Hiperbolik juga memiliki aksioma kesejajaran. Aksioma kesejajaran Geometri Euclides yang telah disederhanakan berbunyi: "Melalui satu titik di luar sebuah garis dapat dibuat *tidak lebih dari satu garis* yang parallel dengan garis itu". Sedang dalam Geometri Hiperbolik aksioma kesejajaran berbunyi: "Melalui satu titik di luar sebuah garis dapat dibuat *lebih dari satu garis* (tepatnya dua garis) yang parallel dengan garis itu". Perbedaan aksioma Euclides dan Hiperbolik hanya terletak pada kata *tidak.* Dari kedua geometri itu kita tidak tahu mana yang benar, sehingga kita tidak dapat menentukan geometri mana yang memberikan dasar yang baik untuk dipakai menguraikan ruang astronomi. Ditinjau dari geometri murnipun sukar untuk menentukan apakah aksioma-aksioma itu konsisten dengan aksioma-aksioma yang lain dari Geometri Absolut, sebab menurut Godel tidak ada bukti intern untuk konsistensi dari sistem-sistem yang menyangkut himpunan tak berhingga. Kita sudah harus puas dengan konsistensi relatif. Konsistensi relatif ini terdapat jika dalam masing-masing geometri didapatkan model untuk geometri lainnya.

B. PERUMUSAN MASALAH

Pokok perumusan masalah yang akan dibahas di sini adalah:

1. Apakah yang dimaksud dengan Geometri Hiperbolik?
2. Apakah Geometri Hiperbolik konsisten?
3. Model apa saja yang digunakan untuk menunjukkan konsistensi Geometri Hiperbolik?

C. TUJUAN PENULISAN

1. Memahami pengertian Geometri Hiperbolik.
2. Menunjukkan konsistensi Geometri Hiperbolik.
3. Mengetahui model yang digunakan dalam menunjukkan konsistensi Geometri Hiperbolik.

D. PEMBATASAN MASALAH

Dalam landasan teori dibahas Geometri Euclides, Geometri Netral, Kesejajaran dan Geometri Hiperbolik. Untuk membahas konsistensi Geometri Hiperbolik, terlebih dahulu dibahas Geometri Euclides yang meliputi pengertian, postulat, aksioma dan kelemahan-kelemahan dalam geometri ini, sehingga geometri ini mendasari munculnya Geometri Hiperbolik. Kemudian akan dibahas Geometri Netral, yang membicarakan pengertian pangkal, definisi-definisi, aksioma dan teorema beserta pembuktiannya. Pada sub bab selanjutnya dibahas kesejajaran. Sub bab terakhir membahas pendahaluan Geometri Hiperbolik. Di sini diberikan beberapa aksioma dan teorema dalam Geometri Hiperbolik sebagai pengantar untuk membahas konsistensi Geometri Hiperbolik. Selain itu pada sub bab ini juga diberikan pengertian defek segitiga.

Dalam rangka memperluas dan memperdalam konsistensi Geometri Hiperbolik penulis akan membahas daerah Geometri Hiperbolik, yang meliputi luas daerah segitiga. Konsistensi dari Geometri Hiperbolik akan dibahas melalui model Poincare. Yang terakhir dibahas adalah lingkaran, horocycle dan kurva berjarak sama, sebagai pengenalan dalam Geometri Hiperbolik. Pembahasan di sini hanya terbatas pada geometri bidang.

E. MANFAAT PENULISAN

Dengan penulisan ini diharapkan penulis dapat lebih mendalami tentang konsistensi dari Geometri Hiperbolik dan juga mendalami tentang model yang digunakan untuk membuktikan konsistensinya.

F. METODE PENULISAN

Penulisan ini menggunakan metode studi pustaka. Studi pustaka yang digunakan adalah dengan menggunakan buku-buku yang tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. GEOMETRI EUCLIDES

Geometri Euclides merupakan geometri yang pertama kali disusun secara sistematis berdasarkan pada proses berpikir deduktif. Geometri ini muncul pada abad ke-3 sebelum Masehi. Hasil karya dari Euclides terdapat dalam salah satu buku dengan judul " The Elements" atau "Unsur-unsur".

Buku pertama dari The Elements diawali dengan 23 definisi, 2 diantaranya adalah:

Definisi II.A.1

Suatu titik adalah yang tidak mempunyai bagian.

Definisi II.A.2

Suatu garis adalah panjang tanpa lebar.

Untuk definisi yang lain terdapat pada lampiran.

Pada definisi di atas terdapat suatu kelemahan, yaitu adanya istilah yang tidak didefinisikan. Misalnya pada definisi pertama, bagian tidak didefinisikan, demikian juga pada definisi kedua, panjang dan lebar tidak didefinisikan. Apabila masalah ini dicoba untuk diatasi, maka akan menimbulkan suatu lingkaran definisi. Dari sini perlu adanya suatu istilah yang tidak didefinisikan atau perlu ada pengertian pangkal. Jadi tidak perlu mendefinisikan semuanya dalam geometri. Selain 23 definisi, Euclides juga menuliskan 5 postulat, 5 aksioma dan 48 dalil(teorema). Menurut Euclides, postulat berkaitan dengan asumsi spesifik (khusus) pada geometri, sedangkan aksioma merupakan asumsi atau pengandaian yang digunakan para matematikawan dan ini tidak berkaitan secara khusus pada geometri (berlaku umum).

Yang dipostulatkan oleh Euclides tersebut adalah:

Postulat II.A.1

Menggambar garis lurus dari sebarang titik ke sebarang titik yang lain.

Postulat II.A.2

Memperpanjang suatu ruas garis secara kontinu menjadi garis lurus.

Postulat II.A.3

Melukis lingkaran dengan sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

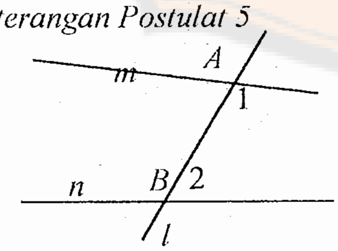
Postulat II.A.4

Bahwa semua sudut siku-siku adalah sama.

Pustulat II.A.5

Bahwa jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Keterangan Postulat 5



Gambar 2.1

Perpotongan antara dua garis

Garis l memotong garis m dan n. Sudut A_1 ditambah sudut B_2 kurang dari dua sudut siku-siku. Jika m dan n diperpanjang akan berpotongan di pihak tempat sudut A_1 dan sudut B_2.

Pustulat dari Euclides ini disebut juga postulat parallel. Para matematikawan berusaha untuk membuktikan postulat kelima ini, karena postulat ini terlalu panjang dan dianggap bukan postulat. Namun usaha dari para matematikawan ini tidak berhasil. Meskipun demikian usaha para matematikawan ini dapat memunculkan geometri baru yang disebut Geometri Non-Euclides. Geometri Non-Euclides ada dua macam yaitu: Geometri Hiperbolik atau Geometri Lobachevsky dan Geometri Elliptik atau Geometri Riemann. Dan yang akan dibahas di sini adalah Geometri Hiperbolik.

Berikut aksioma-aksioma dalam Geometri Euclides.

Aksioma II.A.1

Benda-benda yang sama dengan suatu benda yang sama, satu sama lain juga sama.

Aksioma II.A.2

Jika sesuatu yang sama ditambah dengan sesuatu yang sama, satu sama lain juga sama.

Aksioma II.A.3

Jika sesuatu yang sama dikurangi dengan sesuatu yang sama, sisanya sama.

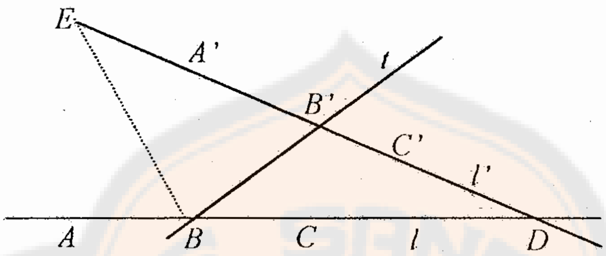
Aksioma II.A.4

Benda-benda yang berimpit satu sama lain sama.

Aksioma II.A.5

Seluruhnya lebih besar dari bagiannya.

Selanjutnya akan diberikan teorema yang berkaitan dengan postulat parallel dari Euclides. Akan tetapi sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu sudut dalam dan sudut dalam berseberangan di bawah ini.



Gambar 2.2 Sudut dalam dan sudut dalam berseberangan.

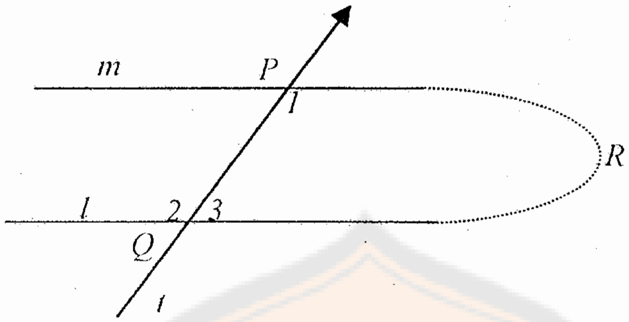
Diketahui t merupakan suatu garis lurus yang memotong l dan l', masing-masing di B dan B'. Dipilih titik A dan C di l sedemikian sehingga $[ABC]$. Dipilih titik A' dan C' di l', sedemikian sehingga A dan A' pada pihak yang sama terhadap t, sehingga $[A'B'C']$. Maka $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$, dan $\angle CBB'$ disebut sudut dalam (interior). Sedangkan $\angle A'B'B$ dan $\angle CBB'$ disebut sudut dalam berseberangan.

Dalam Geometri Euclides terdapat dua teorema yang membahas garis sejajar, yaitu teorema 27 dan teorema 28. Dan pada penulisan ini, hanya akan dibahas salah satu teorema, dari kedua teorema tersebut, yaitu teorema 27 seperti di bawah ini.

Teorema II.A.1

Jika dua garis dipotong oleh suatu transversal sehingga terdapat sepasang sudut dalam berseberangan yang kongruen maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti :



Gambar 2.3 Garis parallel (sejajar)

Diketahui garis l dan m yang dipotong oleh suatu transversal t sedemikian sehingga $\angle 1 \cong \angle 2$. Akan dibuktikan l dan m sejajar. Diandaikan l dan m berpotongan di suatu titik R. Akibatnya $\angle 2$ merupakan sudut luar ΔPQR dengan $m\angle 2 > m\angle 1$ (karena bila l dan m berpotongan maka $m\angle 1 + m\angle 3$ lebih kecil dari dua sudut siku-siku). Hal ini bertentangan dengan yang diketahui, yaitu $\angle 1 \cong \angle 2$. Jadi pengandaian salah dan terbukti bahwa l sejajar m. □

Dalam Geometri Euclides terdapat beberapa kelemahan, diantaranya

1. Euclides berusaha mendefinisikan semuanya dalam geometri, sampai titik dan garis.
2. Postulat kelima dari Euclides, yang terkenal dengan postulat parallel terlalu panjang, sehingga merisaukan para matematikawan.

Dengan adanya kelemahan-kelemahan dalam Geometri Euclides ini, maka Geometri Euclides tidak dapat dipandang lagi sebagai sistem geometri yang baik. Karena adanya beberapa kelemahan dari Geometri Euclides ini ada matematikawan yang berusaha untuk memperbaikinya, antara lain David Hilbert, Birkhoff dan SMSG.

Selanjutnya akan dibahas geometri yang tidak berdasarkan pada postulat parallel Euclides yang disebut sebagai Geometri Netral atau Geometri Absolut.

B. GEOMETRI NETRAL

Geometri Netral merupakan geometri yang berdasarkan pada empat postulat pertama Euclides dan tidak berdasarkan pada postulat parallel. Geometri ini pertama kali diperkenalkan oleh Y. Bolyai dari Hongaria sekitar tahun 1802 – 1860. Geometri Netral memuat tiga pengertian pangkal yaitu:

Pangkal II.B.1

Titik.

Titik-titik dinotasikan dengan $A,B,C,\ldots$.

Pangkal II.B.2

Keantaraan ("Intermediacy").

Relasi ini dinyatakan dengan $[ABC]$, yang berarti B terletak diantara A dan C.

Pangkal II.B.3

Kongruensi.

Suatu relasi untuk pasangan titik, segmen atau interval, sudut dan bangun.

Titik dipandang sebagai unsur yang tidak didefinisikan, sedangkan keantaraan dan kongruensi dipandang sebagai relasi-relasi yang tidak didefinisikan. Dalam Geometri Netral segmen garis AB dilambangkan dengan notasi $\overline{AB}$, dan AB menyatakan besar atau panjang $\overline{AB}$. Untuk melambangkan sudut ABC digunakan notasi $\angle ABC$ dan besarnya dinotasikan dengan m $\angle ABC$. Notasi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ menyatakan $\overline{AB}$ kongruen $\overline{CD}$.

Berikut definisi untuk relasi kongruensi.

Definisi II.B.2

Dua segmen garis kongruen jika dan hanya jika besarnya sama.

Misalnya, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ jika dan hanya jika $AB = CD$.

Definisi II.B.4

Dua sudut kongruen jika dan hanya jika besarnya sama.

Misalnya $\angle ABC \cong \angle DEF$ jika dan hanya jika m$\angle ABC$ =m$\angle DEF$.

Definisi II.B.5

Dua segi banyak kongruen jika dan hanya jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik sudutnya sedemikian sehingga semua sisi yang berkorespondensi kongruen, serta semua sudut yang berkorespondensi kongruen .

Misalnya: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ jika dan hanya jika:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

$\angle ABC \cong \angle DEF$

$\angle BCA \cong \angle EFD$, dan

$\angle CAB \cong \angle FDE$

Geometri Netral memuat lima aksioma kongruensi yaitu:

Aksioma II.B.1

Jika A dan B titik berlainan, maka pada sebarang sinar yang berpangkal di C ada tepat satu titik D sedemikian sehingga $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Aksioma II.B.2

Jika $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ dan $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, maka $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

Aksioma II.B.3

$\overline{AB} \cong \overline{BA}$

Aksioma II.B.4

Jika $[ABC]$ dan $[A`B`C`]$ dan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ maka $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

Aksioma II.B.5

Jika ΔABC dan $\Delta A`B`C`$ adalah dua segitiga dengan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, sedangkan $D$ dan $D`$ adalah dua titik berikutnya sedemikian sehingga $[BCD]$ dan $[B`C`D`]$ maka $\overline{BD} \cong \overline{B'D'}$.

Dari aksioma II.B.1, II.B.2 dan II.B.3 dapat ditunjukkan sifat-sifat refleksif, transitif dan simetrik. Dari sini disimpulkan bahwa kongruensi merupakan relasi ekuivalensi. Aksioma II.B.4 merupakan penjumlahan segmen yang diterapkan sebagai dasar untuk teori panjang. Melalui aksioma II.B.5 dapat diturunkan kongruensi sudut melalui kongruensi segmen.

Sudut siku-siku dalam Geometri Netral didefinisikan sebagai berikut:

Definisi II.B.4

Suatu sudut siku-siku adalah suatu sudut yang kongruen dengan pelurusnya (suplemennya) dan besarnya suatu sudut siku-siku adalah $\frac{1}{2}\pi$.

Karena Geometri Netral memuat Geometri Euclides maka teorema-teorema 1 sampai dengan teorema 26 dalam Geometri Euclides dapat dibuktikan dalam Geometri Netral. Dan teorema 27 dan 28 akan berlaku dalam geometri ini apabila kata *sejajar* pada teorema 27 dan 28 diganti dengan *tidak berpotongan*. Teorema 27 dalam Geometri Euclides pada Geometri Netral akan menjadi

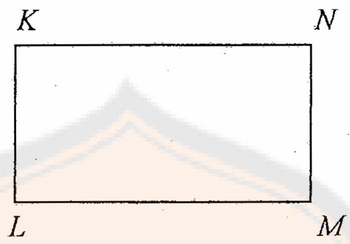
Jika dua garis dipotong oleh suatu transversal sehingga terdapat sepasang sudut dalam berseberangan yang kongruen maka kedua garis tersebut *tidak berpotongan*.

Pada mulanya para matematikawan mempertanyakan apakah postulat ke-5 Euclides tidak bergantung postulat yang lain. Salah satu matematikawan yang berusaha membuktikan validitas postulat parallel ialah Saccheri. Ia menerapkan metode tidak langsung dalam pembuktiannya. Saccheri mempelajari sisiempat untuk validitas postulat parallel. Sisiempat tersebut terkenal dengan nama sisiempat siku-siku sama kaki atau Sisiempat Saccheri. Berikut definisi Sisiempat Saccheri:

Definisi II.B.6

Sisiempat $KLMN$ disebut sisiempat siku-siku sama kaki atau Sisiempat Saccheri jika $m\angle L = m\angle M = 90$ dan $\overline{KL} \cong \overline{MN}$. $\overline{LM}$ disebut alas, $\overline{KL}$

dan $\overline{MN}$ disebut sisi-sisi atau kaki-kakinya, $\overline{KN}$ disebut puncak dan $\angle K$ dan $\angle N$ disebut sudut-sudut puncaknya .



Gambar 2.4 Sisiempat Saccheri

Saccheri mempertimbangkan tiga kemungkinan untuk $\angle K$ dan $\angle N$ yaitu:

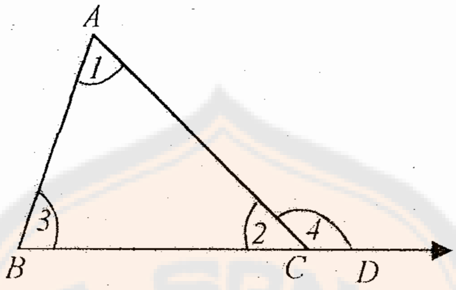
1. $m\angle K = m\angle N > 90$, (hipotesis sudut tumpul)
2. $m\angle K = m\angle N = 90$, (hipotesis sudut siku-siku)
3. $m\angle K = m\angle N < 90$, (hipotesis sudut lancip)

Kemungkinan 1 dan 3 merupakan pertentangan, sedang kemungkinan 2 merupakan kemungkinan yang ekuivalen dengan postulat parallel dalam Geometri Euclides. Dalam Geometri Netral kemungkinan yang memenuhi adalah kemungkinan yang ke-3. Teorema Saccheri yang mendukung kebenaran kemungkinan ke-3 memenuhi dalam Geometri Netral. Teorema Saccheri akan dibuktikan pada sub bab D. Sekarang akan dibuktikan lemma di bawah ini:

Lemma II.B.1

Jumlah besar dua sudut sebarang segitiga lebih kecil dari 180.

Bukti:



Gambar 2.5

ΔABC dengan jumlah besar dua sudut sebarang lebih kecil 180

Diketahui ΔABC dan diandaikan D pada $\overline{BC}$ sedemikian sehingga $[BCD]$. $\angle 4$ merupakan sudut luar ΔABC, sehingga m$\angle 4$ > m$\angle 1$. Karena m$\angle 4$ + m$\angle 2$ = 180, maka m$\angle 4$ = 180 – m$\angle 2$. m$\angle 1$ < m$\angle 4$, sehingga dapat ditulis m$\angle 1$ < 180 - m$\angle 2$ atau m$\angle 1$ + m$\angle 2$ < 180. Analog dengan cara di atas dapat ditunjukkan bahwa

m$\angle 2$ + m$\angle 3$ < 180. □

C. Kesejajaran

Geometri Non-Euclides muncul akibat adanya postulat kesejajaran dari Euclides. Karena itu, sebelum membicarakan Geometri Hiperbolik, akan dibahas terlebih dahulu tentang kesejajaran (parallelisme) dari Gauss.

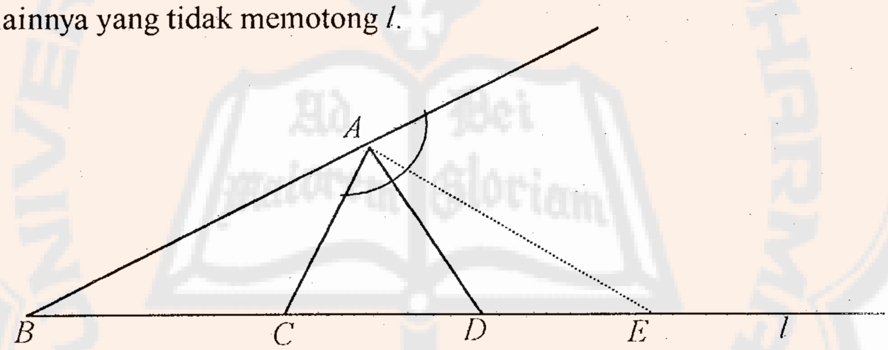
Aksioma II.C.1

Untuk setiap partisi dari semua titik pada suatu garis dalam dua himpunan yang tidak kosong sedemikian, hingga tidak ada titik dari masing-masing himpunan yang terletak antara dua titik dari himpunan lainnya, maka ada satu titik dari salah satu himpunan yang terletak diantara setiap titik dari himpunan itu dan setiap titik dari himpunan lainnya.

Berikut kesejajaran atau parallelisme dalam Geometri Terurut.

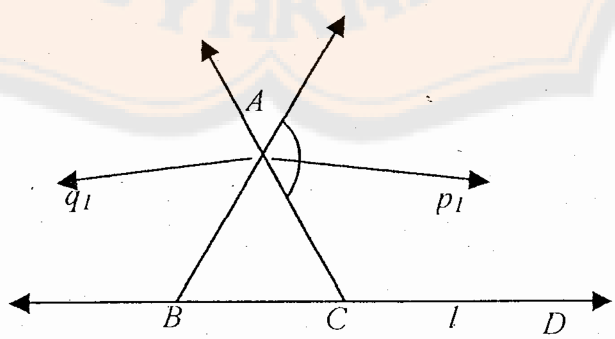
Teorema II.C.1

Untuk sebarang titik A dan sebarang garis l yang tidak melalui A, ada tepat dua sinar dari A, dalam bidang Al, yang tidak memotong l, dan memisahkan semua sinar dari A yang memotong l dari semua sinar lainnya yang tidak memotong l.



Gambar 2.6 Garis l tidak melalui titik A

Bukti :



Gambar 2.7 Himpunan sinar yang memotong dan tidak memotong $\overline{BC}$

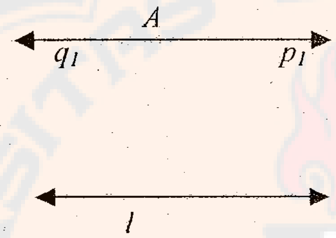
Diambil titik B dan titik C pada garis l, dan dipandang sudut antara $\overrightarrow{AC}$ dan A/B. Dari sini terdapat dua himpunan sinar, yaitu himpunan yang memotong $\overleftrightarrow{BC}$ dan yang tidak memotong $\overleftrightarrow{BC}$. Jadi akan terdapat salah satu sinar misalnya p_1 yang terletak antara semua sinar-sinar yang memotong $\overleftrightarrow{BC}$ dan sinar-sinar yang tidak memotong $\overleftrightarrow{BC}$. Diandaikan p_1 memotong $\overrightarrow{BC}$ di D, sedemikian sehingga $[BCD]$, maka dapat diambil titik E sedemikian sehingga $[CDE]$. Maka $\overrightarrow{AE}$ ini akan menjadi anggota himpunan yang tidak memotong, karena p_1 atau $\overrightarrow{AD}$ adalah sinar terakhir yang memotong $\overrightarrow{BC}$. Karena $\overrightarrow{AE}$ juga anggota himpunan sinar yang memotong $\overrightarrow{BC}$, maka terdapat pertentangan. Jadi sinar p_1 adalah sinar pertama yang tidak memotong $\overrightarrow{BC}$ dalam sudut antara $\overrightarrow{AC}$ dan A/B. Dengan demikian setiap sinar antara $\overrightarrow{AC}$ dan p_1 memotong $\overrightarrow{BC}$.

Sekarang dipandang sinar-sinar dalam sudut antara $\overrightarrow{AB}$ dan A/C, maka didapatkan sinar q_1 sebagai sinar terakhir yang tidak memotong $\overrightarrow{CB}$ apabila q_1 diputar dari p_1. Karena garis l memuat $\overrightarrow{CB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ dengan $\overline{BC}$, maka diperoleh dua sinar p_1 dan q_1 yang memisahkan semua sinar dari A yang memotong l dari semua sinar lainnya dari A yang tidak memotong l. Sinar-sinar istimewa dari A dikatakan parallel dengan garis l dapat dipandang dalam dua arah, yaitu p_1 parallel dengan $\overrightarrow{BC}$ dan q_1 parallel $\overrightarrow{CB}$. □

Selanjutnya didefinisikan kesejajaran garis dari suatu titik A yang parallel garis l dalam Geometri Affine dan Geometri Hiperbolik yaitu:

Definisi II.C.1 (kesejajaran garis dalam Geometri Affine)

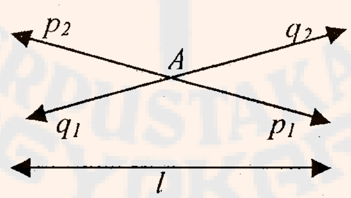
Jika A tidak pada l, serta p_1 dan q_1 merupakan bagian dari suatu garis, maka garis ini membagi bidang dalam dua setengah bidang yang salah satu memuat seluruh garis l.



Gambar 2.8 Kesejajaran garis dalam Geometri Affine

Definisi II.C.2 (kesejajaran garis dalam Geometri Hiperbolik)

Jika A tidak pada l, serta p_1 dan q_1 bukan merupakan bagian-bagian dari satu garis, maka p dan q membagi bidang dalam 4 daerah sudut yaitu: p_1q_1, q_1p_2, p_2q_2 dan q_2p_1. Di sini l terletak seluruhnya dalam daerah p_1q_1.



Gambar 2.9 Kesejajaran garis dalam Geometri Hiperbolik

Geometri Netral selain memuat Geometri Euclides juga memuat Geometri Hiperbolik. Berikut akan dibahas Geometri Hiperbolik.

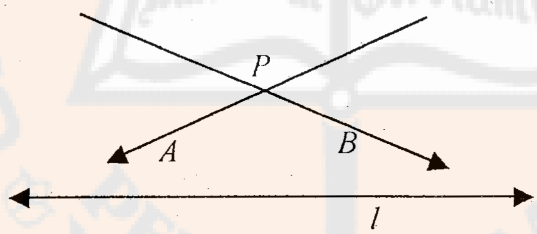
D. Geometri Hiperbolik

Geometri ini disebut Geometri Hiperbolik karena dalam aksioma kesejajarannya disebutkan bahwa melalui suatu titik A dan suatu garis l, dapat dibuat lebih dari satu garis melalui A yang sejajar garis l . Ini berarti terdapat dua titik di jauh tak berhingga. Bidang dalam geometri ini seperti bentuk terompet, sehingga garis yang terbentuk dalam bidang ini berbentuk hiperbola.

Terdapat sedikit perbedaan antara aksioma Geometri Euclides dengan aksioma Geometri Hiperbolik. Berikut aksioma dalam Geometri Hiperbolik.

Aksioma II.D.1

Untuk suatu titik P dan suatu garis l yang tidak melalui P ada lebih dari satu garis melalui P dalam bidang Pl, yang tidak memotong l.

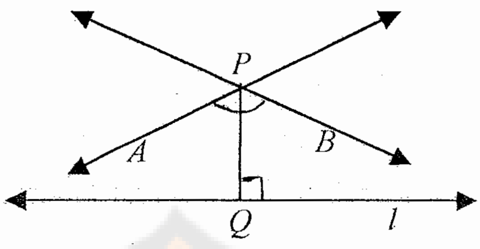


Gambar 2.10 $\overrightarrow{PB}$ dan $\overrightarrow{PA}$ merupakan sinar-sinar yang sejajar l

Setelah mengetahui garis yang sejajar dengan l, dan melalui suatu titik P, selanjutnya diberikan aksioma yang membahas besar sudut kesejajaran dalam Geometri Hiperbolik.

Aksioma II.D.2

Besar sudut kesejajaran untuk suatu garis l dan sutu titik P yang tidak pada l lebih kecil dari 90.



Gambar 2.11 Besar sudut kesejajaran dalam Geometri Hiperbolik

Pada gambar di atas kedua garis yang melalui P dan sejajar l membentuk sudut APB. Dari P ditarik PQ tegak lurus l. Refleksi terhadap PQ menunjukkan bahwa m$\angle APQ$ dan m$\angle BPQ$ sama dan keduanya lancip. Kedua sudut ini menurut Lobachevsky disebut sudut kesejajaran yang berkorespondensi dengan jarak PQ dan ditulis

$$m\angle QPB = \pi(PQ)$$

Definisi II.D.1

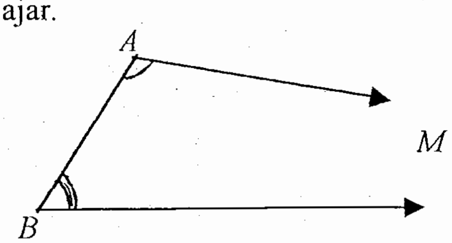
Dua garis dikatakan sejajar atau parallel bila dan hanya bila dua garis itu hampir berpotongan.

Definisi II.D.2

Dua garis dikatakan ultraparallel bila dan hanya bila dua garis tersebut tidak sejajar dan tidak berpotongan.

Definisi II.D.3

Bangun ABM disebut segitiga asimtotik bila dan hanya bila AM dan BM merupakan sinar-sinar sejajar.



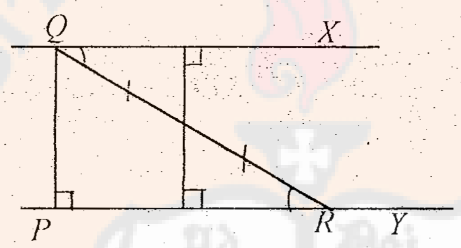
Gambar 2.12 Segitiga asimtotik ABM dengan M merupakan titik akhir

Berikut teorema segitiga asimtotik yang berkaitan dengan sudut kesejajaran.

Teorema II.D.1

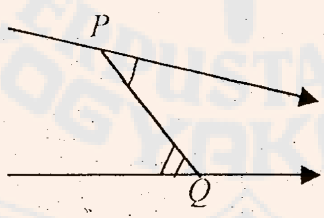
Dalam suatu segitiga asimtotik QPB sudut luar di P atau di Q lebih besar daripada sudut dalam di Q atau di P.

Jika suatu garis memotong dua garis lain sedemikian, sehingga sudut dalam berseberangan yang terjadi itu sama, maka kedua garis itu ultraparallel.



Gambar 2.15 Garis ultraparallel

Dengan demikian untuk dua garis yang parallel maka sudut luarnya akan lebih besar daripada sudut dalamnya.



Gambar 2.14 Garis parallel

Dari sini dapat disimpulkan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga asimtotik kurang dari 180^0.

Definisi II.D.4

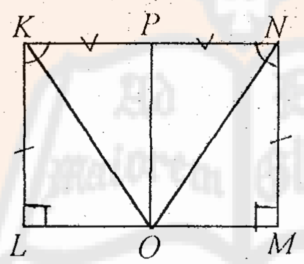
Dua segitiga asimtotik kongruen bila dan hanya bila sisi-sisinya dan salah satu sudutnya sama.

Sebelum membahas lebih jauh segitiga asimtotik dalam Geometri Hiperbolik akan dibuktikan terlebih dahulu teorema dalam Geometri Netral di bawah ini.

Teorema II.D.2

Sudut- sudut puncak Sisiempat Saccheri sama dan tidak tumpul.

Bukti:



Gambar 2.15 Sisiempat Sacheri *KLMN* dengan m$\angle K$ = m$\angle N$

Diketahui Sisiempat Saccheri *KLMN*. Ditentukan titik *O* sebagai titik tengah $\overline{LM}$.

Diperoleh $\Delta LOK \cong \Delta MON$ (S- Sd- S)

Jadi $\overline{KO} \cong \overline{NO}$ dan $\angle LKO \cong \angle MNO$

Selanjutnya diambil *P* sebagai titik tengah $\overline{KN}$, maka didapatkan:

$\overline{KP} \cong \overline{PN}$

$\overline{KO} \cong \overline{NO}$

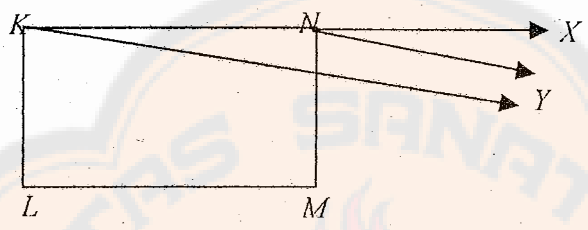
$\overline{PO} \cong \overline{PO}$

Jadi $\Delta KOP \cong \Delta NOP$ sehingga $\angle OKP \cong \angle ONP$

Dengan demikian $\quad m\angle LKO + m\angle OKP = m\angle MNO + m\angle ONP$

Jadi sudut-sudut puncak Sisiempat Saccheri sama ($m\angle K = m\angle N$)

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $m\angle K$ dan $m\angle N$ tidak tumpul



Gambar 2.16 Sisiempat Saccheri dengan $m\angle K$ dan $m\angle N$ tidak tumpul

Ditarik $\overline{KY}$ dan $\overline{NY}$ yang sejajar $\overline{LM}$

$\overline{KL} \cong \overline{NM}$ dan $\angle KLM \cong \angle LMN$

Jadi $\Delta KLY \cong \Delta NMY$

Sehingga $m\angle LKY = m\angle MNY$ dengan $m\angle XKY < m\angle XNY$,

didapatkan $m\angle LKY + m\angle XKY < m\angle MNY + m\angle YNX$

$m\angle K < m\angle MNX$ dan $m\angle K = m\angle N$

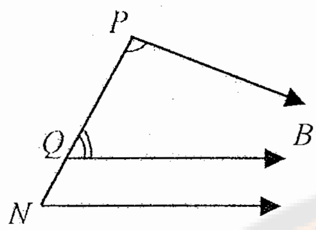
Jadi $m\angle N < m\angle MNX$

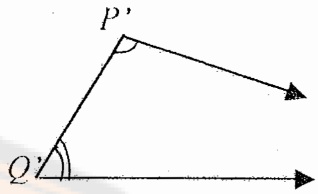
Dengan demikian $m\angle N$ tidak tumpul atau sudut-sudut Sisiempat Saccheri tidak tumpul. □

Teorema II.D.3

Jika dua segitiga asimtotik QPB dan $Q'P'B'$ mempunyai $m\angle P = m\angle P'$ dan $m\angle Q = m\angle Q'$, maka $PQ = P'Q'$.

Bukti :





Gambar 2.17.a Segitiga asimtotik QPB

Gambar 2.17.b Segitiga asimtotik $Q'P'B'$

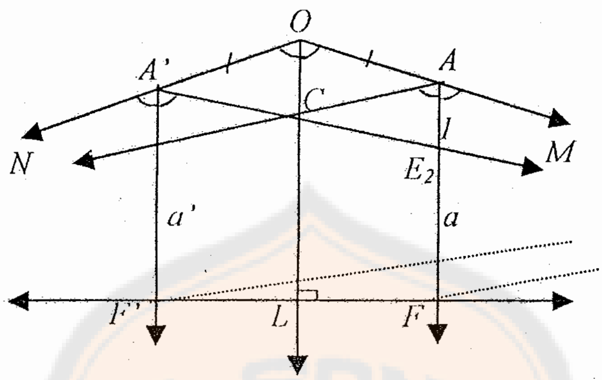
Jika PQ dan $P'Q'$ tidak sama, maka yang satu tentu lebih besar dari yang lain.

Diandaikan $P'Q' > PQ$. Pada Q/P diambil N sedemikian, sehingga $PN = P'Q'$. Ditarik $NB//PB$, maka diperoleh

$m\angle BQP > m\angle BNP = m\angle B'Q'P' = m\angle BQP$

$m\angle BQP > m\angle BQP$. Hal ini tidak mungkin, jadi $PQ = P'Q'$. □

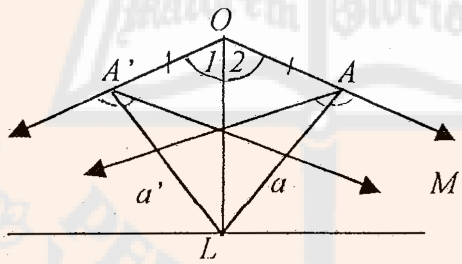
Selanjutnya akan dibicarakan garis sejajar persekutuan pada dua sinar yang diketahui dan membentuk suatu sudut, misalnya sudut NOM dari sinar ON dan OM. Akan diperlihatkan suatu garis sejajar persekutuan MN. Dibuat $\overline{OA}$ pada sinar OM dan $\overline{OA'}$ pada sinar ON, dengan $\overline{OA} \cong \overline{OA'}$. Dari A' dibuat garis sejajar OM, dan dari A dibuat garis sejajar ON. Dibuat garis bagi $\angle NA'M$ dan $\angle NAM$, dengan demikian diperoleh segitiga OAN kongruen segitiga $OA'M$.



Gambar 2.18 Garis sejajar persekutuan

Akan diperlihatkan bahwa a dan a' tidak berpotongan dan tidak sejajar (ultraparallel).

a). Diandaikan a dan a' berpotongan di L dan $\overline{OL}$ merupakan garis bagi $\angle A'OA$.



Gambar 2.19 Garis bagi a' dan a berpotongan di L

Diperoleh :

$\angle O_1 \cong \angle O_2$

$OA' = OA$

$OL = OL$

Jadi $\Delta OA'L \cong \Delta OAL$. Dengan demikian $A'L = AL$

Dari L dibuat garis yang sejajar OM

Dipandang segitiga-segitiga asimtotik $A'LM$ dan ALM

m$\angle MA'L$ = m$\angle MAL$ dan $A'L = AL$.

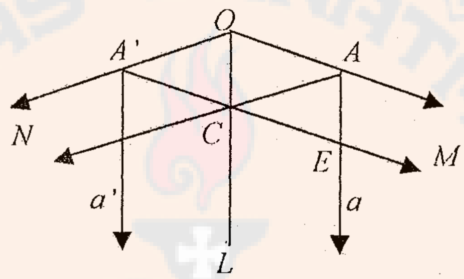
Jadi segitiga $A'LM$ kongruen dengan segitiga ALM, sehingga

$\angle A'LM \cong \angle ALM$ dan ini tidak mungkin.

Karena terdapat pertentangan maka a' dan a tidak akan berpotongan.

b). Akan ditunjukkan bahwa a dan a' tidak sejajar.

Diandaikan a dan a' sejajar dengan titik akhir persekutuan L.

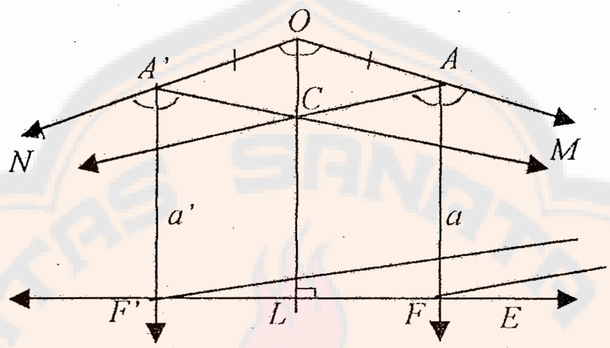


Gambar 2.20 Garis bagi a dan a' sejajar

Dengan demikian segitiga asimtotik AEM dan $A'EL$ mempunyai m$\angle A$ = m$\angle A'$ dan m$\angle E_1$ = m$\angle E_2$. Jadi menurut suatu teorema, kedua segitiga itu kongruen. Sehingga $AE = A'E$, yang berarti E berimpit dengan C dan jelas hal ini tidak mungkin. Jadi a dan a' tidak sejajar.

Karena a dan a' tidak berpotongan dan tidak sejajar maka a dan a' ultraparallel, dan mempunyai garis tegak lurus persekutuan FF'.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa FF' merupakan garis sejajar persekutuan. Sekarang diandaikan FF' tidak sejajar OM, maka melalui F' dan F dapat dibuat garis-garis yang sejajar dengan OM. Maka m$\angle MFE$ > m$\angle MF'E$. Hal ini tidak mungkin karena m$\angle MFA$ = m$\angle MF'A'$. (segitiga $MA'F'$ dan MAF kongruen). Jadi tidak mungkin dibuat garis-garis melalui F' dan F yang sejajar OM. Dengan demikian $F'F$ sejajar dengan garis OM dan garis $F'F$ adalah garis sejajar persekutuan dengan garis OM dan ON.



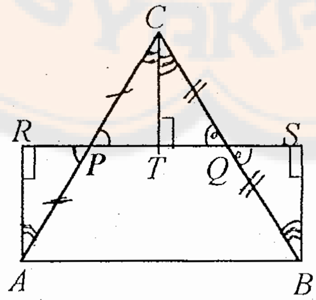
Gambar 2. 21 Garis FF' adalah garis sejajar persekutuan dengan garis-garis OM dan ON

Dalam Geometri Hiperbolik berlaku bahwa jumlah besar sudut-sudut segitiga biasa juga kurang dari π. Berikut teorema dan pembuktiannya.

Teorema II.D.4

Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga kurang dari dua sudut siku-siku.

Bukti:



Gambar 2.22 ΔABC dengan jumlah besar sudutnya kurang dari dua sudut siku-siku

Diandaikan terdapat segitiga ABC dengan $\angle BAC$ dan $\angle ABC$ lancip. Diambil P sebagai titik tengah $\overline{AC}$ dan Q sebagai titik tengah $\overline{BC}$. Ditarik $\overline{AR}, \overline{BS}$ dan $\overline{CT}$ tegak lurus $\overline{PQ}$. Didapatkan ΔARP yang kongruen dengan ΔCTP dan ΔBSQ kongruen dengan ΔCTQ. Maka $AR = CT = BS$. Karena $AR = BS$ dan $AR \perp RS$ serta $BS \perp SR$, maka $ABSR$ merupakan suatu Sisiempat Saccheri. Dengan demikian diperoleh m$\angle ACB$ = m$\angle PCT$ + m$\angle TCQ$ = m$\angle PAR$ + m$\angle QBS$. Jadi jumlah besar sudut ΔABC adalah:

m$\angle BAC$ + m$\angle ACB$ + m$\angle CBA$

= m$\angle PAB$ + m$\angle PAR$ + m$\angle QBS$ + m$\angle ABQ$

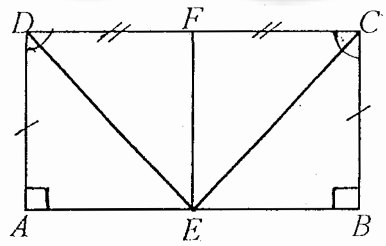
= m$\angle BAR$ + m$\angle ABS$

Karena besar sudut puncak Sisiempat Saccheri lancip, maka disimpulkan bahwa jumlah besar sudut-sudut ΔABC lebih kecil dari π. □

Berikut teorema tentang Sisiempat Saccheri dalam Geometri Hiperbolik.

Teorema II.D.5

Puncak Sisiempat Saccheri lebih besar dari alasnya, dan segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alas kurang dari kakinya-kakinya.



Gambar 2.23 Sisiempat Saccheri dalam Geometri Hiperbolik

Bukti:

Diandaikan $\overline{CD} \cong \overline{AB}$, maka $FC = EB$. Diperoleh m$\angle CFE$ = m$\angle EBC$ = 90, dan EC merupakan sisi persekutuan ΔCFE dan ΔEBC. Dengan demikian $\Delta CFE \cong \Delta EBC$ dan diperoleh m$\angle FEC$ = m$\angle BCE$ serta m$\angle FCE$ = m$\angle BEC$. Maka

m$\angle FEC$ + m$\angle BEC$ = m$\angle BCE$ + m$\angle FCE$, atau

m$\angle FEB$ = m$\angle FCB$ = 90

Diketahui bahwa $\angle FCB$ atau sudut puncak Sisiempat Saccheri lancip. Jadi terdapat pertentangan dan pengandaian $FC = EB$ salah. Jadi $\overline{FC} > \overline{EB}$ atau $DC > AB$. □

Dengan jalan serupa, jika diandaikan $\overline{EF} \cong \overline{AD} \cong \overline{BC}$ akan terdapat pertentangan yaitu m$\angle FCB$ = 90, yang seharusnya lancip. Jadi $EF < AD$. Dengan demikian $\overline{EF}$ adalah garis tegak lurus persekutuan $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$,serta $\overline{EF}$ lebih pendek dari segmen tegak lurus pada $\overline{AB}$ lainnya yang memotong $\overline{DC}$. □

Dalam Geometri Hiperbolik dikenal adanya defek suatu segitiga. Defek segitiga dalam Geometri Hiperbolik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi II.D.1

Defek ΔABC adalah 180 – (m$\angle A$ + m$\angle B$ + m$\angle C$), dengan m$\angle A$, m$\angle B$ dan m$\angle C$ menyatakan ukuran derajat dari sudut-sudut itu.

Di sini defek suatu segitiga berupa bilangan nyata, bukan banyaknya derajat. Selanjutnya defek suatu segitiga berperan sebagai ukuran luas, seperti yang akan dijelaskan pada bab III. Dan untuk selanjutnya defek suatu segitiga *ABC* dinotasikan dengan d(ΔABC).

BAB III

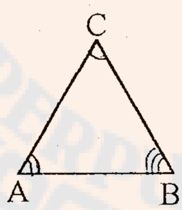
KONSISTENSI GEOMETRI HIPERBOLIK

Dalam bab III ini, akan dibahas konsistensi Geometri Hiperbolik dengan menggunakan model dari Poincare'. Tetapi sebelumnya akan dibicarakan luas segitiga dalam Geometri Hiperbolik. Dan pada sub bab C akan diperkenalkan sedikit (berupa pengertian-pengertian) lingkaran, "horocycle" dan "hypercycle". Berikut luas segitiga dalam Geometri Hiperbolik.

A. Luas Segitiga Dalam Geometri Hiperbolik

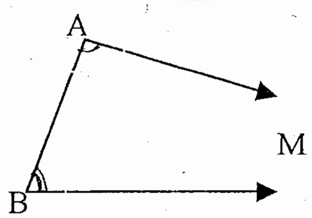
Sebelum membicarakan luas segitiga dalam Geometri Hiperbolik, berikut akan diperkenalkan beberapa segitiga dalam Geometri Hiperbolik.

1. Segitiga biasa (besar ketiga sudutnya lebih dari nol)



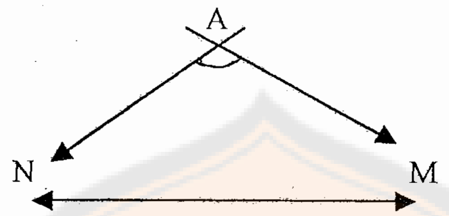
Gambar 3.1 Segitiga biasa

2. Segitiga "singly asymptotic": besar salah satu sudutnya nol



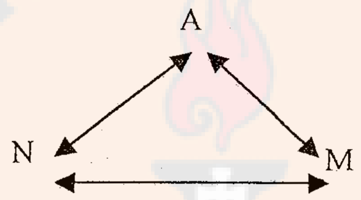
Gambar 3.2 Segitiga "singly asymptotic"

3. Segitiga "doubly asymptotic": terdapat dua sudut yang besarnya nol.



Gambar 3.3 Segitiga "doubly asymptotic"

4. Segitiga "trebly asymptotic": besar ketiga sudutnya nol.



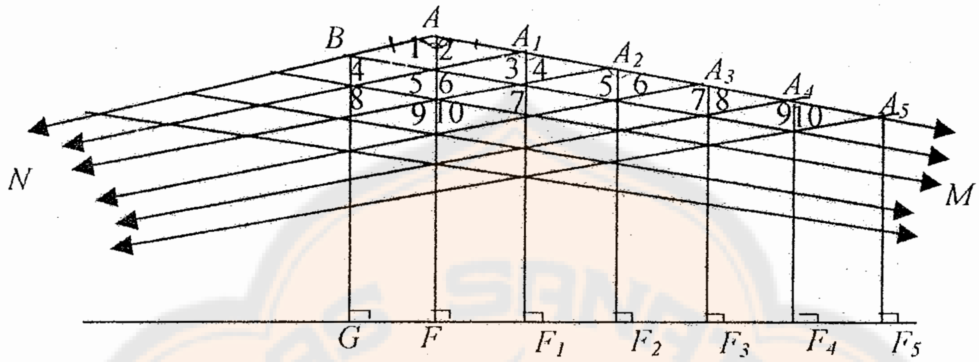
Gambar 3.4 Segitiga "trebly asymptotic"

Untuk mengukur luas segitiga dalam Geometri Hiperbolik, tidak dapat dilakukan dengan persegi satuan, karena Geometri Hiperbolik tidak memuat persegi. Jadi cara yang digunakan adalah dengan memperhatikan sifat-sifat utama dari ukuran luas suatu segitiga. Sifat-sifat tersebut adalah:

1. Pada setiap segitiga berkorespondensi suatu bilangan nyata positif tunggal tertentu, yang disebut luasnya.
2. Setiap segitiga yang kongruen mempunyai luas yang sama.
3. Jika suatu segitiga S dibagi dalam dua segitiga S_1 dan S_2, oleh suatu segmen yang menghubungkan suatu titik sudut dengan suatu titik di sisi depannya, maka luas S sama dengan jumlah luas S_1 dan S_2.

Luas suatu segitiga sebanding dengan defeknya, sehingga ukuran luas segitiga tersebut dapat dinyatakan sebagai L(ΔABC) = k x d(ΔABC), dengan L(ΔABC) menyatakan luas sebarang ΔABC.

Dalam Geometri Hiperbolik, luas segitiga selalu berhingga meskipun semua sisinya tidak berhingga. Berikut penjelasannya.



Gambar 3.5 $\overleftrightarrow{GF}$ merupakan garis sejajar persekutuan $\overrightarrow{AN}$ dan $\overrightarrow{AM}$

Diketahui sebarang segitiga asimtotik ABM. Segitiga asimtotik ABM direfleksikan terhadap garis bagi AF dari sudut A dengan F titik potong garis sejajar persekutuan NM, sehingga menghasilkan AA_1N. Kemudian BM direfleksikan dalam bisektor A_1F_1 dari sudut NA_1M, sehingga menghasilkan A_2N dengan A_2 pada AM. Cara ini dilanjutkan terus sehingga menghasilkan jaringan segitiga yang sisi-sisi tegakanya garis bagi sudut-sudut di titik sudut $B, A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ tegak lurus MN di $G, F, F_1, F_2, F_3, \ldots$ .Kemudian setiap segitiga pada segitiga asimtotik ABM diberikan nomer-nomer yang sesuai dengan segitiga dalam segilima $ABGF_1A_1$. Diketahui bahwa setiap segitiga dalam segitiga asimtotik ABM kongruen dengan salah satu segitiga dalam segilima $ABGF_1A_1$. Dari sini tampak bahwa luas segitiga asimtotik lebih kecil atau sama dengan luas segilima. Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut:

1. Sebarang segitiga asimtotik mempunyai luas berhingga.
2. Sebarang segitiga "doubly asymptotic" mempunyai luas berhingga.
3. Sebarang segitiga "trebly asymptotic": mempunyai luas berhingga.

B. Konsistensi Geometri Hiperbolik

Pada mulanya para matematikawan tidak percaya bahwa Geometri Hiperbolik konsisten. Kemudian mereka berusaha menemukan pertentangan dalam postulat Geometri Hiperbolik. Namun usaha ini tidak berhasil, dan para matematikawan percaya bahwa ada geometri selain Geometri Euclides.

Hampir pada tahun yang sama, matematikawan Rusia, Nicholai Lobachevsky (1830) dan Janos Bolyai (1832) dari Hongaria, telah berhasil mengembangkan Geometri Hiperbolik. Tetapi usaha mereka belum mendapatkan perhatian. Baru pada tahun 1855, setelah matematikawan Jerman Friedrich Gauss yang juga mengembangkan Geometri Hiperbolik meninggal, para matematikawan mulai serius memperhatikan dan mempertimbangkan Geometri Hiperbolik sebagai alternatif lain Geometri Euclides.

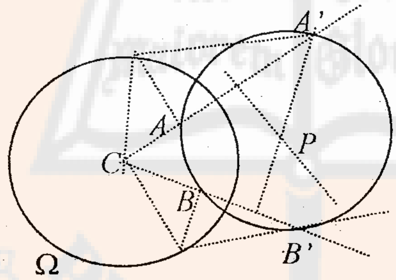
Karena konsistensi Geometri Hiperbolik tidak dapat ditunjukkan dengan aksioma-aksiomanya, maka untuk menunjukkan konsistensi tersebut digunakan suatu model. Jadi Geometri Hiperbolik hanya dapat ditunjukkan konsistensi relatifnya. Dan model yang akan digunakan di sini, merupakan model dari matematikawan Perancis Henri Poincare. Pembahasannya hanya pada bidang yang berkaitan dengan model Geometri Hiperbolik dalam suatu bidang Euclides. Model dalam bidang Euclides ini, akan dibuat susunan sumbu koordinat dengan titik asal 0. Titik dalam model Geometri Hiperbolik pada bidang Euclides dinyatakan sebagai (x,y) yang mempunyai sifat $x^2+y^2 < 1$. Di sini titik hiperbolik merupakan titik Euclides dalam interior lingkaran satuan omega (Ω), yang berpusat di titik asal. Titik dalam model ini merupakan sepasang titik invers, dan garis merupakan lingkaran yang memotong tegak lurus Ω dan lingkaran dengan pusat di tak berhingga (diameter Ω).

Sekarang akan diperlihatkan apakah postulat dalam Geometri Euclides berlaku dalam Geometri Hiperbolik. Dalam menunjukkan konsistensi ini akan digunakan model Poincare dalam bidang Euclides. Berikut postulat 1 Geometri Euclides dari SMSG.

Postulat III.B.1

Diberikan sebarang dua titik, maka terdapat tepat satu garis yang melalui keduanya.

Akan ditunjukkan apakah ia benar dalam model bahwa terdapat tepat satu garis hiperbolik yang melalui dua titik tersebut dan tegak lurus Ω.



Gambar 3.6 Garis hiperbolik melalui dua titik A dan B.

Diketahui sebarang 2 titik A dan B. Ditentukan masing-masing invers titik tersebut yaitu A' dan B'. Dari segmen AA' dan BB' ditarik sumbu. Dari perpotongan dua sumbu tersebut, misalnya di titik P, dapat dibuat lingkaran yang melalui A, B, A' dan B'. Jadi dalam model benar bahwa terdapat tepat satu garis hiperbolik yang melalui dua titik.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa lingkaran yang melalui A, A', B dan B' tegak lurus Ω. Titik A dan A' merupakan sepasang titik invers, jadi

$OA.OA' = R^2$. Dimisalkan garis (lingkaran) yang melalui titik A, A', B dan B' itu O(P,r). Maka

$$OA.OA' = OP^2 - r^2$$

$$R^2 = OP^2 - r^2$$

$$OP^2 - r^2 = R^2 \text{ atau } OP^2 = r^2 + R^2$$

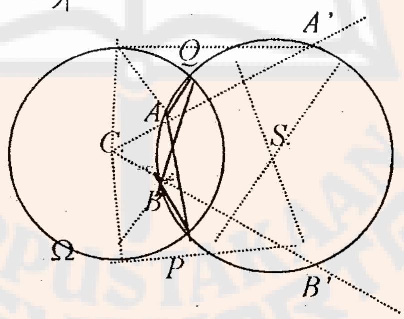
Jadi terbukti bahwa O(P,r) tegak lurus Ω. Postulat 2 sampai dengan postulat 4 dalam Geometri Euclides berkaitan dengan notasi jarak.

Postulat III.B.2 (Postulat Jarak dari SMSG)

> Untuk setiap pasang titik berlainan berkorespondensi satu bilangan positif tunggal. Bilangan ini disebut jarak antara dua titik tersebut.

Dalam model ini untuk mengukur jarak dari titik A dan B seperti gambar, Poincaire menggunakan rumus jarak hiperbolik berikut:

$$d(A,B) = \left| \ln\left(\frac{AQ}{BQ} \times \frac{BP}{AP} \right) \right|$$



Gambar 3.7 Jarak antara dua titik dalam model Poincare'

P dan Q merupakan titik perpotongan $\overleftrightarrow{AB}$ dan lingkaran Ω. Hasil dari rumus di atas merupakan suatu nilai tunggal untuk sebarang 2 titik A dan B, seperti dinyatakan postulat 2 dalam Geometri Euclides. Rumus di atas menggunakan perbandingan rangkap (perbandingan silang) untuk sebarang 4 titik segaris.

Perbandingan rangkap tersebut adalah:

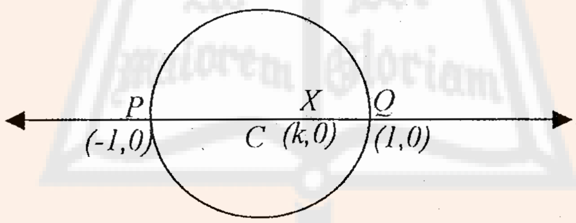
$$(AB,QP)=\frac{AQ}{BQ}\div\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BQ}\times\frac{BP}{AP}$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa rumus jarak hiperbolik memenuhi syarat dari postulat penggaris (postulat 3 dari SMSG) berikut ini:

Postulat III.B.3

Titik-titik suatu garis dapat diletakkan dalam korespondensi satu-satu dengan bilangan-bilangan nyata sedemikian sehingga

1. Setiap titik pada garis berkorespondensi tepat satu bilangan nyata.
2. Setiap bilangan nyata berkorespondensi tepat satu titik pada garis.
3. Jarak antara dua titik berlainan adalah harga mutlak dari selisih bilangan-bilangan nyata yang berkorespondensi.



Gambar 3.8 Garis hiperbolik yang berupa segmen terbuka

Untuk menunjukkan bahwa garis hiperbolik (segmen terbuka) dapat diubah ke dalam suatu garis bilangan hiperbolik yang konsisten dengan postulat penggaris, maka dibentuk korespondensi satu-satu antara titik pada $\overline{PQ}$ dan bilangan real sedemikian sehingga d(A,B) = $|a-b|$ untuk sebarang a mewakili titik A dan sebarang b mewakili titik B. Kemudian diberikan koordinat 0 (nol) pada titik asal C dan pada titik X pada diameter $\overline{PQ}$

dipasangkan koordinat Euclides (k,o) sehingga diperoleh jarak CX dari titik C. Dengan demikian koordinat hiperbolik untuk x, dihitung dengan rumus berikut:

$$x = d(C,X) = \ln\left(\frac{CQ}{XQ} \times \frac{XP}{CP}\right)$$

Dari gambar tampak bahwa $CQ = 1$, $XQ = 1-k$, $XP = 1+k$ dan $CP = 1$. Jadi koordinat hiperbolik x adalah:

$$x = d(C,X) = \ln\left(\frac{1}{1-k} \times \frac{k+1}{1}\right) = \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right), \text{ dengan } -1 \leq k \leq 1.$$

Ini berarti bahwa untuk setiap titik X pada $\overline{PQ}$, terdapat tepat satu bilangan real x.

Contoh III.B.1

Diketahui titik X mempunyai koordinat Euclides $(\frac{2}{5},0)$. Maka koordinat hiperboliknya adalah:

$$x = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\right) = \ln 2{,}33 \approx 0{,}84729$$

Sekarang apabila yang diketahui koordinat hiperboliknya, maka dapat dicari koordinat Euclidesnya.

Contoh III.B.2

Diketahui koordinat hiperbolik $x = 6$. Maka koordinat Euclidesnya adalah:

$$6 = \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$$

$$e^6 = \frac{1+k}{1-k}$$

$$k = \frac{e^6 - 1}{e^6 + 1}$$

$$k \approx 0{,}99505$$

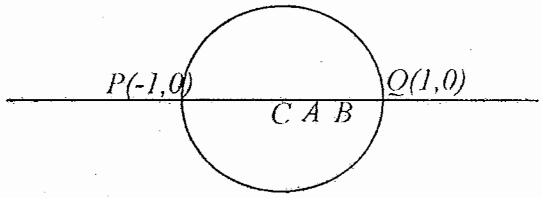
Jadi titik itu koordinat Euclidesnya adalah $\approx$ 0,99505 yang berkorespondensi dengan 6 pada garis bilangan $\overleftrightarrow{PQ}$.

Dari contoh di atas tampak bahwa k bergantung pada x, sehingga dapat dibentuk fungsi berikut:

$$k(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Fungsi k merupakan fungsi satu-satu yang memetakan semua nilai real x pada himpunan terbuka (-1,1). Hal ini berarti bahwa pada $\overleftrightarrow{PQ}$ terdapat korespondesi satu-satu antara titik pada $\overline{PQ}$ dengan bilangan nyata. Dengan demikian bagian 1 dan 2 dari postulat penggaris dipenuhi.

Sekarang akan dibicarakan bagian ke-3 dari postulat penggaris yang menyatakan jarak antara dua titik berlainan adalah harga mutlak dari selisih bilangan-bilangan real yang berkorespondensi. Di sini d(A,B) akan dinyatakan sebagai $|a-b|$, dengan a dan b merupakan koordinat yang berkorespondensi. Gambar di bawah ini mengambil titik A dan B, dengan koordinat Euclidesnya $(k_1,0)$ dan $(k_2,0)$ pada garis hiperbolik $\overline{PQ}$.



Gambar 3.9 Jarak antara titik A dan B

Jarak antara titik A dan B dihitung dengan rumus jarak hiperbolik berikut:

$$d(A,B)=\left|\ln\left(\frac{AQ}{BQ}\times\frac{BP}{AP}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{1-k_1}{1-k_2}\times\frac{1+k_2}{1+k_1}\right)\right|$$

Akan ditunjukkan bahwa d(A,B) ekuivalen dengan $|a-b|$. Karena $|a-b|=|b-a|$, untuk semua nilai a dan b, maka ia juga akan memenuhi d(A,B) $=|b-a|$.

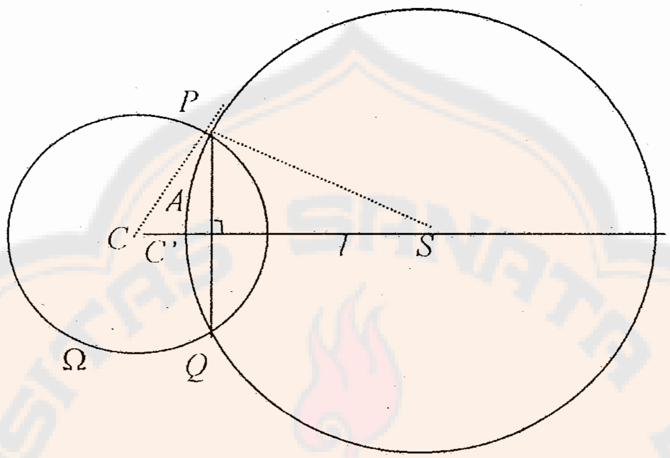
Diketahui:

$$a=d(C,A)=\ln\left|\frac{1+k_1}{1-k_1}\right|$$

$$b=d(C,B)=\ln\left|\frac{1+k_2}{1-k_2}\right|\text{, maka}$$

$$\begin{aligned}
|b-a| &= \left|\ln\left(\frac{1+k_2}{1-k_2}\right)-\ln\left(\frac{1+k_1}{1-k_1}\right)\right| \\
&= \left|\ln\left(\frac{1+k_2}{1-k_2}\div\frac{1+k_1}{1-k_1}\right)\right| \\
&= \left|\ln\left(\frac{1+k_2}{1-k_2}\times\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)\right| \\
&= \mathrm{d}(A,B)
\end{aligned}$$

Jadi postulat penggaris bagian ke-3 juga memenuhi dalam model Geometri Hiperbolik. Selanjutnya akan dipertimbangkan garis yang bukan diameter seperti pada gambar di bawah ini:



Gambar 3.10 Garis yang bukan diameter dalam Geometri Hiperbolik

Dalam model ini garis ditunjukkan oleh busur terbuka PAQ, dengan A sebarang titik pada $\overleftrightarrow{PQ}$. Di sini l memotong tegak lurus tali busur $\overline{PQ}$. PAQ dan l berpotongan di C'. Untuk membentuk susunan koordinat pada $\overleftrightarrow{PQ}$ ditempatkan nol pada $\overleftrightarrow{PQ}$, sedemikian, hingga nol berkorespondensi dengan C'. Maka koordinat hiperbolik a untuk titik A dicari dengan cara berikut:

$$a = d(C', A) = \ln\left(\frac{C'P}{AP} \times \frac{AQ}{C'Q}\right)$$

Karena $\overline{C'P} \cong \overline{C'Q}$ maka

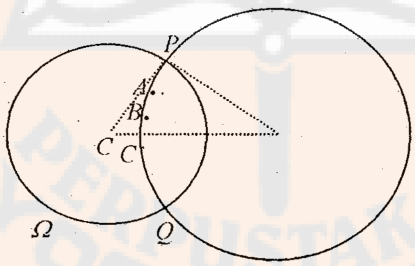
$$a = \ln\left(\frac{AQ}{AP}\right)$$

Jika A dan C' sama, maka $AQ = AP$. Akibatnya $a = \ln 1 = 0$, sehingga koordinat C' nol. Karena titik A dekat dengan titik P daripada Q, maka

$\frac{AQ}{AP} > 1$, sehingga $a = \ln\left(\frac{AQ}{AP}\right) > 0$. Hal ini berarti bahwa koordinat pada $\overrightarrow{C'P'}$ bernilai positif.

Apabila A digerakkan menuju P tampak bahwa AP mendekati nol. Akibatnya AQ mendekati PQ. Hal ini berarti bahwa perbandingan $\frac{AQ}{AP}$ meloncat naik dan nilai $\ln\left(\frac{AQ}{AP}\right)$ menuju ke tak berhingga. Dengan demikian setiap bilangan real positif berpasangan dengan titik pada $\overrightarrow{C'P}$ dan setiap bialngan real negatif berpasangan dengan titik pada $\overrightarrow{C'Q}$. Jadi terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik pada $\overleftrightarrow{PQ}$ dengan himpunan bilangan real, sehingga sesuai dengan postulat penggaris bagian 1 dan 2.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa $|a-b| = d(A,B)$ dengan a dan b masing-masing untuk A dan B positif.



Gambar 3.11 Titik A dan B pada $\overleftrightarrow{PQ}$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai:

$$a = d(C', A) = \ln\left(\frac{C'P}{AP} \times \frac{AQ}{C'Q}\right)$$

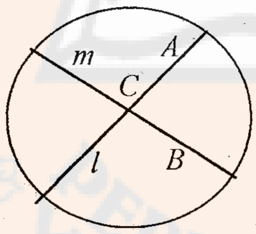
$$b = d(C', B) = \ln\left(\frac{C'P}{BP} \times \frac{BQ}{C'Q}\right)$$

Jadi

$$
\begin{aligned}
|a-b| = |b-a| &= \left| \left| \ln\left(\frac{C'P}{BP} \times \frac{BQ}{C'Q}\right) \right| - \left| \ln\left(\frac{C'P}{AP} \times \frac{AQ}{C'Q}\right) \right| \right| \\
&= \left| \ln\left(\frac{\frac{C'P}{BP} \times \frac{BQ}{C'Q}}{\frac{C'P}{AP} \times \frac{AQ}{C'Q}}\right) \right| \\
&= \left| \ln\left(\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{AQ}\right) \right| \\
&= \mathrm{d}(A,B)
\end{aligned}
$$

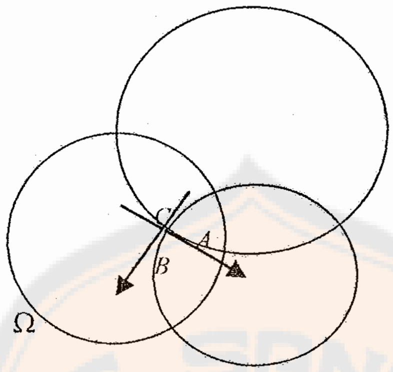
Dengan demikian, bagian 3 postulat penggaris terpenuhi. Jadi validitas postulat 1 sampai dengan postulat 3 terpenuhi dalam Geometri Hiperbolik. Berikutnya akan dibahas postulat 11 yang berkaitan dengan besaran sudut.

Jika 2 garis merupakan diameter (lingkaran dengan pusat di jauh tak berhingga), maka akan terbentuk sudut dari perpotongan 2 garis tersebut, dan besar sudutnya merupakan besar sudut seperti dalam Geometri Euclides.

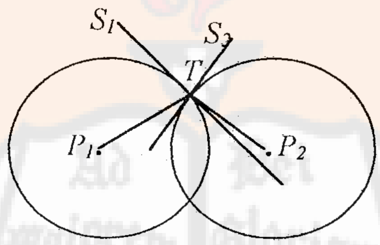


Gambar 3.12 Sudut yang dibentuk dari dua lingkaran dengan jari-jari dan titik pusat di jauh tidak berhingga.

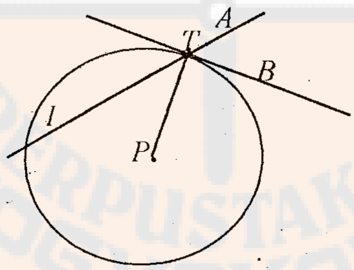
Jika satu atau dua garis merupakan busur dari lingkaran, maka sudut Euclides yang terbentuk akan mempunyai satu atau dua garis singgung pada lingkaran Euclides di titik perpotongan garis tersebut.



Gambar 3.13a Sudut yang dibentuk oleh dua lingkaran dengan pusat dan jari-jari berhingga



Gambar 3.13b Sudut yang dibentuk antara $O(P_1,r_1)$ dan $O(P_2,r_2)$

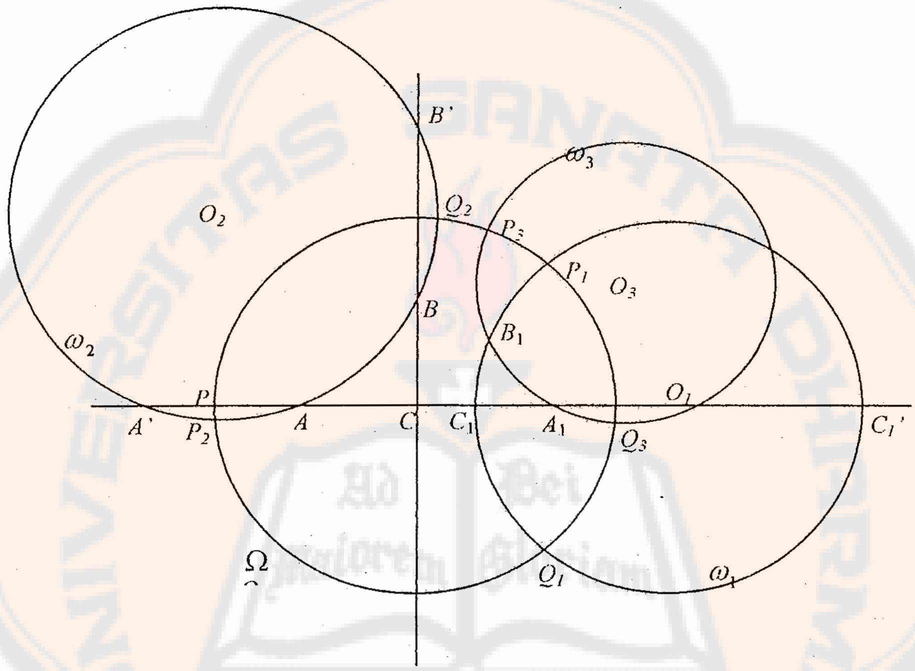


Gambar 3.13c Sudut yang dibentuk oleh garis l dan $O(P,r)$ dalam Geometri Euclides

Dari gambar di atas tampak bahwa besar sebarang sudut dalam Geometri Hiperbolik sama dengan besar sudut dalam Geometri Euclides. Oleh karena itu postulat 11 sampai postulat 14 dapat dinyatakan dalam bidang

Euclides. Berikut akan dibahas sudut-sudut segitiga yang berkaitan dengan postulat kongruensi S-Sd-S dalam model hiperbolik pada bidang Euclides.

Dimisalkan ΔABC merupakan segitiga pertama dalam model hiperbolik dengan nilai koordinat Euclides di titik $C(0,0)$, $A(-\frac{3}{5},0)$ dan $B(0,\frac{1}{2})$.



Gambar 3.14 Kongruensi segitiga dalam Geometri Hiperbolik

Maka,

$$d(A,C) = \left|\ln\left(\frac{AP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{\frac{2}{5}}{1} \times \frac{1}{\frac{8}{5}}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right|$$

Karena $\ln(\frac{1}{4})$ bernilai negatif dan $\ln(4) = -\ln(\frac{1}{4})$, maka $d(A,C)$ dapat ditulis menjadi $d(A,C) = \ln(4)$. Dengan cara sama diperoleh $d(C,B) = \ln(3)$.

Selanjutnya untuk menggambarkan postulat kongruensi S-Sd-S dalam model hiperbolik, diperlukan segitiga siku-siku kedua, misalnya $\Delta C_1A_1B_1$, dengan alas ln(4) dan tinggi ln (3). Akan ditunjukkan bahwa sisi miring dan sudut-sudut $\Delta C_1A_1B_1$ kongruen dengan sisi miring dan sudut-sudut ΔCAB. Akan dibentuk $\Delta C_1A_1B_1$ dengan C_1 di titik $(\frac{2}{5},0)$, A_1 pada $\overrightarrow{C_1Q}$ dan B_1 pada lingkaran (garis) yang memotong tegak lurus Ω. Di sini A_1 ditempatkan pada $\overrightarrow{C_1Q}$ sedemikian sehingga $d(C_1,A_1) = \ln(4)$. Dimisalkan A_1 terletak pada koordinat $(a',0)$, maka

$$d(C_1,A_1) = \left|\ln\left(\frac{C_1Q}{A_1Q} \times \frac{A_1P}{C_1P}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{\frac{3}{5}}{1-a'} \times \frac{1+a'}{1+\frac{2}{5}}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{3}{7} \times \frac{1+a'}{1-a'}\right)\right|$$

$$= \ln(4)$$

Karena yang akan dicari adalah koordinat $(a',0)$ maka penyelesaian yang akan digunakan adalah

$$\ln\left(\frac{3}{7} \times \frac{1+a'}{1-a'}\right) = \ln(4)$$

$$\frac{3(1+a')}{7(1-a')} = 4$$

$$3+3a' = 28-28a'$$

$$31a' = 25$$

$$a' = \frac{25}{31}$$

Jadi A_1 terletak pada titik $(\frac{25}{31},0)$ dan memenuhi $d(C_1,A_1) = d(C,A) = \ln(4)$.

Sekarang akan ditentukan titik B_1 sedemikian sehingga $d(C_1,B_1) = \ln(3)$ dan $\overline{C_1B_1} \perp \overline{C_1A_1}$. Namun sebelumnya akan dicari CC_1'

$$CC_1 \times CC_1' = 1$$

$$\frac{2}{5} \times CC_1' = 1$$

$$CC_1' = \frac{5}{2}$$

Maka pusat lingkaran ω_1 yang memotong sumbu x terletak pada titik $O_1(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{2}\right),0)$ atau $O_1(\frac{29}{20},0)$. Jadi lingkaran ω_1 mempunyai jari-jari

$$R = \frac{5}{2} - \frac{29}{20} = \frac{21}{20}$$

Supaya $\overline{C_1B_1} \perp \overline{C_1A_1}$ maka harus dipenuhi persamaan

$$\left(x-\frac{29}{20}\right)^2 + y^2 = \frac{441}{400} \quad \text{..} (1)$$

Untuk menentukan B_1 pada lingkaran yang dibentuk persamaan di atas, maka diperlukan rumus jarak hiperbolik berikut:

$$d(C_1, B_1) = \left| \ln\left(\frac{B_1P_1}{C_1P_1} \times \frac{C_1Q_1}{B_1Q_1} \right) \right|$$

$$= \left| \ln\left(\frac{B_1P_1}{B_1Q_1} \right) \right|, \text{ karena } C_1Q_1 = C_1P_1$$

$$= \ln(3)$$

Karena B_1 di kuadran I, maka $B_1Q_1 > B_1P_1$, akibatnya $\frac{B_1P_1}{B_1Q_1} < 1$,

sehingga $d(C_1, B_1) = \left| \ln\left(\frac{B_1P_1}{C_1P_1} \times \frac{C_1Q_1}{B_1Q_1} \right) \right| = \left| \ln\left(\frac{B_1P_1}{B_1Q_1} \right) \right| = \ln(3)$

Karena $y = \ln(x)$ fungsi satu-satu, maka

$$\frac{B_1Q_1}{B_1P_1} = 3$$

$B_1Q_1 = 3(B_1P_1)$ ....(2)

Dengan menggunakan persamaan (1) dan persamaan $x^2 + y^2 = 1$, maka

$$\left(x - \frac{29}{20} \right)^2 + 1 - x^2 = \frac{441}{400}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{58}{20}x + \frac{841}{400} + 1 - x^2 = \frac{441}{400}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{58}{20}x = -\frac{800}{400}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{29}$$

Jadi, $x = \frac{20}{29}$,

maka $\left(\frac{20}{29}\right)^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{400}{841}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{441}{841}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{21}{29}$$

Karena P_1 yang merupakan titik perpotongan antara ω_1 dan Ω terletak di kuadran I, maka titik yang memenuhi untuk P_1 adalah $P_1(\frac{20}{29},\frac{21}{29})$. Dan karena Q_1 terletak di kuadran II, maka titik yang memenuhi untuk Q_1 adalah $Q_1(\frac{20}{29},-\frac{21}{29})$. Dengan memasukkan koordinat ini ke dalam persamaan (2) maka diperoleh

$$\sqrt{\left(x-\frac{20}{29}\right)^2+\left(y+\frac{21}{29}\right)^2} = 3\sqrt{\left(x-\frac{20}{29}\right)^2+\left(y-\frac{21}{29}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{20}{29}\right)^2+\left(y+\frac{21}{29}\right)^2 = 9\left(\left(x-\frac{20}{29}\right)^2+\left(y-\frac{21}{29}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{21}{29}\right)^2 - 9\left(y-\frac{21}{29}\right)^2 = 8\left(x-\frac{20}{29}\right)^2 \quad \text{...(3)}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3) menjadi

$$8x^2 - \frac{320}{29}x + 8y^2 - \frac{420}{29}y = -8$$

dan persamaan (1) menjadi

$$x^2 - \frac{58}{20}x + y^2 = -1,$$

kemudian persamaan (1) dikalikan dengan -8, maka

$$
\begin{array}{rl}
8x^2 - \frac{320}{29}x + 8y^2 - \frac{420}{29}y & = -8 \\
-8x^2 + \frac{464}{20}x - 8y^2 & = 8 + \\
\hline
\frac{1764}{145}x - \frac{420}{29}y & = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad x & = \frac{5.075}{4.263}y
\end{array}
$$

Dengan memasukkan hasil ini ke dalam persamaan (3) yang telah disederhanakan maka

$$8\left(\frac{5.075}{4.263}y\right)^2 - \frac{320}{29}\left(\frac{5.075}{4.263}y\right) + 8y^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow 11{,}33786y^2 - 13{,}13628y + 8y^2 - 14{,}48276y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 19{,}33786y^2 - 27{,}6190y + 8 = 0$$

Diperoleh $y_1 = 1{,}024$ dan $y_2 = 0{,}40385$. Dan y yang memenuhi adalah 0,40385. Maka $x = 0{,}48077$. Jadi B_1 terletak pada titik (0,48077,0,40385).

Dengan demikian diperoleh $C_1(\frac{2}{5},0)$, $A_1(\frac{25}{31},0)$ dan B_1(0,48077,0,40385), sehingga $m\angle A_1C_1B_1 = m\angle ACB = 90$, $C_1A_1 = CA = \ln(4)$ dan $C_1B_1 = CB = \ln(3)$. Jadi postulat kongruensi S-Sd-S dipenuhi, yaitu $\overline{C_1A_1} \cong \overline{CA}$, $m\angle C_1A_1B_1 = m\angle CAB$ dan $m\angle C_1B_1A_1 = m\angle CBA$. Jadi $d(A,B) = d(A_1,B_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan, bahwa postulat S-Sd-S dalam Geometri Hiperbolik valid.

Akan ditunjukkan bahwa $\overline{A_1B_1} \cong \overline{AB}$. Untuk menghitung panjang $\overline{AB}$, akan dibentuk persamaan lingkaran yang tegak lurus Ω dan melalui titik A

dan B. Titik P_2 dan Q_2 akan dicari dengan persamaan ini dan d(A,B) akan dihitung dengan rumus jarak hiperbolik.

Lingkaran ω_2 berpusat di titik $O_2(-\frac{17}{15},\frac{5}{4})$ yaitu perpotongan sumbu dari A dan A_1 dengan B dan B_1. Dan jari-jari ω_2 adalah

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+\left(0+\frac{17}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{0{,}5625+1{,}2844} \\ &= \sqrt{1{,}846944} \\ &\approx 1{,}35902 \end{aligned}$$

Jadi persamaan lingkaran ω_2 adalah

$$\left(x+\frac{17}{15}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2 \approx (1{,}35902)^2 \approx 1{,}84694$$

Lingkaran ini berpotongan dengan lingkaran satuan di titik P_2(-0,994790,-0,101943) dan Q_2(0,198615,0,9800078).

Sehingga AP_2 = 0,407739,

AQ_2 = 1,26453,

BP_2 = 1,162730 dan

BQ_2 = 0,519540.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \left|\ln\left(\frac{AP_2}{BP_2}\times\frac{BQ_2}{AQ_2}\right)\right| \\ &= \left|\ln\left(\frac{0{,}407739}{1{,}162730}\times\frac{0{,}519540}{1{,}26453}\right)\right| \end{aligned}$$

$$\approx \left|\ln 0{,}1444408\right|$$

$$\approx 1{,}93719$$

Selanjutnya akan ditunjukkan pula bahwa d(A_1,B_1) juga mendekati 1,93719. Dibentuk lingkaran ω_3 yang memuat $\overline{A_1B_1}$, yang berpusat di O_3(1,023225,0,50864) dan berjari-jari 0,5552377. Lingkaran ini mempunyai persamaan $(x-1{,}023226)^2+(y-0{,}508064)^2=0{,}5552377^2$, yang berpotongan dengan lingkaran satuan di titik P_3(0,568976,0,822354) dan Q_3(0,999041,-0,043783). Jadi d(A_1,B_1)

$$=\left|\ln\left(\frac{A_1P_3}{B_1P_3}\times\frac{B_1Q_3}{A_1Q_3}\right)\right|$$

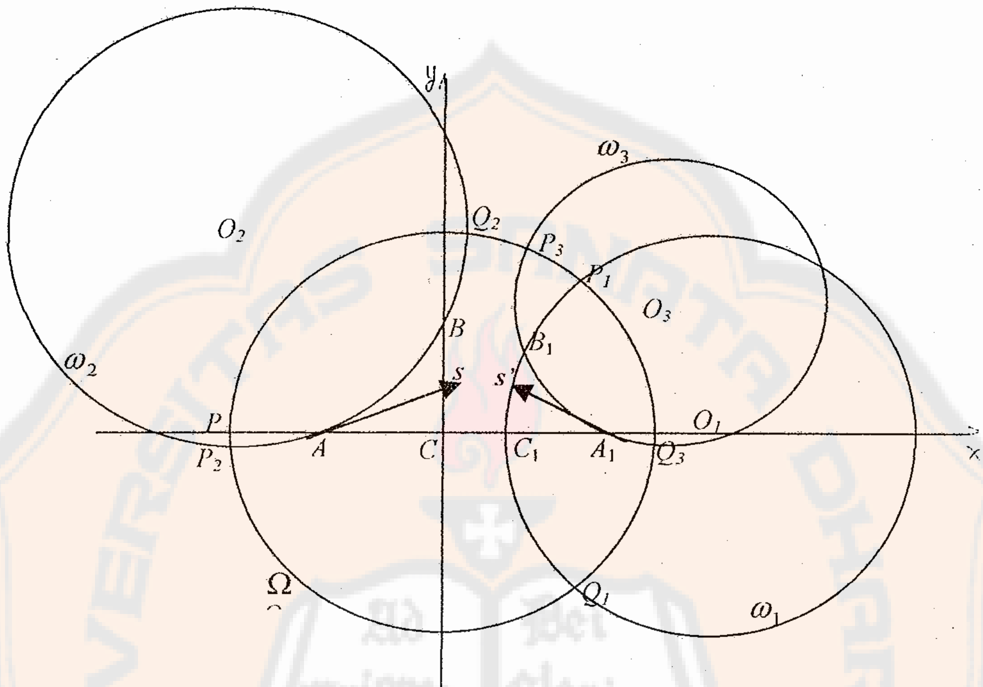
$$\approx \left|\ln(6{,}939225)\right|$$

$$\approx 1{,}937190$$

Jadi tampak bahwa d(A,B) = d(A_1,B_1) atau $\overline{A_1B_1} \cong \overline{AB}$.

Dengan demikian dari suatu segitiga yang kedua sisi dan sudutnya diketahui dapat dibangun suatu segitiga kedua yang kongruen, yang ketiga sisinya kongruen. Dalam Geometri Euclides hal ini tampak jelas, tetapi dalam Geometri Hiperbolik hal ini kurang jelas. Seperti pada gambar 3.14, tampak bahwa ΔABC dan $\Delta A_1B_1C_1$ tidak kongruen. Hal ini terjadi karena apabila segitiga tersebut dilihat dari bidang Euclides $\widehat{AB}$ dan $\widehat{A_1B_1}$ tidak kongruen. Namun dengan menggunakan model hiperbolik telah dapat ditunjukkan bahwa $\overline{A_1B_1} \cong \overline{AB}$, yang sesuai dengan postulat S-Sd-S.

Akibat dari postulat kongruensi S-Sd-S adalah sudut-sudut yang berkorespondensi juga kongruen. Misalnya $\angle B_1C_1A_1 \cong \angle BCA$. Berikutnya juga akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang berkorespondensi juga kongruen.



Gambar 3.15 $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$ dalam Geometri Hiperbolik

Dipandang $\angle BAC$.

Diketahui bahwa $\overleftrightarrow{AB}$ merupakan besar lingkaran Euclides, maka m$\angle BAC$ merupakan besar sudut antara sumbu x dari garis s (garis singgung lingkaran ω_2 di titik A). m$\angle BAC = \tan^{-1} m$, dengan m merupakan gradien dari s. Dan m$\angle B_1A_1C_1 = \tan^{-1} m'$, dengan m' merupakan gradien dari s'(garis singgung lingkaran ω_3 di titik A_1). m dan m' dicari dengan menurunkan persamaan yang diperoleh dari ω_2 dan ω_3. Persamaan tersebut adalah $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, diturunkan menjadi

$$2(x-h)+2(y-k)\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h-x}{y-k}$$

sehingga,

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{17}{15}+\frac{3}{5}}{0-\frac{5}{4}}$$

$$\approx 0,42667$$

maka $m\angle BAC \approx \tan^{-1} 0,42667$

$$\approx 23,106$$

dan $m'=\frac{dy}{dx}=\frac{1,0232-\frac{25}{31}}{0-0,50864}$

$$\approx -0,42667$$

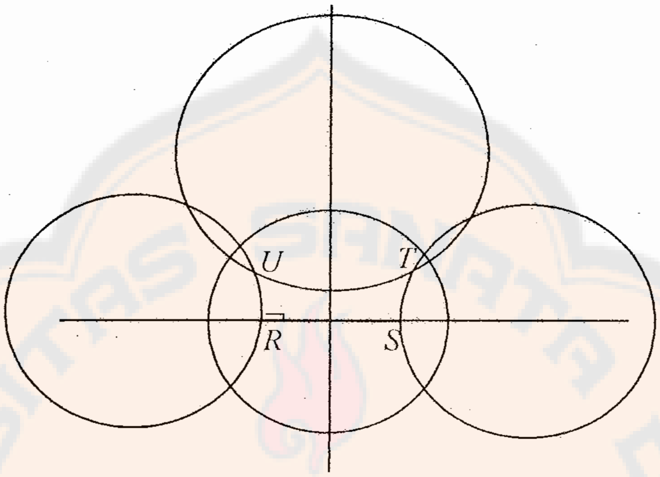
maka $m\angle B_1C_1A_1 \approx \tan^{-1} -0,42667$

$$\approx -23,106$$

Dari perhitungan dapat disimpulkan bahwa $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$. Jadi jelas $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Sebagai contoh selanjutnya akan diperhatikan teorema Saccheri Legendre, yang menyatakan bahwa jumlah besar sebarang sudut segitiga lebih kecil atau sama dengan 180^0. Teorema di atas sebagian tetap berlaku dalam Geometri Hiperbolik. Pada gambar 3.14, tampak bahwa jumlah besar sudut ΔABC lebih kecil dari 180^0, yang berarti bahwa model dalam Geometri Hiperbolik tersebut tetap konsisten dengan teorema pada Geometri Euclides.

Dalam Geometri Netral terdapat Sisiempat Saccheri yang kedua sudut puncaknya lancip atau siku-siku. Untuk melihat teorema ini dalam Geometri Hiperbolik, akan diperhatikan Sisiempat Saccheri berikut.



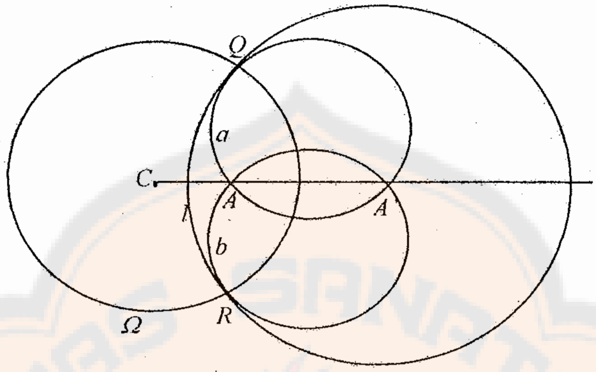
Gambar 3.16 Sisiempat Saccheri dalam Geometri Hiperbolik.

□*RSTU* siku-siku di titik *R* dan *S*, dengan koordinat Euclidesnya $(-\frac{3}{5},0)$ dan $(\frac{3}{5},0)$. Tampak bahwa sudut-sudut puncaknya di titik *U* dan *T* lancip. Dan pada model ini tampak bahwa puncak lebih panjang dari alasnya.

Dari contoh-contoh di atas dapat disimpulkan bahwa postulat-postulat Geometri Netral sebagian tetap berlaku dalam Geometri Hiperbolik. Hal ini dapat ditunjukkan melalui model-model hiperbolik. Seperti teorema dalam Geometri Netral berikut . Diberikan suatu garis *l* dan suatu titik *A* tidak pada *l*, maka paling sedikit terdapat dua garis melalui *A* yang sejajar *l*. Teorema ini dalam Geometri Hiperbolik ditunjukkan melalui model di bawah ini.

Pada gambar di bawah ini *l* merupakan lingkaran yang memotong tegak lurus Ω. *A* dan *A*' merupakan sepasang titik invers. Garis yang sejajar garis *l* yaitu garis *a* dan garis *b*. Garis *a* berupa lingkaran yang melalui *A*, *A*' dan *Q*.

Sedangkan garis b berupa lingkaran yang melalui A, A' dan R. Jadi garis a dan b adalah garis-garis yang melalui A dan sejajar l.



Gambar 3.17 Garis a dan b melalui titik A dan sejajar l dalam Geometri Hiperbolik

Model Poincare pada bidang Euclides dalam Geometri Hiperbolik di atas disebut model konformal yang diketemukan oleh Poincare.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa melalui suatu model yang dibangun, Geometri Hiperbolik tetap konsisten dengan Geometri Euclides. Karena dalam menunjukkan konsistensi ini melalui suatu model, maka konsistensinya hanya bersifat relatif.

C. Lingkaran, Horocycle dan Kurva Berjarak Sama

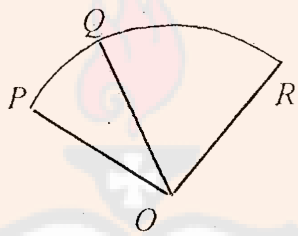
Dalam Geometri Hiperbolik ada tiga kemungkinan dari dua garis sebarang, yaitu:

1. kedua garis berpotongan
2. kedua garis sejajar

3. kedua garis tidak berpotongan dan juga tidak sejajar atau disebut ultraparallel.

1. Berkas garis melalui satu titik.

Melalui kemungkinan yang pertama didapat suatu lingkaran. Yaitu dengan cara mengambil titik Q (berbeda dengan titik pusat) kemudian merotasikan dari titik pusat O, atau menempatkan bayangan Q oleh refleksi terhadap semua garis melalui O.

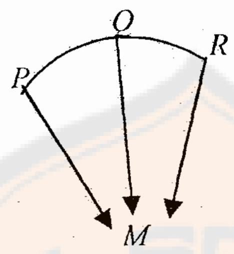


Gambar 3.18 Lingkaran dalam Geometri Hiperbolik

Karena garis singgung lingkaran selalu tegak lurus pada jari-jari di suatu titik akhir, maka lingkaran dapat dipandang sebagai trayektori orthogonal.

2. Berkas garis sejajar

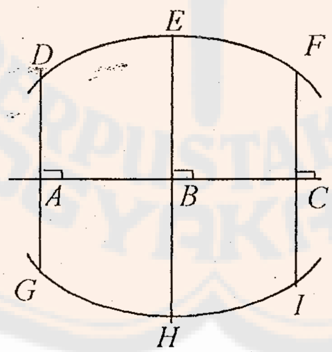
Sekarang apabila jari-jari dibuat menjadi tidak berhingga dan dengan titik pusat M di tidak berhingga pula, maka akan diperoleh suatu kurva yang disebut "horocycle". "Horocycle" ini didapatkan dengan cara mengambil suatu titik yang berasal dari titik Q kemudian melanjutkan pemindahan sejajar atau menempatkan bayangan Q oleh refleksi terhadap semua garis parallel sinar QM. Sinar QM disebut sebagai jari-jari "horocycle". "Horocycle" dapat juga dipandang sebagai trayektori orthogonal berkas sinar dengan titik puncak ideal.



Gambar 3.19 "Horocycle"

3. Berkas garis ultraparallel

Dalam Geometri Hiperbolik dikenal dengan adanya garis yang ultraparallel. Maka dalam geometri ini terdapat pula yang disebut sebagai kurva berjarak sama atau "hypercycle". Kurva ini didapatkan dengan cara menempatkan titik-titik pada jarak konstan dari garis tetap, tetapi garis yang dihasilkan bukanlah pasangan garis parallel seperti pada bidang Euclides, tetapi suatu kurva yang berjarak sama seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.20 "Hypercycle"

"Hypercycle" ini dapat juga dipandang sebagai trayektori orthogonal pada berkas sinar ultraparallel dengan garis tegak lurus persekutuan. Garis tegak lurus persekutuan $\overleftrightarrow{AC}$ disebut garis alas ("baseline"). Disebut kurva berjarak sama, karena setiap titik pada kurva berjarak sama (secara tegak lurus) dari garis alas.

BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Geometri Hiperbolik termasuk salah satu Geometri Non-Euclides. Geometri ini disebut Geometri Hiperbolik karena aksioma dalam geometri ini menyebutkan bahwa untuk suatu titik A dan suatu garis l yang tidak melalui A ada lebih dari satu garis melalui A dalam bidang Al, yang tidak memotong l. Dalam geometri ini tepatnya ada dua garis yang sejajar dan tidak memotong l. Adanya dua garis sejajar menyebabkan adanya dua titik di jauh tidak berhingga, seperti halnya pada hiperbola.

Geometri Hiperbolik tetap konsisten dengan Geometri Euclides, meskipun aksiomanya berbeda dengan aksioma dalam Geometri Euclides. Untuk menunjukkan konsistensi geometri ini melalui aksiomanya merupakan usaha yang sukar, karena suatu aksioma terdiri atas himpunan unsur-unsur yang tidak berhingga . Untuk itu diperlukan pendekatan lain untuk menunjukkan konsistensi dari geometri ini. Pendekatan yang digunakan untuk menunjukkan konsistensi ini adalah dengan menggunakan model yang sesuai. Model yang digunakan dalam pembahasan ini adalah dengan menggunakan model yang diketemukan oleh Henri Poincare`, yang disebut model konformal. Karena dalam menunjukkan konsistensinya hanya dengan menggunakan model, maka konsistensi dari geometri ini bersifat relatif.

Selain model konformal masih ada model lain yang disebut model proyektif, yang diketemukan oleh Beltrami. Tetapi model ini tidak dibahas di sini.

B. IMPLIKASI DAN SARAN

Dengan mempelajari konsistensi dari Geometri Hiperbolik ini penulis dapat mengenal dan mendalami geometri selain Geometri Euclides. Dalam menunjukkan konsistensi ini, hanya menggunakan model konformal. Untuk penulisan selanjutnya dapat digunakan model proyektif, dan diharapkan dapat dibahas pula Geometri Hiperbolik dalam kehidupan nyata.

Daftar Pustaka

Coxeter, H.S.M., 1969, *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley and Sons, Inc.

Greenberg, Marvin J., 1980, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, San Fransisico: W.H. Freeman and Company.

Hadiwidjojo, Moeharti, 1986, *Sistem-Sistem Geometri*, Jakarta: Karunika, Universitas Terbuka.

Prenowitz, Walter, and Meyer Jordan, 1965, *Basic Concepts of Geometry*, London: Blaisdel Publishing Company.

Smart, James R., 1998, *Modern Geometries*, 5th ed, San Jose Sate University: Brooks/ Cole Publishing Company.

Wallace, Edward C., 1992, *Roads to Geometry*, New Jersey: Prentice- Hall, Inc.

LAMPIRAN

Definisi-definisi Geometri Euclides

1. Titik adalah yang tidak mempunyai bagian.
2. Garis adalah panjang tanpa lebar.
3. Ujung-ujung suatu garis adalah titik
4. Suatu garis lurus adalah garis yang terletak rata dengan titik-titik padanya.
5. Ujung-ujung suatu bidang adalah garis.
6. Suatu bidang adalah yang hanya mempunyai panjang dan lebar.
7. Suatu bidang datar adalah suatu bidang yang terletak rata dengan garis-garis padanya.
8. Suatu sudut datar adalah inklinasi (kemiringan) sesama dari dua garis dalam suatu bidang datar yang bertemu dan tidak terletak pada suatu garis lurus.
9. Dan jika garis yang memuat sudut itu lurus, maka sudut itu disebut sudut garis lurus.
10. Jika suatu garis lurus berdiri pada suatu garis lurus dan membuat sudut yang bersisian sama, masing-masing sudut ini disebut siku-siku dan garis yang berdiri pada garis lainnya tadi disebut tegak lurus pada garis yang lain.
11. Suatu sudut tumpul adalah sudut yang lebih besar dari suatu sidut siku-siku.
12. Suatu sudut lancip adalah sudut yang lebih kecil dari suatu sudut siku-siku.
13. Suatu batas adalah ujungnya (akhirnya) sesuatu.
14. Suatu bangun adalah sesuatu yang termuat dalam suatu batas atau beberapa batas .
15. Suatu lingkaran adalah suatu bangun datar yang termuat dalam satu garis

sedemikian, hingga semua garis lurus yang melalui satu titik dalam bangun itu dan mengenai garis tadi sama panjangnya.

16. Dan titik itu disebut titik pusat lingkaran .
17. Suatu garis tengah dari lingkaran adalah sebarang garis lurus yang melalui titik pusat dan pada kedua arahnya berakhir pada keliling lingkaran dan garis semacam itu membagi dua sama lingkaran itu
18. Suatu setengah lingkaran adalah bangun yang termuat dalam suatu garis tengah dan keliling lingkaran yang terbagi oleh garis tengah itu. Titik pusat setengah lingkaran sama dengan titik pusat lingkaran .
19. Bangun-bangun garis lurus adalah bangun-bangun yang termuat dalam (dibatasi oleh) garis-garis lurus. Bangun-bangun trilateral adalah yang dibatasi oleh tiga, quadrilateral dibatasi oleh empat dan multilateral dibatasi oleh lebih dari empat garis.
20. Dari bangun-bangun trilateral (sisitiga), suatu segitiga sama sisi adalah yang mempunyai tiga sisi sama, suatu segitiga samakaki adalah yang hanya dua sisinya sama dan suatu segitiga miring adalah suatu segitiga yang semua sisinya tidak sama.
21. Selanjutnya dari bangun-bangun sisitiga, suatu segitiga siku-siku adalah yang mempunyai sudut siku-siku, suatu segitiga tumpul yang mempunyai sudut tumpul dan suatu segitiga lancip adalah yang ketiga sudutnya lancip.
22. Dari bangun-bangun sisiempat, suatu bujur sangkar adalah yang samasisi dan sudut siku-siku, suatu empat persegi panjang adalah yang bersudut siku-siku tetapi tidak sama sisi; suatu belah ketupat adalah yang sama sisi, tetapi tidak

bersudut siku-siku; suatu jajaran genjang adalah yang sisi-sisinya dan sudut-sudutnya yang berhadapan sama, tetapi tidak sama sisi dan tidak bersudut siku-siku. Sisiempat yang lain dari ini semua disebut trapesium.

23. Garis-garis lurus parallel (sejajar) adalah garis-garis lurus yang terletak dalam suatu bidang datar dan jika diperpanjang tak terbatas pada kedua arahnya tidak akan bertemu pada arah yang manapun.

Postulat-postulat SMSG Untuk Geometri Euclides

Unsur-unsur yang tidak didefinisikan

1. Titik
2. Garis
3. Bidang

Postulat-potulat

1. Diketahui sebarang dua titik berlainan, maka ada tepat satu garis yang memuat titik tersebut.
2. Potulat Jarak

   Untuk setiap pasang titik berlainan berkorespondensi satu bilangan positif tunggal. Bilangan ini disebut jarak antara dua titik tersebut.
3. Postulat Penggaris

   Titik suatu garis dapat diletakkan dalam korespondensi dengan bilangan-bilangan nyata sedemikian, hingga

   1) Untuk setiap titik pada garis berkorespondensi tepat satu bilangan nyata,
   2) Untuk setiap bilangan nyata berkorespondensi tepat satu titik pada garis .
   3) Jarak antara dua titik berlainan adalah harga mutlak dari selisih bilangan-bilangan nyata yang berkorespondensi.
4. Postulat Perpindahan Penggaris

   Diketahui dua titik P dan Q pada suatu garis. Sistem koordinat dapat dipilih sedemikian, hingga koordinat titik P sama dengan nol dan koordinat titik Q positif.

5. a) Setiap bidang memuat paling sedikit tiga titik nonkolinear

   b) Ruang memuat paling sedikit empat titik yang tidak sebidang

6. Jika dua titik terletak pada suatu bidang, maka garis yang memuat titik-titik itu terletak pada bidang yang sama.

7. Sebarang tiga titik terletak paling sedikit pada satu bidang, dan sebarang tiga titik yang nonkolinear terletak tepat pada satu bidang.

8. Jika dua bidang berpotongan, maka perpotongannya adalah suatu garis.

9. Postulat Pemisahan Bidang

   Diketahui suatu garis dan suatu bidang yang memuatnya, titik-titik pada bidang yang tidak terletak pada garis tersebut membentuk dua himpunan sedemikian, hingga

   1) masing-masing himpunan adalah konveks,
   2) jika P dalam himpunan yang satu dan Q dalam himpunan yang lain, maka segmen PQ memotong garis tersebut.

10. Postulat Pemisahan Ruang

    Titik-titik dalam ruang yang tidak terletak pada suatu bidang yang diketahui membentuk dua himpunan sedemikian, hingga

    1) masing-masing himpunan adalah konveks
    2) jika P dalam himpunan yang satu dan Q dalam himpunan yang lain, maka segmen PQ memotong bidang.

11. Postulat Pengukuran Sudut

    Pada setiap sudut berkorespondensi suatu bilangan nyata antara 0 dan 180 (antara 0^0 dan 180^0).

12. Postulat Konstruksi Sudut

    Misalkan AB suatu sinar pada sisi suatu setengah bidang H.Untuk suatu bilangan r antara 0 dan 180 ada tepat satu sinar AP dengan P dalam H sedemikian, hingga $m\angle PAB = r$.

13. Postulat Pemindahan Sudut

    Jika D suatu titik dalam interior $\angle BAC$, maka $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

14. Postulat Suplemen

    Jika dua sudut membentuk suatu pasangan linear, maka mereka saling bersuplemen ("supplementary")

15. Postulat S-Sd-S (Sisi Sudut Sisi)

    Diketahui korespondensi satu-satu antara dua segitiga (atau antara segitiga dengan dirinya sendiri). Jika dua sisi dan sudut yang diapitnya dari segitiga yang pertama kongruen dengan bagian-bagian yang berkorespondensi dari segitiga kedua , maka korespondensi itu suatu kongruensi.

16. Postulat Kesejajaran

    Melalui suatu titik di luar suatu garis ada paling banyak satu garis yang sejajar garis yang diketahui.

17. Untuk setiap daerah poligonal (segibanyak) berkorespondensi suatu bilangan nyata positip yang disebut luasnya.
18. Jika dua segitiga kongruen, maka daerah dua segitiga sama luasnya.
19. Misalkan bahwa daerah R adalah gabungan dari dua daerah R_1 dan daerah R_2. Jika R_1 dan R_2 berpotongan pada paling banyak segmen dan titik yang

berhingga, maka luas daerah R sama dengan jumlah luas daerah-daerah R_1 dan R_2.

20. Luas daerah persegi panjang sama dengan hasil kali panjang alas dan panjang tinggi.
21. Volume suatu parallelepidum tegak sama dengan hasilkali panjang tinggi dan luas alasnya.
22. Prinsip Cavalieri

    Diketahui dua benda dan satu bidang . Jika untuk setiap bidang yang memotong kedua benda sejajar dengan bidang yang diketahui, kedua irisan itu menentukan daerah-daerah yang mempunyai luas yang sama, maka kedua benda itu mempunyai volume yang sama.

Catatan :

SMSG ialah singkatan dari School Mathematic Study Group

Postulat-postulat ini terjemahan bebas dari

Wallace, Edward C; West, Stephen, F. *Roads to Geometry*. Appendix D (376-378) . New Jersey: Prentice Hall, Inc,1992.