MODEL TINGKAT ASPIRASI DALAM KEPUTUSAN ANTRIAN

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

THERESIA RINA WIDI ASTUTI
NIM : 961414014
NIRM : 960051120501120014

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

HALAMAN PERSETUJUAN

S k r i p s i

MODEL TINGKAT ASPIRASI

DALAM KEPUTUSAN ANTRIAN

Oleh:

Nama : Theresia Rina Widi Astuti

NIM : 961414014

NIRM : 960051120501120014

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

M. Andy Rudhito, S.Pd, M. Si

Tanggal : 1 Maret 2003

SKRIPSI

MODEL TINGKAT ASPIRASI

DALAM KEPUTUSAN ANTRIAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Theresia Rina Widi Astuti

NIM : 961414014

NIRM : 960051120501120014

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 29 Maret 2003 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	**Drs. A. Atmadi, M. Si**	....
Sekretaris	:	**Drs. Th. Sugiarto, M. T**	....
Anggota	:	**Drs. B. Susanta**	....
Anggota	:	**Wanty Widjaja, M. Ed.**	....
Anggota	:	**M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si**	....

Yogyakarta, 29 Maret 2003

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

(Dr. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Mereka yang selalu mencintaiku
meski terkadang dengan cara yang sulit kumengerti

Bapak, Bapak, Bapak,
Ibu,
Mas Bambang

WAKTU TUHAN

Didalam hidup ini semua ada waktunya,
Ada waktunya kita menabur, ada waktu menuai
Mungkin doamu bagai tak terjawab
Namun yakinlah tetap Tuhan tak akan terlambat
Juga tak akan lebih cepat
Semuanya Dia jadikan, indah tepat pada waktunya
Tuhan tak akan terlambat, juga tak akan tinggalkanmu
Ajarlah kami setia selalu menanti waktuMu Tuhan

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah

Yogyakarta, 1 Maret 2003

Theresia Rina Widi Astuti

ABSTRAK

Laju pelayanan optimum untuk model antrian (M/M/1):(GD/∞/∞) dengan model biaya, ditentukan dengan meminimumkan biaya operasi dan biaya tunggu terhadap laju pelayanan. Jumlah pelayan optimum untuk model antrian (M/M/c):(GD/∞/∞) dengan model biaya, ditentukan dengan meminimum biaya operasi dan biaya tunggu terhadap jumlah pelayan.

Jumlah pelayan optimum untuk model tingkat aspirasi antara waktu menunggu pelanggan dan waktu menganggur pelayan yang diberikan, ditentukan dengan memperhatikan kondisi bahwa biaya total untuk pelayan yang lebih sedikit akan memerlukan biaya total yang lebih besar atau sama dengan biaya total untuk c pelayan, dan biaya total untuk pelayan yang lebih banyak akan memerlukan biaya total yang lebih besar atau sama dengan biaya total untuk c pelayan.

ABSTRACT

The speed of optimum service for the model (M/M/1):(GD/∞/∞) with the cost model is determined by minimizing the operational cost and the waiting cost against the speed of service. The number of optimum service for the over model (M/M/c):(GD/∞/∞) with the cost model is determined by minimizing the operational cost and the waiting cost against the number of service.

The number of the optimium waiters for the model of aspirations level between the waiting time and the vacant time for the waiters is determined by considering the condition that the total cost for less waiters will demand higher total cost or the same with the total cost for c waiters and the total cost for the more waiters will demand higher total cost or the same with the total cost for c waiters.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan YME atas rahmat yang telah dilimpahkan kepada kita, sehingga dapat terselesaikannya penulisan skripsi yang mengambil judul **“Model Tingkat Aspirasi Dalam Keputusan Antrian “**

Penulisan skripsi ini merupakan merupakan Tugas Akhir untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Pendidikan di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa bantuan yang diberikan oleh berbagai pihak, oleh karena itu, perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. St. Susento, M.Si, Ibu Wanty Widjaya, M.Ed, Bapak Drs. Thomas Sugiarto, M.T selaku dosen pembimbing akademik.
3. Bapak/Ibu dosen Universitas Sanata Dharma yang telah mendidik penulis selama penulis belajar di Universitas Sanata Dharma.
4. Staf sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma, Bapak Sugeng dan Bapak Sunardjo yang telah membantu selama penulis menyusun Skripsi.
5. Bapak K. Hadiwinoto dan Ibu AR. Murtiningsih, Bapak Sudiro dan Ibu Suratmi yang telah memberikan bantuan, semangat, dan doa.
6. Mas Heri, Mbak Ambar, Mas Agus, Mbak Yuli, Didik, Stefan, Deta Hendra dan Agus [P.Mat-96],dan teman-teman seperjuangan P.Mat 96.

7. Keluarga besar SMUK Imanuel Kalasan, Keluarga besar SLTP PIUS Kodya Tegal, Suster-suster Puteri Bunda Hati Kudus Yesus Tegal.
8. Sr.M. Angelina, PBHK, Sr.M. Ludovica, PBHK, Sr.M. Lidwina, PBHK, dan Bapak Suhardjono atas kesempatan, kepercayaan, dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
9. Warga Asrama Putri St.Maria Tegal: Sr.M.Fransisca, PBHK, Ibu Titik, Ellis, Sylvia, Windy, Elvi, dan tak lupa Emak.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah memberikan dukungan, semangat, dan doa hingga selesainya penulisan skripsi ini.

Semoga Tuhan melimpahkan kasih karunia-Nya kepada kita semua. Amin.

Yogyakarta, Maret 2003

Penulis

Th. Rina Widi Astuti

DAFTAR ISI

Halaman

Halaman

Halaman

Halaman

Halaman

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, sering terlihat orang-orang atau bahan-bahan yang sedang menunggu untuk dilayani oleh jasa pelayanan, misalnya pada saat pembayaran uang kuliah, pemesanan makanan di restoran, pembayaran rekening telepon, dan lain-lain. Garis-garis tunggu ini biasa disebut **antrian** (*queues*), terjadi karena kapasitas pelayan (*server*) tidak mencukupi jumlah kedatangan pengunjung pada sistem pelayanan.

Bila jumlah pelayan ditambah, maka akan menimbulkan adanya ongkos yang lebih besar untuk membuka sistem pelayanan baru. Dipandang dari segi sumber daya manusia, jumlah tenaga kerja yang berlebih akan menimbulkan pemborosan dalam penggajian dan memungkinkan adanya pengangguran selama jam kerja. Di lain pihak, bila jumlah tenaga kerja tidak mencukupi maka akan terjadi baris penungguan dalam waktu yang cukup lama, yang merupakan pemerahan tenaga kerja sehingga akhirnya justru akan menyebabkan tenaga kerja menjadi kurang produktif akibat kelelahan. Selain itu, adanya baris penungguan yang cukup panjang juga akan memberikan dampak terhadap ongkos yang berupa ongkos sosial, yaitu kehilangan langganan akibat antrian yang panjang.

Mengingat hal-hal tersebut di atas, maka perlu dilakukan penentuan jumlah pelayan yang sesuai dengan tingkat kedatangan, terutama pada saat terdapat banyak orang atau bahan yang perlu segera mendapat pelayanan. Oleh sebab itu penulis berusaha menganalisa hal tersebut dengan menggunakan teori antrian.

Dalam teori antrian terdapat beberapa model keputusan, antara lain model biaya dan model tingkat aspirasi. Secara umum model biaya berusaha menyeimbangkan biaya menunggu dengan biaya kenaikan tingkat pelayanan yang saling bertentangan. Bila tingkat pelayanan meningkat, maka biaya tunggu pelanggan menurun. Tingkat pelayanan optimum terjadi ketika jumlah kedua biaya ini minimum.

Biaya-biaya menunggu tidak selalu mudah ditentukan, bahkan sangat sulit. Disamping itu, biaya menunggu untuk individu yang sama dapat bervariasi, bergantung pada situasi antrian yang kebetulan ada. Dalam kehidupan sehari-hari, tidak semua model antrian dapat dioptimumkan dengan menggunakan model biaya. Dalam kasus demikian, maka harus digunakan cara lain untuk membuat keputusan. Misalnya, dalam sebuah restoran cepat hidang akan dirancang sarana pelayanan yang menyenangkan pelanggan dengan membatasi waktu menunggu rata-rata sampai 2 menit per pelanggan.

Jenis model keputusan ini didasari oleh penggunaan **tingkat aspirasi** yang harus dipenuhi oleh sarana pelayanan tersebut. Sehingga waktu menunggu rata-rata 2 menit merupakan tingkat aspirasi bagi pelanggan.

Optimum dalam tingkat aspirasi dipandang dalam arti memenuhi tingkat aspirasi tertentu yang ditentukan oleh pengambil keputusan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, maka masalah yang diajukan dalam skripsi ini adalah bagaimanakah penerapan Teori Antrian dalam penentuan jumlah fasilitas layanan dibutuhkan dengan menggunakan model tingkat aspirasi, sehingga layanan menjadi optimum, dalam arti terpenuhinya tingkat aspirasi tertentu.

1.3. Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk membahas penerapan Teori Antrian dalam penentuan jumlah fasilitas layanan dibutuhkan dengan menggunakan model tingkat aspirasi.

1.4. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah :

1.4.1. Memberikan wawasan pengetahuan tentang model tingkat aspirasi keputusan antrian.

1.4.2. Memberikan pengalaman penulisan suatu karya ilmiah.

1.5. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan adalah metode studi pustaka, sehingga di dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan penulis tercantum dalam daftar pustaka.

1.6. Ruang Lingkup Pembahasan

Sebagaimana telah dikemukakan di atas mengenai tujuan penulisan, maka kiranya perlu dibuat beberapa batasan agar pembahasan tidak menyimpang dari fokus permasalahan yang dikaji. Adapun batasan itu diantaranya adalah sebagai berikut :

1.6.1. Model antrian yang dibahas adalah model antrian yang berdistribusi poisson dan eksponensial, dan terbatas pada 3 model sistem antrian, yakni :

- Model $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$
- Model $(M/M/1):(GD/N/\infty)$
- Model $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$

1.6.2. Model Pengambilan Keputusan yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah model keputusan dengan menggunakan tingkat aspirasi dengan terlebih dahulu membahas model biaya.

1.7. Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis dengan sistematika sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

Bab ini memuat Latar Belakang Masalah, Rumusan Masalah, Tujuan Penulisan, Manfaat Penulisan, Metode Penulisan, Ruang Lingkup Pembahasan, dan Sistematika Penulisan.

BAB II. LANDASAN TEORI

Bab ini membahas materi-materi prasyarat dalam pembahasan model antrian. Adapun materi prasyarat yang dibahas adalah Teori Probabilitas. Sedangkan materi prasyarat yang lain seperti Persamaan Diferensial, Deret, dan Analisis Real tidak dibahas.

BAB III. MODEL ANTRIAN

Bab ini membahas model-model antrian, beserta syarat-syarat yang harus dipenuhi agar Model Tingkat Aspirasi dapat digunakan dalam penentuan model pengambilan keputusan.

BAB IV. MODEL PENGAMBILAN KEPUTUSAN ANTRIAN

Bab ini membahas tentang model pengambilan keputusan antrian menggunakan model tingkat aspirasi, dengan terlebih dahulu membahas model biaya dalam pengambilan keputusan antrian.

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan skripsi ini disertai saran penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini dibahas beberapa konsep dasar yang akan dipergunakan dalam pembahasan pada bab-bab selanjutnya. Adapun yang akan dibahas di sini yakni Distribusi Probabilitas Diskret dan Distribusi Probabilitas Kontinu.

Definisi 2.1. (Percobaan)

Percobaan adalah suatu proses yang secara teoritis dapat diulang takhingga kali dengan kondisi tidak berubah dan mempunyai hasil yang terdefinisi.

Contoh 2.1.

Percobaan melempar sekeping mata uang logam.

Definisi 2.2. (Ruang Sampel)

Ruang sampel (S) adalah himpunan unsur-unsur yang menyatakan semua kemungkinan hasil suatu percobaan.

Setiap unsur dari ruang sampel disebut *titik sampel*.

Contoh 2.2.

Diamati sisi yang muncul dari percobaan melemparkan dua mata uang bersama-sama satu kali.

Ruang sampel percobaan ini adalah S = {MM, MB, BM, BB}.M adalah sisi muka dan B adalah sisi belakang, MM merupakan salah satu titik sampel dari S.

Definisi 2.3. (Ruang Sampel Diskret)

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskret.

Definisi 2.4. (Ruang Sampel Kontinu)

Jika suatu ruang sampel mengandung titik sampel yang takberhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu.

Contoh 2.3.

Percobaan mengamati daya hidup(dalam satuan waktu) lampu akan menghasilkan ruang sampel kontinu.

Definisi 2.5. (Kejadian)

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Contoh 2.4.

Dari contoh 2.2 di atas A = {MM,BB} adalah kejadian munculnya sisi sama.

Definisi 2.6. (Bobot dan Jumlah Bobot)

Bobot merupakan suatu bilangan yang telah ditetapkan (berkisar antara 0 dan 1) pada ruang sampel berhingga, agar probabilitas suatu kejadian yang berasal dari suatu percobaan statistika dapat dihitung. Jumlah bobot semua titik sampel dalam suatu ruang sampel ditetapkan sama dengan satu.

Definisi 2.7. (Probabilitas suatu Kejadian)

Probabilitas suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel anggota A. Jadi $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, dan $P(S)=1$

Contoh 2.5.

Sebuah mata uang dilemparkan dua kali. Ruang sampel percobaan ini adalah S = {MM, MB, BM, BB}. Bila mata uang tersebut setimbang, maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul yang sama. Karena itu tiap titik diberi bobot b sehingga 4b = 1 atau b = ¼. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu muka muncul maka P(A) = ¾.

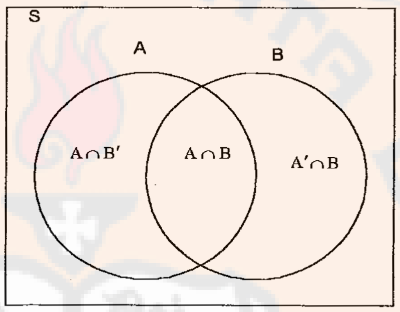
Definisi 2.8 (Dua Kejadian Saling Asing)

Dua kejadian A dan B saling asing bila $A \cap B = \varnothing$

Teorema 2.1

Bila A dan B dua kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bukti



Gambar 2.1 Aturan Penjumlahan Peluang

Dilustrasikan dalam gambar diagram Venn pada gambar 2.1. Dari gambar di atas nampak bahwa

$(A \cup B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

$= A \cap (B' \cup B) \cup (A' \cap B) \ldots (1)$

$= (A \cap S) \cup (A' \cap B)$

$A \cup B.$

$= A \cup (A' \cap B) \ldots (2)$

Dari (1) dan (2) nampak bahwa

$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

Sehingga berlaku $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

atau $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ ... (3)

Dilain pihak persamaan (1) dapat dibawa kedalam bentuk lain sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(A \cup B) &= (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B) \\ &= (A \cap B') \cup (A \cup A') \cap B \\ &= (A \cap B') \cup (S \cap B) \\ &= (A \cap B') \cup B\end{aligned}$$

Sehingga berlaku $P(A \cup B) = P((A \cap B') \cup B)$ ...(4)

Jadi $P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B)$ ...(5)

Dengan mensubtitusikan persamaan (3) pada persamaan (4) diperoleh

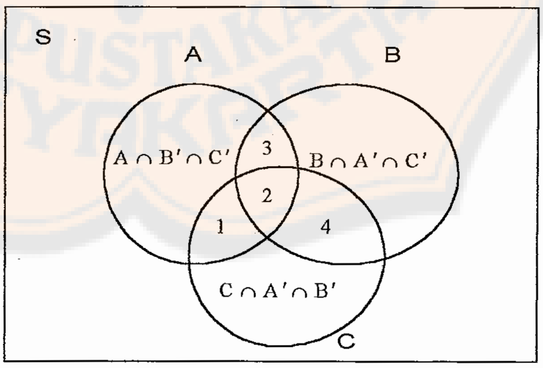
$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

Jadi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ■

Teorema 2.2.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Bukti:



Gambar 2.2 $A \cup B \cup C$

Diagram Venn di atas dapat digunakan sebagai alat bantu.

Keterangan gambar:

$1 = A\cap C\cap B'$
$2 = A\cap B\cap C$
$3 = A\cap B\cap C'$
$4 = B\cap C \cap A$

Dari gambar nampak bahwa :

$$
\begin{aligned}
A\cup B\cup C &= (A\cap B'\cap C') \cup (A\cap B\cap C') \cup (B\cap A'\cap C') \cup (A\cap C\cap B') \cup (A\cap B\cap C) \\
&\quad \cup (B\cap C\cap A') \cup (C\cap A'\cap B') \\
&= [(A\cap B'\cap C') \cup (A\cap C\cap B')] \cup [(A\cap B\cap C') \cup (B\cap A'\cap C')] \cup \\
&\quad (A\cap B\cap C) \cup [(B\cap C\cap A') \cup (C\cap A'\cap B')] \\
&= [(A\cap B') \cap (C'\cup C)] \cup [(B\cap C') \cap (A\cup A')] \cup (A\cap B\cap C) \cup [(C\cap A') \cap \\
&\quad (B\cup B')] \\
&= [(A\cap B') \cap S] \cup [(B\cap C') \cap S] \cup (A\cap B\cap C) \cup [(C\cap A') \cap S] \\
A\cup B\cup C &= (A\cap B') \cup (B\cap C') \cup (A\cap B\cap C) \cup (C\cap A')
\end{aligned}
$$

Sehingga berlaku $P(A\cup B\cup C) = P[(A\cap B') \cup (B\cap C') \cup (C\cap A') \cup (A\cap B\cap C)$

Jadi $P(A\cup B\cup C) = P(A\cap B') + P(B\cap C') + P(C\cap A') + P(A\cap B\cap C)$

Kemudian secara umum akan disajikan teorema berikut tanpa bukti.

Teorema 2.3

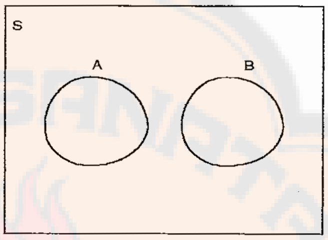
$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{k} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) \\
+ \cdots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.4

Bila A dan B kejadian yang saling asing, maka $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Bukti

Gambar 2.2 mengilustrasikan hal ini



Gambar 2.3 Kejadian Saling Asing

Menurut teorema 2.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Menurut definisi 2.8, kejadian A dan B kejadian yang saling asing bila $A \cap B = \varnothing$

Maka berlaku $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

Sehingga $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-0$

Jadi $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

Teorema 2.5

Bila $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ saling asing, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Bukti :

Menurut akibat 2.4, Bila A dan B kejadian yang saling asing, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

maka misal $A = A_1$

$B = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$

A dan B saling asing

Maka berlaku $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

atau $P(A \cup B) = P(A_1) + P(A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$

dengan kata lain $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ ∎

Definisi 2.9 (Dua Kejadian Saling Bebas)

Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Definisi 2.10 (Probabilitas bersyarat)

Probabilitas bersyarat B dengan diketahui A, dinyatakan dengan $P(B|A)$, ditentukan oleh $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bila $P(A) > 0$

Teorema 2.6

Bila A dan A′ kejadian yang saling berkomplemen maka $P(A') = 1 - P(A)$

Bukti :

Karena $A \cup A' = S$ dan $A \cap A' = \emptyset$ maka

$1 = P(S)$

$= P(A \cup A')$

$= P(A)+P(A')$

sehingga $P(A') = 1 - P(A)$ ■

Definisi 2.11. (Peubah acak)

Peubah acak X adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S, yang mengawankan setiap elemen $e \in S$ ke bilangan real, $X(e) = x$.

Definisi 2.12. (Peubah acak Diskret)

Peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel diskret adalah peubah acak diskret.

Contoh 2.6.

Banyak sisi muka yang muncul dalam percobaan pada contoh 2.2, $X(MM) = 2$, $X(MB) = 1$, $X(BM) = 1$, $X(BB) = 0$.

Definisi 2.13. (Peubah Acak Kontinu)

Peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel kontinu disebut peubah acak kontinu.

Contoh 2.7.

Pada pengukuran tinggi badan tinggi badan siswa SD kelas 5, jika X adalah peubah acak yang menyatakan tinggi badan siswa kelas 5, maka X adalah peubah acak kontinu karena X menjalani nilai-nilai dalam suatu interval.

Definisi 2.14. (Fungsi Probabilitas Diskret)

Fungsi f(x) adalah suatu fungsi probabilitas atau distribusi probabilitas suatu peubah acak diskret X bila untuk setiap hasil x yang mungkin:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh 2.8.

Distribusi probabilitas jumlah bilangan yang muncul bila dua dadu dilantunkan.

Misal X peubah acak dengan nilai x, yang menyatakan semua jumlah yang mungkin. Maka x dapat bernilai 2 sampai 12. Dua dadu dapat menghasilkan (6)(6) = 36 cara, masing-masing dengan probabilitas 1/36. P(X=3) = 2/36, karena jumlah 3 hanya terjadi dalam 2 cara. Dengan jalan yang sama diperoleh distribusi probabilitas

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

***Definisi 2.15.* (*Distribusi Kumulatif Suatu Peubah Acak X*)**

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak X dengan distribusi peluang f(x) dinyatakan oleh $F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$

***Definisi 2.16.* (*Fungsi Probabilitas Kontinu*)**

Fungsi probabilitas peubah acak kontinu juga dikenal dengan nama fungsi kepadatan. Fungsi f(x) adalah fungsi kepadatan probabilitas peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila :

1. $f(x) \ge 0$ untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

***Definisi 2.17.* (*Distribusi Kumulatif Suatu Peubah Acak Kontinu X*)**

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat f(x) dinyatakan oleh $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

***Definisi 2.18.* (*Nilai Harapan , E(X)*)**

Misalkan X suatu peubah acak dengan distribusi probabilitas f(x). Nilai harapan X atau harapan matematik X ialah :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{X} x\,f(x) & \text{jika X diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx, & \text{jika X kontinu} \end{cases}$$

Hasil ini diperluas pada teorema berikut.

Teorema 2.7.

Misalkan x suatu peubah acak dengan distribusi peluang f(x). Rataan atau nilai harapan peubah acak g(X) adalah

$$\mu_{g(x)} = E(g(X)) = \sum_{x} g(x)\, f(x) \text{ bila X diskret dan}$$

$$\mu_{g(x)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx \text{ bila X kontinu}$$

Berikut dibahas mengenai momen dan fungsi pembangkit momen, kegunaannya yang terpenting ialah untuk mencari distribusi dari fungsi peubah acak. Bila $g(X) = x^r$ untuk r = 0,1, 2, 3, ... teorema 2.7. menghasilkan nilai harapan yang disebut momen ke-r disekitar titik asal dari peubah acak x yang dinyatakan dengan μ_r'

***Definisi 2.19.* (*Momen ke-r*)**

Momen ke-r disekitar titik asal dari peubah acak x dinyatakan oleh

$$\mu_r' = E(X^r) = \begin{cases} \sum_{x} x^r\, f(x) & \text{bila X diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f(x)\, dx & \text{bila X kontinu} \end{cases}$$

Meskipun momen suatu peubah acak dapat dicari langsung dari definisi 2.19 tersedia cara lain, yaitu fungsi pembangkit momen berikut.

Definisi 2.20. (Fungsi Pembangkit Momen)

Fungsi pembangkit momen peubah acak X diperoleh dari $E(e^{tx})$ dan dinyatakan dengan $M_x(t)$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{bila x diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \text{bila x kontinu} \end{cases}$$

Berikut adalah teorema ketunggalan yang hanya akan ditulis tanpa bukti, karena memerlukan pembahasan yang cukup rumit diluar cakupan skripsi ini.

Teorema 2.8. (Teorema Ketunggalan)

Misalkan X dan Y dua peubah acak, masing-masing dengan fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ dan $M_y(t)$. Bila $M_x(t) = M_y(t)$ untuk semua nilai t, maka X dan Y mempunyai distribusi probabilitas yang sama.

Pada bagian selanjutnya akan dikemukakan beberapa contoh yang akan digunakan pada pembahasan pada bab III yakni distribusi Poisson, distribusi eksponensial, dan distribusi gamma.

Distribusi Poisson

***Definisi 2.21.* (*Percobaan Poisson*)**

Percobaan yang menghasilkan peubah acak X yang bernilai numerik, yaitu banyaknya sukses selama selang waktu tertentu atau dalam daerah tertentu, disebut percobaan Poisson.

Suatu percobaan Poisson memiliki sifat berikut :

1. banyaknya sukses terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh oleh (bebas dari) apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain.
2. probabilitas terjadinya suatu sukses (tunggal) dalam selang waktu yang amat pendek atau dalam daerah yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut;
3. probabilitas terjadinya lebih dari satu sukses dalam selang waktu yang pendek atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan.

***Definisi 2.22.* (*Peubah acak Poisson*)**

Banyaknya sukses X dalam suatu percobaan Poisson disebut suatu peubah acak Poisson.

Distribusi probabilitas suatu peubah acak Poisson X disebut distribusi Poisson dan dinotasikan dengan $P(x;\mu)$ karena harganya hanya bergantung pada μ, yakni jumlah rata-rata sukses yang terjadi pada interval waktu atau daerah tertentu. Distribusi tersebut dinotasikan sebagai :

$$p(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!},\ x=0,1,2,\ldots$$

dengan μ = jumlah rata - rata sukses yang terjadi

$e = 2{,}71828\ldots.$

Teorema 2.9.

Rataan dan variansi distribusi poisson P(x;μ) keduanya sama dengan μ

Bukti

Untuk menunjukkan bahwa rataan betul sama dengan μ, ditulis

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!}=\mu\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\mu^{x-1}e^{-\mu}}{(x-1)!}$$

Misal y = x - 1, diperoleh: $E(X)=\mu\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^{y}e^{-\mu}}{y!}=\mu$

Karena $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^{y}e^{-\mu}}{y!}=\sum_{x=0}^{\infty}P(y;\mu)=1$ ■

Variansi distribusi poisson diperoleh dengan mula-mula mencari

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!}=\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!}=\ \mu^{2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\mu^{x-2}e^{-\mu}}{(x-2)\,!}$$

misal y = x-2 maka diperoleh

$$E[X(X-1)]=\mu^{2}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\mu^{y}e^{-\mu}}{y!}=\mu^{2}$$

jadi $\sigma^2 = E[X(X-1)] + \mu - \mu^2$

$= \mu^2 + \mu - \mu^2$

$= \mu$ ■

Distribusi Gamma

Definisi 2.23. (Fungsi Gamma)

Fungsi gamma didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad ,\text{untuk } \alpha \rangle 0$$

Dengan integral parsial dimana $u = x^{\alpha - 1}$ dan $dv = e^{-x} dx$, diperoleh

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-x} x^{\alpha-1} \Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} (\alpha - 1) x^{\alpha-2} dx$$

$$= (\alpha - 1) \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-2} dx$$

Untuk $\alpha > 1$, yang menghasilkan rumus berulang

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\, \Gamma(\alpha-1)$

dengan memakai rumus berulang berkali-kali, maka diperoleh

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,(\alpha-2)\, \Gamma(\alpha-2)$

$= (\alpha-1)\,(\alpha-2)\,(\alpha-3)\, \Gamma(\alpha-3)$ dan seterusnya

jika $\alpha = n$, dengan n adalah bilangan bulat positif maka :

$\Gamma(n) = (n-1)\,(n-2) \ldots \Gamma(1)$

dari definisi fungsi gamma di atas, $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$

sehingga $\Gamma(n) = (n-1)!$

***Definisi 2.24.* (*Distribusi Gamma*)**

Peubah acak kontinu X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β jika fungsi kepadatannya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \text{ untuk } x \rangle 0$$

$$= 0, \text{ untuk x yang lainnya}$$

bila $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

Distribusi gamma yang khusus, dengan α=1, disebut distribusi eksponensial.

Distribusi Eksponensial

***Definisi 2.25.* (*Distribusi Eksponensial*)**

Peubah acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter β jika fungsi kepadatannya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \text{ untuk } x \rangle 0$$

$$= 0, \text{ untuk x yang lainnya}$$

dengan $\beta > 0$

Teorema 2.10.

Rataan dan variansi distribusi gamma adalah:

$$\mu = \alpha\,\beta \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

Bukti :

Momen ke-r disekitar titik asal untuk distribusi gamma adalah :

$$\mu_r{}' = E(x^r) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{r+\alpha-1}\, e^{-\alpha/\beta}\, dx$$

misal $y = x / \beta$, maka :

$$\mu_{r'} = \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{r-\alpha-1}\, e^{-y}\, dy = \frac{\beta^{r}\,\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$$

sehingga $\mu = \mu_1{}' = \dfrac{\beta\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\,\beta$

dan $\sigma^2 = \mu_2{}' = \mu^2 = \dfrac{\beta^2\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha^2\,\beta^2$

$= \alpha\,\beta^2$ ■

Teorema 2.11.

Rataan dan variansi distribusi eksponensial adalah :

$$\mu = \beta \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \beta^2$$

Bukti :

Karena distribusi eksponensial merupakan kasus khusus dari distribusi gamma, yakni untuk $\alpha = 1$, maka bila disubtitusikan menghasilkan

$$\mu = \mu_1{}' = \frac{\beta\,\Gamma(2)}{\Gamma(1)} = \beta$$

dan $\sigma^2 = \mu_2{}' = \mu^2 = \dfrac{\beta\,\Gamma(3)}{\Gamma(2)} = \beta^2$ ■

BAB III

MODEL-MODEL ANTRIAN

Pembahasan model-model antrian dalam bab ini adalah untuk menentukan ciri-ciri yang mengukur kinerja sebuah sistem. Dalam Bab IV akan diperlihatkan bagaimana informasi ini dapat dipergunakan dalam mencari rancangan yang "optimal" untuk sarana pelayanan yang bersangkutan.

3.1. Unsur-Unsur Dasar dari Model Antrian

Situasi antrian tercipta dengan cara berikut :

Pelanggan tiba di sebuah sarana pelayanan dan bergabung dalam sebuah antrian. Pelayan memilih seorang pelanggan dalam antrian untuk memulai pelayanan. Setelah pelayanan selesai, pelayan kembali memilih pelanggan baru (dari yang sedang menunggu). Diasumsikan tidak ada waktu yang terhilang antara penyelesaian pelayanan dengan dipilihnya seorang pelanggan baru pada sarana pelayanan tersebut.

Unsur-unsur antrian adalah sebagai berikut :

3.1.1. Distribusi Kedatangan dan Distribusi Waktu Pelayanan

***Definisi 3.1* (*Laju Kedatangan*)**

Laju kedatangan dinotasikan dengan λ adalah banyak pelanggan yang datang per satuan waktu.

***Definisi 3.2* (*Waktu Antar kedatangan*)**

Waktu antar kedatangan dinotasikan dengan $1/\lambda$ adalah waktu antara kedatangan berurutan.

***Definisi 3.3* (*Laju Pelayanan*)**

Laju Pelayanan dinotasikan dengan μ adalah banyak pelanggan yang dapat dilayani tiap satuan waktu.

***Definisi 3.4* (*Waktu Pelayanan*)**

Waktu Pelayanan dinotasikan dengan $1/\mu$ adalah waktu yang diperlukan untuk melayani satu pelanggan.

Dalam model-model antrian, kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan diringkaskan dalam bentuk distribusi probabilitas yang umumnya disebut distribusi kedatangan (*arrival distribution*) dan distribusi waktu pelayanan (*service time distribution*). Kedua distribusi ini mewakili situasi dimana pelanggan tiba dan dilayani secara individual (misal terjadi pada bank atau supermaket). Dalam situasi lain, pelanggan dapat tiba dan atau dilayani dalam kelompok (misal terjadi pada stasiun kereta api).

3.1.2. Peraturan Pelayanan

***Definisi 3.5* (*Peraturan Pelayanan*)**

Peraturan pelayanan merupakan cara memilih pelanggan untuk memulai pelayanan.

Peraturan pelayanan yang digunakan di sini adalah peraturan yang paling umum (*General Diciplines*), yaitu *First Come First Service* (FCFS), *Last Come First Service* (LCFS), *Service in Random Order* (SIRO), dan Antrian dengan Prioritas (*Emergency First*).

3.1.3. Rancangan Sarana Pelayanan

Sarana pelayanan yang dibahas di sini dapat terdiri dari sebuah pelayan, atau dapat pula mencakup lebih dari satu pelayan, sehingga memungkinkan beberapa pelanggan sebanyak jumlah pelayanan tersebut untuk dilayani bersamaan (misal, kasir bank). Dalam kasus ini, semua pelayan menawarkan pelayanan yang sama dan sarana pelayanan tersebut dikatakan mempunyai pelayan sejajar

3.1.4. Kapasitas Antrian

***Definisi 3.6* (*Kapasitas Antrian*)**

Kapasitas antrian adalah jumlah maksimum pelanggan yang dapat ditampung dalam sistem (yang berada dalam antrian dan yang sedang dilayani)

Sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan pada fasilitas pelayanan memiliki kapasitas sistem tak hingga (misal antrian kendaraan di gerbang tol). Sedangkan sistem yang membatasi jumlah pelanggan memiliki kapasitas berhingga (misal, ruang untuk mobil di tempat pengisian bensin). Setelah antrian memenuhi kapasitas, pelanggan yang baru tiba tidak dapat masuk kedalam antrian karena terbatasnya ruang.

3.1.5. Sumber pemanggilan

Sumber pemanggilan (*calling source*) dapat menghasilkan sejumlah terbatas pelanggan atau (secara teoritis) sejumlah tak terbatas pelanggan. Sumber terbatas terjadi ketika kedatangan mempengaruhi laju kedatangan pelanggan baru. Di sebuah bengkel dengan M mesin, sumber pemanggilan sebelum ada mesin yang rusak terdiri dari M calon pelanggan. Setelah satu mesin rusak, mesin itu menjadi pelanggan sehingga tidak dapat menghasilkan pemanggilan baru sampai diperbaiki. Perbedaan harus ditarik antara situasi bengkel dengan situasi lain dimana "penyebab" dari pemanggilan terbatas, tetapi mampu menghasilkan kedatangan yang tidak terhingga.

Misal, pada jasa pengetikan, jumlah pengetik adalah terbatas, tetapi setiap pengetik dapat menghasilkan kedatangan sebanyak apapun, karena ia biasanya tidak perlu menunggu penyelesaian bahan yang diserahkan sebelumnya sebelum menghasilkan pesanan-pesanan baru. Model-model antrian yang mewakili situasi dimana manusia mengambil peran sebagai pelanggan dan / atau pelayan harus dirancang untuk memperhitungkan pengaruh *perilaku manusia* (*human behavior*).

Pelayan "manusia" dapat mempercepat laju pelayanan ketika jalur antrian memanjang. Beberapa pelanggan "manusia" juga menolak untuk bergabung dalam satu jalur antrian, karena mereka *memperkirakan* waktu menunggu yang lama, atau mereka dapat membatalkan *setelah* berada dalam antrian karena waktu menunggu mereka sudah terlalu panjang. (Dalam hal perilaku manusia, waktu menunggu bagi satu orang tidak sama panjang bagi orang lainnya). Pada sistem yang mempunyai lebih dari satu jalur antrian, pelanggan "manusia" dapat berpindah dari satu jalur antrian ke jalur lainnya dengan harapan dapat mengurangi waktu menunggu.

Model yang akan dibahas di sini menganggap bahwa tidak terjadi penolakan, pembatalan, dan pelanggan tidak diperbolehkan pindah ke jalur antrian yang lain. Juga, model-model antrian tidak memperhitungkan sebuah perilaku *individual* dari pelanggan dalam arti bahwa semua pelanggan dalam antrian diperkirakan untuk "berperilaku" secara setara sementara mereka berada pada sarana pelayanan yang bersangkutan.

Jadi pelanggan yang suka mengobrol (dengan pelayanan selama dilayani) dipertimbangan sebagai kasus yang jarang dan perilakunya itu diabaikan dalam perancangan sistem. Sebaliknya, jika sebagian besar pelanggan ternyata sangat suka mengobrol, sebuah rancangan yang realistik dari sarana pelayanan tersebut harus didasari oleh fakta bahwa kebiasan ini, walaupun membuang-buang waktu merupakan bagian integral dari operasinya. Satu cara yang logis untuk memasukan pengaruh kebiasan ini adalah meningkatkan waktu pelayanan per pelanggan.

Bagian selanjutnya memperlihatkan bahwa distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial memainkan peran penting dalam mewakili waktu kedatangan dan waktu pelayanan dalam banyak situasi antrian. Bagian-bagian selanjutnya lalu mewakili model antrian yang terpilih dan pemecahannya.

3.2 Peran Distribusi Poisson dan Eksponensial

Pada bagian ini akan dibahas proses kedatangan dan proses kepergian pelanggan yang mengikuti distribusi Poisson. Disamping itu, dibahas pula mengenai hubungan proses kedatangan/pelayanan yang mengikuti distribusi Poisson dengan waktu antara kedatangan/waktu pelayanan yang mengikuti distribusi eksponensial. Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas bahwa jika variabel acak diskret X mempunyai nilai distribusi Poisson dengan parameter λ maka

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad \text{dengan } n = 0, 1, 2, \ldots$$

3.2.1. Kedatangan Mengikuti Distribusi Poisson

Simbol yang dipergunakan dapat dilihat pada tabel 3.1.

Ada proses kedatangan yang dianggap memenuhi empat pengandaian berikut :

1. Probabilitas terjadi satu kedatangan dalam interval $(t, t+\Delta t)$ sama dengan $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$, yang dapat ditulis sebagai

P(satu kedatangan terjadi dalam interval yang panjangnya Δt) = $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$, dengan λ merupakan rata-rata laju kedatangan yang tidak tergantung pada N(t).

2. Probabilitas terjadi lebih dari satu kedatangan dalam interval $(t, t+\Delta t)$ sama dengan $O(\Delta t)$ atau dapat ditulis sebagai P(lebih dari satu kedatangan terjadi dalam interval yang panjangnya Δt) = $O(\Delta t)$.
3. Untuk waktu $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $N(t_2) - N(t_1)$ dan $N(t_4) - N(t_3)$ secara statistik merupakan kejadian yang saling bebas (independent), sehingga proses kedatangan mempunyai pertambahan yang saling bebas.
4. Banyak kedatangan dalam interval waktu nol sama dengan nol, atau $N(0)= 0$.

Tabel 3.1

Daftar Lambang-lambang no – 1

Lambang	Arti Lambang
N(t)	Banyak kedatangan dalam interval waktu t
$O(\Delta t)$	Fungsi Δt, yang karena Δt<< (kecil sekali mendekati nol), yang memenuhi persamaan : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$
P(A)	Probabilitas kejadian A
$a_n(t)$ atau $P(N(t)=n)$	Probabilitas n kedatangan dalam interval waktu yang panjangnya t dengan n bilangan cacah
Δt	Perubahan waktu
E (X)	Harga harapan variabel acak X
F (x)	Fungsi distribusi probabilitas X

Berikut akan dicari persamaan $a_n(t+\Delta t)$, dengan Δt sangat kecil. Jika $N(t+\Delta t) = n$, maka kejadian itu dapat terjadi dalam beberapa cara, yaitu :

N(t) = n dan tidak ada kedatangan selama Δt, atau

N(t) = n –1 dan ada satu kedatangan selama Δt, atau

N(t) = n – 2 dan ada dua kedatangan selama Δt, atau

. . . , atau N(t) = 0 dan ada n kedatangan selama Δt.

Menurut pengandaian 3, $N(t+\Delta t)-N(t)$ dan $N(t)$ merupakan dua kejadian saling bebas, sehingga:

$$\begin{aligned} a_n(t+\Delta t) &= P(N(t)=n)\times P(\text{tidak ada kedatangan selama } \Delta t) \\ &\quad + P(N(t)=n-1)\times P(\text{satu kedatangan selama } \Delta t) \\ &\quad + P(N(t)=n-2)\times P(\text{dua kedatangan selama } \Delta t) \\ &\quad + \ldots + P(N(t)=0)\times P(n \text{ kedatangan selama } \Delta t),\ n\geq 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Probabilitas tidak ada kedatangan selama Δt sama dengan $1-\lambda\Delta t - O(\Delta t)$. Menurut pengandaian 1 dan 2 persamaan (3.1) dapat diringkaskan menjadi

$$\begin{aligned} a_n(t+\Delta t) &= a_n(t)[1-\lambda\Delta t - O(\Delta t)] + a_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + O(\Delta t)] + a_{n-2}(t)\,O(\Delta t) + \ldots + \\ &\quad a_0(t)\,O(\Delta t),\ n\geq 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Untuk n=0, diperoleh :

$$\begin{aligned} a_0(t+\Delta t) &= P(N(t)=0)\times P(\text{tidak ada kedatangan selama } \Delta t) \\ &= a_0(t)\,[1-\lambda\Delta t - O(\Delta t)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} a_n(t+\Delta t) &= a_n(t)[1-\lambda\Delta t - O(\Delta t)] + a_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + O(\Delta t)] + a_{n-2}(t)\,O(\Delta t) + \ldots + \\ &\quad a_0(t)\,O(\Delta t),\ n\geq 1 \text{ dan} \end{aligned}$$

$$a_0(t+\Delta t) = a_0(t)[1-\lambda\Delta t - O(\Delta t)]$$

Selanjutnya, akan dicari persamaan diferensial dari $a_n(t)$. Dari persamaan (3.2), suku yang mengandung $a_{n-j}(t)\ O(\Delta t)$, $0 \le j \le n$, digabung menjadi $O(\Delta t)$, sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$a_n(t + \Delta t) - a_n(t) = -\lambda\ \Delta t\ a_n(t) + \lambda \Delta t\ a_{n-1}(t) + O(\Delta t),\ n \ge 1 \qquad (3.4)$$

Persamaan (3.3) mempunyai suku yang mengandung $a_0(t)\ O(\Delta t)$, kemudian $a_0(t)\ O(\Delta t)$ digabung menjadi $O(\Delta t)$, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai :

$$a_0(t + \Delta t) - a_0(t) = -\lambda\ \Delta t\ a_0(\Delta t) + O(\Delta t) \ldots \qquad (3.5)$$

Persamaan (3.4) dan (3.5) dibagi dengan Δt, kemudian diambil limit untuk $\Delta t \to 0$, dan akan diperoleh persamaan-persamaan diferensial untuk $a_n(t)$, yaitu :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{a_n(t+\Delta t) - a_n(t)}{\Delta t} = -\lambda a_n(t) + \lambda a_{n-1}(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \right],\ n \ge 1$$

atau $$\frac{d\,a_n(t)}{dt} = -\lambda a_n(t) + \lambda a_{n-1}(t) \quad n \ge 1 \qquad (3.6)$$

dan

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{a_0(t+\Delta t) - a_0(t)}{\Delta t} = -\lambda a_0(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \right],\ \text{atau}$$

$$\frac{d\,a_0(t)}{dt} = -\lambda a_0(t) \qquad (3.7)$$

Dari pengandaian proses kedatangan sampai dengan diperoleh persamaan diferensial $a_n(t)$, akan dibuktikan persamaan differensial $a_n(t)$ mempunyai penyelesaian yang berbentuk distribusi Poisson. Penyelesaian umum persamaan (3.7) yaitu $a_0(t) = Ae^{-\lambda t}$, dengan A konstanta yang dapat diperoleh dari kondisi batas yaitu $a_0(0) = 1$. Jadi $A = 1$ dan $a_0(t) = e^{-\lambda t}$. Jika $n = 1$, maka persamaan (3.6) merupakan persamaan differensial tingkat satu, yaitu :

$$\frac{d a_1(t)}{dt} = -\lambda a_1(t) + \lambda a_0(t), \quad \text{atau}$$

$$\frac{d a_1(t)}{dt} + \lambda a_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{3.8}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $a_1(0) = 0$, persamaan (3.8) mempunyai penyelesaian yaitu $a_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$. Jika n =2 maka persamaan (3.6) merupakan persamaan diferensial tingkat satu yaitu:

$$\frac{d a_2(t)}{dt} = -\lambda a_2(t) + \lambda a_1(t), \quad \text{atau}$$

$$\frac{d a_2(t)}{dt} + \lambda a_1(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \tag{3.9}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $a_2(0) = 0$, persamaan (3.9) mempunyai penyelesaian yaitu

$$a_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

Jika n =3 maka persamaan (3.6) merupakan persamaan diferensial tingkat satu yaitu:

$$\frac{d a_3(t)}{dt} + \lambda a_3(t) = \lambda a_2(t), \quad \text{atau}$$

$$\frac{d a_3(t)}{dt} + \lambda a_3(t) = \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2} \tag{3.10 }$$

Dengan menggunakan kondisi batas $a_3(0) = 0$, persamaan (3.10) mempunyai penyelesaian yaitu

$$a_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{6} e^{-\lambda t}$$

Dari hasil di atas

$$a_0\,(t) = e^{-\lambda t}$$
$$a_1\,(t) = \lambda\, t e^{-\lambda t}$$
$$a_2\,(t) = \frac{(\lambda t)^2\, e^{-\lambda t}}{2!}$$
$$a_3\,(t) = \frac{(\lambda t)^3\, e^{-\lambda t}}{3!}$$
$$\vdots$$
$$a_n\,(t) = \frac{(\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.11)$$

Dengan menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa persamaan (3.11) merupakan penyelesian umum persamaan (3.6)

Tahap I, untuk $n = 1$, $a_1(t) = \lambda\, t\, e^{-\lambda t}$ (Tahap I terbukti)

Tahap II, andaikan untuk $n = k$,

$$a_k\,(t) = \frac{(\lambda t)^k\, e^{-\lambda t}}{k!}$$

merupakan penyelesaian dari persamaan persamaan (3.6).

Akan dibuktikan persamaan (3.11) berlaku untuk $n = k+1$. Jika $n = k+1$, maka persamaan (3.6) merupakan persamaan diferensial tingkat satu yang berbentuk :

$$\frac{d a_{k+1}(t)}{dt} + \lambda a_{k+1}(t) = \lambda a_k(t), \quad \text{atau}$$

$$\frac{d a_{k+1}(t)}{dt} + \lambda a_{k+1}(t) = \frac{\lambda^{k+1} t^k e^{-\lambda t}}{k!} \qquad (3.12)$$

Dengan menggunakan kondisi batas $a_{k+1}(0) = 0$, maka penyelesaian persamaan (3.12) adalah :

$$a_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}\; e^{-\lambda t}}{(k+1)!}$$

Sehingga menurut induksi matematika persamaan (3.11) adalah penyelesaian persamaan (3.6). Dipandang dari bentuknya, persamaan (3.11) merupakan distribusi Poisson dengan parameter λt, sebab:

$$P(N(t) = n) = a_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Sehingga N(t) merupakan distribusi Poisson. ■

Dari teori probabilitas diperoleh bahwa variabel acak X pada ruang sampel S adalah fungsi dari S ke himpunan bilangan real R sedemikian sehingga setiap interval dari R adalah kejadian dari S. Diberikan X adalah variabel acak dalam ruang sampel S dengan $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Fungsi f pada X(S) didefinisikan dengan $f(x_i) = P(X = x_i)$ dan disebut distribusi atau fungsi probabilitas dari X. Dari teori probabilitas diketahui :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

Akan dihitung harga harapan dari proses kedatangan. Andaikan variabel acak x didefinisikan sebagai banyaknya kedatangan dalam sistem pada waktu t, sehingga

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

$$= \lambda t \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \lambda t$$

Dari hasil di atas, proses kedatangan mempunyai harga harapan λt kedatangan atau laju kedatangan λ.

Selanjutnya akan dibahas bahwa jika proses kedatangan mempunyai distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan akan mempunyai Distribusi Eksponensial dan sebaliknya.

3.2.2. Hubungan Distribusi Poisson dan Eksponensial pada Proses Kedatangan

Hubungan distribusi Poisson dan Eksponensial pada proses kedatangan akan disajikan dalam teorema-teorema. Namun terlebih dahulu disajikan hal-hal yang diperlukan dalam bukti teorema. Lambang-lambang yang dipergunakan dapat dilihat dalam tabel 3.2.

Tabel 3.2
Daftar Lambang-lambang no-2

Lambang	Arti
m_x (t)	Fungsi pembangkit momen.
P_n (t)	Fungsi distribusi kumulatif dari proses kedatangan yaitu $P_n(t) = P(N(t) \leq n)$
T	Variabel acak untuk waktu antar kedatangan

Variabel acak kontinu X dikatakan mempunyai distribusi gamma bila fungsi distribusi probabilitasnya berbentuk :

$f(x) = \dfrac{\gamma^{\alpha}}{(\alpha-1)!} X^{\alpha-1} e^{-\gamma x}, \alpha, \gamma, x \rangle 0$, dengan α dan γ merupakan parameter

Dari teori probabilitas diperoleh bahwa fungsi pembangkit momen didefinisikan sebagai harga harapan dari fungsi e^{tx}, dengan t adalah variabel nyata sehingga $m_x(t) = E(e^{tx})$. Dari teorema 2.4, jika fungsi pembangkit momen dari dua variabel acak sama maka variabel acak itu mempunyai distribusi probabilitas yang sama. Harga harapan dari variabel acak kontinu X dalam teori probabilitas didefinisikan dengan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Menurut definisi harga harapan, distribusi gamma dengan parameter γ dan n mempunyai fungsi pembangkit momen sebagai berikut :

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\gamma^n}{(n-1)!} \quad x^{n-1} e^{-\gamma x} \quad dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\gamma^n}{(n-1)!} \quad x^{n-1} e^{-(\gamma - t)x} \quad dx$$

$$= \left[\frac{\gamma}{(\gamma - t)}\right]^n \int_0^\infty \frac{(\gamma - t)\{(\gamma - t)x\}^{n-1} \; e^{-(\gamma - t)x}}{(n-1)!} \quad dx$$

Tetapi $\int_0^\infty (\gamma - t)\{(\gamma - t)x\}^{n-1} e^{-(\gamma - t)x}$ dx merupakan fungsi gamma yang sama dengan (n - 1)!

Sehingga mx (t) distribusi gamma sama dengan $\left[\frac{\gamma}{(\gamma - t)}\right]^n$.

Dari teori probablitas diperoleh bahwa jika variabel acak X mempunyai distribusi eksponensial, maka fungsi distribusi probabilitasnya berbentuk

$f(x) = \gamma e^{-\gamma x}$, γ merupakan parameter

Teorema 3.1

Diberikan $T_1, T_2, \ldots, T_n$ adalah variabel-variabel saling bebas dan masing-masing berdistribusi eksponensial dengan parameter γ maka $Y = \sum_{i=1}^{n} T_i$ akan berdistribusi gamma dengan parameter γ.

Bukti :

Diketahui $T_1, T_2, T_3 \ldots, T_n$ merupakan variabel-variabel acak yang saling bebas dan masing-masing variabel mempunyai distribusi eksponensial. Diketahui $Y = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$. Akan dibuktikan Y mempunyai distribusi gamma. Fungsi pembangkit momen variabel Y, yaitu :

$$
\begin{aligned}
m_y(t) &= E(e^{ty}) \\
&= E[e^{t(T_1+T_2+\dots+T_n)}] \\
&= E[e^{tT_1} e^{tT_2} \dots e^{tT_n}]
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Dari teori probabilitas ada teorema yang mengatakan bahwa jika T_1, T_2, T_3… ,T_n adalah variabel-variabel acak saling bebas maka harga harapan perkalian fungsi dari T_1, T_2, T_3… ,T_n sama dengan perkalian dari harga harapan masing-masing variabel sehingga persamaan (3.13) akan menjadi :

$$
\begin{aligned}
m_y(t) &= E[e^{tT_1}]\, E[e^{tT_2}] \dots E[e^{tT_n}] \\
&= m_{T_1}(t)\, m_{T_2}(t) \dots m_{T_n}(t)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Akan diselidiki terlebih dahulu fungsi pembangkit momen variabel acak T_1 karena variabel acak T_1 diketahui berdistribusi eksponensial, maka :

$f(T_1) = \gamma\, e^{-\gamma T_1}$, γ merupakan parameter, $T_1 > 0$ sehingga

$$m_{T_1}(t) = E\left[e^{tT_1}\right] = \int_0^\infty e^{tT_1} \gamma\, e^{-\gamma T_1}\, d\,T_1 = \int_0^\infty \gamma\, e^{-(\gamma - t)T_1}\, d\,T_1 = \frac{\gamma}{\gamma - t}$$

Dari hasil tersebut, distribusi eksponensial mempunyai fungsi pembangkit momen sama dengan : $\dfrac{\gamma}{\gamma - t}$

Diketahui variabel T_i , dengan i = 1, 2, 3,…, n, berdistribusi eksponensial.

Dari persamaan(3.14) akan diperoleh :

$$m_y(t) = \left[\frac{\gamma}{\gamma - t}\right]\left[\frac{\gamma}{\gamma - t}\right] \dots \left[\frac{\gamma}{\gamma - t}\right] = \left[\frac{\gamma}{\gamma - t}\right]^n$$

Tetapi $\left[\dfrac{\gamma}{\gamma - t}\right]$ merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma.

Jadi jumlah nilai variabel-variabel acak yang saling bebas dan masing-masing variabel berdistribusi eksponensial dengan parameter γ, akan menghasilkan distribusi gamma. ■

Teorema 3.2

Jika waktu-waktu antar kedatangan bersifat saling bebas, dan masing-masing waktu antar kedatangan mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter λ, maka laju kedatangan mengikuti distribusi Poisson.

Bukti : karena $P_n(t) = P(N(t) \leq n)$, maka

$$\begin{aligned} a_n(t) &= P(N(t) = n) \\ &= P(N(t) \leq n) - P(N(t) \leq n-1) \\ &= P_n(t) - P_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Pada waktu t ditemukan n pelanggan, sehingga jumlah n+1 waktu antar kedatangan lebih besar dari t.

$P_n(t)$ =P(Jumlah n+1 waktu antar kedatangan lebih besar dari t).

Diketahui waktu antar kedatangan bersifat saling bebas dan berdistribusi eksponensial. Dengan menggunakan teorema (3.1), jumlah n+1 waktu antar kedatangan akan menghasilkan distribusi gamma.

Sehingga $P_n(t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x}}{n!} dx$

Transformasikan variabel u = x-t, akan diperoleh :

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1} (u+t)^n e^{-\lambda t} e^{-\lambda u}}{n!} du$$

Dari rumus binomial, $(u+t)^n = \sum_{i=0}^{n} u^{n-i} t^i \frac{n!}{(n-i)!\, i!}$

Sehingga $$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u}}{n!} \sum_{i=0}^{n} u^{n-i} t^i \frac{n!}{(n-i)!\, i!} du$$

Karena konstanta dapat dikeluarkan dari tanda integral dan integral fungsi jumlahan sama dengan jumlah integral masing-masing fungsi, maka :

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t} t^i}{(n-i)!\, i!} \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{n-i} du$$

Tetapi $$\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{n-i} du = \left[\frac{1}{\lambda}\right]^{n-i} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-v} v^{n-i} dv$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{n-i} du = \left[\frac{1}{\lambda}\right]^{n-i} \frac{1}{\lambda} (n-i)!$$

Sebab $$\int_0^\infty e^{-v} v^{n-i} dv = (n-i)!$$

Sehingga $P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$, $P_n(t)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari proses Poisson ■

Teorema 3.3

Jika proses kedatangan mengikuti distribusi Poisson, maka variabel acak yang didefinisikan sebagai waktu antar kedatangan akan mempunyai distribusi eksponensial.

Bukti :

Dimisalkan T adalah variabel acak untuk waktu antar kedatangan, sehingga

$P(T > t) = P$ (nol kedatangan dalam waktu t) $= a_o(t)$.

Diketahui proses kedatangan mengikuti distribusi Poisson sehingga $a_o(t) = e^{-\lambda t}$

Dimisalkan F(t) melambangkan fungsi distribusi kumulatif dari T. Sehingga

$F(t) = P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Jika fungsi kepadatannya f(t) maka

$$f(t) = \frac{d\,F(t)}{dt} = e^{-\lambda t}$$

Jadi T mempunyai distribusi eksponensial. ∎

3.2.3. Pelayanan Pelanggan Mengikuti Distribusi Poisson

Bagian ini membahas pelayanan pelanggan yang berdistribusi Poisson. Pembahasan ini mirip sekali dengan pembahasan proses kedatangan. Lambang-lambang yang dipergunakan dapat dilihat dalam tabel 3.3

Tabel 3.3

Daftar lambang-lambang no-3

Lambang	Arti Lambang
M(t)	Banyak pelanggan yang selesai dilayani dalam waktu t
$b_n(t)$ atau $P(M(t) = n)$	Probabilitas n pelanggan yang dilayani dalam interval waktu yang panjangnya t
$R_n(t)$	Fungsi Distribusi Kumulatif dari pelayanan, yakni $R_n(t) = P(M(t) \le n)$

Ada proses pelayanan yang dianggap memenuhi empat pengandaian berikut:

1. Probabilitas terjadi satu pelanggan yang dilayani dalam interval $(t, t+\Delta t)$ sama dengan $(\mu\Delta t + O(\Delta t))$, yang dapat ditulis sebagai P(Satu pelanggan dilayani dalam interval yang panjangnya $\Delta t \mid$ sistem tidak kosong) $= \mu\Delta t + O(\Delta t)$, μ merupakan rata-rata laju pelayanan yang tidak tergantung pada M(t).

2. Probabilitas terjadi lebih dari satu pelanggan yang dilayani dalam interval $(t,t+\Delta t)$ sama dengan $O(\Delta t)$, atau dapat ditulis P(lebih dari satu pelanggan dilayani dalam interval yang panjangnya $\Delta t \mid$ sistem tidak kosong) = $O(\Delta t)$.
3. Untuk waktu $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, dan $M(t_2) - M(t_1)$ dan $M(t_4) - M(t_3)$ secara statistik merupakan kejadian yang saling bebas (independent), sehingga proses pelayanan mempunyai pertambahan yang saling bebas.
4. Banyaknya pelanggan dalam interval waktu nol sama dengan nol, atau $M(0)=0$.

Selanjutnya akan dicari persamaan $b_n(t+\Delta t)$ dengan Δt sangat kecil. Jika $M(t+\Delta t) = n$ maka kejadian itu dapat terjadi dalam berbagai cara, yakni :

$M(t) = n$ dan tidak ada pelanggan yang dilayani selama Δt, atau

$M(t) = n-1$ dan ada satu pelanggan yang dilayani selama Δt, atau

$M(t) = n-2$ dan ada dua pelanggan yang dilayani selama Δt, atau

$\vdots$

$M(t) = 0$ dan ada n pelanggan yang dilayani selama Δt

Menurut pengandaian 3, $M(t+\Delta t) - M(t)$ dan $M(t)$ merupakan dua kejadian saling bebas. Dengan mengguanakan definisi saling bebas dan aksioma di atas, akan diperoleh

$b_n(t + \Delta t)$ = P(M(t) = n)×P(tidak ada pelanggan yang dilayani selama Δt|sistem tidak kosong) + P(M(t) = n-1)×P(satu pelanggan yang dilayani selama Δt|sistem tidak kosong) + P(M(t) = n-2)×P(dua pelanggan yang dilayani selama $\Delta t \mid$ sistem tidak kosong) + … +

P(M(t) = 0)×P(n pelanggan yang dilayani selama $\Delta t \mid$ sistem tidak kosong),n>0 (3.15)

Probabalitas tidak ada pelanggan yang dilayani selama Δt sama dengan $1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)$. Menurut pengandaian 1 dan 2, persamaan (3.15) menjadi :

$$b_n(t+\Delta t) = b_n(t)[1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)] + b_{n-1}(t)[\mu\Delta t + O(\Delta t)] + b_{n-2}(t)O(\Delta t) + \ldots + b_0(t)O(\Delta t),\ n \geq 1 \quad (3.16)$$

Untuk n = 0, diperoleh

$b_0\ (t+\Delta t)$ = P(M(t) = 0)×P(tidak ada pelanggan yang dilayani selama $\Delta t \mid$ sistem tidak kosong)

$$= b_0(t)[1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)] \quad (3.17)$$

Persamaan $b_n(t + \Delta t)$ diperoleh, yakni

$$b_n(t+\Delta t) = b_n(t)\ [1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)] + b_{n-1}(t)\ [\mu\Delta t + O(\Delta t)] + b_{n-2}(t)\ O(\Delta t) + \ldots + b_0(t)\ O(\Delta t),\ n \geq 1$$

dan $b_0(t + \Delta t) = b_0(t)\ [1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)]$

Selanjutnya akan dicari persamaan diferensial dari $b_n(t)$. Dari persamaan (3.16) suku yang mengandung $b_{n-j}(t)\ O(\Delta t)$, $0 \leq j \leq n$, digabung menjadi $O(\Delta t)$, sehingga persamaan (3.16) dapat disajikan dalam bentuk

$$b_n(t+\Delta t)-b_n(t) = -\mu\ \Delta t\ b_n(t) + \mu\ \Delta t\ b_{n-1}(t)\ O(\Delta t),\ n \geq 1 \quad (3.18)$$

Persamaan (3.17) mempunyai suku yang mengandung $b_0(t)O(\Delta t)$, kemudian $b_0(t)O(\Delta t)$ digabung menjadi $O(\Delta t)$ sehingga persamaan (3.17) dapat disajikan menjadi persamaan berikut :

$$b_0(t+\Delta t) - b_0(t) = -\mu\ \Delta t\ b_0(\Delta t) + O(\Delta t) \quad (3.19)$$

Persamaan (3.18) dan (3.19) dibagai dengan Δt, kemudian diambil limit untuk $\Delta t \rightarrow 0$, maka diperoleh persamaan-persamaan differensial untuk $b_n(t)$, yaitu :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{b_n(t+\Delta t) - b_n(t)}{\Delta t} = \mu\, b_n(t) + \mu\, b_{n-1}(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \right], n \geq 1$$

Atau $$\frac{d\, b_n(t)}{dt} = -\mu\, b_n(t) + \mu\, b_{n-1}(t), n \geq 1 \tag{3.20}$$

Dan $$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{b_0(t+\Delta t) - b_0(t)}{\Delta t} = -\mu\, b_0(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

Atau $$\frac{d\, b_0(t)}{dt} = -\mu\, b_0(t) \tag{3.21}$$

Dari pengandaian proses pelayanan sampai dengan diperoleh persamaan diferensial $.b_n(t)$, akan dibuktikan persamaan diferensial $b_n(t)$ mempunyai penyelesaian yang berbentuk distribusi poisson.

Penyelesaian umum persamaan (3.21) yaitu $b_0(t) = A\ e^{-\mu t}$ dengan A konstanta yang dapat diperoleh dari kondisi batas yakni $b_0(0) = 1$. Jadi $A = 1$ dan $b_0(t) = e^{-\mu t}$

Jika $n = 1$, maka persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial tingkat satu, yaitu

$$\frac{db_1(t)}{dt} = -\mu b_1(t) + \mu b_0(t) \text{ atau}$$

$$\frac{db_1(t)}{dt} + \mu b_1(t) = \mu\ e^{-\mu t} \tag{3.22}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $b_1(0) = 0$, persamaan (3.22) mempunyai penyelesaian yakni $b_1(t) = \mu t e^{-\mu t}$.

Jika $n = 2$, maka persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial tingkat satu, yaitu :

$$\frac{db_2(t)}{dt} = -\mu b_2(t) + \mu b_1(t) \text{ atau}$$

$$\frac{db_2(t)}{dt} + \mu b_2(t) = \mu^2\, t\, e^{-\mu t} \tag{3.23}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $b_2(0) = 0$, penyelesaian persamaan (3.23) adalah $b_2(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t}$

Jika n = 3 maka persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial tingkat satu, yaitu :

$$\frac{db_3(t)}{dt} + \mu b_3(t) = \mu b_2(t) \quad \text{atau}$$

$$\frac{db_3(t)}{dt} + \mu b_3(t) = \frac{\mu^3 t^2 e^{-\mu t}}{2} \tag{3.24}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $b_3(0) = 0$, penyelesaian persamaan (3.24) adalah $b_3(t) == \frac{(\mu t)^3}{6} e^{-\mu t}$

Dari hasil di atas :

$$b_0(t) = e^{-\mu t}$$
$$b_1(t) = \mu t e^{-\mu t}$$
$$b_2(t) = \frac{(\mu t)^2}{2!} e^{-\mu t}$$
$$b_3(t) = \frac{(\mu t)^3}{3!} e^{-\mu t}$$

Sehingga dapat diduga

$$b_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}, \; n = 0,1,2,\ldots \tag{3.25}$$

Dengan menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa persamaan (3.25) adalah penyelesaian umum persamaan (3.20).

Tahap I, untuk n = 1 $b_1(t) = \mu t e^{-\mu t}$ Tahap I terbukti

$$b_k(t) = \frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}$$

Tahap II, andaikan untuk n = k,

Merupakan penyelesaian dari persamaan (3.20), akan dibuktikan persamaan (3.25) berlaku untuk n = k+1.

Jika n = k+1, maka persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial tingkat satu yang berbentuk

$$\frac{db_{k+1}(t)}{dt} + \mu b_{k+1}(t) = \mu b_k(t), \text{ atau}$$

$$\frac{db_{k+1}(t)}{dt} + \mu b_{k+1}(t) = \frac{\mu^{k+1} t^k e^{-\mu t}}{k!} \tag{3.26}$$

Dengan menggunakan kondisi batas $b_{k+1}(0) = 0$, maka penyelesaian persamaan (3.26) adalah

$$b_{k+1}(t) = \frac{(\mu t)^{k+1} e^{-\mu t}}{(k+1)!}$$;sehingga menurut induksi matematika

Persamaan (3.25) belaku untuk n bilangan cacah. Dilihat dari bentuknya persamaan (3.25) merupakan distribusi poisson dengan paramater μt, sebab

$$P(M(t) = n) = b_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Sehingga M(t) mempunyai distribusi Poisson ■

Seperti pada proses kedatangan, pada proses pelayanan dapat dihitung harga harapannya. Karena proses pelayanan mempunyai distribusi poisson dengan parameter μt, maka harga harapan pada proses pelayanan sama dengan μt.

3.2.4. Hubungan Distribusi Poisson dan Eksponensial pada Proses Pelayanan

Hubungan distribusi poisson dan eksponensial pada proses pelayanan akan ditunjukkan dalam teorema-teorema berikut. Teorema-teorema pada proses pelayanan mirip sekali dengan teorema pada proses kedatangan

Teorema 3.4

Jika waktu pelayanan dari proses pelayanan masing-masing bersifat saling bebas dan masing-masing waktu pelayanan mempunyai distribusi eksponensial dengan paramater μ, maka laju pelayanan berdistribusi Poisson.

Bukti : Karena $R_n(t) = P(M(t) \le n)$, maka

$$\begin{aligned} b_n(t) &= P(M(t) = n) \\ &= P(M(t) \le n) - P(M(t) \le n\text{-}1) \\ &= R_n(t) - R_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Pada waktu t ditemukan n pelanggan, sehingga jumlah n+1 waktu pelayanan lebih besar dari t. $R_n(t)$ = P(jumlah n+1 waktu pelayanan lebih besar dari t). Diketahui waktu pelayanan bersifat saling bebas dan mempunyai distribusi eksponensial.

Dengan menggunakan teorema 3.1, jumlah n+1 waktu pelayanan akan menghasilkan distribusi gamma sehingga

$$R_n(t) = \int_t^\infty \frac{\mu^{n+1} x^n e^{-\mu x}}{n!} dx$$

Transformasikan variabel $u = x - t$, didapat

$$R_n(t) = \int_0^\infty \frac{\mu^{n+1} (u+t)^n e^{-\mu t}}{n!} e^{-\mu u} du$$

Dari rumus binomial, $(u+t)^n = \sum_{i=0}^{n} u^{n-i}\, t^i \dfrac{n\,!}{(n-i)\,!\; i\,!}$

$$\text{Sehingga } R_n(t) = \int_0^\infty \frac{\mu^{n+1} e^{-\mu t} e^{-\mu u}}{n\,!} \sum_{i=0}^{n} u^{n-i}\, t^i \frac{n!}{(n-i)!\, i!} du$$

Karena konstanta dapat dikeluarkan dari tanda integral dan integral fungsi jumlah sama dengan jumlah integral masing-masing fungsi, maka

$$R_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu^{n+1} e^{-\mu t} t^i}{(n-i)!\, i!} \int_0^{\infty} e^{-\mu u} u^{n-i} du$$

Tetapi $\int_0^{\infty} e^{-\mu u} u^{n-i} du = \left[\frac{1}{\mu}\right]^{n-i} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{n-i} dv$

$$= \left[\frac{1}{\mu}\right]^{n-i} \frac{1}{\mu} (n-i)! \text{ sebab} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{n-i} dv = (n-i)!$$

Sehingga $R_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!}$,

R_n (t) adalah fungsi distribusi kumulatif dari proses Poisson. ■

Teorema 3.5

Jika proses pelayanan mengikuti distribusi Poisson, maka variabel acak yang didefinisikan sebagai waktu pelayanan akan mempunyai distribusi eksponensial.

Bukti :

Dimisalkan S adalah variabel acak untuk waktu pelayanan sehingga P(S>t) = P(nol pelayanan dalam waktu t) = $b_0(t)$. Diketahui proses pelayanan mengikuti distribusi Poisson, sehingga $b_0(t) = e^{-\mu t}$. Dimisalkan F(t) melambangkan fungsi distribusi kumulatif dari S sehingga F(t) = P(S ≤ t) = 1- $e^{-\mu t}$. Jika fungsi kepadatannya f(t) maka

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t}$$

Jadi S mempunyai distribusi eksponensial ■

Dari teorema 3.8 dan 3.9 dapat disimpulkan bahwa proses pelayanan mempunyai distribusi Poisson bila dan hanya bila waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

3.3. Model Antrian Probabilistik untuk Pelayan Tunggal pada Kapasitas Sistem Tak Berhingga

Bagian ini memuat proses kelahiran dan kematian. Dari proses kelahiran dan kematian akan disusun Persamaan Diferensial untuk $P_n(t)$. Penyelesaian Persamaan Diferensial untuk $P_n(t)$ tidak akan dibahas. Selanjutnya dari Persamaan Diferensial $P_n(t)$, akan dicari penyelesaian keadaan tunak untuk P_n dari model (M/M/1):(GD/∞/∞). Pada sistem (M/M/1):(GD/∞/∞) ini akan diturunkan harga harapan banyak pelanggan, waktu tunggu dan hubungan antara harga harapan panjang antrian dengan harga harapan waktu tunggu.

3.3.1. Proses Kelahiran dan Kematian

Lambang-lambang yang dipergunakan dapat dilihat dalam tabel 3.4.

Definisi 3.7 (Kelahiran)

Suatu kelahiran terjadi apabila pelanggan tiba pada suatu fasilitas pelayanan.

Definisi 3.8 (Kematian)

Suatu kematian terjadi apabila pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan.

Tabel 3.4.

Daftar lambang-lambang no-4

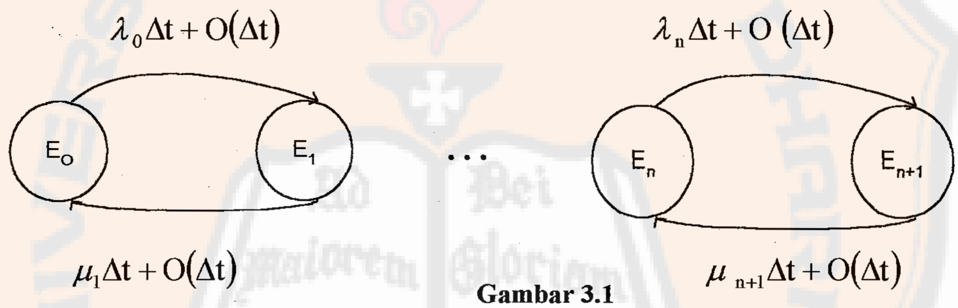
Lambang	Arti Lambang
E_n	Ada n pelanggan dalam sistem antrian.
λ_n	Laju kedatangan rata-rata ketika ada n pelanggan dalam sistem.
μ_n	Laju kematian rata-rata ketika ada n pelanggan dalam sistem.
$P_n(t)$	P(pada waktu t sistem mempunyai n pelanggan) atau P(pada waktu t sistem dalam keadaanE_n)
$P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$	Probabilitas n pelanggan dalam sistem pada keadaan tunak.
N	Variabel acak untuk banyak pelanggan dalam sistem.
N_q	Variabel acak untuk banyak pelanggan dalam antrian.
L	Harga harapan banyak pelanggan dalam sistem pada keadaan tunak.
L_q	Harga harapan banyak pelanggan dalam antrian pada keadaan tunak.
L_q^*	Harga harapan banyak pelanggan dalam antrian dari antrian yang tidak kosong pada keadaan tunak.
T_q	Variabel acak untuk waktu yang diperlukan satu pelanggan dalam antrian.
$W_q(t)=P(T_q \le t)$	Probabilitas bahwa satu pelanggan memerlukan waktu tunggu dalam antrian kurang dari atau sama dengan t.
T_s	Variabel acak untuk waktu yang diperlukan pelanggan dalam sistem.
$W(t)=P(T_s \le t)$	Probabilitas bahwa satu pelanggan memerlukan waktu tunggu dalam sistem kurang dari atau sama dengan t.
$W_q=E[T_q]$	Harga harapan waktu tunggu yang diperlukan satu pelanggan dalam antrian.
$W=E[T_s]$	Harga harapan dari waktu tunggu yang diperlukan satu pelanggan dalam sistem.
S	Variabel acak untuk waktu pelayanan.
S_I	Variabel acak untuk waktu pelayanan pelanggan ke-i (i = 1,2,3,…).
X(t)	Banyaknya pelanggan pada waktu t.

Akan dicari persamaan persamaan $P_n(t+\Delta t)$. Ada sistem antrian yang dianggap memenuhi pengandaian berikut :

1. Distribusi probabilitas yang menentukan banyak kelahiran dan kematian dalam suatu selang hanya tergantung pada panjang selang dan tidak pada titik awal selang.

2. Jika pada waktu t sistem dalam keadaan E_n maka probabilitas bahwa terjadi satu kelahiran selama (t, t+Δt) sama dengan $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$, n = 0,1,2, …
3. Jika pada waktu t sistem dalam keadaan E_n maka probabilitas bahwa terjadi satu kematian selama (t, t+Δt) sama dengan $\mu_n \Delta t + O(\Delta t)$, n = 0,1,2, …
4. Probabilitas terjadi lebih dari satu kematian atau satu kelahiran selama (t, t+Δt) sama dengan $O(\Delta t)$.

Berikut merupakan gambar proses kelahiran dan kematian yang memenuhi pengandaian di atas. Untuk Δt sangat kecil, probabilitas lebih dari satu kelahiran atau kematian akan sama dengan nol, sebab $\lim\limits_{\Delta t \to 0} = \dfrac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$



Gambar 3.1
Probabilitas untuk proses kelahiran dan kematian selama Δt

Persamaan $P_n(t+\Delta t)$ dapat diperoleh dengan melihat cara sistem mencapai keadaan E_n pada waktu t+Δt. Pada waktu t+Δt sistem dapat berada dalam keadaan E_n dengan cara :

sistem berada dalam keadaan E_n pada waktu t dan selama Δt sistem mempunyai j kelahiran dan j kematian, $j \geq 0$, atau

sistem berada dalam keadaan E_{n+j} pada waktu t, dan selama Δt sistem mempunyai j + k kematian dan k kelahiran, $k \geq 0$, atau sistem berada dalam keadaan E_{n-j} pada waktu t, dan selama Δt sistem mempunyai j + k kelahiran dan k kematian.

Menurut pengandaian 4, probabilitas lebih dari satu kelahiran atau lebih dari satu kematian selama Δt sama dengan $O(\Delta t)$. Maka tinggal memikirkan sistem yang mempunyai kejadian maksimum satu kelahiran dan maksimum satu kematian selama Δt.

- Sistem dapat berada dalam keadaan E_n pada waktu t dan tidak ada kelahiran dan kematian selama Δt, atau
- sistem dapat berada dalam keadaan E_n pada waktu t dan selama Δt ada satu kelahiran dan satu kematian, atau
- sistem dapat berada dalam keadaan E_{n-1} pada waktu t dan selama Δt dan sistem mempunyai satu kelahiran dan tidak ada kematian, atau
- sistem dapat berada dalam keadaan E_{n+1} pada waktu t dan selama Δt sistem mempunyai satu kematian dan tidak ada kelahiran.

Dari keterangan di atas, akan dicari persamaan $P_n(t+\Delta t)$, dengan Δt perubahan waktu yang sangat kecil dan $n \geq 1$. Karena pada waktu $t+\Delta t$ sistem dapat mencapai keadaan E_n dengan kejadian-kejadian di atas yang merupakan kejadian saling bebas, maka akan diperoleh persamaan berikut :

P(sistem dalam keadaan E_n pada waktu $t+\Delta t$) =

P(sistem berada dalam keadaan E_n pada waktu t dan selama Δt selama tidak ada kelahiran dan tidak ada kematian) + P(sistem dalam keadaan E_n pada waktu t dan selama Δt ada satu kelahiran dan satu kematian) + P(sistem berada dalam keadaan E_{n+1} pada waktu t dan selama Δt selama ada satu kematian dan tak ada kelahiran)

+ P(sistem berada dalam keadaan E_{n-1} pada waktu t dan selama Δt selama ada satu kelahiran dan tidak ada kematian) + P(gabungan dari kejadian-kejadian yang mengandung lebih dari satu kelahiran atau lebih dari satu kematian selama Δt). $(n \geq 1)$ (3.27)

Dari definisi 2.7 diperoleh $P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$. Dengan menggunakan hasil bahwa $P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$ maka persamaan (3.27) dapat disajikan dalam :

P(sistem dalam keadaan E_n pada waktu $t+\Delta t$) = P(sistem berada dalam keadaan E_n pada waktu t) P(tidak ada kelahiran dan kematian selama $\Delta t \mid$ sistem dalam keadaan E_n) + P(sistem dalam keadaan E_n pada waktu t) P(satu kelahiran dan satu kematian selama $\Delta t \mid$ pada waktu t sistem dalam keadaan E_n) + P(sistem dalam keadaan E_{n+1} pada waktu t) P(satu kematian dan tidak ada kelahiran selama $\Delta t \mid$ pada waktu t sistem dalam keadaan E_{n+1}) + P(sistem dalam keadaan E_{n-1} pada waktu t) P(satu kelahiran dan tidak ada kematian selama $\Delta t \mid$ pada waktu t sistem dalam keadaan E_{n-1}) + $O(\Delta t)$ (3.28)

Menurut pengandaian 2, probabilitas tidak ada kelahiran selama Δt adalah satu dikurangi probabilitas satu kelahiran. Jika sistem dalam keadaan E_n maka probabilitas tidak ada kelahiran selama Δt adalah $1- \lambda_n \Delta t - O(\Delta t)$.

Menurut penggandaian 3, probabilitas tidak ada kematian selama Δt adalah satu dikurangi probabilitas tidak ada kematian. Jika sistem dalam keadaan E_n maka probabilitas tidak ada kematian selama Δt adalah $1- \mu_n \Delta t - O(\Delta t)$.

Karena terjadinya kelahiran tidak tergantung pada kematian maka persamaan 3.28 menjadi :

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t - O(\Delta t)][1-\mu_n\Delta t - O(\Delta t)] + P_n(t)[\lambda_n\Delta t + O(\Delta t)][\mu_n\Delta t + O(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[1-\lambda_{n+1}\Delta t - O(\Delta t)][\mu_{n+1}\Delta t + O(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + O(\Delta t)][1-\mu_{n-1}\Delta t - O(\Delta t)] + O(\Delta t) \quad (n \geq 1) \quad (3.29)$$

Dengan menjabarkan persamaan 3.29, kemudian semua suku yang mengandung $O(\Delta t)$, atau $(\Delta t)^2$ digabung dalam $O(\Delta t)$, maka persamaan (3.29) menjadi

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t] + P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1}\Delta t + P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1}\Delta t + O(\Delta t) \quad (n\geq 1) \quad (3.30)$$

Karena P_{n-1} tidak ada untuk n = 0, maka untuk n = 0 sistem harus dibicarakan secara terpisah. Persamaan $P_0(t+\Delta t)$ dapat dicari dengan cara melihat sistem berada dalam keadaaan E_0 pada waktu $t+\Delta t$.

Sistem dapat berada dalam keadaan E_0 pada waktu $t+\Delta t$ bila :

1. Sistem berada dalam keadaan E_0 pada waktu t dan selama Δt tidak ada kelahiran (tidak mungkin terjadi kematian sebab sistem kosong), atau
2. Sistem berada dalam keadaan E_1 pada waktu t dan selama Δt tidak ada kelahiran dan ada satu kematian, atau
3. Sistem berada dalam keadaan lebih tinggi dari E_1 pada waktu t dan selama Δt terjadi lebih dari satu kematian.

Dengan cara yang serupa dengan mencari $P_n(t+\Delta t)$ untuk $n\geq 1$ maka untuk n =0 akan diperoleh persamaan berikut :

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda_0\Delta t - O(\Delta t)] + P_1(t)[1-\lambda_1\Delta t - O(\Delta t)][\mu_1\Delta t + O(\Delta t)] + O(\Delta t)$$

$$= P_0(t)[1-\lambda_0\Delta t] + P_1(t)\,\lambda_1\Delta t + O(\Delta t) \quad (3.31)$$

Dari hasil di atas diperoleh :

$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda_n \Delta t-\mu_n\Delta t] + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + O(\Delta t)$

$$(n \geq 1) \tag{3.32a}$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda_0\Delta t] + P_1(t)\ \mu_1 \Delta t + O(\Delta t)\ (n \geq 1) \tag{3.32b}$$

Persamaan (3.32a) dan (3.32b) memperlihatkan P_n sebagai fungsi t dan n, yaitu waktu dan banyak pelanggan)

a. Persamaan diferensial untuk $P_n(t)$

Persamaan (3.32a) dan (3.32b) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{cases} P_n(t+\Delta t)-P_n(t)=-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t\ P_n(t)+\mu_{n+1}\Delta t\, P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}\ \Delta t\ P_{n-1}(t)+O(\Delta t) \\ \qquad n\geq 1 \\ P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-\lambda_0\Delta t\ P_0(t)+\mu_1\ \Delta t\ P_1(t)\ +\ O(\Delta t) \end{cases} \tag{3.33}$$

Persamaan (3.33) dibagi dengan Δt dan diambil limit untuk $\Delta t \rightarrow 0$ maka akan diperoleh persamaan :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}\right] \tag{3.34a}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}\right] \tag{3.34b}$$

Dengan menggunakan definisi derivatif, persamaan (3.34a) dan (3.34b) menjadi :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\mu_{n+1}\,P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}\,P_{n-1}(t), (n\geq 1) \tag{3.35a}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1\,P_1(t) \tag{3.35b}$$

Persamaan (3.35a) dan (3.35b) adalah persamaan diferensial dalam n dan t.

b. Penyelesaian Keadaan Tunak untuk P_n

Definisi 3.9 (Keadaan Tunak)

Keadaan tunak adalah keadaan sistem dimana banyak pelanggan dalam sistem tidak dipengaruhi waktu dan banyak pelanggan pada keadaan awal.

Andaikan sistem dapat mencapai keadaan tunak. Persamaan keadaan tunak untuk P_n dapat diperoleh dengan mengambil limit untuk $t \to \infty$ dari persamaan (3.35a) dan (3.35b). Pada keadaan tunak, banyaknya pelanggan dalam sistem tidak tergantung pada waktu dan keadaan awal maka $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Sehingga persamaan (3.35a) dan (3.35b) menjadi :

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1} \ (n \geq 1)$$

$$0 = -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1$$

atau
$$\begin{cases} P_{n+1} = \dfrac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} P_n - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_{n-1} \ (n \geq 1 \\ P_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Dari persamaan (3.36) menghasilkan $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$

Dengan menggunakan metode iterasi, dicari penyelesaian keadaan tunak dari P_n.

Jika n = 1 maka persamaan (3.36) menjadi :

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\ &= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 (\text{sebab} P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0) \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Jika n = 2 maka persamaan (3.36) menghasilkan :

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1 \\
&= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \ \left(\text{sebab } P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0\right) \\
&= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Dapat diperkirakan penyelesaian keadaan tunak untuk P_n adalah :

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \lambda_{n-3} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_1} P_0 \ (n \geq 1) \\
&= P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-i}}{\mu_i} \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa persamaan (3.39) merupakan penyelesaian dari persamaan (3.36)

Bukti :

Tahap I, untuk n = 1, maka $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$, tahap I terbukti.

Tahap II, andaikan penyelesaian persamaan (3.36) untuk n = k-2 dan n = k-1 berturut-turut adalah

$$
P_{k-1} = P_0 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \quad \text{dan} \quad P_k = P_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}
$$

Akan dibuktikan persamaan (3.39) berlaku untuk n = k+1.

Jika n = k maka persamaan (3.36) menjadi :

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &= \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_{k+1}} P_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} P_{k-1} \\
&= \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_{k+1}} P_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} P_0 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\
&= \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} P_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} - P_0 \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right] \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \\
&= P_0 \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}
\end{aligned}
$$

■

Karena P_n adalah distibusi probabilitas maka $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, sehingga

$$P_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right]=1$$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \infty$ maka $P_n = 0$ untuk $n = 0,1,2,\ldots$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ konvergen maka $P_0 = \dfrac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$ (3.40)

Dengan menggunakan rumus (3.39) dan (3.40) maka akan diperoleh P_n. Karena $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ maka syarat perlu dan cukup adanya penyelesaian keadaan tunak adalah $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ konvergen.

3.3.2 Penyelesaian Keadaan Tunak untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞)

Dengan menggunakan model kelahiran dan kematian akan dicari P_n untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞) pada keadaan Tunak. Karena laju kedatangan dan laju pelayanan mempunyai distribusi poisson, maka $\lambda_i = \lambda$ untuk i = 0, 1, 2, ...dan $\mu_i = \mu$ untuk i = 1,2, ...

Untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞), persamaan (3.39) menjadi

$$P_n = P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n P_0 \ (n \geq 1) \qquad (3.41)$$

Karena P_n adalah distribusi probabilitas maka $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

Sehingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n P_0 = 1, \text{atau}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1, \text{dengan } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.42}$$

Dari persamaan (3.42) akan diperoleh $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right]^{-1}$ (3.43)

$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ merupakan deret geometri, dan $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ konvergen bila hanya bila $\rho < 1$.

Jika $\rho < 1$ maka sistem mempunyai penyelesaian keadaan tunak.

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ konvergen, maka $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = [1 - \rho]^{-1}, \rho < 1$

Dari persamaan (3.43) diperoleh $P_0 = 1 - \rho$ (3.44)

Penyelesaian keadaan tunak untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞) adalah

$$P_n = \rho^n (1 - \rho),\ \rho = \lambda/\mu,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{3.45}$$

3.3.3. Ukuran Keefektifan untuk Sistem (M/M/1):(GD/∞/∞)

Distribusi probabilitas pada keadaan tunak untuk ukuran sistem dinamakan ukuran keefektifan. Dua ukuran keefektifan yang akan dibahas, yakni harga harapan banyak pelanggan dalam sistem dan harga harapan banyak pelanggan dalam antrian.

a. Harga Harapan Banyak Pelanggan dalam Sistem dan Harga Harapan Banyak Pelanggan dalam Antrian.

Dari hasil di atas diperoleh bahwa untuk keadaan tunak $\lambda < \mu$. Selanjutnya akan dihitung harga harapan banyak pelanggan dalam sistem pada keadaan tunak. Dengan menggunakan definisi harga harapan maka:

$$
\begin{aligned}
L = E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\,P_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\,\rho^{n} \quad (\text{sebab } P_n = (1-\rho)\,\rho^{n}) \\
&= (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\ \rho^{n} \\
&= (1-\rho)\left[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + \ldots\right] \\
&= (1-\rho)\,\rho\left[1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + \ldots\right] \\
&= (1-\rho)\ \rho\sum_{n=1}^{\infty} n\ \rho^{n-1} \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Sehingga persamaan (3.46) menjadi :

Tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} n\ \rho^{n-1}$ merupakan turunan pertama terhadap ρ dari $\sum_{n=0}^{\infty} n\ \rho^{n}$

$$
\begin{aligned}
L &= (1-\rho)\ \rho \frac{d}{d\rho}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\right] \\
&= (1-\rho)\ \rho \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{1-\rho}\right] \\
&= (1-\rho)\ \rho\ (1-\rho)^{-2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}
$$

Harga harapan banyak pelanggan dalam sistem pada keadaan tunak untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞) adalah

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{atau} \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

Diketahui sistem mempunyai satu pelayan. Jika banyak pelanggan dalam sistem ada n maka banyak pelanggan dalam antrian ada (n-1), n≥1. Harga harapan banyak pelanggan dalam antrian pada keadaan tunak adalah :

$$L_q = E[N_q] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= L - (1 - P_o) \quad (\text{sebab } P_o + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - (1 - P_o) \tag{3.48}$$

Dari persamaan (3.44) diperoleh $P_0 = 1 - \rho$, sehingga

$$L_q = E[N_q] = \frac{\rho}{1-\rho} - [1 - (1-\rho)]$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \text{atau}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{3.49}$$

b. Harga Harapan Banyak Pelanggan dalam Antrian dari Antrian yang Tidak Kosong

Akan dihitung harga harapan banyak pelanggan dalam antrian dari antrian yang tidak kosong. Ini merupakan kasus khusus dari bagian a.Untuk kejadian dengan antrian kosong akan diabaikan, maka

$$L^*_q = E[N_q | N_q \neq 0]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n^*$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P_n^*$$

dengan P_n* merupakan distribusi probabilitas bersyarat pada sistem yang mempunyai n pelanggan bila diketahui antrian tidak kosong, sehingga :

$P_n* = P($ n pelanggan dalam sistem $| n \geq 2)$

Dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat diperoleh

$$P_n^* = \frac{\text{P(ada n pelanggan dalam sistem dan n} \geq 2)}{\text{P(ada paling sedikit dua pelanggan dalam sistem)}}$$
$$= \frac{P_n}{\sum_{n=2}^{\infty} P_n}, n \geq 2$$
$$= \frac{P_n}{1 - P_o - P_1} \quad (\text{sebab } \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1) \tag{3.50}$$

Dari persamaan (3.45) diperoleh $P_0 = (1-\rho)$ dan $P_1 = \rho\ (1-\rho)$. Sehingga persamaan (3.50) menjadi :

$$P_n^* = \frac{P_n}{1-(1-\rho)-\rho(1-\rho)} = \frac{P_n}{\rho^2}$$

Maka $L_q^* = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{P_n}{\rho^2}$

$$= \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} nP_n - \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} P_n$$
$$= \frac{1}{\rho^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} nP_n - P_1 \right] - \frac{1}{\rho^2}(1 - P_o - P_1)$$
$$= \frac{L - P_1 - (1 - P_o - P_1)}{\rho^2}$$

$$= \frac{L - (1 - P_o)}{\rho^2}$$

$$= \frac{\frac{\rho}{1-\rho} - (1 - [1 - \rho])}{\rho^2} = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\text{Sehingga } Lq^* = \frac{1}{1-\rho} \text{ atau } Lq^* = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \tag{3.51}$$

Menurut hasil di atas pada keadaan tunak P (banyak pelanggan dalam sistem lebih besar atau sama dengan 2) = ρ^2. Selanjutnya akan dibuktikan $P(N \geq n) = \rho^n$.

Bukti :

$$P(N \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \rho)\rho^k$$

$$= (1 - \rho)\rho^n \sum_{k=n}^{\infty} \rho^{k-n}$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho^n}{(1 - \rho)} = \rho^n \tag{3.52}$$

Contoh 3.1.

Seorang tukang cukur membuka usaha potong rambut dan menangani sendiri pelanggannya. Para pelanggan dilayani berdasarkan pada disiplin FCFS. Karena reputasi tukang cukur baik, maka pelanggan selalu bersedia menunggu. Kedatangan para pelanggan mengikuti distribusi Poisson dengan laju kedatangan rata-rata dua orang per jam, dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 20 menit.

Ini merupakan sistem (M/M/1):(GD/∞/∞), dengan λ= 2/jam, μ= (1/20) menit = 3/jam, $\rho=\lambda/\mu=2/3$. Banyak pelanggan yang diharapkan berada dalam salon dapat ditentukan dari persamaan (3.47), diperoleh L = 2/(3-2) = 2 pelanggan, sedangkan banyak pelanggan yang menunggu untuk dilayani dihitung dengan persamaan (3.49)

$$Lq = \frac{(2)^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \quad \text{pelanggan}$$

Tukang cukur menganggur bila dan hanya bila tidak ada pelanggan dalam salon. Probabilitas kejadian ini dapat dihitung dari persamaan (3.45) dengan mengambil n=0 yaitu : P_0 = 1(1-2/3)=1/3 maka prosentase tukang cukur dalam salon menganggur selama 33 %.

Banyak pelanggan yang diharapkan bila telah ada pelanggan yang menunggu ditentukan dari persamaan (3.51),

$$Lq^* = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \quad \text{pelanggan}$$

Probabilitas pelanggan tidak memperoleh tempat duduk, misal bahwa bila ruang tunggu menyediakan empat kursi ditentukan :

P (tidak mendapat tempat duduk) = $P(N\geq 5) = \rho^5 = (2/3)^5 = 0{,}13$.

Maka probabilitas pelanggan tidak memperoleh tempat duduk sebesar 0,13.

3.3.4. Distribusi Waktu Tunggu untuk Sistem (M/M/1):(GD/∞/∞) pada Keadaan Tunak.

Dari teori probailitas diperoleh definisi berikut :

Diberikan variabel acak X (diskret atau kontinu). Fungsi distribusi kumulatif F pada X adalah fungsi $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$F(a) = P(X \le a)$, dengan R himpuan bilangan real dan $a \in R$.

Jika X adalah variabel acak diskret dengan distribusi f maka

$$F(a) = \sum_{x_i \le a} f(x_i)$$

yang merupakan fungsi tangga. Di lain pihak, jika X adalah distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan f maka $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Akan dicari $W_q(t)$ dan $W(t)$ bila diketahui disiplin antrian FCFS. Dalam mencari waktu tunggu, disiplin antrian akan sangat berpengaruh. Variabel acak waktu tunggu mempunyai sifat menarik yakni pada kasus tertentu diskret dan kasus lain kontinu. Sebagian besar waktu tunggu merupakan variabel yang kontinu, kecuali waktu tunggu satu pelanggan yang langsung memperoleh pelayanan tanpa harus menunggu.

Jika pelanggan datang dan tidak ada pelanggan dalam sistem maka pelanggan itu akan langsung dilayani. Akibatnya

$$\begin{aligned} W_q(0) &= P(T_q \le 0) \\ &= P(T_q = 0) \\ &= P(\text{sistem kosong pada waktu pelanggan datang}) \\ &= P_0 \ = 1\text{-}\rho \text{ (ingat persamaan (3.44))} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Tinggal mencari W_q (t) untuk t>0

Diketahui disiplin antrian adalah FCFS. Jika pelanggan datang dan sudah ada n ($n \ge 0$) pelanggan dalam sistem maka pelanggan yang baru datang harus menunggu sebesar $T_q = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$

Diandaikan S_i berdistribusi eksponensial. Dari teorema 3.4, S_i merupakan variabel saling bebas. Akibatnya dengan menggunakan teorema 3.1, T_q mempunyai distribusi gamma dengan parameter μ dan n, sehingga P(waktu pelayanan n pelanggan kurang dari atau sama dengan dengan t | pelanggan datang dan ada n pelanggan dalam sistem) = $\int_0^t \frac{\mu e^{-\mu x}(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx$

Probabilitas bahwa pelanggan datang dan ada n pelanggan dalam sistem sama dengan P_n Oleh karena itu

$W_q(t) = P(T_q \le t)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}$ P(waktu pelayanan n pelanggan ≤ t | pelanggan datang dan sudah ada n pelanggan dalam sistem) P(pelanggan datang dan sudah ada n pelanggan dalam sistem) + $W_q(0)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\mu e^{-\mu x}(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx\, \rho^n(1-\rho)+1-\rho$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \int_0^t \frac{\mu e^{-\mu x}(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx + 1-\rho$$

$$= (1-\rho)\rho\int_0^t \mu e^{-\mu x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx\ +1-\rho$$

$$= (1-\rho)\rho\int_0^t \mu e^{-\mu x}\, e^{\rho\mu x}\ dx\ +1-\rho$$

$$= \rho - \rho\, e^{-\mu t(1-\rho)} + 1 - \rho$$

$$W_q(t) = 1-\rho\, e^{-\mu t(1-\rho)} \tag{3.54}$$

Distribusi kumulatif waktu tunggu dalam antrian adalah

$$W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho, \text{untuk } t = 0 \\ 1-\rho e^{-\mu t(1-\rho)}, \text{untuk } t \rangle 0 \end{cases}$$

Dari definisi 2.14(fungsi kepadatan) diperoleh fungsi kepadatan untuk T_q yaitu:

$$w_q(t) = \begin{cases} \frac{d\, W_q(t)}{dt},\ \text{untuk } t \rangle 0 \\ 1-\rho\ , \text{untuk } t = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} \frac{\mu e^{-\mu x}(\mu x)^n}{n!} \, dx \rho^n (1-\rho)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} \frac{\mu e^{-\mu x}(\mu x)^n}{n!} \, dx \, \frac{\lambda^n}{\mu^n}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} (\mu-\lambda) \frac{e^{-\mu x}(\lambda x)^n}{n!} \, dx$$

$$= \int_{0}^{t} (\mu-\lambda) \, e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \, dx$$

$$= \int_{0}^{t} (\mu-\lambda) \, e^{-\mu x} \, e^{\lambda x} \, dx$$

$$= \int_{0}^{t} (\mu-\lambda) \, e^{-(\mu-\lambda)x} \, dx$$

$$= 1 - e^{-(\mu-\lambda)\, t} \tag{3.56}$$

Fungsi kepadatan dari variabel T_s yaitu

$$w(t) = (\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Harga harapan waktu yang diperlukan dalam sistem yaitu

$$W = E[T\,] = \int_{0}^{\infty} t(\mu-\lambda) \; e^{-(\mu-\lambda)\,t} \, dt, \text{ atau}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{3.57}$$

Contoh 3.2

Diperhatikan contoh 3.1, ditentukan W_q dan W, yaitu:

Dari persamaan (3.55) diperoleh $W_q = \dfrac{2}{3(3-2)} = \dfrac{2}{3}$ jam

Dari persamaan (3.57) diperoleh $W = \dfrac{1}{(3-2)} = 1$ jam

Dari persamaan $P(T_q) = 1 - P(T_q \leq 1)$

$= 1 - W_q(1)$

$$\text{atau } w_q(t) = \begin{cases} \mu\rho(1-\rho)e^{-\mu t(1-\rho)} & \text{untuk } t\rangle 0 \\ 1-\rho & \text{untuk } t = 0 \end{cases}$$

Maka harga harapan waktu tunggu dalam antrian adalah

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \int_0^\infty tW_q(t)\,dt \\ &= 0(1-\rho) + \int_0^\infty t\,\rho\mu(1-\rho)e^{-\mu t(1-\rho)}\,dt \\ &= \int_0^\infty t\frac{\lambda}{\mu}(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\,dt \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\int_0^\infty t(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)\,t}\,dt \\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Cara mencari distribusi W(t) mirip dengan mencari $W_q(t)$. Jika ada n ($n \geq 0$) pelanggan dalam sistem ketika pelanggan datang, maka pelanggan yang baru datang harus menunggu selama $T_s = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n+1}$

Dengan menggunakan teorema 3.1, T_s mempunyai distribusi gamma yaitu P(waktu pelayanan n+1 pelanggan kurang dari atau sama dengan t | pelanggan datang dan sudah ada n pelanggan dalam sistem) = $\int_0^t \frac{\mu e^{\mu x}(\mu x)^n}{n!}\,dx$, sehingga

$W(t) = P(T_s \leq t)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}$ {P(waktu pelayanan n+1 pelanggan $\leq$ t | pelanggan datang dan ada n pelanggan dalam sistem)P(pelanggan datang dan sudah ada n pelanggan dalam sistem)}.

dapat dihitung probabilitas pelanggan akan menunggu lebih dari 1 jam dalam antrian, yaitu:

$$P(T_q) = 1 - [1-(2/3)\, e^{-3(1)\,[1-(2/3)]}]$$

$$= (2/3)\, e^{-1} = 0{,}245$$

3.3.5. Hubungan antara Harga Harapan Panjang Antrian dan Harga Harapan Waktu Tunggu

Menurut teorema probabilitas, jika X dan Y variabel acak dalam ruang sampel U maka E [X+Y] = E [X] + E[Y]

Dari definisi waktu tunggu dalam sistem dapat dibuat relasi $T_s = T_q + S$. Maka menurut teorema di atas $E[T_s] = E[T_q + S]$

$$= E[T_q] + E[S] \tag{3.58}$$

karena waktu pelayanan diandaikan mempunyai distribusi eksponensial maka $E[S]=1/\mu$. Sehingga persamaan (3.58) menjadi $E[T_s] = E[T_q] + 1/\mu$, atau

$$W = W_q + 1/\mu. \tag{3.59}$$

Semua proses antrian pada keadaan tunak berlaku relasi $L=\lambda W$ (3.60)

dan $L_q = \lambda W_q$ (3.61)

Persamaan (3.60) merupakan rumus Little yang telah ditemukan dan dibuktikan oleh John Little. Jika rumus Little berlaku maka persamaan (3.59) menjadi

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \quad \text{atau} \quad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.62}$$

Tabel 3.5

Relasi antara Ukuran Keefektifan

Relasi	Keterangan
$W = W_q + 1/\mu$	berlaku umum
$W = L/\lambda$	rumus Little yang berlaku untuk semua proses antrian pada
$W_q = L_q/\lambda$	keadaan tunak
$L = L_q + \lambda/\mu$	Bila rumus Little berlaku maka relasi ini berlaku

3.4. Model Probabilistik untuk Model (M/M/1):(GD/N/∞)

Bagian ini memuat persamaan-persamaan diferensi untuk P_n, harga harapan banyak pelanggan, harga harapan waktu tunggu, dan distribusi waktu tunggu dari sistem (M/M/1):(GD/N/∞)

3.4.1. Persamaan-persamaan Diferensi untuk P_n dan penyelesaian P_n pada keadaan tunak untuk model sistem (M/M/1):(GD/N/∞).

Sistem (M/M/1):(GD/N/∞) dapat menampung paling banyak N pelanggan. Apabila sistem ini telah penuh (berisi N pelanggan) maka para pelanggan yang datang kemudian tidak diperbolehkan masuk sistem dan tidak diperkenankan menunggu diluar. Pada sistem ini, laju kedatangan mempunyai distribusi Poisson dan waktu pelayanan mempunyai distribusi eksponensial, maka

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{untuk } n = 0,1,2,\ldots,N-1 \\ 0 & \text{untuk } n \geq N \end{cases}$$

dan

$$\mu_n = \mu \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, .., N$$

Untuk n>N, $P_n(t)=0$. Sebab banyak pelanggan tidak mungkin lebih besar N.

Berdasar pada proses kelahiran dan kematian akan disusun persamaan P_n.

Dengan menggunakan persamaan (3.33) akan diperoleh persamaan

$$P_N(t+\Delta t) - P_N(t) = -\mu \Delta t\, P_N(t) + \lambda\, \Delta t P_{N-1}(t) + O(\Delta t) \tag{3.63}$$

Persamaan (3.63) dibagi dengan Δt, kemudian diambil limit untuk $\Delta t \to 0$, maka akan diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu P_N(t) + P_{N-1}(t) \tag{3.64}$$

Karena $\lambda_n = \lambda$ untuk n =0, 1, 2, .. , N-1 dan $\mu_n = \mu$ untuk n=1, 2, 3, .., N-1 maka persamaan (3.35a) dan (3.35b)

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\, P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \text{bila } 1 \le n \le N-1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda\, P_0(t) + \mu P_1(t) \end{cases} \tag{3.65}$$

Dari persamaan (3.64) dan (3.65) diperoleh

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\, P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \text{untuk } 1 \le n \le N-1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda\, P_0(t) + \mu P_1 \\ \dfrac{dP_N}{dt} = -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t) \end{cases} \tag{3.66}$$

Persamaan-persamaan diferensi pada keadaan tunak adalah

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} P_n - \dfrac{\lambda}{\mu} P_{n-1}, \text{untuk } 1 \le n \le N-1 \\ P_N = \dfrac{\lambda}{\mu} P_{N-1} \end{cases} \tag{3.67}$$

Dengan metode iterasi pada 3.3, diperoleh penyelesaian P_n yaitu

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_0 \text{ , untuk } n \le N-1 \tag{3.68}$$

Untuk n = N - 1, persamaan 3.68 menjadi

$P_{N-1} = (\lambda/\mu)^{N-1} P_0$

Dari persamaan (3.67) diperoleh

$$P_N = (\lambda/\mu) P_{N-1}$$
$$= (\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{N-1} P_0$$
$$P_N = (\lambda/\mu)^N P_0 \qquad (3.69)$$

Sehingga

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_0, \text{untuk } 0 \le n \le N \qquad (3.70)$$

atau $P_n = \rho^n P_0$, untuk $0 \le n \le N$, dengan $\rho = \lambda/\mu$

Dari kondisi batas $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$, akan diperoleh $\sum_{n=0}^{N} \rho^n P_0 = 1$ atau $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \rho^n\right]^{-1}$

Menurut jumlah deret berhingga

$$\sum_{n=0}^{N} \rho^n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \text{untuk } \rho \ne 1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{maka} \\ N+1, \text{ untuk } \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \text{untuk } \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, \text{ untuk } \rho = 1 \end{cases} \qquad (3.71)$$

Sehingga

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}} \text{untuk } \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, \text{untuk } \rho = 1 \end{cases} \qquad (3.72)$$

Karena $\sum_{n=0}^{N} \rho^n$ untuk $\rho > 0$ merupakan deret konvergen,

maka penyelesaian keadaan tunak ada untuk $\rho > 0$

Dapat ditinjau untuk $N \to \infty$ akan menghasilkan $P_n = (1-\rho)\,\rho^n$ (lihat persamaan 3.45), yang sesuai dengan model (M/M/1):(GD/∞/∞).Untuk model (M/M/1):(GD/∞/∞), keberadaan keadaan tunak hanya terbatas untuk $\rho < 1$, sebab untuk $\rho \geq 1$, $\sum_{n=0}^{N} \rho^n$ merupakan deret yang divergen.

3.4.2. Harga harapan Banyak Pelanggan pada keadaan Tunak untuk sistem (M/M/1):(GD/N/∞)

Akan dihitung harga harapan banyak pelanggan dalam sistem.

Untuk $\rho = 1$

$$L = \sum_{n=0}^{N} nP_n$$

$$= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n \qquad (\text{sebab } P_n = \frac{1}{N+1})$$

$$= \frac{1}{N+1}\,\frac{(N+1)N}{2} \qquad (\text{sebab } \sum_{n=0}^{N} n = \frac{(N+1)N}{2})$$

$$L = \frac{N}{2} \tag{3.73}$$

Untuk $\rho \neq 1$

$$L = \sum_{n=0}^{N} nP_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n\rho^n P_0$$

$$= \rho P_0 \sum_{n=0}^{N} n\rho^{n-1}$$

$$= P_0 \rho \sum_{n=0}^{N} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^n\right] \quad (\text{sebab } \frac{d}{d\rho}\left[\rho^n\right] = n\rho^{n-1}) \tag{3.74}$$

Menurut teorema kalkulus,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^{n}\right] = \frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{N} \rho^{n} \text{ sehingga persamaan } (3.74) \text{ menjadi}$$

$$L = \rho P_0 \frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{N} \rho^{n}$$

$$= \rho P_0 \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right] \tag{3.75}$$

$$\text{Karena } \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right] = \frac{(1-\rho)(-[N+1]\rho^{N}) + (1-\rho^{N+1})}{(1-\rho)^2}$$

Maka persamaan (3.75) menjadi :

$$L = P_0 \rho \frac{1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho\left(1-[N+1]\rho^{N} + N\rho^{N+1}\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)(1-\rho)^2}, \text{ atau}$$

$$= \frac{\rho\left(1-[N+1]\rho^{N} + N\rho^{N+1}\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)(1-\rho)}, \tag{3.76}$$

Harga harapan banyak pelanggan dalam antrian dapat dihitung dari relasi $L_q = L - (1 - P_0)$, dan relasi ini dapat ditunjukkan dengan cara berikut :

$$L = \sum_{n=0}^{N} nP_n \qquad = 0 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + NP_N$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{N} (n-1)P_n = \qquad P_2 + 2P_3 + \ldots + (N-1)P_N \quad -$$

$$L - L_q \qquad = \quad P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_N = \sum_{n=1}^{N} P_n = 1 - P_0,$$

atau $L_q = L - (1 - P_0)$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa relasi L_q=L-(1-P_0) berlaku untuk sistem (M/M/1):(GD/∞/∞). Akan dihitung L_q dari sistem (M/M/1):(GD/N/∞).

Untuk ρ = 1,

$$L_q = \frac{N}{2} - (1 - P_0)$$

$$= \frac{N}{2} - \left[1 - \frac{1}{N+1}\right] \quad (\text{sebab untuk } \rho = 1,\ P_0 = \frac{1}{N+1})$$

$$= \frac{N}{2} - \frac{N}{N+1} = \frac{N^2 - N}{2(N+1)}$$

Untuk ρ ≠1,

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$= L - \left[1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right] \quad (\text{sebab} \quad \text{untuk } \rho = 1,\ P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}})$$

$$= L - \frac{\rho(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}}$$

$$\text{Maka } L_q = \begin{cases} \dfrac{N^2 - N}{2(N+1)}, & \text{untuk } \rho = 1 \\ \\ L - \dfrac{\rho\,(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}}, & \text{untuk } \rho \neq 1 \end{cases} \tag{3.77}$$

3.4.3. Harga Harapan Waktu Tunggu pada Keadaan Tunak

Lambang-lambang yang digunakan dapat dilihat dalam tabel 3.6.

Tabel 3.6

Daftar lambang-lambang no-5

Lambang	arti lambang
λ^*	Laju kedatangan yang dapat masuk sistem
q_n	Probabilitas pelanggan menemukan n pelanggan dalam sistem

Diketahui banyak pelanggan dalam sistem maksimum N, maka ada pelanggan yang tidak dapat memasuki sistem. Probabilitas pelanggan tidak akan masuk sistem sama dengan P_N, sebab sistem tidak akan menerima pelanggan pada saat banyak pelanggan dalam sistem sama dengan N.

$$\begin{aligned} P(\text{pelanggan yang masuk sistem}) &= P(\text{banyak pelanggan dalam sistem kurang dari N}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} P_n \\ &= 1 - P_N \text{ (lihat kondisi batas)} \end{aligned}$$

Sehingga $\lambda^* = \lambda(1 - P_N)$ (3.78)

Dengan menggunakan persamaan (3.59) dan rumus Little diperoleh λ^*. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda^* = \mu (L - L_q)$

Dari rumus Little diperoleh $W = L / \lambda^*$ dan $W_q = L_q / \lambda^*$

Menurut persamaan (3.59) diperoleh

$$\frac{L}{\lambda^*} = \frac{L_q}{\lambda^*} + \frac{1}{\mu} \text{ atau } (L - L_q) = \frac{\lambda^*}{\mu}$$

Maka $\lambda^* = \mu (L - L_q)$ (3.79)

Dari persamaan (3.78) dan (3.79) diperoleh

$$\lambda^* = \lambda(1 - P_N) = \mu (L - L_q)$$

Akan ditunjukkan bahwa $q_n = 1/ (1- P_N)$.

Pelanggan tidak boleh menemukan N pelanggan dalam sistem sebab kapasitas sistemnya sebesar N sehingga pelanggan tersebut tidak boleh masuk sistem.

Maka untuk sistem (M/M/1):(GD/N/∞), $q_n \neq P_n$

Untuk menemukan q_n, dapat dihitung dengan cara menormalkan kembali probabilitas P_n dengan menghilangkan P_N. Sehingga $q_n = l\ P_n$, dengan l adalah konstanta penormalan sedemikian sehingga

$$\sum_{n=0}^{N-1} q_n = \sum_{n=0}^{N-1} l P_n = 1$$

$$\text{Maka } l = \left[\sum_{n=0}^{N-1} P_n\right]^{-1} = (1 - P_N)^{-1} \text{dan } q_n = \frac{P_n}{1 - P_N} \text{ untuk } n \le N - 1 \tag{3.80}$$

Berikut akan dicari $W_q(t)$ untuk $t = 0$

$W_q(0) = P(T_q \le 0)$

$= P(T_q = 0)$

$W_q(0) = P(\text{sistem kosong pada waktu pelanggan datang})$

$$W_q(0) = q_0 \tag{3.81}$$

Setelah $W_q(0)$ diperoleh, selanjutnya dihitung $W_q(t)$ untuk $t > 0$.

Diketahui disiplin antrian FCFS. Jika pelanggan datang dan menemukan n pelanggan dalam sistem , maka pelanggan tersebut mempunyai

$$T_q = S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

Diandaikan S_i berdistribusi eksponensial. Dari teorema 3.4, S_i merupakan variabel saling bebas. Akibatnya dengan menggunakan teorema 3.1,

P(n pelanggan selesai dilayani dalam waktu kurang dari atau sama dengan t| pelanggan yang baru datang menemukan n pelanggan dalam sistem) =

$$\int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1} e^{-\mu x}}{(n-1)!} dx$$

Oleh sebab itu

$W_q(t) = \sum_{n=1}^{N-1}$ [P(n pelanggan selesai dilayani dalam waktu kurang dari atau sama dengan t | pelanggan yang baru datang menemukan n pelanggan dalam sistem) P(ada n pelanggan dalam sistem ketika pelanggan datang)] + $W_q(0)$, $t > 0$ (3.82)

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1} e^{-\mu x}}{(n-1)!} dx \; q_n + W_q \;(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx + W_q \;(0)$$

Berdasarkan definisi 2.14 no 1) dan 2) maka

$$\int_0^\infty \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx = 1 \text{ sehingga } \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx = 1 - \int_t^\infty \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx$$

Menurut keterangan di atas maka

$$W_q(t) = \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} \left[1 - \int_t^\infty \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx \right] + q_0 \text{(dari 3.81)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} - \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} \int_t^\infty \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx + q_0$$

Dari teorema 3.4 telah diperoleh

$$\int_t^\infty \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{n!}, \text{ maka}$$

$$W_q(t) = \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} - \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} dx + q_0, \text{atau}$$

$$W_q(t) = 1 - \sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \qquad (3.83)$$

Deret $\sum_{n=0}^{N-2} q_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!}$ adalahdistribusikumulatifPoissondenganparameterμt

Dengan cara yang serupa dengan mencari $W_q(t)$, akan dicari W(t) untuk t >0. Maka

$$W(t) = P(T_s \leq t)$$

$= \sum_{n=0}^{N-1}$ [P(n+1 pelanggan selesai dilayani dalam waktu kurang dari atau sama dengan t | pelanggan yang baru datang menemukan n pelanggan dalam sistem) P(ada n pelanggan dalam sistem ketika pelanggan datang)]

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx \; q_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} q_n \left[1 - \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} q_n - \sum_{n=0}^{N-1} q_n \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx$$

$$W(t) = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} q_n - \sum_{i=0}^{n} q_n \int_t^{\infty} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \qquad (3.84)$$

Contoh 3.3

Diperhatikan contoh 3.1. Andaikan salon mempunyai kapasitas 5 pelanggan, maka ini merupakan sistem (M/M/1):(GD/5/∞) dengan $\lambda = 2$/jam, $\mu = 3$/jam, N = 5, dan $\rho = 2/3$ sehingga harga harapan banyak pelanggan dalam salon dapat dihitung dari persamaan (3.48), sehingga

$$L = \frac{(2/3)[1 - 6(2/3)^5 + 5(2/3)^6]}{[1-(2/3)^6][1-(2/3)]} = 1{,}42 \text{ pelanggan}$$

Harga harapan panjang antrian ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.77)

$$L_q = 1{,}42 \, \frac{(2/3)[1-(2/3)^5]}{1-(2/3)^6} = 0{,}79 \text{ pelanggan}$$

Probabilitas dari seorang pelanggan akan langsung memperoleh pelayanan bila dan hanya bila tidak ada pelanggan dalam salon. Dari persamaan (3.71) akan diperoleh $P_0 = \frac{1-(2/3)}{1-(2/3)^6} = \frac{243}{665} = 0{,}37$

Dari rumus Little diperoleh $W = L/\lambda^*$

Dari persamaan (3.79) dapat dihitung

$\lambda^* = 3(1{,}42-0{,}79) = 1{,}89$

maka harga harapan waktu tunggu dalam sistem

$$W = 1{,}42/1{,}89 = 0{,}75/\text{ jam}$$

Dari rumus Little diperoleh harga harapan waktu tunggu dalam antrian, yaitu

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda^*} = \frac{0{,}79}{1{,}89} = 0{,}42$$

Dengan persamaan (3.83) dapat dihitung probabilitas dari seorang pelanggan akan menunggu lebih dari satu jam dalam antrian, yaitu

$$W_q(1) = 1 - \sum_{n=0}^{3} q_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{(3)^i e^{-3}}{i!}$$

Dari persamanan (3.80) diperoleh

$$q_1 = \frac{(2/3)\,(243/665)}{1-(2/3)^5\,(243/665)} = 0{,}26, \quad q_2 = \frac{(2/3)^2\,(243/665)}{1-(2/3)^5\,(243/665)} = 0{,}17$$

$$q_3 = \frac{(2/3)^3\,(243/665)}{1-(2/3)^5\,(243/665)} = 0{,}11, \quad q_4 = \frac{(2/3)^4\,(243/665)}{1-(2/3)^5\,(243/665)} = 0{,}08$$

Maka

$$W_q = 1 - \left\{ 0{,}26\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + 0{,}27\left\{\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3\ e^{-3}}{1!}\right\} + 0{,}11\left\{\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3\ e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!}\right\} \right.$$
$$\left. + 0{,}08\left\{\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3\ e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!}\right\} \right\} = 0{,}885$$

Tabel 3.7 memperlihatkan perbedaan hasil L, L_q, W, W_q, P_0 dan $W_q(1)$ dari sistem (M/M/1):(GD/∞/∞) dan sistem (M/M/1):(GD/5/∞)

Tabel 3.7
Perbedaan Hasil dari Contoh 3.1 dan 3.3

λ = 2/jam μ = 3/jam	L	L_q	W	W_q	P_0	$W_q(1)$
N = ∞	2	1,33	1	2/3	1/3	0,245
N = 5	1,42	0,79	0,75	0,42	0,037	0,885

3.5. Model Probabilistik untuk Pelayan Ganda dengan Kapasitas Sistem Tak Hingga

Kapasitas sistem ini memuat model (M/M/c):(GD/∞/∞) pada keadaan tunak. Akan dicari P_n, L_q, L, W_q, W, W(t) dan $W_q(t)$

Sistem antrian model (M/M/c):(GD/∞/∞) yang akan dipelajari hanya mempunyai satu antrian. Bila sistem mempunyai c antrian, maka keadaan ini dapat dikembalikan ke sistem (M/M/1):(GD/∞/∞), hanya perbedaannya terletak pada laju kedatangannya. Untuk keadaan sistem (M/M/c):(GD/∞/∞) yang mempunyai c antrian maka laju kedatangan untuk masing-masing antrian merupakan 1/c dari laju kedatangan.

3.5.1. Persamaan P_n untuk model (M/M/c):(GD/∞/∞)

Model (M/M/c):(GD/∞/∞) mempunyai c pelayanan. Karena waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial, maka proses kedatangan akan berdistribusi poisson. Sehingga $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n. Diketahui waktu pelayanan berdistribusi eksponensial, maka laju pelayanan berdistribusi poisson. Jika banyak pelanggan dalam sistem ada n, dengan n<c, maka n pelayan akan sibuk melayani dan sistem mempunyai laju pelayanan nμ. Jika banyak pelanggan dalam sistem ada n, dengan $n \geq c$ maka semua pelayan akan sibuk melayani. Sehingga sistem mempunyai laju pelayanan cμ.

$$\text{Maka } \mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ , untuk } 1 \leq n < c \\ c\mu \text{ , untuk } n \geq c \end{cases}$$

Berdasarkan pada proses kelahiran dan kematian akan disusun P_n dari sistem ini.

Jika $1 \leq n < c$ maka persamaan (3.39) menjadi

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\ &= P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \\ &= P_0 \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{n\mu} \\ &= P_0 \frac{\lambda^n}{n!\, \mu^n} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Jika $n \geq c$ maka persamaan (3.39) menjadi

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\ &= P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_c}{\mu_{c-1}} \frac{\lambda_{c+1}}{\mu_c} \frac{\lambda_{c+2}}{\mu_{c+1}} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \\ &= P_0 \frac{\lambda.\lambda....\lambda\, \lambda\lambda....\, \lambda}{1\mu(2\mu)...(c-1)\mu \underbrace{(c\mu)....(c\mu)}_{\text{n-c kali}}} \end{aligned}$$

$$P_n = P_0 \frac{\lambda^n}{c!\mu^n c^{n-c}} \tag{3.86}$$

Dari keterangan di atas diperoleh

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 & \text{untuk } 1 \leq n < c \\ \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\mu^n c^{n-c}} P_0 & \text{untuk } n \geq c \end{cases} \tag{3.87}$$

Untuk menemukan P_0 digunakan kondisi batas $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ yang menghasilkan persamaan

$$P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}+\sum_{n=c}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\mu^n c!\, c^{n-c}}\right]=1 \tag{3.88}$$

Didefinisikan $r = \lambda/\mu$ dan $\rho = r/c = \lambda/c\mu$ maka persamaan (3.88) menjadi

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!\, c^{n-c}}\right]^{-1}$$

Karena $\displaystyle\sum_{n=c}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\mu^n c!\, c^{n-c}} = \frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\left[\frac{r}{c}\right]^{n-c}$

$$= \frac{r^c}{c!}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{r}{c}\right]^{m}$$

$$= \frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-r/c}(r/c = \rho < 1)$$

$$= \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c c\mu}{\mu^c (c\mu - \lambda)}(\text{sebab } r = \lambda/\mu)$$

Maka

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}+\frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{c\mu}{(c\mu-\lambda)}\right]^{-1} \tag{3.89}$$

Karena persamaan (3.88) konvergen untuk $\lambda/c\mu < 1$ maka penyelesaian keadaan tunak ada untuk $\lambda/c\mu < 1$.

3.5.2. Harga Harapan Banyak Pelanggan dalam Antrian dan Sistem untuk Model (M/M/c):(GD/∞/∞)

Andaikan $\lambda/c\mu < 1$. Dengan cara yang serupa dengan model (M/M/1):(GD/∞/∞) akan dicari L_q dan L. Antrian hanya terjadi bila banyaknya pelanggan dalam sistem ada $n \geq c$, maka dengan menggunakan definisi harga harapan

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n \\ &= \sum_{n=c}^{\infty} n P_n - \sum_{n=c}^{\infty} c P_n \\ &= \sum_{n=c}^{\infty} n \frac{r^n}{c!c^{n-c}} P_0 - \sum_{n=c}^{\infty} c \frac{r^n}{c!c^{n-c}} P_0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Deret pertama pada ruas kanan persamaan (3.90) dapat dijabarkan menjadi

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n r^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0 r^{c+1}}{c!c}\left[\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left[\frac{r}{c}\right]^{n-c-1} + \sum_{n=c}^{\infty} c\left[\frac{r}{c}\right]^{n-c-1}\right] \tag{3.91}$$

Derivatif dari deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ adalah $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

Jika $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ sehingga

$$\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left[\frac{r}{c}\right]^{n-c-1} = \frac{1}{(1-r/c)^2} \tag{3.92}$$

Subtitusikan persamaan (3.92) ke persamaan (3.91) maka persamaan (3.91) menjadi

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n r^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0 r^{c+1}}{c!c}\left[\frac{1}{(1-r/c)^2} + \frac{cc}{r}\sum_{n=c}^{\infty}\left[\frac{r}{c}\right]^{n-c}\right]$$

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n r^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0 r^{c+1}}{c!c}\left[\frac{1}{(1-r/c)^2} + \frac{c^2/r}{1-r/c}\right] \tag{3.93}$$

Deret kedua pada ruas kanan dari persamaan (3.90) dapat dijabarkan menjadi

$$\sum_{n=c}^{\infty} c\frac{r^n}{c!c^{n-c}}P_0 = P_0\frac{r^c c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}}$$
$$= P_0\frac{r^c c}{c!(1-r/c)} \tag{3.94}$$

Subtitusikan persamaan (3.93) dan (3.94) kedalam persamaan (3.90) dan akan diperoleh

$$L_q = P_0\frac{r^{c+1}}{c!\,c}\left\{\frac{1}{(1-r/c)^2}+\frac{c^2/r}{1\text{-}r/c}\right\} - P_0\frac{r^c c}{c!(1-r/c)}$$
$$= P_0\frac{r^{c+1}}{c!\,c}\left\{\frac{1}{(1-r/c)^2}+\frac{c^2/r}{1\text{-}r/c}-\frac{c^2}{r(1-r/c)}\right\}$$
$$= P_0\frac{r^{c+1}}{c!\,c}\left\{\frac{1+\frac{c^2}{r}(1-r/c)-\frac{c^2}{r}(1-r/c)}{(1\text{-}r/c)^2}\right\}$$
$$L_q = P_0\frac{r^{c+1}}{c\,c!\,(1\text{-}r/c)^2} = \frac{(\lambda/\mu)^c\,\lambda\mu}{(c\text{-}1)!(c\mu\text{-}\lambda)^2}P_0 \tag{3.95}$$

Dengan cara yang serupa mencari L_q, akan dicari L. Dari definisi harga harapan maka :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$$
$$= \sum_{n=1}^{c-1} nP_n + \sum_{n=c}^{\infty} nP_n$$
$$= \sum_{n=1}^{c-1}\frac{nr^n}{n!}P_0 + \sum_{n=c}^{\infty}\frac{nr^n}{c^{n-c}\,c!}P_0 \tag{3.96}$$

Ruas kanan kedua persamaan (3.96) dapat diperoleh dari persamaan (3.93) sehingga

$$L = \sum_{n=1}^{c-1} \frac{r^n}{(n-1)!} P_0 + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c} \left\{ \frac{1}{(1-r/c)^2} + \frac{c^2/r}{1-r/c} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{c-1} \frac{r^n}{(n-1)!} P_0 + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c} \left\{ \frac{1 + c^2/r(1-r/c)}{(1-r/c)^2} \right\}$$

$$= r\sum_{n=1}^{c-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} P_0 + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c\ (1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c}{c!(1-r/c)}$$

Karena $r\sum_{n=1}^{c-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} = r\left\{ \sum_{n=0}^{c=1} \frac{r^n}{n!} - \frac{r^{c-1}}{(c-1)!} \right\}$ maka

$$L = rP_0 \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} - \frac{r^{c-1}}{(c-1)!} \right\} + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!\,c(1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c^2}{c!\,(c-r)}$$

Dari persamaan (3.89) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} = \frac{1}{P_0} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)} \tag{3.97}$$

Sehingga

$$L = rP_0 \left\{ \frac{1}{P_0} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)} - \frac{r^{c-1}}{(c-1)!} \right\} + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c^2}{c!(c-r)}$$

$$= rP_0 \left\{ \frac{1}{P_0} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)} - \frac{c\,r^{c-1}(c-r)}{c!\,(c-r)} \right\} + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c^2}{c!(c-r)}$$

$$= rP_0 \left\{ \frac{1}{P_0} - \left\{ \frac{c\,r^c + c^2 r^{c-1} - cr^c}{c!(c-r)} \right\} \right\} + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c^2}{c!(c-r)}$$

$$= r - \frac{c^2 r^c}{c!(c-r)} P_0 + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2} + P_0 \frac{r^c c^2}{c!(c-r)}$$

$$= r + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \frac{r^{c+1}}{c!c(1-r/c)^2} \tag{3.98}$$

3.5.3. Distribusi Probabilitas Waktu Tunggu untuk sistem (M/M/c):(GD/∞/∞)

Andaikan $(\lambda/c\mu)<1$, dan diketahui disiplin antrian FCFS. Jika banyak pelanggan dalam sistem kurang dari atau sama dengan c-1 maka pelanggan yang masuk sistem akan langsung memperoleh pelayanan tanpa harus menunggu. Sehingga pelanggan mempunyai $T_q = 0$. Maka $W_q(0) = (T_q = 0)$

$W_q(0) = $ P(banyak pelanggan dalam sistem kurang dari atau sama dengan c-1)

$$= \sum_{n=0}^{c-1} P_n$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} \tag{3.99}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.97) ke dalam persamaan (3.99) akan diperoleh

$$W_q(0) = P_0\left\{\frac{1}{P_0} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)}\right\}$$

$$= 1 - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)} P_0$$

$$W_q(0) = 1 - \frac{c(\lambda/\mu)^c}{c!(c-\lambda/\mu)} P_0 \tag{3.100}$$

Dengan cara yang serupa dengan model (M/M/1):(GD/∞/∞), akan dicari $W_q(t)$ untuk $t > 0$ dari model (M/M/c):(GD/∞/∞). Pelanggan yang menemukan n pelanggan dalam sistem , dengan $n \le c-1$, ia langsung masuk pelayanan tanpa harus menunggu. Pelanggan yang datang menemukan n pelanggan dalam sistem , dengan $n \ge c$, ia harus menunggu $n - (c-1)$ waktu pelayanan.

Sehingga

$$W_q(t) = P(T_q \leq t)$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{\infty}\{P(n-c+1 \text{ pelanggan selesai dilayani dalam waktu kurang dari atau sama dengan } t \mid \text{pelanggan baru menemukan } n \text{ pelanggan dalam sistem})P_n\}$$

Diketahui waktu pelayanan mempunyai distribusi eksponensial. Dari teorema 3.4, maka waktu pelayanan merupakan variabel saling bebas. Untuk n $\geq$c, sistem mempunyai laju pelayanan μc. Dari teorema 3.1, jumlahan n-c+1 waktu pelayanan yang saling bebas dan masing-masing waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dengan parameter cμ, akan menghasilkan distribusi gamma dengan parameter n-c+1 dan μc. Sehingga

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{P_o r^n}{c^{n-c} c!}\int_0^t \frac{\mu c(\mu c x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-\mu c x}\, dx,\ t \rangle 0$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^c}{(c-1)!}\int_0^t \mu e^{-\mu c x} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(\mu r x)^{n-c}}{(n-c)} dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^c}{(c-1)!}\int_0^t \mu\, e^{-\mu c x}\, e^{\mu r x} dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^c}{(c-1)!}\int_0^t \mu\, e^{-\mu\, x(c-r)} dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^c}{(c-1)!}\left\{\frac{-e^{-\mu x(c-r)}}{c-r}\right\}_o^t$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^c}{(c-1)!}\left\{\frac{1-e^{-\mu t(c-r)}}{c-r}\right\}$$

$$W_q(t) = W_q(0) + P_o \frac{(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!}\left\{\frac{1-e^{-t(\mu c-\lambda)}}{c-(\lambda/\mu)}\right\} \quad ,t \rangle 0 \qquad (3.101)$$

Dari persamaan (3.100) dan (3.101) maka

$$W_q(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{c(\lambda/\mu)^c}{c!(c-(\lambda/\mu))} P_o & (t=0) \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^c \left(1 - e^{-(\mu c - \lambda)\, t}\right)}{(c-1)!(c-(\lambda/\mu))} P_o + W_q(0) & t > 0 \end{cases} \tag{3.102}$$

Untuk c = 1, persamaan (3.102) adalah persamaan $W_q(t)$ dari model (M/M/1):(GD/∞/∞) lihat persamaan (3.53) dan (3.54).

Dengan cara yang serupa dengan model (M/M/1): (GD/∞/∞) akan dicari W(t) dari model (M/M/c): (GD/∞/∞). Jika pelanggan menemukan n pelanggan dalam sistem dengan n < c-1 maka ia langsung memperoleh pelayanan. Jika pelanggan menemukan n pelanggan dalam sistem maka ia harus menunggu n-(c+1) waktu pelayanan, termasuk dirinya sendiri. Karena untuk n ≥ c, laju pelayanan sama dengan μc, maka dengan teorema 3.1 jumlahan n-c+2 waktu pelayanan yang saling bebas dan masing-masing waktu pelayanan mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter μc akan menghasilkan distribusi gamma. Sehingga

$W(t) = P(T_s \leq t)$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{\infty} \{P\,(n - c + 2 \text{ pelanggan selesai dilayani dalam waktu kurang dari atau sama dengan } t \mid \text{pelanggan baru menemukan n pelanggan dalam sistem}) P_n\}$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{P_o r^n}{c^{n-c} c!} \int_0^t \frac{\mu c (\mu c x)^{n-c+1}}{(n-c+1)!} e^{-\mu c x}\, dx$$

$$= W_q(0) + P_o \sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^{c-1} c^{n-c+1}}{c^{n-c} c!} \int_0^t \frac{\mu c (\mu r x)^{n-c+1}}{(n-c+1)!} e^{-\mu c x}\, dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^{c-1}c^2}{c!}\int_0^t \mu e^{-\mu cx}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{(\mu rx)^{n-c+1}}{(n-c+1)!}dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^{c-1}c^2}{c!}\int_0^t \mu e^{-\mu cx}\left\{e^{\mu rx} - 1\right\}dx$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^{c-1}c^2}{c!}\left\{\int_0^t \mu e^{-\mu x(c-r)}dx - \int_0^t \mu e^{-\mu cx}dx\right\}$$

$$= W_q(0) + P_o \frac{r^{c-1}c^2}{c!}\left\{\left(\frac{-e^{-\mu x(c-r)}}{c-r}\right)_0^t - \left(\frac{-e^{-\mu cx}}{c}\right)_0^t\right\}$$

$$W(t) = W_q(0) + P_o \frac{r^{c-1}c^2}{c!}\left\{\frac{-e^{-\mu t(c-r)}}{c-r} + \frac{1}{c-r} + \frac{e^{-\mu ct}}{c} - \frac{1}{c}\right\} \quad (3.103)$$

3.5.4. Harga Harapan Waktu Tunggu untuk Sistem (M/M/c):(GD/∞/∞)

Andaikan $(\lambda/\mu c)<1$. Fungsi kepadatan dari waktu tunggu dalam antrian adalah

$$W_q(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{c(\lambda/\mu)^c}{c\,!(c-\lambda/\mu)} P_o & \text{untuk} \quad t = 0 \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^c \mu e^{-(\mu c-\lambda)t}}{(c-1)!} P_o & \text{untuk} \quad t > 0 \end{cases}$$

Dengan menggunakan definisi harga harapan variabel acak kontinu akan diperoleh

$$W_q(t) = E[T_q]$$

$$= 0\left\{1 - \frac{c(\lambda/\mu)^c}{c\,!(c-\lambda/\mu)} P_o\right\} + \int_0^{\infty} \frac{t(\lambda/\mu)^c \mu e^{-(\mu c-\lambda)t}}{(c-1)!} P_o\,dt$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o}{(c-1)!}\int_0^{\infty} te^{-(\mu c-\lambda)t}dt$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o}{(c-1)!}\left\{-\frac{t}{\mu c-\lambda}e^{-(\mu c-\lambda)t} - \frac{e^{-(\mu c-\lambda)t}}{(\mu c-\lambda)^2}\right\}_0^{\infty}$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o}{(c-1)!\,(\mu c-\lambda)^2} \quad (3.104)$$

W_q dapat juga diperoleh dari rumus Little yaitu $W_q = L_q / \lambda$. Karena dari persamaan (3.95) telah diperoleh L_q maka

$$W_q(t) = \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o \lambda}{(c-1)!\,(\mu c-\lambda)^2 \lambda}$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o}{(c-1)!\,(\mu c-\lambda)^2} \qquad (3.105)$$

Sehingga persamaan (3.105) akan sama dengan persamaan (3.104). Dengan menggunakan relasi $W=1/\mu + W_q$ akan diperoleh

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_o}{(c-1)!\,(\mu c-\lambda)^2} \qquad (3.106)$$

W dapat pula diperoleh dari rumus Little yaitu $W = L/\lambda$, dengan L diperoleh dari persamaan (3.98).

Contoh 3.4.

Sebuah klinik mata memberikan pelayanan gratis tes glukoma pada setiap hari minggu. Ada tiga orang dokter yang menangani. Satu tes glukoma memerlukan waktu rata-rata 30 menit dan kenyataan waktu pelayanan mempunyai distribusi eksponensial. Kedatangan pasien ke klinik membentuk distribusi Poisson dengan laju 5 / jam. Para pasien dilayani menurut disiplin FCFS. Ini merupakan model (M/M/3): (GD/∞/∞) dengan $\lambda = 5$ / jam, μ=1/30 menit = 2 jam. Sehingga r = 5/2 dan dari persamaan (3.88) diperoleh

$$P_o = \left\{1 + 5/2 + \frac{(5/2)^2}{2!} + \frac{3(5/2)^3}{3!(3-5/2)}\right\}^{-1} = 0{,}045$$

Perencana klinik dapat menentukan beberapa karakteristik sistem berikut :

Dari persamaan (3.95) ditentukan rata-rata pelanggan yang menunggu dalam antrian $L_q = \frac{0{,}045(5/2)^4(5)(2)}{2!\{3.2-5\}^2} = 3{,}516.$

Dari persamaan (3.106) diperoleh rata-rata waktu yang diperlukan seorang pasien di klinik $W = \frac{1}{2} + \frac{(5/2)^3 2}{2!\{3.2-5\}^2}(0{,}045) = 1{,}2$ jam.

Untuk menetukan rata-rata waktu menganggur seorang dokter dari sistem (M/M/3):(GD/∞/∞) dapat diperoleh dari kenyataan bahwa ketika sistem itu kosong ada tiga orang dokter yang menganggur, ketika ada satu pelanggan dalam klinik, ada dua orang dokter yang menganggur, ketika ada dua pelanggan dalam klinik, hanya ada satu dokter yang menganggur dan ketika ada 3 pelanggan atau lebih dalam klinik semua dokter akan sibuk melayani.

Andaikan dokter-dokter yang menganggur dipilih secara acak, maka

$$
\begin{aligned}
P\{\text{dokter menganggur}\} &= 1\,P_0 + 2/3\,P_1 + 1/3\,P_2 \\
&= 0{,}045 + (2/3)(5/2)0{,}045 + \frac{(1/3)(5/2)^2}{2\,!}(0{,}045) \\
&= 0{,}17
\end{aligned}
$$

Dari persamaan 3.100 diperoleh probabilitas seorang pasien akan memerlukan waktu tunggu kurang dari 20 menit dalam antrian

$$W_q(0) = 1 - \frac{3(5/2)^3}{3\,!\,(3-5/2)}(0{,}045) = 0{,}297$$

Karena t = 20 menit =1/3 jam, maka dengan mempergunakan persamaan (3.102) diperoleh

$$W_q(1/3) = \frac{(5/2)^3\left\{1 - e^{-(2.3-5(1/3))}\right\}}{2\,!\,(3-5/2)}0{,}045 + 0{,}297 = 0{,}99$$

Dari soal di atas diperoleh hasil bahwa probabilitas beberapa pelayan menganggur sama dengan $1-\lambda/c\mu$. Untuk soal diatas $1-\lambda/c\mu = 1-5/6 = 0{,}17$.

3.5.5. Probabilitas Pelayanan Menganggur untuk Sistem (M/M/c):(GD/∞/∞)

Akan dibuktikan bahwa probabilitas dari pelayan menganggur dalam sistem (M/M/c):(GD/∞/∞) selalu sama dengan $1-\lambda/c\mu$. Untuk menghitung waktu menganggur seorang pelayan dari sistem (M/M/c):(GD/∞/∞) dapat dihitung dari kenyataan bahwa

ketika ada nol pelanggan dalam sistem, c pelayan akan menganggur, atau

ketika ada satu pelanggan dalam sistem, c-1 pelayan akan menganggur, atau

ketika ada dua pelanggan dalam sistem, c-2 pelayan akan menganggur, atau

.... atau

ketika ada c-1 pelanggan dalam sistem, satu pelayan akan menganggur, atau

ketika ada c pelanggan atau lebih dalam sistem, c pelayan akan sibuk

Andaikan pemilihan pelayan yang menganggur secara acak. Maka

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pelayan menganggur}) &= \sum_{n=0}^{c-1}\left(\frac{c-n}{c}\right)P_n \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} P_n - \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{c-1} nP_n \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} P_n - \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{c-1} nP_n \\
&= P_o\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!} - \frac{r}{c}\sum_{n=1}^{c-1}\frac{r^{n-1}}{(n-1)!}P_o
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{P_o} - cr$

Dari persamaan (3.89) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!} = \frac{1}{P_o} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)}$$

Sehingga

$$\text{P(Pelayan menganggur)} = P_o\left\{\frac{1}{P_o} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)}\right\} - P_o\,\frac{r}{c}\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!} - \frac{r^{c-1}}{(c-1)!}\right\}$$

$$= P_o\left\{\frac{1}{P_o} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)}\right\} - P_o\,\frac{r}{c}\left\{\frac{1}{P_o} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)} - \frac{r^{c-1}}{(c-1)!}\right\}$$

$$= P_o\left\{\frac{1}{P_o} - \frac{c\,r^c}{c!(c-r)}\right\} - P_o\,\frac{r}{c}\left\{\frac{1}{P_o} - \frac{r^{\overset{c}{\cancel{x}}}c + c^2\,r^{c-1} - c\,r^c}{c!(c-r)}\right\}$$

$$= 1 - P_o\,\frac{r^{\overset{c}{\cancel{x}}}c}{c!(c-r)} - \frac{r}{c} + P_o\,\frac{r^{\overset{c}{\cancel{x}}}c}{c!(c-r)}$$

$$= 1 - \frac{r}{c} = 1 - \lambda/\mu c \qquad (3.107)$$

BAB IV

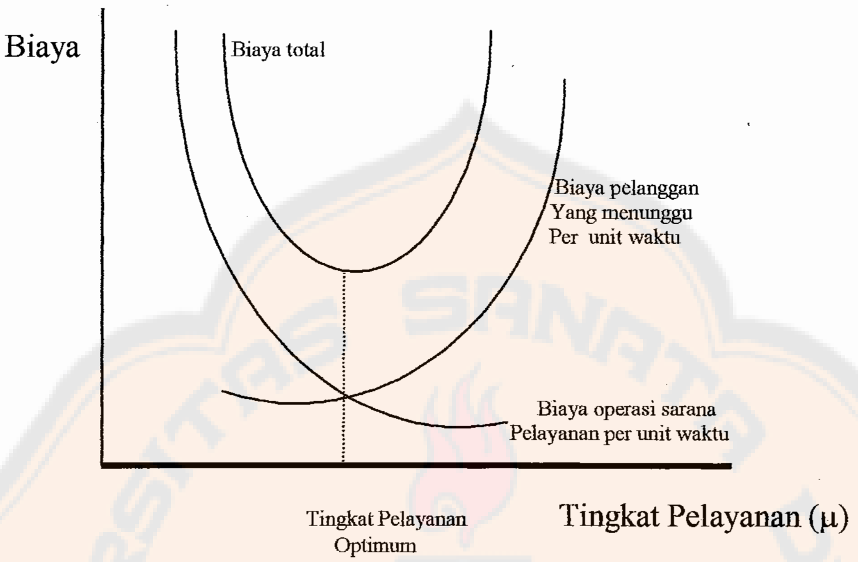
MODEL-MODEL

PENGAMBILAN KEPUTUSAN ANTRIAN

Secara umum, sebuah model biaya dalam antrian berusaha menyeimbangkan biaya menunggu dengan biaya kenaikan tingkat pelayanan yang saling bertentangan. Gambar 4.1 menunjukkan hasil ini. Sementara tingkat pelayanan meningkat, biaya waktu menunggu pelanggan menurun. Tingkat pelayanan optimum terjadi ketika jumlah kedua biaya ini minimum.

Biaya-biaya menunggu mungkin mencakup biaya menganggurnya para karyawan, kehilangan penjualan, kehilangan langganan, tingkat persediaan yang berlebihan, kehilangan kontrak, kemacetan sistem, atau kehilangan kepercayaan dalam managemen. Semuanya ini terjadi bila suatu sistem mempunyai sumber pelayanan yang tidak mencukupi.

Pada kenyataannya, biaya menunggu pelanggan akan sulit diestimasi, terutama bila yang diestimasi adalah manusia dengan berbagai kepentingan, berbeda dengan mesin atau robot. Disamping itu, "biaya" menunggu untuk individu yang sama dapat bervariasi bergantung pada situasi antrian yang kebetulan ada. Misalnya, seseorang dapat marah karena harus menunggu beberapa menit pada sebuah restoran cepat saji, tetapi kemungkinan rela menunggu berjam-jam untuk menyaksikan film terbaru.



Gambar 4.1 Model Biaya

Fakta menunjukkan bahwa tidak semua model antrian dapat dioptimumkan dengan menggunakan model-model biaya. Dalam kasus-kasus demikian harus dicari cara-cara lain untuk membuat keputusan-keputusan perancangan. Misalnya, dalam sebuah restoran cepat saji, akan dirancangan sarana pelayanan yang menyenangkan pelanggan dengan membatasi waktu menunngu rata-rata sampai 2 atau 3 menit per pelanggan. Jenis model keputusan ini didasari oleh penggunaan **tingkat aspirasi** yang harus dipenuhi oleh sarana pelayanan tersebut. Jadi waktu menunggu rata-rata 2 menit adalah tingkat aspirasi bagi para pelanggan. Walaupun penggunaan tingkat aspirasi untuk merancang sebuah sistem antrian tidaklah "tegas" seperti penggunaan model optimisasi biaya, prosedur ini bagaimanapun juga akan memenuhi kebutuhan ini.

4.1. Model Biaya

Model-model biaya pada dasarnya menyeimbangkan kedua jenis biaya yang saling bertentangan :

1. Biaya penawaran pelayanan (mewakili sudut pandang pelayan).
2. Biaya penundaan dalam penawaran pelayanan (mewakili sudut pandang pelanggan).

Pada bagian ini diterapkan model biaya untuk dua situasi :

1. Berkaitan dengan penentuan laju pelayanan optimum dalam sebuah sarana pelayan tunggal.
2. Menentukan jumlah optimum pelayan parallel dalam sebuah sarana pelayanan berganda.

4.1.1. Model Biaya dalam Penentuan Laju Pelayanan Optimum

Model ini berkaitan dengan situasi pelayan tunggal, dengan laju kedatangan (λ) yang diketahui. Ditentukan laju pelayanan optimum (μ) berdasarkan model biaya yang sesuai.

$EOC(\mu)$ = Expected Operating Cost, yaitu biaya yang diperkirakan untuk pengoperasian sarana tersebut per unit waktu dengan diketahui μ.

$EWC(\mu)$ = Expected Waiting Cost, yaitu biaya menunggu μ yang diperkirakan per unit waktu.

Akan ditentukan nilai μ yang meminimumkan jumlah kedua biaya ini.

Contoh 4.1.1

Sebuah perusahaan percetakan sedang mempertimbangkan untuk membeli sebuah alat mesin cetak berkecepatan tinggi untuk memenuhi peningkatan permintaan akan jasanya. Tabel berikut meringkaskan spesifikasi dari beberapa model yang berbeda :

Nomor Model Mesin Cetak	Biaya Operasi (per jam)	Kecepatan (lembar per menit)
1	$ 15	30
2	$ 20	36
3	$ 24	50
4	$ 27	66

Pekerjaan tiba di perusahaan dalam sebuah arus poisson dengan laju 4 pekerjaan per 24 jam dalam sehari. Ukuran setiap pekerjaan adalah acak, tetapi diperkirakan rata-rata sekitar 10.000 lembar per pekerjaan. Kontrak dengan pelanggan merinci biaya pinalti untuk keterlambatan dalam penyelesaian dengan nilai $ 80 per hari per pekerjaan. Dengan menggunakan ukuran pekerjaan rata-rata sebesar 10.000 lembar, laju pelayanan (μ) dari berbagai model mesin cetak yang berbeda adalah sebagai berikut :

Model	Laju Pelayanan, μ (pekerjaan per hari)
1	4,32
2	5,18
3	7,20
4	9,50

Model biaya yang sesuai untuk situasi tersebut mengenali bahwa μ terjadi dalam empat nilai diskrit yang bersesuaian dengan keempat model tersebut. Ini menunjukkan bahwa laju pelayanan optimum dapat diperoleh dengan membandingkan biaya total yang bersesuaian.

Penentuan biaya total yang berkaitan dengan setiap model diperoleh dengan cara sebagai berikut. Dengan menggunakan satu hari (24 jam) untuk mewakili unit waktu, biaya pengoperasian sarana tersebut per hari diketahui:

$$EOC_i = 24\ C_i\ ,\ \ i = 1,2,3,4$$

dengan C_i adalah biaya pengoperasian per jam dari model i.

Sebaliknya, biaya menunggu per hari ditentukan dengan mengingat biaya penalti sebesar \$80 per hari untuk pekerjaan-pekerjaan yang tertunda.

Didapat ekspresi unsur biaya ini sebagai : $EWC_i = 80\ L_i$

dengan L_i adalah jumlah pekerjaan rata-rata yang tidak terselesaikan dengan model i.

Fungsi biaya total menjadi : $ETC_i = 24\ C_i + 80\ L_i$

Ditentukan L_i, jumlah yang diperkirakan dalam sistem untuk model i, dari rumus $(M/M/1)$:$(GD/\infty/\infty)$. Hasilnya adalah sebagai berikut :

$$L_i = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Hasilnya dapat diringkaskan dalam tabel berikut :

Model i	λ_i	μ_i	L_i
1	4	4,32	12,5
2	4	5,18	3,39
3	4	7,21	1,25
4	4	9,52	0,73

Sehingga dengan menggunakan informasi ini dapat dihitung nilai-nilai EOC_i , EWC_I, ETC_i untuk i = 1,2,3,4, seperti diperlihatkan dalam tabel berikut :

Model i	EOC_i	EWC_i	ETC_i
1	\$ 360,00	\$ 1000,00	\$ 1360,00
2	\$ 480,00	\$ 271,20	\$ 751,20
3	**\$ 576,00**	**\$ 100,00**	**\$ 676,00**
4	\$ 648,00	\$ 58,40	\$ 706,40

Hasil perhitungan ini memperlihatkan bahwa model 3 memiliki biaya total perhari terendah.

4.1.2. Model Biaya dalam Penentuan Jumlah Pelayan Optimum

Model laju pelayanan optimum dapat diperluas untuk kasus penentuan jumlah pelayan parallel yang optimum dalam sebuah sarana pelayanan.

Misal diketahui c adalah jumlah pelayan parallel, masalah ini berkurang menjadi penentuan c yang meminimumkan :

$$ETC(c) = EOC(c) + EWC(c)$$

Nilai optimum c harus memenuhi kondisi yang diperlukan :

$$ETC(c-1) \geq ETC(c) \text{ dan } ETC(c+1) \geq ETC(c)$$

Sebagai aplikasi dari kondisi ini, pertimbangkan fungsi biaya berikut:

$$EOC(c) = C_1 c$$

$$EWC(c) = C_2 L(c)$$

dengan C_1 = biaya per pelayan tambahan per unit waktu

C_2 = biaya per unit waktu menunggu per pelanggan

$L(c)$ = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem yang diketahui c.

Dengan menerapkan kondisi yang diperlukan ini, didapat :

$$L(c) - L(c+1) \leq (C_1 / C_2) \leq L(c-1) - L(c)$$

Nilai C_1 / C_2 menunjukkan dimana pencarian untuk c optimum harus dimulai.

Contoh 4.1.2

Dalam sarana perlengkapan pabrik, permintaan akan penggantian suku cadang terjadi sesuai distribusi poisson dengan mean 17,5 permintaan per jam. Setiap petugas dalam sarana tersebut dapat menangani rata-rata 10 permintaan per jam. Biaya penambahan seorang petugas baru diperkirakan \$6 per jam. Biaya produksi yang terhilang per waktu menunggu mesin per jam diperkirakan \$30 per jam. ditentukan banyak petugas yang harus dipekerjakan dalam sarana pelayanan tersebut.

Penentuan c optimum dicapai dengan melakukan perhitungan seperti diperlihatkan di bawah ini :

Dengan menggunakan model (M / M / c) : (GD / ∞ / ∞), dihitung $L = L_q + \rho$, bila diketahui $\lambda = 17{,}5$; $\mu = 10$; $\rho = 1{,}75$

($L(1) = \infty$, karena $\lambda > \mu$) maka hasilnya diringkaskan dalam tabel berikut :

c	L(c)	L(c-1) - L(c)
1	∞	-
2	7,4695	∞
3	2,2170	5,2525
4	1,8421	0,3749
5	1,7696	0,0725
6	1,7540	0,0156
7	1,7508	0,0032

C_1 = \$6 dan C_2 = \$ 30 maka C_1 / C_2 didapatkan hasil sebesar 0,2

Karena $C_1 / C_2 = 0{,}2$ maka diperoleh:

$$L(4) - L(5) \leq (C_1 / C_2) \leq L(3) - L(4)$$

$$\Leftrightarrow \; 0{,}0725 \leq 0{,}2 \leq 0{,}3749$$

Akibatnya c optimum adalah 4 petugas.

4.2. Model Tingkat Aspirasi

Model tingkat aspirasi menyadari kesulitan dalam mengestimasi parameter biaya, sehingga model ini didasari oleh analisis yang lebih sederhana. Model ini secara langsung memanfaatkan karakteristik yang terdapat dalam sistem yang bersangkutan untuk memutuskan nilai-nilai 'optimum' dari parameter perancangan. Optimum disini diartikan sebagai memenuhi tingkat aspirasi tertentu yang ditentukan oleh pengambil keputusan.

Tingkat aspirasi didefinisikan sebagai batas atas dari nilai-nilai ukuran yang saling bertentangan, yang ingin diseimbangkan oleh pengambil keputusan.

Dalam model pelayan berganda, dimana akan ditentukan jumlah pelayan c yang optimum, dua ukuran yang bertentangan adalah :

1. Waktu menunggu yang diharapkan dalam sistem (W)
2. Waktu menganggur pelayan (X)

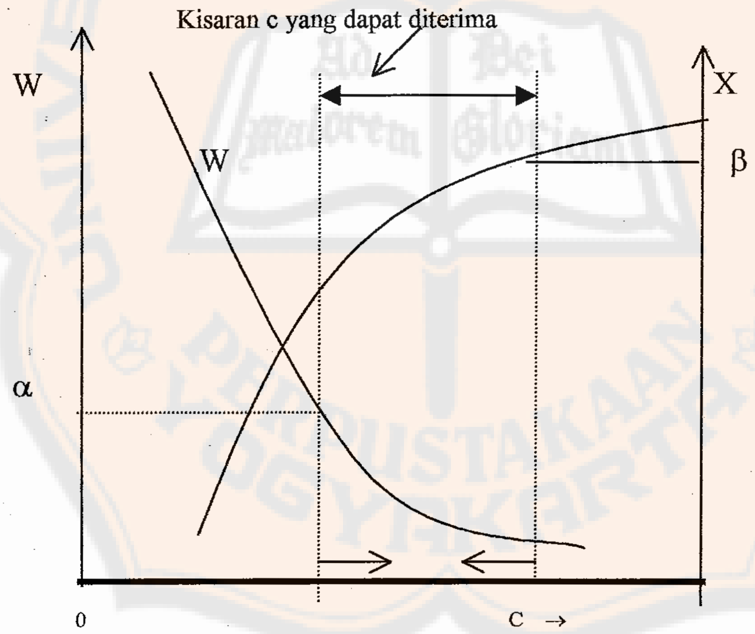
Kedua ukuran ini mencerminkan aspirasi pelanggan dan pelayan.

Misal tingkat aspirasi (batas atas) untuk W adalah α, dan X adalah β.

Maka metode tingkat aspirasi dapat diekspresikan secara matematis sebagai berikut. Tentukan jumlah pelayan sedemikian rupa sehingga $W \leq \alpha$, dan $X \leq \beta$, ekspresi untuk W diketahui dari analisis (M / M / c) : (GD / ∞ / ∞) dan ekspresi untuk X diketahui :

$$X = \frac{100}{c}\sum_{n=0}^{c}(c-n)\,P_n = 100(1-\rho/c)$$

Dengan menempatkan α dan β seperti diperlihatkan dalam gambar 4.2, dapat segera ditentukan kisaran c yang dapat diterima dan memenuhi kedua batasan yang bersangkutan. Secara alamiah, jika kedua kondisi tidak dipenuhi secara simultan, salah satu atau kedua batasan perlu dilonggarkan sebelum keputusan dibuat.



Gambar 4.2. Optimalisasi Dengan Metode Aspiration Level

Contoh 4.2.1

Dalam contoh 4.1.1. Anggap akan ditentukan juga petugas sedemikian hingga waktu menunggu yang diperkirakan sampai sebuah perkakas diterima tetap dibawah 20 menit. Secara bersamaan diharuskan pula bahwa prosentase waktu menganggur para petugas tersebut tidak dapat melebihi 15%.

Akan dihitung nilai W dan X untuk berbagai nilai c, dan hasilnya diringkaskan dalam tabel berikut:

c	1	2	3	4	5	6	7	8
W	∞	25,6	7,6	6,3	6,1	6,0	6,0	6,0
X (%)	0	12,5	41,7	56,3	65,0	75,0	78,0	78,0

Bila c meningkat, W menurun dan X meningkat.

Agar W tetap dibawah 20 menit, kita harus memiliki setidaknya 3 petugas, sebaliknya agar para petugas tetap sibuk selama 85% dari waktunya, harus dibatasi jumlah petugas sampai maksimum 2 orang. Jadi, kedua tingkat aspirasi ini tidak dapat dipenuhi secara simultan, dan salah satu dari kedua kondisi tersebut harus dilonggarkan agar diperoleh pemecahan yang layak. Dilihat bahwa penurunan yang berarti dalam W terjadi bila c meningkat dari 2 ke 3. Kenaikan selanjutnya memiliki pengaruh kecil terhadap nilai W. Dalam bentuk X, kenaikan c dari 2 ke 3 meningkatkan prosentase waktu menganggur para petugas hampir 3 kali lipat. Sehingga pilihan antara c=2 dan c=3 harus dibuat dengan mengingat apakah 'bernilai' untuk mengurangi waktu menganggur mesin dari 25,6 menit menjadi 7,6 menit sekalipun waktu menganggur para petugas meningkat dari 12,5 % ke 41,75%.

Untuk membatasi dalam mengambil keputusan spesifik dalam metode tingkat aspirasi, dapat dihitung kisaran parameter biaya C_2 yang dihasilkan dari pemilihan c untuk tingkat aspirasi tertentu. Dipilih C_2 secara spesifik, dan bukan C_1, karena biasanya lebih sulit untuk mengestimasi biaya menunggu dalam kebanyakan model-model antrian. Sehingga disini diasumsikan bahwa C_1, biaya tambahan yang berkaitan dengan memperoleh satu pelayan baru, dapat diestimasi tanpa banyak kesulitan.

Dari model biaya pada bagian 4.1.2, c optimum harus memenuhi:

$$L(c) - L(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L(c-1) - L(c)$$

Jadi berdasar kondisi optimum C_2 berada dalam kisaran

$$\frac{C_1}{L(c-1) - L(c)} \leq C_2 \leq \frac{C_1}{L(c) - L(c+1)}$$

Penerapan dari model ini diilustrasikan dalam contoh 4.2.2

Contoh 4.2.2

Dalam contoh 4.2.1. dapat diestimasi kisaran C_2 untuk c=2 dan c=3. Dengan menggunakan C_1 = \$6 seperti diberikan dalam contoh 4.2.1, diperoleh hasil-hasil berikut.(lihat tabel dalam contoh 4.1.2 untuk nilai L).

Untuk c =2,

$$\frac{6}{\infty} \leq C_1 \leq \frac{6}{5,25} \text{ yang memberikan } 0 \leq C_1 \leq \$1,14$$

Untuk c =3,

$$\frac{6}{5{,}25} \leq C_2 \leq \frac{6}{0{,}375} \text{ atau } \$1{,}14 \leq C_2 \leq \$16$$

kemungkinan kisaran C_2 dengan diketahui c = 2 dan c = 3 dapat membantu membuat pilihan yang lebih selektif diantara menggunakan 2 atau 3 petugas. Untuk c = 2, kisaran C_2 menunjukkan bahwa nilai sebuah mesin yang menunggu sebuah perkakas tidak dapat melebihi $ 1,14 dalam bentuk produksi yang terhilang. Estimasi nilai mesin ini tampaknya sangat rendah. Alternatif lain, untuk c=3, batas atas sebesar $16 terhadap nilai C_2 tampaknya lebih wajar, sehingga menggunakan 3 petugas adalah lebih logis daripada 2 petugas.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan berikut :

1. Laju Pelayanan (μ) optimum untuk model antrian (M/M/1):(GD/∞/∞) dengan model biaya, ditentukan dengan meminimumkan biaya operasi dan biaya tunggu terhadap laju pelayanan, yaitu

$$ETC(\mu) = EOC(\mu)+EWC(\mu)$$

2. Jumlah pelayan (c) optimum untuk model antrian (M/M/c):(GD/∞/∞) dengan model biaya, ditentukan dengan meminimumkan biaya operasi dan biaya tunggu terhadap jumlah pelayan, yaitu

$$ETC(c) = EOC(c)+EWC(c)$$

3. Jumlah Pelayan Optimum untuk model tingkat aspirasi antara waktu menunggu pelanggan yang diharapkan dalam sistem (W) yang ditentukan dari rumus rumus untuk model antrian (*M/M/c*):(*GD/∞/∞*):

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c \mu P_0}{(c-1)!(\mu c-\lambda)^2}$$

Dan waktu menganggur pelayan (X) yang ditentukan dengan rumus:

$$X = \frac{100}{c}\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n = 100(1-\rho/c)$$

5.2. Saran

Pada bagian ini dikemukakan beberapa saran guna pengembangan metode pengambilan keputusan menggunakan model tingkat aspirasi, yakni :

1. Model-model antrian dalam skripsi ini mencakup model pelayan tunggal dengan kapasitas sistem terbatas dan tak terbatas, model pelayan berganda dengan kapasitas sistem tak terbatas. Model-model seperti model swalayan, perbaikan mesin, maupun model nonpoisson memungkinkan untuk dipelajari lebih lanjut.
2. Laju pelayanan optimum yang dibahas dalam skripsi ini terbatas pada situasi pelayan tunggal, laju kedatangan (λ) diketahui dengan model antrian $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$. Hasil-hasil pembahasan dari model tersebut diharapkan dapat dipergunakan untuk pengembangan model lain, seperti penentuan laju pelayanan optimum pada model pelayan tunggal dengan kapasitas sistem terbatas $(M/M/1):(GD/N/\infty)$ maupun pada model pelayan parallel dengan kapasitas sistem tak terbatas $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$.

DAFTAR PUSTAKA

Dimyati, T. T – Dimyati, Ahmad. 1999. *Operations Research Model-Model Pengambilan Keputusan* . Cetakan keempat. Bandung : PT. Sinar Baru Algensindo.

Hamdy A Taha. 1997. *Riset Operasi Suatu Pengantar*. Jilid 2, edisi kelima. Jakarta : Binarupa Aksara.

William W. Hines – Douglas C. Montgomery, 1990. *Probabilita dan Statistik Dalam Ilmu Rekasaya dan Majemen*, edisi kedua, Universitas Indonesia: UI - PRESS

Walpolle, R. E. 1993. *Pengantar Statistika*. Jakarta : PT. Gramedia Pustaka Utama.