PEMROGRAMAN KUADRAT DAN PENERAPANNYA DALAM INVESTASI SAHAM

S k r i p s i

Diajukan untuk memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Hendra Setiawan

NIM 961414016

NIRM 960051120501120016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

HALAMAN PERSETUJUAN

S k r i p s i

PEMROGRAMAN KUADRAT DAN

PENERAPANNYA DALAM INVESTASI SAHAM

Oleh:

Hendra Setiawan

NIM : 961414016

NIRM : 960051120501120016

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

M. Andy Rudhito, S. Pd, M. Si tanggal 10 Februari 2003

Pembimbing II

Drs. Thomas Sugiarto, M.T tanggal 10 Februari 2003

SKRIPSI

PEMROGRAMAN KUADRAT DAN

PENERAPANNYA DALAM INVESTASI SAHAM

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Hendra Setiawan

NIM : 961414016

NIRM : 960051120501120016

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 20 Januari 2003 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	**Drs. A. Atmadi, M. Si**	....
Sekretaris	:	**Drs. Th. Sugiarto, M. T**	....
Anggota	:	**M. Andy Rudhito, S. Pd, M. Si**	....
Anggota	:	**Dr. Y. Marpaung**	....
Anggota	:	**Drs. Th. Sugiarto, M. T**	....

Yogyakarta, 20 Januari 2003

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

(Dr. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Untuk Papa dan Mama

yang selalu mendahulukan

keperluan anak-anaknya

Untuk Kakak dan adik-adikku,

Funy, Tina dan Ika

atas cinta kasihnya

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 10 Februari 2003

Penulis

Hendra Setiawan

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan pada Program studi Pendidikan pada Program studi Pendidikan Matematika di Univesitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Namun demikian perlu disadari bersama tanpa bantuan dari semua pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, pengarahan, petunjuk-petunjuk, kerjasama, dukungan, kritik maupun saran.

Pada kesempatan ini pula, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga kepada:

1. M. Andy Rudhito, S. Pd, M. Si selaku dosen pembimbing I yang dengan kesabarannya telah membimbing dan memberikan saran-saran kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M. T selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan skripsi ini dan selaku Ketua Program studi pendidikan Matematika yang telah memberikan dukungan atas penulisan skripsi ini.

3. Drs. St. Susento, M. Si yang telah memberikan ijin dan dukungan pada penulisan skripsi ini.
4. Wanty Widjaya, S. Pd, M. Ed selaku dosen pembing akademik yang telah memberikan dukungan dan dorongan bagi penulis untuk meyelesaikan studi.
5. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama proses belajar di Universitas Sanata Dharma.
6. Staf Sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma, Bp Sunardjo dan Bp Sugeng, yang telah dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
7. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan kerjasamanya selama ini.
8. Orang tuaku tercinta, yang selalu memberikan kesempatan dan kepercayaan kepada penulis.
9. Kakak dan adik-adikku tercinta, Funy, Tina dan Ika atas cinta kasih dan segala dukungan yang diberikan
10. Rekan-rekan mahasiswa yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta khususnya rekan-rekan mahasiswa Program studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Angkatan 96.
11. Sahabat- sahabatku: Rina Widiastuti, Bambang, Agus Salim, Sri Kartini, Retno, Endang dan Erika atas segala dukungan dan doa.
12. Semua pihak yang dalam kesempatan ini belum dapat penulis sebutkan.

Semoga segala bantuan, dorongan, perhatian, kasih serta dukungan yang telah penulis terima akan mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan YME.

Akhirnya, semua kebenaran yang terkandung dalam skripsi ini semata-mata hanyalah berkat kemurahan-Nya dalam menuntun penulis menuju kebenaran, sedangkan segala kekeliruan yang terdapat di sini sepenuhnya bersumber dan menjadi tanggung jawab penulis.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Pada skripsi ini akan dibahas mengenai Pemrograman Kuadrat, cara penyelesaian dan penerapannya dalam investasi saham. Penerapan Pemrograman Kuadrat dalam investasi saham adalah bagaimana menentukan proporsi investasi saham dalam portofolio sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko yang minimum.

Persoalan penentuan proporsi investasi saham dalam portofolio dapat dimodelkan dengan Pemrograman Kuadrat sebagai berikut:

Minimumkan, $\sigma_p{}^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} x_k\, x_l\, \sigma_{kl}$

terhadap, $\sum_{i=1}^{M} x_i = 1$

$E(R_p) \geq L$

$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M$

dengan σ_{kl} kovarian tingkat keuntungan saham k dan l, x_i proporsi dana investor yang akan diinvestasikan pada saham ke i, $E(R_p)$ tingkat keuntungan pengharapan portofolio dan L tingkat keuntungan tertentu yang diharapkan.
Penyelesaian optimal Pemrograman Kuadrat ini diperoleh dengan menggunakan Metode Frank-Wolfe.

ABSTRACT

In this tesis will be discussed about Quadratic Programing, how to solve it and applications in stock investment. Application Quadratic Programing in stocks investment is how to determine proportion of stock investment in the portfolio therefore the certain return level with minimum risk will be obtained.

The determination problem of stock investment in the portfolio could be stated by this following Quadratic Programing:

Minimize, $\sigma_p{}^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} x_k\, x_l\, \sigma_{kl}$

subject to, $\sum_{i=1}^{M} x_i = 1$

$E(R_p) \geq L$

$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M$

where σ_{kl} is the covariance between the returns on stocks k and l, x_i is the proportion the investor's funds will invested in the ith stock, $E(R_p)$ is the portfolio expected return level and L is the certain expected return level.

Optimal solution of this Quadratic Programing can be obtained by using the Frank-Wolfe Method.

BAB I

PENDAHULUAN

Dewasa ini, dengan semakin pesatnya perkembangan dunia Ilmu Pengetahuan dan Teknologi (IPTEK) telah banyak ditemukan kemajuan-kemajuan di segala bidang yang berhasil dicapai oleh para ilmuwan di dalam mengaplikasikan kemampuan yang dimilikinya. Baik dalam mengembangkan ilmu pengetahuan itu sendiri, maupun diterapkan pada satu bidang tertentu. Hal ini membuktikan bahwa penggunaan suatu ilmu tidak hanya dalam satu bidang saja, melainkan telah dapat diterapkan dalam bidang-bidang lainnya.

Matematika merupakan salah satu cabang dari ilmu pengetahuan yang dihasilkan oleh buah pikiran manusia yang tumbuh berkembang seiring dengan dengan pertumbuhan kebudayaan manusia. Di samping dengan segala kekhususannya, matematika juga merupakan suatu alat pendekatan yang logis dan dapat diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu. Pengembangannya telah banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti: ekonomi, bisnis, industri, teknik, militer, dan lain-lain.

Salah satu konsep matematika yang banyak digunakan dalam proses pengambilan keputusan teknologi dan manajerial yang sangat penting adalah Konsep Optimasi. Konsep Optimasi merupakan pengembangan dari ilmu matematika yang diterapkan pada penyelesaian persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas untuk memperoleh hasil yang optimal sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

1. 1 Latar Belakang Masalah

Pada buku teks untuk Mata Kuliah Manajemen Investasi dan Analisis Portofolio, salah satu Mata Kuliah Program Studi S1 Manajemen, dibahas cara menentukan proporsi dana investasi saham dalam portofolio sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko minimum merujuk pada penggunaan Pemrograman Kuadrat. Akan tetapi dalam buku teks tersebut dan buku-buku teks lain untuk Mata Kuliah tersebut penulis belum menjumpai bahasan tentang Pemrograman Kuadrat dan bagaimana cara penyelesaian pesoalan tersebut.

Hal di atas menjadi daya tarik tersendiri bagi penulis karena tidak semua metode penyelesaian Pemrograman Kuadrat dapat diterapkan pada persoalan investasi saham. Dengan pengetahuan yang dimiliki penulis mencoba membahas mengenai Pemrograman Kuadrat dan cara penyelesaiannya dengan metode Frank dan Wolfe berikut penerapannya dalam investasi saham. Sehingga dengan penulisan ini akan diperlihatkan bagaimana matematika sebagai alat bantu penyelesaian untuk masalah tersebut, dengan demikian ditunjukkan salah satu penerapan bidang ilmu matematika terhadap bidang ilmu ekonomi manajemen.

1. 2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang masalah di atas dapat dirumuskan permasalahan-permasalahan berikut:

1. Bagaimana cara memperoleh penyelesaian Pemrograman Kuadrat dengan metode Frank-Wolfe.

2. Bagaimana penerapan Pemrograman Kuadrat dalam menentukan proporsi dana investasi saham sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko minimum.

1. 3 Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk:

1. Membahas Pemrograman Kuadrat dan penyelesaiannya dengan Metode Frank-Wolfe.
2. Membahas penerapan Pemrograman Kuadrat dalam menentukan proporsi dana investasi saham sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko minimum.

1. 4 Ruang Lingkup Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini dilakukan pembatasan masalah yang dibahas, sebagai berikut:

1. Persoalan Pemrograman Kuadrat yang dibahas adalah Persoalan Pemrograman Kuadrat dengan ruang solusi tertutup.
2. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan Pemrograman Kuadrat adalah Metode Frank-Wolfe.
3. Masalah investasi saham yang dibahas adalah bagaimana menentukan proporsi dana investasi saham dalam portfolio sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko minimum.

4. Penerapan Pemrograman Kuadrat dalam menentukan proporsi dana investasi saham sehingga diperoleh tingkat pengembalian tertentu dengan resiko minimum.

1. 5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi pustaka atau studi literature, yaitu suatu bentuk penelitian di mana dalam menganalisis obyek permasalahannya hanya berdasarkan pada beberapa literatur yang berkaitan dengan permasalahan tersebut.

1. 6 Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penulisan ini, diberikan uraian sistematika penulisan, sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini diterangkan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, maksud dan tujuan penulisan, pembatasan masalah, metode penulisan sistematika penulisan dan materi prasyarat.

BAB II LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas beberapa landasan teori yang dipakai dalam pembahasan bab berikutnya antara lain: bentuk kuadrat, konveksitas (kecembungan), fungsi konveks, vektor gradien dan titik pelana (*saddle point*), metoda simplex, dualitas, modifikasi simplex dan probabilitas

BAB III PEMROGRAMAN KUADRAT

Bab ini berisi uraian dan pembahasan mengenai Pemrograman Kuadrat dan penyelesaiannya yang diperoleh dengan mengembangkan syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn Tucker. Lebih lanjut penyelesaian kondisi Kuhn Tucker tersebut diselesaikan dengan Metode Frank-Wolfe.

BAB IV PENERAPAN PEMROGRAMAN KUADRAT DALAM INVESTASI SAHAM

Pada bab ini akan dibahas pengertian-pengertian tentang investasi saham dan analisis portofolio investasi saham di pasar modal. Selanjutnya dibahas pemodelan persoalan analisis portofolio investasi saham dengan Pemrograman Kuadrat. Kemudian diberikan contoh kasus pemodelan persoalan analisis portofolio investasi saham beserta penyelesaiannya.

BAB V PENUTUP

Bab ini memberikan kesimpulan berdasarkan pembahasan yang diuraikan pada bab-bab sebelumnya dan beberapa saran yang berguna bagi pengembangan penulisan lebih lanjut.

1. 7 Materi Prasyarat

Materi prasyarat untuk pembahasan pada skripsi ini adalah Aljabar Matriks, Aljabar Linier Elementer, Kalkulus dan Statistika (Teori Probabilitas).

BAB II

LANDASAN TEORI

Persoalan Pemrograman Kuadrat adalah bagian dari teknik pemrograman matematika yang secara umum dipelajari sebagai bagian dari Riset Operasi. Riset Operasi itu sendiri merupakan salah satu cabang matematika yang membahas mengenai penerapan metode-metode, teknik-teknik dan alat-alat terhadap masalah-masalah yang menyangkut operasi-operasi dari sistem-sistem sedemikian rupa sehingga memberikan hasil yang optimal dalam beberapa masalah tertentu.

Salah satu penerapan Pemrograman Kuadrat yaitu untuk menyeleksi investasi di pasar modal. Sebelum melangkah pada pembahasan mengenai Pemrograman Kuadrat akan diuraikan dahulu mengenai konsep dasar matematika yang akan digunakan sebagai penunjang untuk memahami pokok permasalahan tersebut.

2. 1 Bentuk Kuadrat

Bentuk kuadrat $f\,(\mathbf{X})$ dalam n variabel dengan derajat dua dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{T}\mathbf{C}\ \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{i}\, x_{j}$$

.....(2. 1)

atau,

$$f(\mathbf{X}) = c_{11}\, x_1^{\,2} + c_{12}\, x_1\, x_2 + \ldots + c_{1n}\, x_1\, x_n + c_{21}\, x_2\, x_1 + c_{22}\, x_2^{\,2} + \ldots + c_{2n}\, x_2\, x_n + \ldots + c_{n1}\, x_n\, x_1 + c_{n2}\, x_n\, x_2 + \ldots + c_{nn}\, x_n^{\,2}$$

di mana, $\mathbf{X} = [\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$ adalah vektor kolom dan $\mathbf{C} = (c_{ij})$ adalah matriks bujursangkar (n x n) untuk setiap i = 1, 2, ..., n dan j = 1, 2, ..., n.

Untuk mempermudah perhitungan, selanjutnya dipilih matriks **C** yang simetris, di mana $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$. Jika matriks **C** tidak simetris, kita selalu dapat membawanya ke bentuk simetris tanpa merubah nilai f (**X**) tersebut, dengan mengambil $\mathbf{C}o = \mathbf{C}o^T = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)$.

Contoh:

Diberikan $f(\mathbf{X}) = x_1^{\,2} - 4\, x_1\, x_2 + x_2^{\,2}$

Bentuk di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Amati bahwa

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriks simetris **C** disebut definit positif jika bentuk kuadrat $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ definit positif. Selanjutnya matriks **C** definit positif ditulis sebagai $\mathbf{C} > \mathbf{0}$. Dengan cara yang sama, kita mendefinisikan matriks **C** semidefinit positif ($\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$), definit negatif ($\mathbf{C} < \mathbf{0}$), dan semidefinit negatif ($\mathbf{C} \leq \mathbf{0}$), tergantung pada bentuk kuadratnya. Matriks **C** disebut indefinite jika bentuk kuadrat $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ tidak semidefinit positif atau semidefinit negatif. Matriks **C** disebut definit positif (semidefinit) jika dan hanya jika matriks **-C** definit negatif (semidefinit).

Metode alternatif untuk mengecek sifat definit dari bentuk kuadrat adalah dengan mengecek nilai eigen matriks **C**, berdasarkan teorema berikut:

Teorema 2. 1. 1:

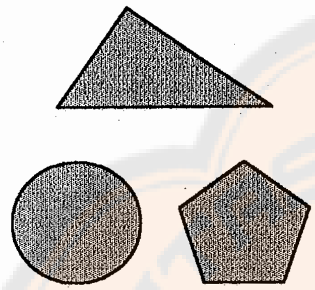
Matriks simetris C disebut definit positif (atau semidefinit positif) jika dan hanya jika semua nilai eigen matriks C adalah positif (atau non negatif).

Pembuktian teorema ini dapat dilihat pada Chong, E P and Stani Slaw Zak(1996: 33).

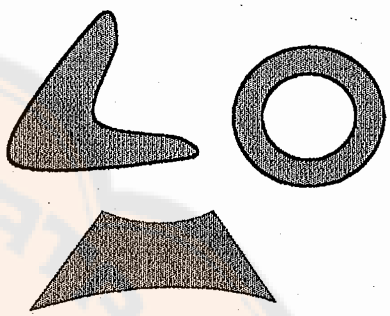
2. 2. Himpunan Konveks

Misalkan S adalah suatu himpunan titik-titik dari suatu bidang (2 dimensi) atau ruang (3 dimensi). Jika untuk setiap dua titik sebarang pada S, dibuat ruas garis yang menghubungkan dua titik tersebut dan setiap titik-titik pada ruas garis tersebut seluruhnya terletak pada S, maka himpunan S disebut himpunan konveks (cembung).

Perhatikan contoh-contoh himpunan konveks pada Gambar 2. 1. Semua himpunan pada Gambar 2. 1. a merupakan himpunan konveks dan semua himpunan pada Gambar 2. 1. b adalah himpunan non-konveks.



a. Himpunan Konveks



b. Himpunan Non-Konveks

Gambar 2. 1 Himpunan Konveks dan Non-Konveks

Dalam ruang berdimensi 4 atau lebih, interpretasi geometris menjadi sulit karena itu diperlukan definisi himpunan konveks secara aljabar. Untuk tujuan ini diperlukan pengertian akan konsep *vektor kombinasi konveks*, yang merupakan suatu jenis khusus dari *kombinasi linear*. Suatu *kombinasi linear* dari dua vektor $\mathbf{X_1}$ dan $\mathbf{X_2}$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$k_1 \ \mathbf{X_1} + k_2 \ \mathbf{X_2}$$

di mana k_1 dan k_2 merupakan skalar. Jika kedua nilai skalar terletak pada interval tertutup [0, 1] dan jumlahnya 1, *kombinasi linear* dikatakan sebagai *kombinasi vektor* dan dirumuskan sebagai berikut :

$$\lambda\ \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)\ \mathbf{X}_2 \text{ di mana } (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Dengan demikian definisi geometris di atas dapat juga dinyatakan dalam definisi aljabar sebagai berikut:

Definisi 2. 2. 1:

Suatu himpunan S adalah konveks jika dan hanya jika, untuk dua titik $\mathbf{X}_1 \in$ S dan $\mathbf{X}_2 \in$ S, dan untuk setiap skalar $\lambda \in [0, 1]$, adalah benar bahwa

$[\,w = \lambda\, \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)\, \mathbf{X}_2\,] \in S$.

Definisi ini dapat diterapkan tanpa memperhatikan dimensi ruang di mana terdapat vektor $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$.

Definisi 2. 2. 2 :

Suatu *Hyperplane* H di $\mathbf{R}^n$ didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang dinyatakan oleh $\{\, \mathbf{X} : \mathbf{P}^T\, \mathbf{X} = \alpha \,\}$, dimana **P** adalah suatu vektor yang tidak nol di R^n dan α adalah suatu skalar. Vektor **P** disebut vektor normal dari *hyperplane*.

2. 3 Fungsi Konveks

Definisi 2. 3. 1 :

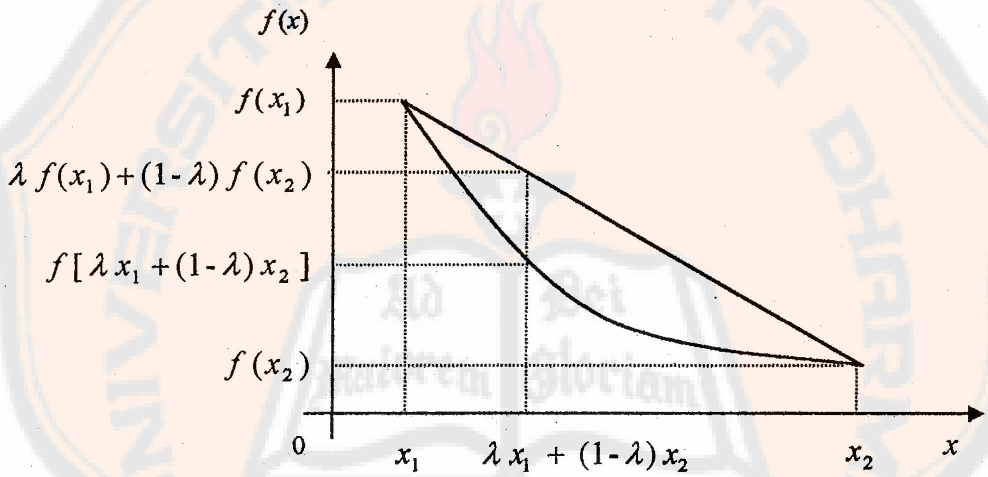
Misalkan, fungsi $f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ didefinisikan sebagai suatu himpunan titik-titik yang berada dalam suatu himpunan konveks $S \subset \mathbf{R}^n$. Maka fungsi $f(\mathbf{X})$ disebut sebagai fungsi konveks (*convex function*), jika :

$$f[\,\lambda\, \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)\, \mathbf{X}_2\,] \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2) \qquad \ldots..(2.\ 1)$$

untuk setiap $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in$ S dan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Sebaliknya, suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan sebagai fungsi konkaf (*concave function*), jika $-f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

Catatan : Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konveks mutlak atau fungsi konkaf mutlak, jika hubungan pertidaksamaan tersebut mempunyai tanda "<" atau ">" untuk setiap $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in$ S dan $\lambda \in (0, 1)$.



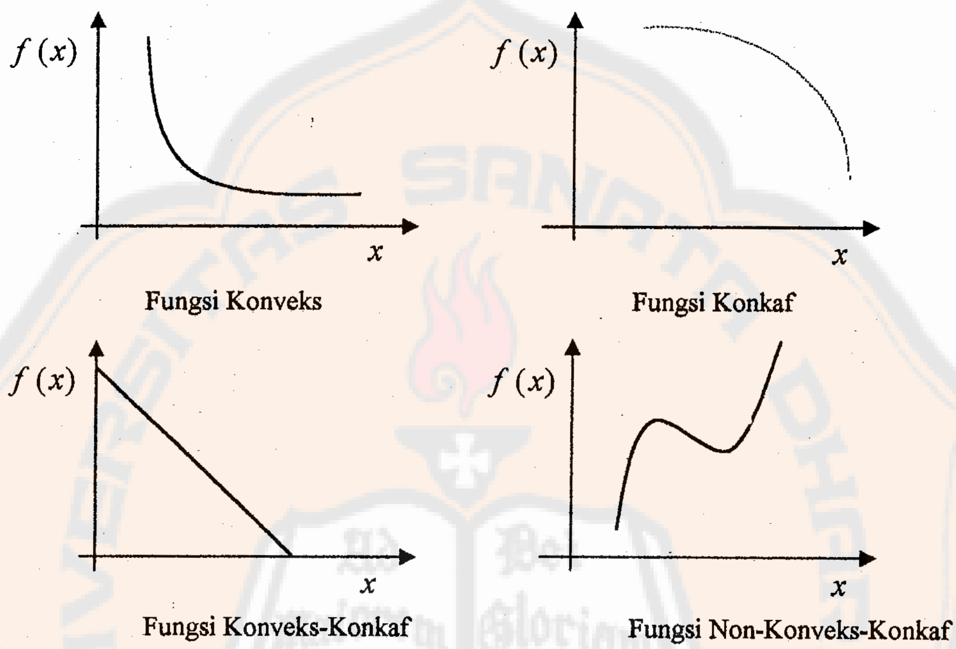
Gambar 2. 2. Fungsi Konveks

Dalam praktek, untuk mengetahui apakah suatu fungsi adalah konveks atau konkaf maka digunakan pengujian sebagai berikut :

1. $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konveks, jika $f(\mathbf{X})$ adalah semidefinit positif.
2. $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konkaf, jika $f(\mathbf{X})$ adalah semidefinit negatif.

Secara geometris dapat diartikan bahwa, suatu fungsi dikatakan fungsi konveks jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada fungsi, seluruhnya akan terletak di atas fungsi tersebut. Suatu fungsi dikatakan fungsi konkaf jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada fungsi, seluruhnya akan terletak di bawah fungsi tersebut.

Perhatikan gambar-gambar di bawah ini :



Gambar 2. 3 Fungsi Konveks dan Fungsi Konkaf

Teorema 2. 3. 2 :

Fungsi bentuk kuadrat $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C} \ \mathbf{X}$ *yang semidefinit positif adalah fungsi konveks, untuk semua* $\mathbf{X}$ *di* $\mathbf{R}^n$.

Bukti :

Diberikan 2 buah titik $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ di $\mathbf{R}^n$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$ akan ditunjukkan

$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C} \ \mathbf{X}$, maka berlaku :

$$f[\,\lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2\,] \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

atau,

$$f[\,\lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2\,] - \lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \le 0 \qquad \text{.....(2. 2)}$$

Karena $\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_2$, maka ruas kiri dari persamaan (2. 2) dapat ditulis:

$[\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2]^T\mathbf{C}\,[\lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2] - \lambda\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_1 - (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_2$

$= \lambda^2\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)^2\,\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 + 2\lambda(1-\lambda)\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_2 - \lambda\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_1 -$

$(1-\lambda)\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$

$= (\lambda^2 - \lambda)\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,[(1-\lambda)\,\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2\,] +$

$2\lambda(1-\lambda)\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$

$= \lambda(\lambda-1)\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_1 + \lambda(\lambda-1)\,\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - 2\lambda(1-\lambda)\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$

$= \lambda(\lambda-1)\,[\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - 2\,\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2\,]$

$= \lambda(\lambda-1)\,[\,(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T\,\mathbf{C}\,(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)\,]$ .....(2. 3)

Karena bentuk kuadrat $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X} \ge 0$ (semidefinit positif) maka untuk persamaan (2. 3) berlaku :

$$[\,(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T\,\mathbf{C}\,(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)\,] \ge 0.$$

Karena $\lambda(\lambda-1) < 0$ untuk $0 < \lambda < 1$ dan $\lambda(\lambda-1) = 0$ untuk $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$, maka persamaan (2. 3) akan selalu lebih kecil atau sama dengan nol untuk semua vektor $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$, yang mana telah ditunjukkan oleh persamaan (2. 2). Sehingga $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{C}\,\mathbf{X}$ yang semidefinit positif adalah konveks untuk setiap $\mathbf{X}$ di $\mathbf{R}^n$.■

Definisi 2. 3. 3

Suatu fungsi f ($\mathbf{X}$) dikatakan mempunyai minimum global di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika, $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S.

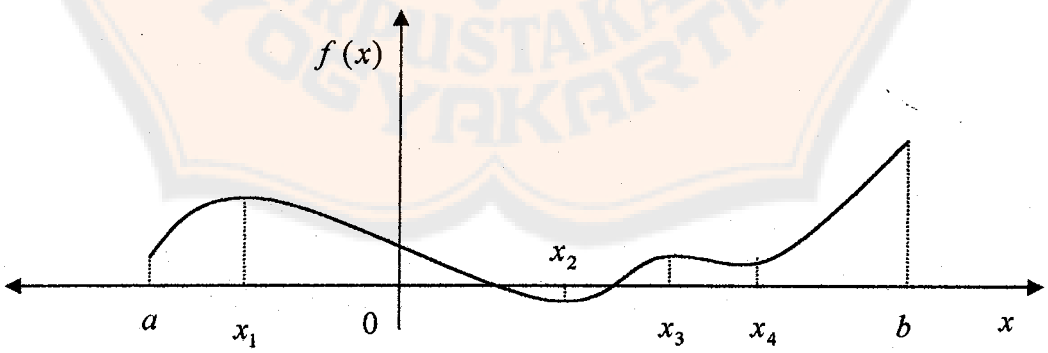
Suatu fungsi f ($\mathbf{X}$) dikatakan mempunyai maksimum global di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika, $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S.

Definisi 2. 3. 4

Suatu fungsi dikatakan mempunyai sebuah minimum lokal di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S, di mana $\left|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}\right| < \varepsilon$.

Suatu fungsi dikatakan mempunyai sebuah maksimum lokal di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S, di mana $\left|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}\right| < \varepsilon$.

Untuk jelasnya, pengertian mengenai minimum/maksimum global dan lokal dapat diilustrasikan dalam ruang berdimensi satu sebagai berikut :



Gambar 2. 4 Grafik Optimal Lokal Dan Optimal Global

Fungsi f (**X**) pada Gambar 2. 4 hanya didefinisikan pada [a, b], maka fungsi f (**X**) mempunyai :

a. Minimum lokal di a, x_2 dan x_4 dan minimum global di x_2.

b. Maksimum lokal di x_1, x_3 dan b dan maksimum global di b.

Teorema 2. 3. 5

*Jika f (**X**) adalah fungsi konveks pada suatu himpunan konveks* S *maka f (**X**) mempunyai paling banyak satu minimum lokal. Jika terdapat suatu minimum yang demikian, maka dikatakan sebagai minimum global dan dicapai pada himpunan konveks.*

Bukti :

Misalkan, terdapat suatu minimum lokal pada titik $\mathbf{X}^*$ untuk sembarang $\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}} \in$ S.

Menurut definisi dari minimum lokal dan fungsi konveks, maka diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f[(1-\lambda)\mathbf{X}^* + \lambda\overline{\mathbf{X}}] \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\overline{\mathbf{X}}) \quad .....(2.\ 4)$$

di mana λ adalah suatu bilangan positif terkecil secukupnya.

Dari persamaan (2. 4) diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\overline{\mathbf{X}})$$

sehingga,

$$\lambda f(\mathbf{X}^*) \leq \lambda f(\overline{\mathbf{X}}).$$

Dan, karena $\lambda > 0$ maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\overline{\mathbf{X}})$ yang mengakibatkan $f(\mathbf{X}^*)$ adalah suatu minimum global dan titik $\overline{\mathbf{X}} \in$ S merupakan titik sembarang. Jika $\mathbf{X}^*$ dan **X'** adalah

2 titik yang mengakibatkan fungsi f (**X**) mencapai minimum z_0, maka untuk $0 \le \lambda \le 1$ diperoleh :

$$z_0 \le f[(1-\lambda)\,\mathbf{X}^* + \lambda\,\mathbf{X}'] \le (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\mathbf{X}') = z_0.$$

Karenanya , f (**X**) juga mencapai minimum pada $\mathbf{X} = (1-\lambda)\,\mathbf{X}^* + \lambda\,\mathbf{X}'$. Dengan demikian, himpunan dari solusi-solusinya merupakan himpunan konveks. ■

Teorema 2. 3. 6

Misalkan, S *adalah himpunan yang tidak kosong dan* $S \subset \mathbf{R}^n$ *yang memenuhi kendala-kendala*

$$g_i(\mathbf{X}) \le 0, \quad \textit{untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i \ge 0$$

Jika g_i (**X**) *adalah fungsi konveks untuk setiap i, maka* S *merupakan himpunan konveks.*

Bukti :

Misalkan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$. Didefinisikan, $\overline{\mathbf{X}} = \lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2$ untuk $0 \le \lambda \le 1$. Akan ditunjukkan bahwa titik $\overline{\mathbf{X}}$ memenuhi kendala-kendala yang membatasinya.

Diketahui, $\overline{\mathbf{X}} \ge 0$. Karena g_i (**X**) adalah fungsi konveks, maka :

$$g_i(\overline{\mathbf{X}}) = g_i[\lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2] \le \lambda\, g_i(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\, g_i(\mathbf{X}_2)$$

Tapi, karena $g_i(\mathbf{X}_1) \le 0$ dan $g_i(\mathbf{X}_2) \le 0$ untuk $0 \le \lambda \le 1$ maka :

$$g_i(\overline{\mathbf{X}}) \leq \lambda \; g_i(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda)\; g_i(\mathbf{X}_2) \leq 0.$$

Jadi, S adalah himpunan konveks■

Berdasarkan uraian dari Teorema 2. 3. 5 dan Teorema 2. 3. 6 maka, untuk persoalan optimasi yang meminimumkan (memaksimumkan) fungsi $f(\mathbf{X})$ terhadap kendala $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m dan $\mathbf{X} \geq 0$, jika $f(\mathbf{X})$ dan semua $g_i(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks, maka suatu minimum lokal (maksimum lokal) adalah juga minimum global (maksimum global).

2. 4 Vektor Gradien dan Titik Pelana (Saddle Point)

Definisi 2. 4. 1 :

Jika suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dan semua turunan pertamanya adalah kontinu pada suatu himpunan $S \subset R^n$, maka vektor gradien dari $f(\mathbf{X})$ pada titik $\mathbf{X}^*$ didefinisikan sebagai suatu vektor kolom berdimensi n dan dinotasikan dengan $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ untuk setiap $\mathbf{X}^* \in S$ sehingga :

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

di mana $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ merupakan suatu vektor yang tegak lurus dengan garis bentuk (kontur) $f(\mathbf{X})$ yang melalu titik $\mathbf{X}^*$.

Dari uraian sebelumnya telah dijelaskan bahwa, syarat perlu titik $\mathbf{X}^*$ menjadi suatu titik ekstrim pada suatu fungsi diferensiabel $f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yaitu :

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{X}^*} = 0, \qquad \text{untuk setiap } j = 1, 2, \ldots, n$$

di mana, $\mathbf{X}^*$ adalah suatu titik interior pada daerah yang didefinisikan.

Teorema 2. 4. 2 :

Jika $f(\mathbf{X})$ *didefinisikan pada himpunan konveks* S *yang terbuka dan* $f(\mathbf{X})$ *dideferensiabel di* $\mathbf{X}$, *maka* $f(\mathbf{X})$ *adalah konveks jika dan hanya jika berlaku* :

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$$

untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$.

Bukti :

- ($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan jika $f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$, maka $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

Untuk $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, misalkan $\mathbf{X}_3 \in S$ sehingga

$$\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2.$$

Maka, untuk $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_3$ diperoleh :

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 5)}$$

Dan, untuk $\mathbf{X}_2$ dan $\mathbf{X}_3$ diperoleh :

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 6)}$$

Kalikan persamaan (2. 5) dengan λ dan persamaan (2. 6) dengan $(1-\lambda)$, kemudian dijumlahkan. Maka diperoleh :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_3) \geq$$

$$\lambda (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_3)$$

atau

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3) + [\, \lambda \mathbf{X}_1^T + (1-\lambda) \mathbf{X}_2^T \,] \; \nabla f(\mathbf{X}_3) +$$

$$- \mathbf{X}_3^T \; \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 7)}$$

Substitusikan $\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda) \mathbf{X}_2$ pada persamaan (2. 7), maka diperoleh :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda) \mathbf{X}_2 \,]$$

Dengan demikian, $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

- $(\Rightarrow)$

Akan dibuktikan jika $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks, maka

$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_2)$.

Untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$, maka berlaku :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda) \mathbf{X}_2 \,].$$

Kurangkan sisi kiri dan sisi kanan dengan $f(\mathbf{X}_2)$, maka :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - f(\mathbf{X}_2)$$

atau,

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq \frac{f[\lambda \mathbf{X}_1 - (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - f(\mathbf{X}_2)}{\lambda}.$$

Ambil suatu limit pada sisi kanan, untuk λ mendekati 0, maka diperoleh,

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2).\blacksquare$$

Teorema 2. 4. 3 :

Misalkan $f(X)$ adalah fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu, yang didefinisikan dalam suatu himpunan konveks S. Misalkan $\mathbf{X}^* \in S$, maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(X)$ untuk $X \in S$ (dalam hal ini, $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(X)$ untuk setiap $X \in S$), jika dan hanya jika, $(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$ untuk setiap $X \in S$.

Bukti :

- $(\Rightarrow)$

Untuk $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$, maka titik minimum $\mathbf{X}^*$ adalah suatu titik interior dari S atau suatu titik batas dari S. Jika $\mathbf{X}^*$ adalah titik interior maka $\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$, sehingga $(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$. Karena $f(\mathbf{X})$ konveks dan S adalah suatu himpunan konveks, maka untuk $\mathbf{X}^*$ sembarang titik minimum, berlaku :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f[\lambda \mathbf{X} + (1-\lambda)\mathbf{X}^*]$$

untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Untuk $\lambda > 0$, maka :

$$\frac{f[\mathbf{X}^* + \lambda(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)] - f(\mathbf{X}^*)}{\lambda} \geq 0.$$

Ambil suatu limit untuk λ mendekati 0, maka diperoleh :

$$(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0.$$

- ($\Leftarrow$)

Diberikan $(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$, untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S. Dari teorema 2. 4. 2 diperoleh :

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^*) \geq (\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0.$$

Maka, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan, titik $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ pada himpunan S.

Untuk suatu titik $\mathbf{X}_1$ yang tidak minimum dan, jika untuk beberapa $\mathbf{X}_2$ diperoleh $f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2)$, maka menurut teorema 2. 4. 2 :

$$\geq f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq (\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T \ \nabla f(\mathbf{X}_1) \blacksquare$$

Definisi 2. 4. 4 :

Suatu titik $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dengan $\lambda^* > 0$ dan $\mathbf{X}^* \in$ S disebut sebagai Titik Pelana (*Saddle Point*) dari fungsi $L(\mathbf{X}, \lambda)$, jika :

$$L(\mathbf{X}^*, \lambda) \leq L(\mathbf{X}^*, \lambda^*) \leq L(\mathbf{X}, \lambda^*)$$

untuk semua $\mathbf{X} \in$ S dan semua $\lambda \geq 0$.

Jika kondisi di atas dipenuhi, maka fungsi $L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ akan memberikan suatu minimum terhadap $\mathbf{X}^*$ dan suatu maksimum terhadap λ^*, yaitu $L(\mathbf{X}, \lambda^*)$ mempunyai minimum terhadap **X** dan $L(\mathbf{X}^*, \lambda)$ mempunyai maksimum terhadap λ. Dengan kata lain, suatu titik disebut Titik Pelana jika titik tersebut memaksimumkan fungsi pada satu arah dan meminimumkan fungsi pada arah yang lain.

2. 5 Metode Simplex

Metode yang paling terkenal untuk menyelesaikan persoalan Pemrograman Linear adalah metode simplex, yang akan dibahas secara ringkas garis besarnya di sini.

Bentuk umum masalah Program Linear:

Memaksimumkan (meminimumkan),

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\,\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

terhadap,

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\,\mathbf{X} \le \mathbf{B}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad , i = 1, 2, ..., m$$

$$x_j \ge 0 \qquad , j = 1, 2, ..., n$$

Metode simplex dikerjakan secara sistematis bermula dari suatu penyelesaian dasar yang layak (*feasible basic solution*) ke penyelesaian dasar layak berikutnya. Hal ini dilakukan berulang-ulang (*iterative, algorithmic*) hingga akhirnya ditemukan penyelesaian yang optimal. Dalam pengerjaan secara simplex ini peranan matriks berikut kaidah-kaidahnya sangat berarti.

Sebelum penyelesaian tahap pertama dimulai, perlu dilakukan standarisasi rumusan model, yakni mengubah kendala-kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan. Caranya ialah dengan memasukkan unsur variabel pengetat pada ruas kiri fungsi kendala. Untuk fungsi kendala yang bertanda $\leq$, dilakukan penambahan variabel senjang (*slack variable*). Sedangkan untuk fungsi kendala bertanda $\geq$, dilakukan pengurangan variabel (*surplus variable*). Secara umum, fungsi-fungsi kendala yang standar dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \quad \pm s_1 \quad = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \quad \pm s_2 \quad = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \quad \pm s_m \quad = b_m$$

Ringkasnya: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad , i = 1, 2, \ldots, m, \qquad s_1, s_2, \ldots, s_m \geq 0$

Agar diperoleh suatu penyelesaian layak basis maka matriks koefisien yang dilengkapi (koefisien teknis dan suku tetap) harus tersusut Gauss-Jordan dan suku tetap (di ruas kanan) harus tidak negatif.

Perhatikan contoh berikut:

$$2x + y + u \qquad = 5$$

$$x - y \qquad + v = -3$$

Matriks susunan ini sudah tersusut Gauss-Jordan untuk variabel u dan v. Jika x, y dianggap tak gayut (independent) dan diisi nol maka diperoleh penyelesaian basis

$$(x, y, u, v) = (0, 0, 5, -3)$$

Jelas penyelesaian basis ini tidak layak karena memuat v yang bernilai negatif.

Hasil-hasil perhitungan pada setiap tahap pengerjaan disajikan ke dalam bentuk tablo (tabel matriks). Berdasarkan angka-angka yang muncul di tablo inilah dilakukan analisis dan ditarik kesimpulan.

Simplex dengan Tablo Berbaris C_j - Z_j

Secara umum, rumusan model yang standar untuk metoda simplex dengan tablo berbaris C_j - Z_j adalah:

$$\textit{Optimumkan} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{llll} \textit{terhadap,} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \pm s_1 & & = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n & \pm s_2 & = b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & \pm s_m & = b_m \end{array}$$

Bentuk tablonya:

Variabel Basis	Tujuan	c_1	c_2	.....	c_n	0	0	.....	0	Kuantitas
		x_1	x_2	.....	x_n	s_1	s_2	.....	s_n	
s_1	0	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	1	0	.....	0	b_1
s_2	0	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	0	1	.....	0	b_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
s_n	0	a_{n1}	a_{n2}	.....	a_{mn}	0	0	.....	1	b_m
	Z_j									
	$C_j - Z_j$									

Keterangan:

1. Kolom Variabel Basis

   Kolom ini berisi variabel-variabel s_j dan atau x_j ($j = 1, 2, \ldots\ldots, n$) yang menentukan kesimpulan penyelesaian. Pada penyelesaian tahap awal atau dalam tablo pertama, kolom ini berisi semua variabel yang menjadi basis, yaitu variabel-variabel yang mempunyai nilai positif pada suatu titik sudut. Pada tahap-tahap berikutnya akan terjadi pergantian variabel-variabel yang mengisi kolom ini, tergantung pada kesimpulan analisis penyelesaiannya.

2. Kolom Tujuan

   Kolom ini berisi koefisien variabel-variabel di dalam fungsi tujuan, sesuai dengan yang tercantum di kolom Variabel Basis.

3. Kolom-kolom Variabel

   Kolom-kolom ini berisi koefisien-koefisien dari setiap variabel yang terdapat di dalam model. Koefisien-koefisien yang terdapat di dalam fungsi tujuan (yaitu c_1 sampai c_n untuk x_1 sampai x_n, dan 0 untuk semua s_j) diletakkan di sebelah atas. Sedangkan koefisien-koefisien yang terdapat di dalam fungsi-fungsi kendala (yaitu a_{ij} untuk x_j, dan 0 atau 1 untuk s_j) diletakkan di sebelah bawah. Dalam tablo pertama, kolom-kolom variabel asli x_j membentuk matrik $\mathbf{A}_{mxn}$, sedangkan kolom-kolom variabel semu s_j membentuk matriks satuan $\mathbf{I}_{nxn}$.

4. Kolom Kuantitas

   Kolom ini mencerminkan kuantitas masing-masing variabel yang tercantum pada kolom Variabel Basis pada tahap penyelesaian yang bersangkutan. Pada penyelesaian tahap pertama karena $x_j = 0$ (untuk setiap j),kolom ini berisi konstanta-konstanta b_i (i = 1, 2, ….., m) yang terdapat diruas kanan persamaan-persamaan kendala.

5. Baris Z_j

   Baris ini berisi jumlah hasilkali unsur-unsur pada kolom tujuan dengan unsur-unsur pada kolom yang bersesuaian.

6. Baris C_j - Z_j

   Baris ini merupakan indikator optimalitas penyelesaian, berisi selisih antara c_j dan z_j. Untuk masalah minimasi, penyelesaian dinyatakan optimal apabila sudah tidak terdapat lagi unsur bertanda negatif pada baris ini. Untuk masalah maksimasi, penyelesaian dinyatakan optimal jika sudah tidak ada lagi unsur bertanda positif pada baris C_j - Z_j ini. Untuk masalah maksimasi, digunakan baris Z_j - C_j untuk menggantikan baris C_j - Z_j.

Langkah-langkah Pengerjaan

Langkah-langkah pengerjaan programasi linier secara simplex dengan tablo berbaris C_j - Z_j adalah sebagai berikut:

1. Rumuskan dan standarisasikan modelnya.
2. Bentuk tablo pertama berdasarkan keterangan-keterangan di atas.
3. Tentukan kolom kunci di antara kolom-kolom variabel yang ada, yaitu kolom yang mengandung nilai (C_j - Z_j) paling positif untuk kasus maksimasi, atau mengandung nilai (C_j - Z_j) paling negatif jika kasusnya minimasi.
4. Tentukan baris kunci di antara baris-baris variabel yang ada, yaitu baris yang memiliki rasio kuantitas dengan nilai positif terkecil, baik untuk masalah maksimasi maupun minimasi.

   Variabel yang terdapat pada kolom kunci dinamakan variabel pendatang, sedangkan variabel yang terdapat pada baris kunci dinamakan varibel perantau. Variabel pendatang akan menggantikan variabel perantau dalam tablo berikutnya. Unsur di dalam tablo yang merupakan perpotongan antara baris kunci dengan kolom kunci dinamakan unsur kunci. Rasio kuantitas adalah hasil bagi konstanta pada kolom Kuantitas terhadap unsur sebaris pada kolom kunci. Dalam menentukan baris kunci atau variabel perantau, abaikan rasio kuantitas yang bernilai nol dan negatif.

5. Bentuk tablo berikutnya dengan memasukkan variabel pendatang ke kolom Variabel Basis dan mengeluarkan variabel perantau dari kolom tersebut, serta melakukan transformasi baris-baris varibel.

   Transformasi baris kunci, yang sekarang bervariabel baru, dilakukan sebagai berikut:

   baris kunci baru = baris kunci lama : unsur kunci

   Sedangkan transformasi baris-baris lainnya:

   baris baru = baris lama – (rasio kunci x baris kunci baru)

   Rasio kunci adalah unsur pada kolom kunci dibagi unsur kunci.

6. Melakukan pengujian optimalitas. Jika semua koefisien pada baris C_j - Z_j sudah tidak ada lagi yang positif (untuk kasus maksimasi) atau sudah tidak ada lagi yang negatif (untuk kasus minimasi), berarti penyelesaian sudah optimal. Jika masih, berarti penyelesaian belum optimal, dilakukan lagi langkah ke-3 sampai dengan ke-6.

Catatan: Pelaksanaan dan penyajian algoritma simplex masih mempunyai beberapa versi lainnya. Seringkali dilakukan penyederhanaan, misalnya tidak menggunakan baris Z_j, malah C_j – Z_j dijadikan satu dengan baris-baris kendala utama. Untuk pengerjaan Persoalan Pemrograman Kuadrat, baris dan kolom kunci ditentukan melalui baris dan kolom yang memiliki rasio kuantitas dengan nilai positif terkecil.

2. 6 Dualitas

Kendala utama suatu Program Linier dapat memuat kendala dengan hubungan $\leq$, atau $\geq$, atau =.Untuk keperluan algoritma simplex semua kendala diubah ke hubungan =, yaitu dengan menyisipkan perubah pengetat. Untuk keperluan dualitas maka kendala utama suatu soal perlu diubah sehingga semua hubungannya berbentuk $\leq$, atau semua berbentuk $\geq$.

Misalnya,

$2x + 3y \geq 5$ dapat diubah menjadi $-2x - 3y \leq -5$

sedangkan kendala berbentuk persamaan:

$-x + 2y = 4$ dapat diubah menjadi dua pertidaksamaan yang akan ekuivalen dengannya, yaitu:

$$-x + 2y \geq 4$$

$$-x + 2y \leq 4$$

dan bila dikehendaki bahwa semua harus berbentuk $\leq$ maka kendala kedua dikalikan -1, diperoleh:

$$x - 2y \leq -4$$

Akhirnya dapat disusun pola-pola maksimum-baku dan minimum-baku sebagai berikut.

Pola maksimum-baku:

Mencari $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

Memenuhi $\mathbf{AX} \leq \mathbf{B}$

dan memaksimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C\,X}$

Pola minimum-baku:

Mencari $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

Memenuhi $\mathbf{AX} \geq \mathbf{B}$

dan meminimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C\,X}$

Cara mengubah suatu persoalan Program Linier berpola minimum-baku menjadi berpola maksimum-baku yaitu kendala utama yang relasinya ($\geq$) dikalikan dengan -1, sedangkan fungsi obyektif diambil lawannya. Demikian pula sebaliknya. Jadi,

Minimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C\,X}$

adalah ekuivalen dengan

Maksimumkan $-f(\mathbf{X}) = -\mathbf{C\,X}$

kedua rumusan ini menghasilkan penyelesaian optimal yang sama.

Alasan mengapa kedua rumusan ini adalah ekuivalen adalah bahwa semakin kecil $f(\mathbf{X})$, semakin besar $-f(\mathbf{X})$, sehingga penyelesaian yang menghasilkan nilai $f(\mathbf{X})$ terkecil dalam seluruh daerah layak juga harus menghasilkan nilai $-f(\mathbf{X})$ yang terbesar dalam daerah ini.

2. 7 Modifikasi Simplex

2. 7. 1 Biaya Hukuman (*Penalty Cost*)

Penambahan variabel senjang dan variabel surplus tidak mengubah sifat kendala maupun tujuan. Oleh karena itu, variabel-variabel tersebut dapat diikutsertakan pula dalam fungsi tujuan tetapi dengan koefisien-koefisiennya nol. Sedangkan variabel buatan mengubah sifat dari kendala. Karena variabel buatan ini hanya ditambahkan pada salah satu ruas persamaan, maka sistem yang baru ekuivalen dengan sistem kendala yang lama jika dan hanya jika variabel-variabel buatannya nol. Untuk menjamin penetapan seperti itu dalam pemecahan optimal (yang berlawanan dengan pemecahan awal), maka variabel-variabel buatan diturut sertakan dalam fungsi obyektif tetapi dengan koefisien-koefisien positif yang besar sekali untuk persoalan pemrograman meminimumkan atau koefisien-koefisien negatif yang besar sekali untuk persoalan pemrograman memaksimumkan. Koefisien-koefisien ini, yang dinyatakan dengan oleh M atau –M, dengan M dipandang sebagai sebuah bilangan positif yang besar sekali, menyatakan hukuman (yang berat) yang dikenakan dalam membuat suatu penetapan satuan pada variabel-variabel buatan.

2. 7. 2 Metode Dua Tahap

Apabila variabel-variabel buatan (*artificial variables*) adalah bagian dari pemecahan awal $\mathbf{X}^*$, maka baris $C_j - Z_j$ akan mengandung biaya hukuman (*penalty cost*). Untuk meminimasi kesalahan pembulatan,maka modifikasi-modifikasi berikut diikutsertakan ke dalam metode simpleks. Algoritma yang dihasilkannya adalah metode dua tahap.

Perubahan 1: Baris $C_j - Z_j$ diuraikan ke dalam dua baris, di mana yang pertama mengandung suku-suku yang tidak mengandung M, sedangkan yang kedua mengandung koefisien-koefisien M ke dalam suku-suku sisanya.

Contoh Baris $C_j - Z_j$ dari tablo adalah

-9 - 8M	0	-9 – 9M	0	M	0	-14 – 2M

Menurut *Perubahan 1* maka akan mengalami transformasi ke dalam dua baris berikut

-9	0	-9	0	0	0	-14
-8	0	-9	0	1	0	-2

Perubahan 2: Langkah 3 dari metode simplex diterapkan pada baris terakhir yang dibentuk dari *Perubahan 1* (yang kemudian diikuti dengan Langkah-langkah 4, 5 dan 6), hingga baris ini tidak mengandung elemen-elemen negatif. Kemudian Langkah 3 diterapkan lagi pada elemen-elemen baris kedua dari bawah, yang terletak di atas angka-angka nol dalam baris terakhir.

Perubahan 3: Setiap saat sebuah variabel buatan bukan merupakan suatu variabel basis, ia dihilangkan dari kolom pertama dari tabel sebagai hasil dari langkah 6, maka ia dihapuskan dari baris teratas tabel dan begitu pula seluruh kolom di bawahnya.

Perubahan 4: Baris terakhir dapat dihapus dari tabel apabila semua elemennya nol.

Perubahan 5: Jika variabel-variabel buatan yang tak nol terdapat dalam himpunan elemen dasar yang terakhir, maka persoalan pemrogramannya tidak memiliki pemecahan. Sebaliknya, variabel-variabel buatan yang berharga nol dapat muncul sebagai variabel-variabel dasar dalam pemecahan akhir apabila salah satu atau lebih dari persamaan-persamaan kendala adalah sia-sia.

2. 8 Probabilitas

2. 8. 1 Nilai Harapan

Definisi 2. 8. 1. 1

Misalkan X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$. Nilai harapan atau rataan X ialah

$$\mu = E(X) = \sum_x x\,f(x)$$

bila X diskret.

Contoh:

Carilah nilai harapan banyaknya kimiawan dalam panitia 3 orang yang dipilih secara acak dari 4 kimiawan dan 3 biolog.

Jawab:

Misalkan X menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia. Distribusi peluang X adalah

$$f(X) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \qquad x = 0, 1, 2, 3.$$

Beberapa perhitungan sederhana menghasilkan $f(0) = 1/35$, $f(1) = 12/35$, $f(2) = 18/35$, dan $f(3) = 4/35$. Jadi

$$\mu = E(X) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (2)(18/35) + (3)(4/35)$$
$$= 12/7 = 1{,}7.$$

Jadi, bila suatu panitia beranggota 3 orang dipilih secara acak berulang-ulang dari 4 kimiawan dan 3 biolog, maka rata-ratanya akan beranggota 1,7 kimiawan.

2. 8. 2 Variansi dan Kovariansi

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X mempunyai peran khusus dalam statistika karena menggambarkan letak pusat distribusi peluang. Akan tetapi, rataan itu sendiri tidaklah memberikan keterangan cukup mengenai bentuk distribusinya

Definisi 2. 8. 2. 1

Misalkan X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah

$$\tau^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

bila X diskret.

Definisi 2. 8. 2. 2

Misalkan X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan $f(x, y)$. Kovariansi X dan Y adalah

$$\tau_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \sum_X \sum_Y (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, f(x,y)$$

bila X dan Y diskret.

Contoh:

Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya mobil yang digunakan untuk keperluan dinas kantor pada setiap hari kerja. Distribusi peluang untuk kantor A adalah

x	1	2	3
$f(x)$	0,3	0,4	0,3

dan untuk kantor B adalah

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Tunjukkan bahwa variansi distribusi peluang kantor B lebih besar dari pada variansi kantor A.

Jawab:

Untuk kantor A, diperoleh

$$\mu = E(X) = (1)(0,3) + (2)(0,4) + (3)(0,3) = 2,0$$

dan

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \sum_{x=1}^{3}(x-2)^2 f(x)\\ &= (1-2)^2(0,3) + (2-2)^2(0,4) + (3-2)^2(0,6)\\ &= 0,6.\end{aligned}$$

Untuk kantor B, diperoleh

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = (0)(0,2) + (1)(0,1) + (2)(0,3) + (3)(0,3) + (4)(0,1)\\ &= 2,0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \sum_{x=0}^{4}(x-2)^2 f(x)\\ &= (0-2)^2(0,2) + (1-2)^2(0,1) + (2-2)^2(0,3) + (3-2)^2(0,3) +\\ &\quad (4-2)^2(0,1)\\ &= 1,6.\end{aligned}$$

Jelas, variansi banyaknya mobil yang digunakan untuk keperluan dinas lebih besar untuk kantor B dari pada untuk kantor A.

2. 8. 3 Distribusi Seragam Diskret

Distribusi seragam diskret merupakan distribusi peluang diskret yang paling sederhana di mana peubah acaknya memperoleh semua nilainya dengan peluang yang sama.

Definisi 2. 8. 3. 1

Bila peubah acak X mendapat nilai $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dengan peluang yang sama, maka distribusi seragam diskret diberikan oleh

$$f(x\,;k) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

Lambang $f(x\,;k)$ dipakai sebagai pengganti $f(x)$ untuk menunjukkan bahwa distribusi seragam tersebut bergantung pada parameter k.

Contoh:

Bila sebuah dadu dilantunkan, tiap unsur ruang sample S = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muncul dengan peluang $1/6$.

Jadi, merupakan distribusi seragam dengan

$$f(x\,;6) = 1/6, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Teorema 2. 8. 3. 2

Rataan dan variansi distribusi seragam diskret $f(x\,;k)$ adalah

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \quad \text{dan} \quad \tau^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)}{k}$$

Bukti:

Menurut definisi

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, f(x_i\,;k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

Begitupun menurut definisi

$$\tau^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2\, f(x_i\,;k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\mu)^2}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)}{k} \qquad \blacksquare$$

Untuk contoh di atas diperoleh

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

dan

$$\tau^2 = \frac{(1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + \ldots\ldots + (6-3{,}5)^2}{6} = \frac{35}{12}.$$

2. 8. 4 Sifat-sifat Rataan

Akan dibahas beberapa sifat yang berguna untuk menyederhanakan perhitungan rataan dan variansi peubah acak.

Teorema 2. 8. 4. 1

Bila a dan b konstanta, maka $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Bukti :

Menurut Definisi 2. 8. 1. 1,

$$E(aX+b) = \sum_x (ax+b)\, f(x)$$

$$= \sum_x ax\, f(x) + \sum_x b\, f(x)$$

$$= a\sum_x x\, f(x) + b\sum_x f(x)$$

Karena $\sum_x x\, f(x)$ adalah $E(X)$ dan $\sum_x f(x)$ sama dengan 1. Sehingga diperoleh,

$$E(aX+b) = aE(X)+b. \qquad \blacksquare$$

Akibat 1 Bila diambil $a = 0$ maka $E(b) = b$.

Akibat 2 Bila diambil $b = 0$ maka $E(aX) = aE(X)$.

Teorema 2. 8. 4. 2

Jumlah nilai harapan atau selisih dua atau lebih fungsi suatu peubah acak X sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan fungsi tersebut, yaitu

$$E\left[g(X) \pm h(X)\right] = E\left[g(X)\right] \pm E\left[h(X)\right]$$

Bukti :

Menurut Definisi 2. 8. 1. 1,

$$E\left[g(X) \pm h(X)\right] = \sum_x \left[g(x) \pm h(x)\right] f(x)$$

$$= \sum_x g(x)\, f(x) \pm \sum_x h(x)\, f(x)$$

$$= E\left[g(X)\right] \pm E\left[h(X)\right]. \qquad \blacksquare$$

Akibat Bila diambil $g(X) = X$ dan $h(Y) = Y$ maka diperoleh

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

BAB III

PEMROGRAMAN KUADRAT

Pemrograman Kuadrat merupakan bagian khusus dari pemrograman non-linier dengan kendala. Kekhususan ini nampak pada bentuk fungsi obyektif yang digunakan untuk menggambarkan struktur model matematis dari persoalan yang akan diselesaikan. Untuk itu sebelumnya akan dibahas mengenai masalah-masalah pemrograman non-linier yang dinyatakan sebagai persoalan pemrograman konveks dan mengembangkan kondisi Kuhn-Tucher untuk mendapatkan suatu solusi yang optimal untuk persoalan-persoalan pemrograman non-linier tersebut.

3.1 Pemrograman Non-Linier

Persoalan pemrograman matematika merupakan bentuk umum dari persoalan optimal untuk mendapatkan suatu kondisi yang menyebabkan fungsi obyektif mencapai keadaan optimal, atau menentukan harga-harga ekstrim dari fungsi obyektif dimana variabel-variabelnya harus memenuhi semua kendala-kendala yang membatasinya. Bentuk umum persoalan pemrograman matematika dapat dinyatakan dalam suatu model matematika, sebagai berikut :

Optimumkan, $Z = f(\mathbf{X})$

terhadap : $g_i(\mathbf{X})\ (\leq, =, \geq)\ 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m$

$$\mathbf{X} \in X \subset \mathbf{R}^n$$

dengan, f (**X**) dan semua kendala g_i (**X**) adalah fungsi-fungsi yang didefinisikan pada R^n . Vektor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah vektor variabel yang berdimensi n, dan **X** adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}^n$ yang dibentuk oleh kendala-kendala g_i (**X**) yang disebut dengan *daerah fisibel*. Vektor **X** $\in$ X yaitu vektor yang memenuhi semua kendala disebut sebagai *penyelesaian fisibel*.

Dengan demikian persoalan pemrograman matematik dapat dikatakan sebagai persoalan untuk menentukan suatu titik $\mathbf{X}^*$ yang fisibel sehingga $\forall x \in$ **X**, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ untuk persoalan minimal dan, $f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X}^*)$ untuk persoalan maksimal. Dalam hal ini, titik $\mathbf{X}^*$ disebut *solusi optimal* dari persoalan.

Dalam persoalan pemrograman linier, fungsi tujuan dan kendalanya diasumsikan berbentuk hubungan linier. Namun dalam beberapa kasus, hubungan linier ini tidak selalu sesuai sehingga perlu diasumsikan bentuk hubungan non-linier untuk memodelkan persoalannya.

Pemrograman non-linier merupakan bagian dari teknik pemrograman matematika yang ditandai dengan adanya fungsi non-linier pada fungsi obyektifnya, dan bentuk-bentuk non-linier atau linier pada kendalanya. Bentuk non-linier ini, misalnya ; x^2, $\frac{1}{x}$, e^x, sin (x), dan lain-lain. Ketidaklinieran dapat juga ditimbulkan sebagai akibat dari interaksi antara dua atau lebih variabel, seperti : $x_1 \ln x_2$, $x_1x_2x_3$, x^y, dan lain-lain. Sekarang tampak bahwa persoalan pemrograman non linier lebih sulit dibandingkan persoalan pemrograman linier.

Pengendoran asumsi kelinieran telah menyebabkan kesulitan dalam perhitungan dan ruang lingkup masalah menjadi sangat luas dan lebih bervariasi.

Sejak munculnya teori dasar Pemrograman Non-Linier oleh Kuhn dan Tucker (1951), telah banyak prosedur algoritma yang dikembangkan untuk menyelesaikan persoalan pemrograman non-linier dengan kendala, baik untuk kendala persamaan maupun untuk kendala pertidaksamaan. Pengembangan teori ini menggunakan teknik Pengali Lagrange (*Lagrange Multiplier*).

3. 2 Pemrograman Konveks

Persoalan pemrograman konveks adalah suatu persoalan optimasi dengan kendala, di mana semua kendala dan fungsi tujuannya adalah bentuk konveks yang kontinu dan diferensiabel. Bentuk umum dari persoalan pemrograman konveks adalah:

Minimumkan, f (**X**)

terhadap, $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$; untuk setiap i = 1, 2, …, m

$x_j \geq 0$; untuk setiap j = 1, 2, …, n …..(3. 1)

di mana, f (**X**) dan semua kendala g_i (**X**) adalah bentuk konveks yang kontinu dan diferensiabel.

Untuk menyelesaikan persoalan persebut, didefinisikan Fungsi Langrange, sebagai berikut:

$$L\ (\mathbf{X}, \lambda) = f\ (\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i(\mathbf{X})$$

di mana, λ_i disebut sebagai Pengali Lagrange (*Langrange Multiplier*), untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dalam hal ini, akan dibentuk suatu persoalan baru, yaitu Persoalan Titik Pelana, di mana solusi dari persoalan baru ini berhubungan langsung dengan persoalan pemrograman konveks. Solusi Persoalan Titik Pelana ini sering dikenal dengan Teori Kuhn Tucker.

3. 3 Teori Kuhn Tucker

3. 3. 1 Persoalan Titik Pelana

Persoalan titik pelana adalah suatu persoalan untuk menentukan vektor-vektor $\mathbf{X}^*$ dan λ^* dari fungsi Langrange $L\,(\mathbf{X},\lambda)$, sedemikian sehingga berlaku:

$$L\,(\mathbf{X},\lambda) \le L\,(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \le L\,(\mathbf{X},\lambda^*) \qquad \text{.....(3. 2)}$$

dengan, $x_j \ge 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n dan $\lambda_i \ge 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m.

Pasangan $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ disebut sebagai titik pelana.

Titik $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ pada persoalan titik pelana dan solusi optimal pada persoalan pemrograman konveks dibahas dalam teorema berikut:

Teorema 3. 3. 2: (Teorema Kuhn -Tucker)

Vektor $\mathbf{X}^*$ merupakan *suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks* (3. 1), *jika dan hanya jika, terdapat suatu vektor* $\lambda \in \mathbf{R}^m$ *sedemikian sehingga* $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ *merupakan solusi untuk persoalan titik pelana.*

Bukti :

- $(\Leftarrow)$

Akan ditunjukkan bahwa kondisi titik pelana menjamin $\mathbf{X}^*$ sebagai suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks.

Untuk titik pelana $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dan $L\ (\mathbf{X}, \lambda) = f\ (\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i(\mathbf{X})$, maka dari persamaan (3. 2) akan diperoleh :

$$f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i(\mathbf{X}^*) \le f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X}^*) \le\ f\,(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X})$$

.....(3. 3)

dengan $x_j \ge 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n dan $\lambda_i \ge 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dari hubungan pertidaksamaan sebelah kiri pada persamaan (3. 3), untuk memenuhi semua $\lambda_i \ge 0$ maka haruslah $g_i\,(\mathbf{X}^*) \le 0$ dan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m. Hal ini akan ditunjukkan, sebagai berikut :

Hubungan pertidaksamaan sebelah kiri pada persamaan (3. 3), yaitu :

$$f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i(\mathbf{X}^*) \le f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i(\mathbf{X}^*) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X}^*) \qquad .....(3.\ 4)$$

Jika beberapa $g_i\ (\mathbf{X}^*) > 0$, maka pilih $\lambda_i > 0$ yang cukup besar sehingga persamaan (3. 4) tidak dipenuhi. Dengan demikian, $g_i\ (\mathbf{X}^*) \le 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m. Karena $x_j^* \ge 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n, maka $\mathbf{X}^*$ akan memenuhi kendala-kendala pada persoalan pemrograman konveks (persamaan (3. 1)). Persamaan (3. 4) juga harus memenuhi $\lambda_i = 0$, sehingga diperoleh:

$0 \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*)$. Tetapi, karena $\lambda_i^* \geq 0$ dan $g_i\,(\mathbf{X}^*) \leq 0$ maka,

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$.

Sehingga diperoleh : $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\mathbf{X}^*) = 0$, untuk setiap i = 1, 2, …, m.

Ini berarti, $\lambda_i^* = 0$ atau $g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ atau kedua-duanya sama dengan nol.

Hubungan pertidaksamaan sebelah kanan pada persamaan (3. 3), yaitu:

$$f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X})$$

atau,

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X})$$

dengan $\mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n. Karena $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m, maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $x_j \geq 0$ dan $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$. Dengan demikian, selama $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m maka, $\mathbf{X}^*$ adalah suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks.

- (⇒)

Dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks (persamaan (3. 1)) akan menyelesaikan persoalan titik pelana. Syarat ini bertujuan untuk mengidentifikasi titik stasioner dari suatu persoalan pemrograman konveks, yaitu titik interior pada daerah konveks yang fisibel adalah tidak kosong. Untuk maksud tersebut, maka diperlukan suatu asumsi yang menyatakan bahwa, untuk semua kendala pada persoalan pemrograman konveks akan terdapat suatu $\mathbf{X}$, dimana $x_j \geq 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$ sedemikian sehingga $g_i(\mathbf{X}) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$.

Misalkan, $\mathbf{X}^*$ adalah solusi untuk persamaan (3. 1). Dalam hal ini, akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu λ^*, di mana $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ sedemikian sehingga $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ memenuhi persoalan titik pelana. Untuk menunjukkan maksud tersebut, maka dibentuk 2 himpunan titik, yaitu K_1 dan K_2, yang berada di $\mathbf{R}^{m+1}$ dengan vektor-vektor $\boldsymbol{Y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$, sebagai berikut: untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$

$K_1 = \{\, \boldsymbol{Y} \mid f(\mathbf{X}) \leq y_0,\ g_i(\mathbf{X}) \leq y_i$; untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan terdapat paling sedikit satu $\mathbf{X}$ dimana $x_j \geq 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n \,\}$

$K_2 = \{\, \boldsymbol{Y} \mid f(\mathbf{X}^*) > y_0,\ 0 > y_i$; untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m \,\}$

Karena $f(\mathbf{X})$ dan semua kendala $g_i(\mathbf{X})$ adalah konveks, maka K_1 adalah suatu himpunan konveks. K_2 juga merupakan himpunan konveks, karena K_2 dinyatakan sebagai himpunan bagian yang terbuka di $\mathbf{R}^{m+1}$, yang dibatasi oleh bidang-bidang paralel terhadap sumbu koordinat dari $\mathbf{R}^{m+1}$. Ini berarti, K_2 memuat titik interior dari suatu 'orthant' dengan puncak pada $[f(\mathbf{X}^*), 0\,]$. Karena $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ untuk semua $x_j \geq 0$, maka K_1 dan K_2 tidak mempunyai titik-titik yang bersamaan, artinya $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Dalam hal ini, terdapat suatu vektor $\boldsymbol{a} \neq 0$ dan suatu skalar α sedemikian sehingga suatu *hyperplane* $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{Y} = \alpha$ memisahkan K_1 dan K_2, yaitu:

$$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{Y}_1 \geq \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{Y}_2 \qquad \text{.....(3. 5)}$$

Untuk semua $\boldsymbol{Y}_1 \in K_1$ dan $\boldsymbol{Y}_2 \in K_2$. Karena setiap komponen dari $\boldsymbol{Y}_2$ dapat dibuat sekecil-kecilnya, maka dapat disimpulkan bahwa $a_i \geq 0$,untuk setiap i = 1, 2, …,m. Jika $a_i < 0$ untuk beberapa i, maka hubungan komponen dari $\boldsymbol{Y}_2$ dapat dibuat sekecil-kecilnya, sehingga persamaan (3. 5) tidak dipenuhi.

Jika dipilih, $\boldsymbol{Y}_1 = [\ f\ (\mathbf{X}),\ g_1\ (\mathbf{X}), \ldots, g_m\ (\mathbf{X})\ ]$ dan $\boldsymbol{Y}_2 = [\ f\ (\mathbf{X}), 0, 0, \ldots, 0\ ]$, karena persamaan (3. 5) dipenuhi untuk semua titik batas dari K_2, maka diperoleh :

$$a_0 f\ (\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} a_i\, g_i\ (\mathbf{X}) \geq a_0\ f\ (\mathbf{X}^*) \qquad \text{.....(3. 6)}$$

di mana, $x_j \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n. Jika $a_0 = 0$, maka persamaan (3. 6) akan memberikan

$$a_1\, g_1\ (\mathbf{X}) + \ldots + a_m\, g_m\ (\mathbf{X}) \geq 0 \qquad \text{.....(3. 7)}$$

di mana, $a_i \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m dan beberapa $a_i \neq 0$. Tetapi, karena terdapat beberapa **X,** di mana $x_j \geq 0$, katakanlah $\overline{\mathbf{X}} = \{\ \overline{x_j}\ \}$, sedemikian sehingga $g_i\ (\overline{\mathbf{X}}) < 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m, maka persamaan (3. 7) menjadi lebih kecil dari nol. Sehingga dapatlah disimpulkan, $a_0 > 0$.

Hasil bagi persamaan (3. 6) dengan a_0 akan memberikan :

$$f\ (\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\ g_i(\mathbf{X}) \geq f\ (\mathbf{X}^*) \qquad \text{.....(3. 8)}$$

di mana, $\lambda_i^* = \frac{a_i}{a_0} \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m.

Persamaan (3. 8) dapat ditulis sebagai berikut :

$$L\,(\mathbf{X}, \lambda^*) \geq f\,(\mathbf{X}^*) \qquad \text{.....(3. 9)}$$

untuk semua $x_j \geq 0$.

Misalkan $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$, maka persamaan (3. 8) akan menjadi :

$$L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) \geq f\,(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) = f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) \geq f\,(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) \geq 0.$$

Tetapi, karena semua $g_i\,(\mathbf{X}^*) \leq 0$ dan semua $\lambda_i^* \geq 0$ maka akan diperoleh $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$, sehingga $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dengan demikian,

$$L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) = f\,(\mathbf{X}^*) \qquad \text{.....(3. 10)}$$

Demikian pula untuk semua $\lambda_i^* \geq 0$, karena $g_i\,(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$

maka :

$$f\,(\mathbf{X}^*) \geq f\,(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(\mathbf{X}^*) = L\,(\mathbf{X}^*, \lambda) \qquad \text{.....(3. 11)}$$

Kombinasi persamaan (3. 9) dan persamaan (3. 11) memberikan :

$$L\,(\mathbf{X}^*, \lambda) \leq f\,(\mathbf{X}^*) = L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) = f\,(\mathbf{X}^*) \leq L\,(\mathbf{X}, \lambda^*)$$

atau,

$$L\,(\mathbf{X}^*,\lambda\,) \le L\,(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \le L\,(\mathbf{X},\lambda^*)$$

Dengan demikian, teorema terbukti.■

Pembuktian Teorema 3. 3. 2 di atas menjelaskan bahwa, jika f (**X**) dan g_i (**X**) (untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$) adalah fungsi-fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu, maka pertidaksamaan titik pelana adalah ekivalen dengan kondisi-kondisi yang merupakan syarat-syarat untuk menetapkan suatu solusi yang optimal dari suatu persoalan pemrograman konveks. Kondisi-kondisi optimalitas tersebut dinyatakan dalam suatu teorema, sebagai berikut :

Teorema 3. 3. 3 : (Kondisi Optimalitas Kuhn Tucker)

Andaikan f (**X**) *dan semua* g_i (**X**) *adalah fungsi-fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu (untuk setiap* $i = 1, 2, \ldots, m$) *dan* $x_j \ge 0$ *untuk setiap* $j = 1, 2, \ldots, n$, *terdapat suatu titik* $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ *yang memenuhi persoalan titik pelana,* $L\,(\mathbf{X}^*,\lambda\,) \le L\,(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \le L\,(\mathbf{X},\lambda^*)$ *jika dan hanya jika* :

(1) $$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f\,(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\,\partial g\,(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} \ge 0 \qquad \text{.....(3. 12a)}$$

(2) $$(\mathbf{X}^*)^{T}\left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial x}\right] = \sum_{j=1}^{n} x_j^*\left\{\frac{\partial f\,(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\,\partial g\,(\mathbf{X}^*)}{\partial xj}\right\} = 0$$

.....(3. 12b)

(3) $$x_j^* \ge 0 \qquad \text{.....(3. 12c)}$$

(4) $$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0 \qquad .....(3.\ 13a)$$

(5) $$\lambda^* \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} \right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*) = 0 \qquad .....(3.\ 13b)$$

(6) $$\lambda_i^* \geq 0 \qquad .....(3.\ 13c)$$

untuk setiap i = 1, 2, …, m dan j = 1, 2, …, n.

Dari persamaan (3. 12a dan c), maka hubungan individual untuk persamaan (3. 12b) adalah,

$$x_j^* \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, \partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} \right\} = 0$$

Demikian pula untuk persamaan (3. 13a dan c), maka hubungan individual untuk persamaan (3. 13b) adalah,

$$\lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*) = 0$$

Bukti :

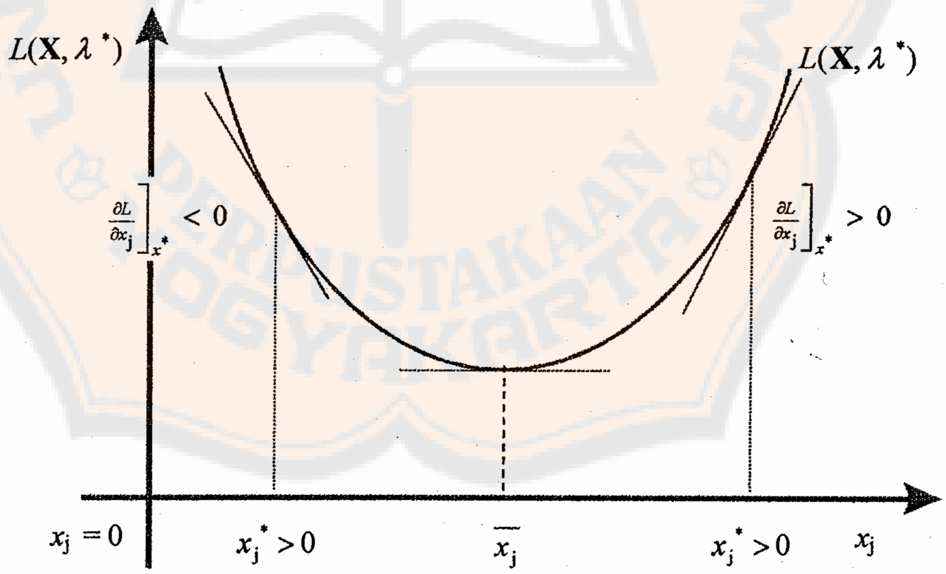
- (⇒)

Untuk syarat ini, diasumsikan bahwa $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ adalah suatu solusi titik pelana dan, persamaan (3. 12) dan persamaan (3. 13) masing-masing menyatakan bahwa, $L(\mathbf{X}, \lambda^*)$ mempunyai suatu minimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dan $L(\mathbf{X}^*, \lambda)$ mempunyai suatu maksimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$, sedemikian sehingga berlaku :

$$L(\mathbf{X}^*, \lambda) \leq L(\mathbf{X}^*, \lambda^*) \leq L(\mathbf{X}, \lambda^*).$$

Untuk membuktikan bahwa persamaan (3. 12) adalah syarat untuk $L\ (\mathbf{X}, \lambda^*)$ mempunyai suatu minimum lokal pada $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*)$, misalkan persamaan (3. 12a dan b) tidak dipenuhi oleh $x_j^* \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2, …, n (persamaan (3. 12c)). Untuk $\lambda = \lambda^*$, dinyatakan bahwa $L\ (\mathbf{X}, \lambda^*)$ adalah fungsi konveks dari x. Jika beberapa $x_j^* > 0$, yaitu suatu titik interior, dan $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \neq 0$, maka $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dapat dikurangi dengan mengambil suatu nilai yang berbeda dari $\mathbf{X}$, katakanlah $\overline{\mathbf{X}}$, sehingga $L\ (\overline{\mathbf{X}}, \lambda^*) < L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*)$.

Perhatikan gambar 3. 1 berikut :



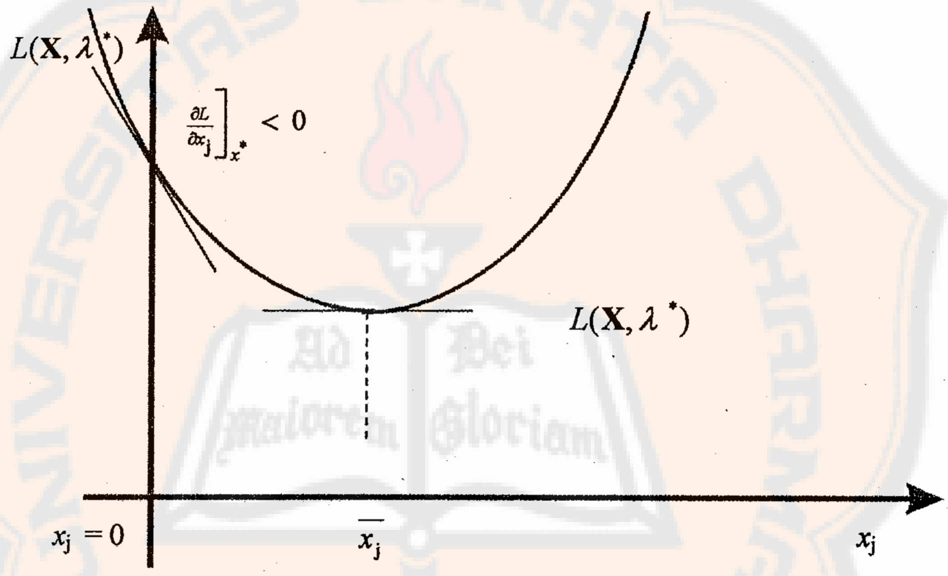
Gambar 3. 1 Persoalan Titik Pelana

Jika $x_j^* = 0$ untuk setiap j = 1, 2, ..., n yaitu suatu titik batas, dan

$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} < 0$, maka dapat ditemukan kembali suatu $\overline{\mathbf{X}} = \{\overline{x_j}\}$, dimana

$\overline{x_j} \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,...,n, sedemikian sehingga $L(\overline{\mathbf{X}}, \lambda^*) < L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$.

Perhatikan Gambar 3. 2 berikut :



Gambar 3. 2 Persoalan Titik Pelana

Situasi-situasi ini tidak dapat terjadi selama $L(\mathbf{X}, \lambda)$ diminimumkan oleh $\mathbf{X}^*$ untuk semua λ. Jadi, jika $x_j^* > 0$ untuk setiap j = 1, 2, ..., n maka harus berlaku:

$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0$. Demikian pula untuk $x_j^* = 0$, maka haruslah: $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \geq 0$.

(Dari teorema 2. 4. 3 pada bab terdahulu, hal ini adalah mungkin untuk membuktikan bahwa $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0$ selama $x_j^* > 0$ dan $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \geq 0$ selama $x_j^* = 0$).

Dengan demikian, persamaan (3. 12a dan b) haruslah dipenuhi, demikian pula untuk $x_j^* \geq 0$, yaitu persamaan (3. 12c).

Dengan cara yang sama, akan dibuktikan bahwa persamaan (3. 13) adalah syarat perlu untuk $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda\ )$ mempunyai maksimum lokal pada $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*)$.

Untuk $\mathbf{X}^*$, diketahui bahwa $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda\ )$ adalah suatu fungsi konveks yang linier dari λ_i^*, untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dari persamaan (3. 4), diketahui bahwa untuk semua $\lambda\ \geq\ 0$ dan $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$, berlaku:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(\mathbf{X}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) \qquad \text{.....(3. 14)}$$

untuk setiap i = 1, 2, …, m

Karena $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i\ (\mathbf{X}^*)$, maka untuk $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} > 0$ berlaku $g_i\ (\mathbf{X}^*) > 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dari persamaan (3. 14), jika suatu $g_i\ (\mathbf{X}^*) > 0$ maka dipilih λ_i yang sangat besar sedemikian sehingga kondisi ini tidak dipenuhi. Dengan demikian, $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i\ (\mathbf{X}^*) \leq 0$. Selanjutnya, dari Teorema 3. 3. 2 telah ditunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\, g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ dan $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dengan demikian, persamaan (3. 13) haruslah dipenuhi.

- ($\Leftarrow$)

Diketahui persamaan (3. 12) dan persamaan (3. 13). Akan ditunjukkan terdapat suatu titik $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ yang memenuhi persoalan titik pelana, yaitu:

$$L\ (\mathbf{X}^*, \lambda\ ) \leq\ L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*) \leq L\ (\mathbf{X}, \lambda^*).$$

Menurut Teorema 2. 4. 2 pada bab terdahulu, dan $L\ (\mathbf{X}, \lambda^*)$ adalah fungsi konveks dari **X**, maka akan diperoleh:

$$L\ (\mathbf{X}, \lambda^*) \geq L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x} \right]$$

atau

$$L\ (\mathbf{X}, \lambda^*) \geq L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*) + \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x} \right] - (\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x} \right]$$

.....(3. 15)

Dari persamaan (3. 12a dan b) dan $x_j \geq 0$, untuk setiap j = 1, 2, ..., n, dapat diketahui bahwa, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x} \right] \geq 0$ dan $(\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial x} \right] = 0$.

Sehingga persamaan (3. 15) menjadi, $L\ (\mathbf{X}, \lambda^*) \geq L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*)$.

Selanjutnya, karena $L\ (\mathbf{X}^*, \lambda\ )$ juga merupakan fungsi konveks yang linier dari λ, maka akan diperoleh:

$$L\ (\mathbf{X}^*, \lambda\ ) = L\ (\mathbf{X}^*, \lambda^*) + (\lambda - \lambda^*) \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} \right]$$

atau

$$L\,(\mathbf{X}^*, \lambda\,) = L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) + \lambda \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}\right] - \lambda^* \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}\right]$$

.....(3. 16)

Dari persamaan (3. 13a dan b) dan $\lambda_i \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2, …, m dapat diketahui bahwa:

$$\lambda \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}\right] \leq 0 \text{ dan } \lambda^* \left[\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}\right] = 0$$

Sehingga persamaan (3. 16) menjadi, $L\,(\mathbf{X}^*, \lambda\,) \leq L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$.

Maka akan diperoleh: $L\,(\mathbf{X}^*, \lambda\,) \leq L\,(\mathbf{X}^*, \lambda^*) \leq L\,(\mathbf{X}, \lambda^*)$, yaitu $x_j^* \geq 0$, untuk setiap j = 1, 2, …, n dan $\lambda_i \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2, …, m memenuhi kendala-kendala dari titik pelana. (teorema terbukti) ■

3. 4 Pemrograman Kuadrat

Pemrograman Kuadrat merupakan suatu persoalan optimasi dengan kendala, di mana fungsi obyektif (fungsi tujuan) dari persoalan dinyatakan sebagai suatu fungsi yang berbentuk kuadrat dan kendala-kendala yang membatasinya berbentuk linier.

3. 4. 1 Bentuk Umum Pemrograman Kuadrat

Bentuk umum dari suatu persoalan Pemrograman Kuadrat dirumuskan, sebagai berikut :

Maksimumkan, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\,\mathbf{X} + \mathbf{D}^T \mathbf{X}$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_k\, c_{kj}\, x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j$$

terhadap, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\,\mathbf{X} \leq \mathbf{B}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \qquad , i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad , j = 1, 2, \ldots, n$$

Dengan,

D = [d_j] adalah vektor kolom berdimensi - n

B = [b_i] adalah vektor kolom berdimensi - m

A = [a_{ij}] adalah matriks (m x n)

C = [c_{kj}] adalah matriks simetris (n x n)

$\mathbf{X} \in X \subset \mathbf{R}^n$

Bentuk $\mathbf{X}^T \mathbf{C}\,\mathbf{X}$ dalam fungsi obyektif dari persoalan Pemrograman Kuadrat di atas didefinisikan sebagai bentuk kuadrat, di mana **C** merupakan matriks simetris yang berordo (n x n). Dari Teorema 2. 3. 2 dan kondisi optimalitas Kuhn-Tucker dapat diketahui bahwa, jika persoalan Pemrograman Kuadrat adalah persoalan maksimasi, maka matriks **C** diasumsikan sebagai matriks yang semidefinit positif. Sedangkan fungsi obyektif f (**X**) merupakan suatu fungsi konkaf (cekung) pada **X**. Kendala-kendala yang diasumsikan berbentuk hubungan linier pada kasus ini adalah untuk menjamin sebuah ruang solusi yang merupakan himpunan konveks.

Pemrograman Kuadrat adalah suatu persoalan optimasi untuk menentukan suatu titik $\mathbf{X}^* = (\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \,)$ yang fisibel sehingga, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ untuk persoalan minimasi dan, $f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X}^*)$ untuk persoalan maksimasi.

Dalam Pemrograman Kuadrat terdapat beberapa metode penyelesaian yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimal dari persoalan baru tersebut. Metode-metode tersebut merupakan pengembangan dari algoritma simpleks pemrograman linier yang bertitiktolak pada kondisi-kondisi optimalitas Kuhn-Tucker. Salah satu diantaranya adalah dengan Metode Frank dan Wolfe.

3. 4. 2 Kondisi Optimalitas Pemrograman Kuadrat

Pada dasarnya, solusi untuk masalah ini ditentukan oleh aplikasi secara langsung dari syarat perlu Kuhn-Tucker. Karena fungsi obyektif f $(\mathbf{X})$ diasumsikan sebagai fungsi konveks untuk persoalan minimasi dan diasumsikan sebagai fungsi konkaf untuk persoalan maksimasi, dan ruang solusi diasumsikan sebagai suatu himpunan konveks, maka menurut Teorema 2. 3. 5 syarat-syarat ini juga merupakan syarat cukup untuk menjamin sebuah optimum yang global.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan bentuk umum persoalan Pemrograman Kuadrat dalam bentuk operasi matriks, sebagai berikut :

Maksimumkan, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{T}\,\mathbf{C}\,\mathbf{X} + \mathbf{D}^{T}\,\mathbf{X}$ .....(3. 17a)

terhadap, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\,\mathbf{X} \le \mathbf{B}$ .....(3. 17b)

$\mathbf{X} \ge 0$ .....(3. 17c)

Misalkan, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^T$ adalah suatu vektor kolom dari pengali Lagrange untuk kendala : $\mathbf{A}\,\mathbf{X} - \mathbf{B} \le \mathbf{0}$. Maka, fungsi Lagrange untuk sistem persamaan di atas, adalah :

$$L\,(\mathbf{X},\lambda) = \mathbf{X}^{T}\,\mathbf{C}\,\mathbf{X} + \mathbf{D}^{T}\,\mathbf{X} + \lambda^{T}(\mathbf{A}\,\mathbf{X} - \mathbf{B}) \quad .....(3.\ 18)$$

Karena $\dfrac{\partial\, \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = 2\ \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}$ maka, derivatif-derivatif untuk fungsi Lagrange di atas, yaitu :

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial \mathbf{X}} = 2\ \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + \lambda^{\mathrm{T}} \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} - \mathbf{B}$$

Dari (3. 12) dan (3. 13) untuk $\mathbf{X}^*$, λ^* merupakan penyelesaian titik pelana, maka aplikasi langsung dari kondisi optimalitas Kuhn-Tucker untuk persoalan Pemrograman Kuadrat di atas adalah sebagai berikut :

(1) $2(\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{C} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + (\lambda^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \geq 0$ .....(3. 19a)

(2) $(\mathbf{X}^*)\,[\,2(\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{C} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + (\lambda^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\,] = 0$ .....(3. 19b)

(3) $x_j^* \geq 0$

untuk setiap j = 1, 2, …, n .....(3. 19c)

(4) $\mathbf{A}\,\mathbf{X}^* - \mathbf{B} \leq 0$ .....(3. 20a)

(5) $(\lambda^*)^{\mathrm{T}}\,[\,\mathbf{A}\,\mathbf{X}^* - \mathbf{B}\,] = 0$ .....(3. 20b)

(6) $\lambda_i^* \geq 0$

untuk setiap i = 1, 2, …, m .....(3. 20c)

Dalam hal ini, kondisi optimalitas Kuhn-Tucker di atas dapat dipandang sebagai kendala baru dari persoalan Pemrograman Kuadrat untuk menentukan suatu titik Kuhn-Tucker $\mathbf{X}^*$, yang merupakan solusi optimal untuk persoalan tersebut.

Misalkan, $\mathbf{v}^* = -2\,\mathbf{C}\mathbf{X}^* - \mathbf{D}^T + \mathbf{A}^T\lambda^*$ dan $\mathbf{s}^* = \mathbf{A}\,\mathbf{X}^* - \mathbf{B}$ adalah vektor-vektor kolom dari variabel-variabel slack s_i^* dan μ_i^* yang non-negatif, untuk setiap i = 1, 2, …, m. Maka, kondisi optimalitas Kuhn-Tucker untuk sistem persamaan (3. 19) dan (3. 20) di atas dapat dinyatakan, sebagai berikut :

(1) $-2(\mathbf{X}^*)^T\mathbf{C} - \mathbf{D}^T + (\lambda^*)^T\mathbf{A} - (\mathbf{v}^*)^T = 0$ …..(3. 21a)

(2) $(\mathbf{X}^*)^T\ \mathbf{v}^* = 0$ …..(3. 21b)

(3) $x_j^* \geq 0$

untuk setiap j = 1, 2, …, n …..(3. 21c)

(4) $\mathbf{A}\ \mathbf{X}^* + \mathbf{s}^* = \mathbf{B}$ …..(3. 22a)

(5) $(\lambda^*)^T\ \mathbf{s}^* = 0$ …..(3. 22b)

(6) $\lambda_i^* \geq 0$

untuk setiap i = 1, 2, …, m …..(3. 22c)

Bentuk-bentuk kondisi optimalitas Kuhn-Tucker yang dinyatakan oleh sistem persamaan (3. 21) dan (3. 22) dapat disederhanakan, sebagai berikut :

(a) $\mathbf{A}\ \mathbf{X}^* + \mathbf{s}^* = \mathbf{B}$ …..(3. 23)

(b) $-2\ (\mathbf{X}^*)^T\mathbf{C} + (\lambda^*)^T\mathbf{A} - (\mathbf{v}^*)^T = \mathbf{D}^T$ …..(3. 24)

(c) $(\mathbf{X}^*)^T\ \mathbf{v}^* = 0,\qquad (\lambda^*)^T\ \mathbf{s}^* = 0$ …..(3. 25)

(d) $\mathbf{X}^* \geq 0,\qquad \mathbf{s}^* \geq 0,\qquad \lambda^* \geq 0,\qquad \mathbf{v}^* \geq 0$ …..(3. 26)

Oleh karena transpose dari matriks simetris **C** adalah matriks **C** itu sendiri, maka transpose untuk persamaan (3. 24) di atas akan memberikan

$-2\,\mathbf{C}\mathbf{X}^* + \mathbf{A}^T \lambda^* - \mathbf{v}^* = \mathbf{D}.$

Dengan demikian, kondisi optimalitas Kuhn-Tucker untuk persoalan Pemrograman Kuadrat dapat dinyatakan dalam suatu bentuk baku (*standart*) sebagai berikut :

Kondisi Optimalitas Pemrograman Kuadrat :

(a) $\mathbf{A}\,\mathbf{X}^* + \mathbf{s}^* = \mathbf{B}$

(b) $-2\,\mathbf{C}\mathbf{X}^* + \mathbf{A}^T \lambda^* - \mathbf{v}^* = \mathbf{D}$

(c) $(\mathbf{X}^*)^T\, \mathbf{v}^* = 0, \qquad (\lambda^*)^T\, \mathbf{s}^* = 0$

(d) $\mathbf{X}^* \geq 0, \qquad \mathbf{s}^* \geq 0, \qquad \lambda^* \geq 0, \qquad \mathbf{v}^* \geq 0$

Jadi dari penerapan syarat Kuhn-Tucker pada Pemrograman Kuadrat (3. 17) dapat disimpulkan bahwa pemecahan optimal bagi Pemrograman Kuadrat, jika ada, haruslah memenuhi persamaan matriks baru berikut:

$$\hat{\mathbf{A}}\ \mathbf{Y} = \mathbf{\beta} \qquad \text{.....(3. 27)}$$

di mana

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ -2\mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_2 & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\beta} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ \mathbf{s}^* \\ \mathbf{v}^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

dengan **B** adalah vektor yang berdimensi-m, **D** adalah vektor yang berdimensi-n, **A** adalah matriks (m x n), **C** adalah matriks simetris (n x n), $\mathbf{X}^*$ adalah vektor dari variabel keputusan x_j^* yang berdimensi-n, λ^* adalah vektor dari pengali Lagrange

λ_i^* yang berdimensi-m dan, $\mathbf{s}^*$ dan $\mathbf{v}^*$ adalah vektor-vektor dari variabel-variabel slack s_i^* dan μ_i^* yang berhubungan dengan kendala-kendala baru : $\mathbf{A}\,\mathbf{X}^* - \mathbf{B} \leq 0$ dan $-2\,\mathbf{C}\mathbf{X}^* - \mathbf{D} + \mathbf{A}^T \lambda^* \geq 0$ dan berturut-turut memiliki n dan m buah komponen, sedangkan $\mathbf{I}_1$ dan $\mathbf{I}_2$ berturut-turut adalah matriks berukuran (m x m) dan (n x n) dan $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$ dan $\mathbf{0}_3$ berturut-turut adalah matrik nol berukuran (m x n), (m x m) dan (n x m).

Di samping itu kondisi Kuhn-Tucker juga membutuhkan syarat pemecahan optimal (3. 17) harus memenuhi persamaan

$$(\mathbf{v}^*)^T \mathbf{X}^* + (\lambda^*)^T \mathbf{s}^* = 0 \quad \text{atau} \quad \hat{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Y} = 0 \qquad .....(3.\,28)$$

di mana

$$\hat{\mathbf{Y}}^T \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix}$$

dan kondisi Kuhn-Tucker juga mengharuskan bahwa semua variable adalah tak negatif, yaitu $\mathbf{Y} \geq 0$.

3. 4. 3 Metode Frank dan Wolfe

Metode ini adalah suatu algoritma delapan langkah untuk memecahkan (3. 27) dan (3. 28) yang didasarkan pada metode simpleks, yang secara otomatis mempertahankan semua variabel tak negatif. Vektor-vektor baru **P** dan $\mathbf{Y}_c$ (vektor **Y** yang baru) ditentukan dan kemudian diperbaharui secara sistematis sampai $\mathbf{Y}_c$ mengandung pemecahan optimal .

Untuk menggunakan metode simpleks, maka **ß** haruslah tak negatif. Oleh karena itu, jika terdapat komponen **ß** bernilai negatif, maka persamaan kendala yang bersangkutan harus dikalikan dahulu dengan –1.

Langkah 1

Tentukan suatu pemecahan dasar yang layak bagi (3. 27) dan nyatakan kedua-duanya sebagai $\mathbf{Y_c}$ dan **P**. Pemecahan yang demikian dapat diperoleh dengan menambahkan suatu variabel buatan pada tiap-tiap persamaan kendala dan kemudian menerapkan metode dua tahap untuk *meminumkan* M kali jumlah dari variabel-variabel buatan ini, di mana M menunjukkan suatu biaya hukuman (*penalty cost*) positif yang sangat besar. Perhatikan baris (C_j - Z_j), baris ini ini merupakan indikator optimalitas penyelesaian, berisi selisih antara C_j dan Z_j. Untuk masalah pemrograman maksimasi disini, penyelesaian dinyatakan optimal jika sudah tidak ada lagi unsur yang bernilai positif pada baris (C_j - Z_j) ini. Jika suatu pemecahan awal yang bebas dari variabel buatan tak dapat diperoleh, maka Pemrograman Kuadrat yang semula tidak memiliki pemecahan.

Langkah 2

Hitung $\boldsymbol{\emptyset} \equiv \overline{\mathbf{P}}^T\ \mathbf{Y}_c$. Jika $\boldsymbol{\emptyset} = 0$, maka $\mathbf{X}^*$ yaitu n komponen pertama dari $\mathbf{Y}_c$ merupakan pemecahan Pemrograman Kuadrat tersebut. Jika $\boldsymbol{\emptyset} \neq 0$, lanjutkan ke *Langkah 3*.

Langkah 3

Gunakan sebagai fungsi obyektif baru

$$\textit{Maksimumkan, } z = -\overline{\mathbf{P}}^{T}\,\mathbf{Y}$$

Terapkan satu iterasi dari metode simpleks pada fungsi obyektif yang terkait ini dengan himpunan variabel-variabel basis yang baru dan tabel kendala yang mendefinisikan variabel-variabel itu. Nyatakan pemecahan baru ini sebagai $\mathbf{Y}_c$ yang diperbaharui.

Langkah 4

Hitung $\mathbf{Ø}_c \equiv \overline{\mathbf{Y}_c}^{T}\,\mathbf{Y}_c$. Jika $\mathbf{Ø}_c = 0$, maka $\mathbf{X}^*$ yaitu n komponen pertama dari $\mathbf{Y}_c$ merupakan pemecahan Pemrograman Kuadrat tersebut. Jika $\mathbf{Ø}_c \neq 0$, lanjutkan ke *Langkah 5*.

Langkah 5

Hitung $\overline{\mathbf{P}}^{T}\,\mathbf{Y}_c$. Jika $\mathbf{P}^{T}\,\mathbf{Y}_c \leq \frac{1}{2}\,\mathbf{Ø}$, lanjutkan ke *Langkah 6*. Jika tidak, kembali ke *Langkah 3* dan lakukan pengulangan lain dari metode simpleks.

Langkah 6

Hitung

$$\alpha \equiv \frac{\overline{\mathbf{P}}^{T}(\mathbf{P} - \mathbf{Y}_c)}{(\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{Y}_c})^{T}(\mathbf{Y}_c - \mathbf{P})}$$

Jika $\alpha \geq 1$, lanjutkan ke *Langkah 7*; jika $\alpha < 1$, lanjutkan ke *Langkah 8*.

Langkah 7

Ambil $\mathbf{Ø} = \mathbf{Ø}_c$, $\mathbf{P} = \mathbf{Y}_c$ dan kembali ke *Langkah 3*.

Langkah 8

Hitung vektor $\mathbf{P} - \alpha\ (\mathbf{P} - \mathbf{Y}_c)$. Nyatakan vector ini sebagai P yang diperbaharui dan kembali *Langkah 2*.

Untuk lebih jelasnya akan diperlihatkan pada dua contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan solusi optimal dari persoalan Pemrograman Kuadrat di bawah ini:

Maksimumkan, $z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$

terhadap, $x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Masalah ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\textit{Maksimumkan, } z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{terhadap: } \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq 2$$

dan: $x_1, x_2 \geq 0$

Pemrograman tersebut sesuai dengan bentuk untuk persoalan maksimasi Pemrograman Kuadrat, dengan:

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Karena persoalan tersebut merupakan persoalan maksimasi maka matriks **C** haruslah semidefinit negatif, sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf).

Untuk membuktikan syarat tersebut dipenuhi atau tidak, maka ditentukan nilai-nilai eigen dari matriks simetris **C** sebagai berikut:

$$0 = \text{Det}(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

Solusi dari persamaan eigen diatas adalah, $\lambda_1 = -3$ dan $\lambda_2 = -1$. Karena λ_1 dan λ_2 adalah negatif, maka matriks **C** adalah semidefinit negatif, sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf).

Pemrograman Kuadrat di atas secara otomatis mendefinisikan semua informasi yang diperlukan untuk mengembangkan kondisi optimalitas Kuhn-Tucker berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 & : & 0 & 0 & : & 0 \\ \cdots & \cdots & : & \cdots & : & \cdots & \cdots & : & \cdots \\ 4 & 2 & : & 0 & : & -1 & 0 & : & 1 \\ 2 & 4 & : & 0 & : & 0 & -1 & : & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \ldots..(1)$$

dan (3. 28) menjadi

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \lambda_1 & x_1 & x_2 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad .....(2)$$

Pemecahan optimal bagi Pemrograman Kuadrat ini tercakup dalam pemecahan dari kondisi Kuhn-Tucker yang bersangkutan. Selanjutnya kondisi Kuhn-Tucker tersebut diselesaikan dengan Metode Frank dan Wolfe.

Sebagai langkah pendahuluan, agar memenuhi syarat simplex diperiksa apakah $b_i \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2, 3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - v_1 + \lambda_1 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - v_2 + \lambda_1 &= 6 \end{aligned}$$

Langkah 1

Untuk menghasilkan suatu pemecahan layak bagi sistem persamaan di atas, diperkenalkan suatu variabel buatan dalam tiap persamaan dan kemudian meminimumkan M kali jumlah variabel-variabel buatan tadi. Cara lain yaitu dengan mengingat bahwa s_1 dapat digunkan sebagai variabel dasar untuk memecahkan dua persamaan lainnya (s_1 = 2), sehingga variabel R_1 dan R_2 perlu ditambahkan pada dua persamaan terakhir. Dengan melakukannya dan kemudian meminimumkan $MR_1 + MR_2$ dengan metode dua tahap, maka dihasilkan Tablo 1, 2, 3 dan 4. Pada Langkah ini tabel iterasi dihentikan jika sudah tidak ada unsur yang bernilai positif pada baris (C_j - Z_j).

Tablo 1

	x_1	x_2	s_1	v_1	v_2	λ	R_1	R_2	
s_1	1	2	1	0	0	0	0	0	2
R_1	4	2	0	-1	0	1	1	0	4
R_2	2	4	0	0	-1	2	0	1	6
(Cj-Zj)	-6	-6	0	1	1	-3	0	0	-10

Tablo 2

	x_1	x_2	s_1	v_1	v_2	λ	R_1	R_2	
s_1	0	1,5	1	0,25	0	-0,25	-0,25	0	2
x_1	1	0,5	0	-0,25	0	0,25	0,25	0	4
R_2	0	3	0	0,5	-1	1,5	0	1	6
(Cj-Zj)	0	-3	0	-0,5	1	-1,5	-0,5	0	-10

Tablo 3

	x_1	x_2	s_1	v_1	v_2	λ	R_1	R_2	
x_2	0	1	-0,667	0,167	0	-0,167	-0,167	0	0,667
x_1	1	0	-0,333	-0,333	0	0,333	0,333	0	0,667
R_2	0	0	-2	0	-1	2	0	1	2
(Cj-Zj)	0	0	2	0	1	-2	0	-1	-2

Tablo 4

	x_1	x_2	s_1	v_1	v_2	λ	R_1	R_2	
x_2	0	1	0,5	0,167	-0,083	0	0,083	0,5	0,833
x_1	1	0	0	-0,333	-0,333	0	-0,167	0	0,333
λ	0	0	-1	0	-0,5	1	0,5	1	1
(Cj-Zj)	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pemecahan awal yang dibaca dari Tablo 4 adalah

$$[\ 0{,}333 \quad 0{,}833 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ]^T$$

yang selanjutnya dinyatakan sebagai **P** dan $\mathbf{Y_c}$ awal.

Langkah 2

$$\mathbf{Ø} = \overline{\mathbf{P}}^{T}\ \mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0{,}333 & 0{,}833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}833 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\mathbf{Ø} = 0$, maka Pemrograman Kuadrat tersebut telah mencapai pemecahan yang layak. Jadi $x_1 = 0{,}333$; $x_2 = 0{,}833$. Nilai optimal z dapat dihitung dan diperoleh $z = 4{,}16$.

Contoh 2:

Tentukan solusi optimal dari persoalan Pemrograman Kuadrat berikut:

Minimumkan: $z = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3$

terhadap: $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

dan: semua variabel tak negatif

Penyelesaian:

Pemrograman Kuadrat ini ekuivalen dengan

Maksimumkan::$z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$

terhadap: $-x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4$

dan: semua variabel tak negatif

atau, jika dinyatakan dalam bentuk matruks,

$$\textit{Maksimumkan}: z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\textit{terhadap}: \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq -4 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\textit{dan}: \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pemrograman (1) merupakan bentuk umum maksimasi Pemrograman Kuadrat (3. 17) dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \text{.....(2)}$$

Karena persoalan tersebut merupakan persoalan maksimasi maka matriks **C** haruslah semidefinit negatif, sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf).

Untuk membuktikan syarat perlu tersebut dipenuhi atau tidak, maka ditentukan nilai-nilai eigen dari matriks simetris **C** sebagai berikut:

$$0 = \text{Det}(\mathbf{C} - \lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & -5-\lambda & 6 \\ -3 & 6 & -10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-5-\lambda)(-10-\lambda) + (2)(6)(-3) + (-3)(2)(6) - (-3)(-5-\lambda)(-3)$$

$$- (6)(6)(-1-\lambda) - (2)(2)(-10-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - 16\lambda^2 - 16\lambda - 99$$

Solusi dari persamaan eigen diatas adalah, $\lambda_1 = -15{,}0189$, $\lambda_2 = -0{,}4905 + 1{,}0121\,i$ dan $\lambda_3 = -0{,}4905 - 1{,}0121\,i$. Karena λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah negatif, maka matriks **C** adalah semidefinit negatif, sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf).

Dengan menggunakan matriks-matriks yang didefinisikan pada (2), (3. 27) menjadi

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c:ccc:c} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & -4 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 10 & -12 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & -12 & 20 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{.....(1)}$$

dan (3. 28) menjadi

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \lambda_1 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad .....(2)$$

Persamaan (1) dan (2), bersama-sama dengan persyaratan bahwa semua variable tak negatif, membentuk kondisi Kuhn-Tucker.

Pemecahan optimal bagi program ini tercakup dalam pemecahan kondisi Kuhn-Tucker yang bersangkutan. Kondisi Kuhn-Tucker diselesaikan dengan Metode Frank dan Wolfe

Sebagai langkah pendahuluan, agar memenuhi syarat simplex diperiksa apakah $b_i \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2, 3. Karena tidak demikian keadaannya, maka persamaan-persamaan kendala pertama, ketiga dan keempat dalam (1) dikalikan dengan -1, yang memberikan sistem persamaan

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 &= 4 \\
2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - v_1 - \lambda_1 &= 2 \\
4x_1 - 10x_2 + 12x_3 + v_2 + 2\lambda_1 &= 6 \\
-6x_1 + 12x_2 - 20x_3 + v_3 + \lambda_1 &= 5
\end{aligned}$$

Langkah 1

Untuk menghasilkan suatu pemecahan layak bagi sistem persamaan diatas, kita dapat memperkenalkan suatu variable buatan dalam tiap-tiap persamaan dan kemudian meminimumkan M kali jumlah dari variable-variabel buatan tadi. Cara lainnya adalah dengan mengingat bahwa v_2 dan v_3 dapat digunakan sebagai variabel dasar untuk memecahkan dua persamaan terakhir (v_2 = 10 dan v_3 = 5), sehingga variabel-variabel buatan W_1 dan W_2 hanyalah perlu ditambahkan berturut-turut pada ke dua persamaan yang pertama. Dengan melakukannya dan kemudian meminimumkan M W_1 + M W_2 dengan metode dua tahap, maka kita hasilkan Tablo 1, 2 dan 3.

Tablo 1

		x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	v_2	v_3	λ	W_1	W_2	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	
W_1	M	1	2	1	-1	0	0	0	0	1	0	4
W_2	M	2	-4	6	0	-1	0	0	-1	0	1	2
v_2	0	4	-10	12	0	0	1	0	2	0	0	10
v_3	0	-6	12	-20	0	0	0	1	1	0	0	5
(Cj-Zj)		-3	2	-7	1	1	0	0	1	0	0	-6

Tablo 2

	x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	v_2	v_3	λ	W_1	
W_1	0,667	2,667	0	-1	0,167	0	0	0,167	0	3,667
x_3	0,333	-0,667	1	0	-0,167	0	0	-0,167	0	0,333
v_2	0	-2	0	0	2	1	0	4	1	6
v_3	0,667	-1,334	0	0	-3,334	0	1	-2,334	0	11,67
(Cj-Zj)	-0,667	-2,667	0	1	-0,167	0	0	-0,167	0	-3,667

Tablo 3

	x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	v_2	v_3	λ	
x_2	0,250	1	0	-0,375	0,0625	0	0	0,0625	1,375
x_3	0,500	0	1	-0,250	-0,125	0	0	-0,125	1,250
v_2	0,500	0	0	-0,750	2,125	1	0	4,125	8,750
v_3	0,999	0	0	0,500	-3,250	0	1	-2,251	13,50
(Cj-Zj)	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pemecahan awal yang dibaca dari Tabel 3 adalah

$$[\ 0 \quad 1{,}375 \quad 1{,}25 \quad 0 \quad 0 \quad 8{,}75 \quad 13{,}5 \quad 0\ ]^T$$

yang selanjutnya dinyatakan sebagai **P** dan $\mathbf{Y_c}$ awal.

Langkah 2

$$\text{Ø} = \overline{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} 0 & 8{,}75 & 13{,}5 & 0 & 0 & 1{,}375 & 1{,}25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}375 \\ 1{,}25 \\ 0 \\ 0 \\ 8{,}75 \\ 13{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 57{,}81 \neq 0$$

Langkah 3

Fungsi obyektif yang baru adalah *Memaksimumkan*

$$z = -\overline{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = -\begin{bmatrix} 0 & 8{,}75 & 13{,}5 & 0 & 0 & 1{,}375 & 1{,}25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= -0\,x_1 - 8{,}75\,x_2 - 13{,}5\,x_3 - 0\,s_1 - 0\,v_1 - 1{,}375\,v_2 - 1{,}25\,v_3 - 0\,\lambda_1$$

Dengan menggabungkan fungsi obyektif ini dengan sistem persamaan kendala dan variabel-variabel dasar yang diberikan dalam Tablo 3, diperoleh Tablo 4. Satu pengulangan dari metode simpleks menghasilkan Tablo 5, sehingga diperoleh pemecahan

$$[\ 2{,}5 \quad 0{,}75 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7{,}5 \quad 11{,}0\ ]^{\mathrm{T}}$$

Vektor ini menjadi $\mathbf{Y}_c$

Tablo 4

		x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	V_2	v_3	λ	
		0	-8,75	-13,5	0	0	-1,375	-1,25	0	
x_2	-8,75	0,250	1	0	-0,375	0,0625	0	0	0,0625	1,375
x_3	-13,5	0,500	0	1	-0,250	-0,125	0	0	-0,125	1,250
v_2	-1,375	0,500	0	0	-0,750	2,125	1	0	4,125	8,750
v_3	-1,25	0,999	0	0	0,500	-3,250	0	1	-2,251	13,50
(Cj-Zj)		10,87	0	0	-8,313	-2,283	0	0	1,718	57,81

Tablo 5

	x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	v_2	v_3	λ	
x_2	0	1	-0,500	-2,500	0,125	0	0	0,125	0,750
x_1	1	0	2,000	-0,500	-0,250	0	0	-0,250	2,500
v_2	0	0	-1,000	-0,500	2,25	1	0	4,250	7,500
v_3	0	0	-1,999	0,0006	-3,001	0	1	-2,001	11,00
(Cj-Zj)	0	0	-21,74	-2,878	0,4345	0	0	4,436	30,64

Langkah 4

$$\text{Ø}_c = \overline{\mathbf{Y}}_c^{T}\,\mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} 0 & 7{,}5 & 11{,}00 & 0 & 2{,}5 & 0{,}75 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7{,}5 \\ 11{,}0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 11{,}25 \neq 0$$

Langkah 5

$$\overline{\mathbf{P}}^{T}\,\mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} 0 & 8{,}75 & 13{,}5 & 0 & 0 & 1{,}375 & 1{,}25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7{,}5 \\ 11{,}0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$= 30{,}63$

yang mana tidak lebih kecil daripada atau sama dengan ½ **Ø** = ½(57,81) = 28,91

Langkah 3

Karena **P** belum diperbaharui, maka tujuannya tetap tidak berubah dan tabel yang masih menjadi perhatian tetap Tablo 5. Dengan menerapkan satu pengulangan dari metode simpleks pada table ini, maka diperoleh Tablo 6. Pemecahan yang didefinisikan oleh Tablo 6 menjadi $\mathbf{Y}_c$ yang diperbaharui, yaitu

$$\mathbf{Y}_c = [\ 2{,}941 \quad 0{,}5294 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14{,}53 \quad 1{,}765\ ]^T$$

Tablo 6

	x_1	x_2	x_3	s_1	v_1	v_2	v_3	λ	
x_2	0	1	-0,4706	-0,2353	0,0588	-0,0294	0	0	0,5294
x_1	1	0	1,941	-0,5294	-0,1177	0,0588	0	0	2,941
v_1	0	0	-0,2353	-0,1176	0,5294	0,2353	0	1	1,765
v_3	0	0	-2,470	-0,2347	-1,942	0,4708	1	0	14,53
(Cj-Zj)	0	0	-20,70	-2,356	-1,914	-1,044	0	0	22,81

Langkah 4

$$\text{Ø}_c = \overline{\mathbf{Y}}_c^{\,T}\mathbf{Y}_c$$

$$= [\ 0 \quad 0 \quad 14{,}53 \quad 1{,}765 \quad 2{,}941 \quad 0{,}5294 \quad 0 \quad 0\ ] \begin{bmatrix} 2{,}941 \\ 0{,}5294 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14{,}53 \\ 1{,}765 \end{bmatrix} = 0$$

Oleh karena itu, ketiga komponen pertama dari $\mathbf{Y}_c$ membentu pemecahan optimal bagi maksimasi Pemrograman Kuadrat awal; yaitu, $x_1^* = 2{,}941$, $x_2^* = 0{,}5294$ dan $x_3^* = 0$ dengan $z^* = 3{,}235$.

3. 2. 4 Solusi Pemrograman Kuadrat dengan Komputer

Pada sub bahasan ini akan diperlihatkan cetakan solusi komputer Pemrograman Kuadrat dengan Program GINO, yang tergabung dalam *Systems Installation (Copyright LINDO Systems Inc. 1994).*

Penyelesaian Pemrograman Kuadrat Program GINO untuk Contoh 1 dan Contoh 2 dapat dilihat pada Lampiran 1.

BAB IV

PENERAPAN PEMROGRAMAN KUADRAT DALAM INVESTASI SAHAM

Salah satu penerapan dari Pemrograman Kuadrat adalah untuk menyeleksi investasi saham di pasar modal sehingga diperoleh kombinasi saham yang memberikan tingkat keuntungan yang maksimum dengan resiko tertentu. Sebelumnya akan dibahas investasi saham dan analisis portofolio.

4. 1. Investasi Saham

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumberdaya lainnya yang dilakukan saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang (Tandelilin, hal. 3). Pihak-pihak yang melakukan investasi disebut investor. Contoh aktivitas investasi yang umum dilakukan adalah investasi sejumlah dana pada aset riil (tanah, emas, mesin atau bangunan), maupun aset finansial (deposito, saham ataupun tabungan).

Secara sederhana, saham dapat didefinisikan sebagai tanda penyertaan atau kepemilikan seseorang atau badan dalam suatu perusahaan. Selembar saham adalah kertas yang menyatakan bahwa pemilik kertas tersebut adalah pemilik (berapa pun porsinya) dari suatu perusahaan yang menerbitkan saham tersebut, sesuai dengan porsi kepemilikannya yang tertera pada saham (Widoatmodjo, hal 3).

Kelebihan investasi saham adalah kemampuannya untuk memberikan keuntungan yang tidak berhingga.. Di sini, keuntungan tidak berhingga ini bukan berarti keuntungan investasi saham sangat besar dalam rupiahnya, tetapi tergantung pada perusahaan yang menerbitkannya. Apabila perusahaan penerbit mampu menghasilkan laba yang besar, maka para pemegang sahamnya akan menikmati keuntungan yang besar juga, karena dengan laba yang besar itu bisa diharapkan tersedianya dana yang besar untuk dibayarkan sebagai deviden, yaitu bagian yang laba yang diberikan perusahaan kepada para pemegang sahamnya. Dengan kata lain bilamana perusahaan penerbit saham meraih laba yang besar, maka mungkin sekali para pemegang sahamnya mendapat keuntungan yang lebih tinggi dari investasi lain seperti deposito ataupun tabungan, yang dibatasi oleh suku bunga yang ditentukan. Selain deviden, keuntungan dari investasi saham adalah *capital gain,* yaitu kelebihan harga saat menjual dengan saat membeli.

Pada situasi ketidakpastian, investor hanya bisa mengharapkan tingkat keuntungan yang akan diperoleh. Mereka tidak bisa mengetahui dengan pasti tingkat keuntungan yang akan diperoleh

Di samping tingkat keuntungan yang diharapkan, dalam investasi dikenal juga konsep resiko. Resiko investasi diartikan sebagai kemungkinan terjadinya perbedaan antara tingkat keuntungan yang akan diperoleh dengan tingkat keuntungan yang diharapkan. Resiko investasi tersebut diukur dengan penyebaran nilai tingkat keuntungan di sekitar nilai tingkat keuntungan yang diharapkan. Ukuran penyebaran ini adalah variansi atau deviasi standar.

4. 2. Analisis Portofolio

Jika investor melakukan investasi saham, ia lebih dahulu menghitung hasil investasi yang akan diperoleh. Misalkan terdapat data perkembangan harga M saham selama N periode dan ketentuan deviden yang akan diperoleh, hasil dari investasi saham yang akan diperoleh dapat dinyatakan dengan rumus berikut:

$$R_{ij} = \frac{Div_i + H_j - H_o}{H_o} \qquad \text{.....(4. 1)}$$

dengan R_{ij} = tingkat keuntungan yang diperoleh dari investasi saham i (i = 1, 2, ..., M) pada periode ke j (j = 1, 2, ..., N)

Div_i = deviden yang diperoleh perlembar saham i

H_j = harga perlembar saham i pada periode ke j

H_o = harga perlembar saham i pada saat diperoleh

Investor mempertimbangkan tingkat keuntungan yang diharapkan dari investasi saham individual dengan mengalikan tingkat keuntungan yang diperoleh dengan kemungkinannya (probabilitas) kemudian seluruh hasil dijumlahkan. Besarnya probabilitas tingkat keuntungan yang diharapkan ditentukan oleh keyakinan investor. Hal tersebut bisa dinyatakan dengan rumus berikut:

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}\, R_{ij} \qquad \text{.....(4. 2)}$$

dengan $E(R_i)$ = tingkat keuntungan yang diharapkan dari investasi saham i

P_{ij} = probabilitas memperoleh tingkat keuntungan yang diharapkan dari investasi saham i pada periode ke j

R_{ij} = tingkat keuntungan yang diperoleh dari investasi saham i pada peiode ke j

N = banyaknya periode yang berlangsung

Sedangkan resiko investasi saham i dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\sigma_i^2 = E\left[\left((R_{ij}) - E(R_i)\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=j}^{N} P_{ij}\left[(R_{ij}) - E(R_i)\right]^2 \qquad .....(4.3)$$

Untuk memperjelas uraian di atas, berikut disajikan contoh data suatu investasi saham.

Contoh 4.1

Periode ke	Probabilitas	Tingkat keuntungan
1	0,20	0,30
2	0,60	0,20
3	0,20	0,10

Tabel 4.1 Data Tingkat Keuntungan Historis Saham I

Berdasarkan data di atas, maka tingkat keuntungan yang diharapkan akan diperoleh bisa dihitung dengan cara berikut:

$$E(R_i) = 0{,}20(0{,}30) + 0{,}60(0{,}20) + 0{,}20(0{,}10)$$

$$= 0{,}20 \text{ (atau 20\%)}$$

Sementara itu resiko saham I (yang ditunjukkan oleh besarnya variansi atau standar deviasi) dapat dicari melalui perhitungan berikut.

R_{ij}	$E(R_i)$	$[R_{ij} - E(R_i)]$	$[R_{ij} - E(R_i)]^2$	$P_{ij}[R_{ij} - E(R_i)]^2$
0,30	0,20	0,10	0,01	0,20(0,01) = 0,002
0,20	0,20	0	0	0,60(0) = 0
0,10	0,20	-0,10	0,01	0,20(0,01) = 0,002

Tabel 4.2 Perhitungan Resiko Saham I

$$\sigma_i^2 = \sum_{i=j}^{N} P_{ij} \left[(R_{ij}) - E(R_i)\right]^2$$

$$\sigma_i^2 = 0{,}002 \ + 0 + \ 0{,}002$$

$$= 0{,}004$$

$$\sigma_i = 0{,}063$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_i berdistribusi seragam diskret maka menurut Teorema 2. 8. 3.2 rumus (4. 2) menjadi:

$$E(R_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{ij}}{N} \qquad \text{.....(4. 4)}$$

Sedangkan perhitungan resiko investasinya dinyatakan dengan rumus berikut:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[R_{ij} - E(R_i)\right]^2}{N} \qquad \text{.....(4. 5)}$$

Contoh 4.2

Periode	Tingkat keuntungan
1	0,20
2	0,25
3	0,30
4	0,20
5	0,30
6	0,20

Tabel 4. 3 Tingkat keuntungan suatu investasi saham selama 6 periode

Pada persoalan di atas tingkat keuntungan yang diharapkan dihitung dengan membagi jumlah tingkat keuntungan selama 6 periode dengan jumlah periode. Yaitu,

$$E(R_i) = (0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}30 + 0{,}20)/6$$
$$= 0{,}242$$

sedangkan untuk perhitungan resiko investasinya diperoleh

$$\sigma_i^2 = 0{,}00201$$

$$\sigma_i = 0{,}045$$

Portofolio diartikan sebagai serangkaian kombinasi saham yang diinvestasikan dan dipegang oleh investor, baik perorangan maupun lembaga. Dengan melakukan kombinasi investasi saham, diharapkan investor bisa memperoleh tingkat keuntungan tertentu dengan resiko yang minimal. Usaha melakukan kombinasi investasi saham ini sering disebut juga diversifikasi.

Tingkat keuntungan portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari tingkat keuntungan masing-masing saham yang membentuk portofolio tersebut, dengan proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham sebagai faktor penimbang. Tingkat keuntungan portofolio dinyatakan dengan rumus:

$$R_p = \sum_{i=1}^{M} x_i \, R_{ij} \qquad \text{.....(4. 6)}$$

dengan R_p = tingkat keuntungan portofolio pada periode ke j

x_i = proporsi dana yang diinvestasikan pada investasi saham i

R_{ij} = tingkat keuntungan saham i pada periode kej.

Sedang tingkat keuntungan yang diharapkan dari suatu portofolio adalah rata-rata tertimbang dari tingkat keuntungan yang diharapkan dari masing-masing saham yang membentuk portofolio tersebut, dengan proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham sebagai faktor penimbang. Tingkat keuntungan yang diharapkan dari suatu portofolio dinyatakan dalam rumus:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{M} x_i \, E(R_i) \qquad \text{.....(4. 7)}$$

Setelah mengetahui cara perhitungan tingkat keuntungan yang diharapkan dari suatu portofolio, berikut akan dijelaskan cara penghitungan resiko portofolio. Resiko portofolio dapat diukur dengan besarnya deviasi standar atau variansi dari nilai-nilai tingkat keuntungan yang diharapkan saham-saham individual yang ada di dalamnya. Dengan demikian variansi tingkat keuntungan portofolio yang merupakan resiko portofolio dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_p^{\,2} = E\left[R_p - E(R_p)\right]^2 \qquad \text{.....(4. 8)}$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_i berdistribusi seragam diskret maka menurut Teorema 2. 8. 3. 2 rumus variansi pada (4. 8) dapat dinyatakan

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[R_p - E(R_p)\right]^2}{N} \qquad \text{.....(4. 9)}$$

Untuk pembahasan ini dimulai dari portofolio yang hanya terdiri dari dua saham (misal saham 1 dan saham 2). Tingkat keuntungan portofolio yang merupakan rata-rata tertimbang tingkat keuntungan saham 1 dan 2 adalah:

$$R_p = x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} \qquad .....(4.\ 10)$$

Dengan demikian tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut adalah:

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) \qquad .....(4.\ 11)$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_1 dan R_2 berdistribusi seragam diskret maka dengan mensubstitusi $E(R_1)$ dan $E(R_2)$ berturut-turut dengan $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{1j}}{N}$ dan $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{2j}}{N}$ pada rumus di atas diperoleh

$$E(R_p) = x_1 \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{1j}}{N} + x_2 \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{2j}}{N} \qquad .....(4.\ 12)$$

Sedangkan perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{\,2} &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
&= E[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} - (x_1(E(R_1))) + (x_2(E(R_2)))]^2 \\
&= E[x_1^2 (R_{1j} - E(R_1))^2 + 2x_1x_2(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2)) \\
&\qquad + x_2^2 (R_{2j} - E(R_2))^2] \\
&= x_1^2\ E[(R_{1j} - E(R_1))^2] + 2x_1x_2 E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))] \\
&\qquad + x_2^2\ E[(R_{2j} - E(R_2))^2] \\
&= x_1^2\ \sigma_1^2 + 2x_1x_2 E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))] + x_2^2\ \sigma_2^2
\end{aligned}$$

$E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))]$ memiliki nama tersendiri. Disebut sebagai kovariansi dan selanjutnya dinyatakan dengan notasi σ_{12}. Dengan mensubstitusi simbol σ_{12} untuk $E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))]$ maka persamaan di atas menjadi:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \ \sigma_1^2 + x_2^2 \ \sigma_2^2 + 2x_1x_2 \ \sigma_{12} \qquad \text{.....(4. 13)}$$

dengan τ_p^2 adalah variansi portofolio. σ_1^2 dan σ_2^2 berturut-turut adalah deviasi standar saham 1 dan saham 2. R_1, R_2 dan R_p berturut-turut adalah tingkat keuntungan saham 1, saham 2 dan portofolio. Sedangkan x_1 dan x_2 berturut-turut adalah proporsi saham 1 dan saham 2.

Kovariansi antara tingkat keuntungan saham 1 dan 2 yang dinyatakan dengan notasi σ_{12}, menunjukkan hubungan arah pergerakan dari nilai-nilai tingkat keuntungan saham 1 dan 2. Nilai kovariansi yang positif menunjukkan nilai-nilai dari dua variabel bergerak ke arah yang sama, yaitu jika satu meningkat, yang lainnya juga meningkat atau jika satu menurun, yang lainnya juga menurun. Nilai kovariansi yang negatif menunjukkan nilai-nilai dari dua variabel bergerak ke arah yang berlawanan, yaitu jika satu meningkat, yang lainnya menurun atau jika satu menurun, yang lainnya meningkat. Nilai kovariansi yang nol menunjukkan nilai-nilai dari dua variabel independen, yaitu pergerakan satu variabel tidak ada hubungannya dengan pergerakan variabel yang lainnya. Kovariansi tingkat keuntungan dari saham 1 dan 2 dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\sigma_{12} = \sum_{j=1}^{N} [R_{1j} - E(R_1)][R_{2j} - E(R_2)] \, P_j \qquad \text{.....(4. 14)}$$

Untuk probabilitas kejadian pada setiap periode (P_j) sama dengan kata lain R_1 dan R_2 berdistribusi seragam diskret, maka kovariansi saham 1 dan 2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_{12} \quad = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))}{N} \qquad \text{.....(4. 15)}$$

dengan N merupakan jumlah periode yang berlangsung.

Konsep dari kovariansi dapat dinyatakan dalam bentuk korelasi. Koefisien korelasi menunjukkan besarnya hubungan pergerakan antara dua variable relatif terhadap masing-masing deviasi standarnya. Dengan demikian, nilai koefisien korelasi antara saham 1 dan 2 (dinotasikan dengan ρ_{12}) dapat diperoleh dengan membagi nilai kovariansi dengan deviasi standar saham 1 dan deviasi standar saham 2:

$$\rho_{12} \quad = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \qquad \text{.....(4. 16)}$$

Nilai dari koefisien korelasi berkisar dari +1 sampai dengan –1. Nilai koefisien korelasi +1 menunjukkan korelasi positif sempurna, nilai koefisien korelasi 0 menunjukkan tidak ada korelasi dan nilai koefisien korelasi –1 menunjukkan korelasi negatif sempurna.

Dari rumus (4. 16), nilai dari kovarian tingkat keuntungan saham 1 dan 2 dapat dinyatakan dalam bentuk koefisien korelasi sebagai berikut:

$$\tau_{12} \quad = \rho_{12}\, \sigma_1\, \sigma_2 \qquad \text{.....(4. 17)}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan kovariansi dengan koefisien korelasi pada rumus (4. 17), rumus variansi portofolio pada rumus (4. 13) dapat dinyatakan dalam bentuk koefisien korelasi sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \qquad \text{.....(4. 18)}$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_1 dan R_2 berdistribusi seragam diskret maka perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \sum_{j=1}^{N} \frac{[R_p - E(R_p)]^2}{N} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1R_{1j} + x_2R_{2j} - (x_1E(R_1) + x_2E(R_2))]^2}{N} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2))]^2}{N} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{x_1^2(R_{1j} - E(R_1))^2}{N} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2}{N} \\
&\quad + 2x_1x_2 \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))}{N} \qquad \text{.....(4. 19)}
\end{aligned}$$

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1x_2 \sigma_{12}$$

di mana $\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))^2}{N}$, $\sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{2j} - E(R_2))^2}{N}$ merupakan variansi saham 1 dan 2 dan $\sigma_{12} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))}{N}$ merupakan kovariansi saham 1 dan 2 pada keadaan R_1 dan R_2 berdistribusi seragam diskret.

Untuk pembahasan portofolio terdiri dari tiga saham (saham 1, 2 dan 3) adalah sebagai berikut. Misal suatu portofolio terdiri dari 3 buah saham dengan proporsi masing-masing saham adalah sebesar x_1 , x_2 dan x_3 , berturut-turut untuk saham 1, 2 dan 3. Tingkat keuntungan portofolio yang merupakan rata-rata tertimbang tingkat keuntungan saham 1, 2 dan 3 adalah:

$$R_p = x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} + x_3 R_{3j} \qquad \text{.....(4. 20)}$$

Dengan demikian tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut adalah:

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) + x_3 E(R_3) \qquad \text{.....(4. 21)}$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_1, R_2 dan R_3 berdistribusi seragam diskret maka dengan mensubstitusi $E(R_1)$, $E(R_2)$ dan $E(R_3)$ berturut-turut dengan $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{1j}}{N}$, $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{2j}}{N}$ dan $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{3j}}{N}$ pada rumus di atas diperoleh

$$E(R_p) = x_1 \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{1j}}{N} + x_2 \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{2j}}{N} + x_3 \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{3j}}{N} \qquad \text{.....(4. 22)}$$

Sedangkan perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
&= E[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} + x_3 R_{3j} - (x_1(E(R_1)) + x_2(E(R_2)) + x_3(E(R_3)))]^2 \\
&= E[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + x_3(R_{3j} - E(R_3))]^2
\end{aligned}$$

$$= E\big[x_1^2(R_{1j} - E(R_1))^2 + x_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2 + x_3^2(R_{3j} - E(R_3))^2$$

$$+ 2x_1x_2(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))$$

$$+ 2x_1x_3(R_{1j} - E(R_1))(R_{3j} - E(R_3))$$

$$+ 2x_2x_3(R_{2j} - E(R_2))(R_{3j} - E(R_3))\ \big]$$

$$= x_1^2\ E\big[(R_{1j} - E(R_1))^2\big] + x_2^2\ E\big[(R_{2j} - E(R_2))^2\big]$$

$$+ x_3^2\ E\big[(R_{3j} - E(R_3))^2\big] + 2x_1x_2E\big[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))\big]$$

$$+ 2x_1x_3E\big[(R_{1j} - E(R_1))(R_{3j} - E(R_3))\big]$$

$$+ 2x_2x_3E\big[(R_{2j} - E(R_2))(R_{3j} - E(R_3))\big]$$

Dengan mensubstitusikan σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 untuk variansi saham 1, 2, 3 dan σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} untuk kovariansi antara saham 1 dan 2, 1 dan 3, 2 dan 3 diperoleh

$$\sigma_p^2 = x_1^2\ \sigma_1^2 + x_2^2\ \sigma_2^2 + x_3^2\ \sigma_3^2 + 2x_1x_2\ \sigma_{12} + 2x_1x_3\ \sigma_{13} + 2x_2x_3\ \sigma_{23} \qquad \text{.....(4. 23)}$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_1, R_2 dan R_3 berdistribusi seragam diskret maka perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{[R_p - E(R_p)]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1R_{1j} + x_2R_{2j} + x_3R_{3j} - (x_1E(R_1) + x_2E(R_2) + x_3E(R_3)]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + x_3(R_{3j} - E(R_3))]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{x_1^{\,2}(R_{1j} - E(R_1))^2}{N} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2^{\,2}(R_{2j} - E(R_2))^2}{N} +$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{x_3^{\,2}(R_{3j} - E(R_3))^2}{N} + 2x_1x_2 \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))}{N}$$

$$+ \; 2x_1x_3 \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{3j} - E(R_3))}{N}$$

$$+ \; 2x_2x_3 \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{2j} - E(R_2))(R_{3j} - E(R_3))}{N} \qquad \ldots..(4.\ 24)$$

$$\sigma_p^{\,2} = x_1^{\,2}\;\sigma_1^{\,2} + x_2^{\,2}\;\sigma_2^{\,2} + x_3^{\,2}\;\sigma_3^{\,2} + 2x_1x_2\;\sigma_{12} + 2x_1x_3\;\sigma_{13}$$

$$+ \; 2x_2x_3\;\sigma_{23}$$

di mana $\sigma_1^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))^2}{N}$, $\sigma_2^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{2j} - E(R_2))^2}{N}$, $\sigma_3^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{3j} - E(R_3))^2}{N}$ merupakan variansi saham 1, 2, 3 dan $\sigma_{12} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))}{N}$, $\sigma_{13} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{1j} - E(R_1))(R_{3j} - E(R_3))}{N}$, $\sigma_{23} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{2j} - E(R_2))(R_{3j} - E(R_3))}{N}$ merupakan kovariansi saham 1 dan 2, 1 dan 3, 2 dan 3 pada keadaan R_1, R_2 dan R_3 berdistribusi seragam diskret.

Sedangkan untuk pembahasan portofolio yang terdiri dari M saham adalah sebagai berikut.

Tingkat keuntungan portofolio dinyatakan dengan rumus (4. 6):

$$R_p = \sum_{i=1}^{M} x_i\; R_i$$

Tingkat keuntungan yang diharapkan dari suatu portofolio dinyatakan dalam rumus (4. 7):

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{M} x_i \, E(R_i)$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_i berdistribusi seragam diskret maka dengan mensubstitusi $E(R_i)$ dengan $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{ij}}{N}$ pada rumus di atas diperoleh

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{M} x_i \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{ij}}{N} \qquad \text{.....(4. 25)}$$

Sedangkan perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
&= E[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} + \ldots + x_M R_{Mj} \; -(\; (x_1 E(R_1)) + (x_2 E(R_2)) + \ldots \\
&\quad + (x_M E(R_M)) \;)]^2 \\
&= E[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots + x_M(R_{Mj} - E(R_M))]^2 \\
&= E[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots + x_M(R_{Mj} - E(R_M))] \\
&\quad [x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots + x_M(R_{Mj} - E(R_M))] \\
&= E[x_1^2(R_{1j} - E(R_1))^2 + x_1(R_{1j} - E(R_1))x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots \\
&\quad + x_1(R_{1j} - E(R_1))x_M(R_{Mj} - E(R_M)) \\
&\quad + x_2(R_{2j} - E(R_2))x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2 + \ldots
\end{aligned}$$

$$+ x_2(R_{2j} - E(R_2))x_M(R_{Mj} - E(R_M)) + \ldots$$

$$+ x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_1(R_{1j} - E(R_1))$$

$$+ x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots$$

$$+ x_M{}^2(R_{Mj} - E(R_M))^2 \ ]$$

$$= E[x_1{}^2(R_{1j} - E(R_1))^2 + x_2{}^2(R_{2j} - E(R_2))^2 + \ldots$$

$$+ x_M{}^2(R_{Mj} - E(R_M))^2 + x_1(R_{1j} - E(R_1))x_2(R_{2j} - E(R_2))$$

$$+ x_1(R_{1j} - E(R_1))x_3(R_{3j} - E(R_3)) + \ldots$$

$$+ x_1(R_{1j} - E(R_1))x_M(R_{Mj} - E(R_M))$$

$$+ x_2(R_{2j} - E(R_2))x_1(R_{1j} - E(R_1))$$

$$+ x_2(R_{2j} - E(R_2))x_3(R_{3j} - E(R_3)) + \ldots$$

$$+ x_2(R_{2j} - E(R_2))x_M(R_{Mj} - E(R_M)) + \ldots$$

$$+ x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_1(R_{1j} - E(R_1))$$

$$+ x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_2(R_{2j} - E(R_2)) + \ldots$$

$$+ x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_{M-1}(R_{M-1j} - E(R_{M-1})) \ ]$$

$$= [\ x_1{}^2\ E[(R_{1j} - E(R_1))^2] + x_2{}^2\ E[(R_{2j} - E(R_2))^2] + \ldots$$

$$+ x_M{}^2\ E[(R_{Mj} - E(R_M))^2]\ ] + [\ x_1x_2E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{2j} - E(R_2))]$$

$$+ x_1x_3E[(R_{1j} - E(R_1))(R_{3j} - E(R_3))] + \ \ldots$$

$$+ x_1x_ME[(R_{1j} - E(R_1))(R_{Mj} - E(R_M))]\ \ ]$$

$$+[\ x_2x_1E[(R_{2j} - E(R_2))(R_{1j} - E(R_1))]$$

$$+ x_2 x_3 E[(R_{2j} - E(R_2))(R_{3j} - E(R_3))] + \ldots$$

$$+ x_2 x_M E[(R_{2j} - E(R_2))(R_{Mj} - E(R_M))] \;] + \ldots$$

$$+ [\; x_M x_1 E[(R_{Mj} - E(R_M))(R_{1j} - E(R_1))]$$

$$+ x_M x_2 E[(R_{Mj} - E(R_M))(R_{2j} - E(R_2))] + \ldots$$

$$+ x_M x_{M-1} E[(R_{Mj} - E(R_M))(R_{M-1j} - E(R_{M-1}))] \;]$$

Dengan mensubstitusikan $\sigma_1^{\,2}$, $\sigma_2^{\,2}$, …, $\sigma_M^{\,2}$ untuk variansi saham 1, 2, …, M dan σ_{12}, σ_{13}, …, σ_{1M}, σ_{21}, σ_{23}, …, σ_{2M}, σ_{M1}, σ_{M2}, …, σ_{MM-1} untuk kovariansi antara saham 1 dan 2, 1 dan 3, …, 1 dan M, 2 dan 1, 2 dan 3, …, 2 dan M, M dan 1, M dan 2, …, M dan M-1 diperoleh

$$= [\; x_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + x_2\,\sigma_2^{\,2} + \ldots + x_M^{\,2}\sigma_M^{\,2} \;] + [\,[x_1 x_2\,\sigma_{12} + x_1 x_3\,\sigma_{13}$$

$$+ \ldots + x_1 x_M\,\sigma_{1M} \;] + [x_2 x_1 \sigma_{21} + x_2 x_3 \sigma_{23} + \ldots + x_2 x_M \sigma_{2M}] + \ldots$$

$$+ [x_M x_1 \sigma_{M1} + x_M x_2 \sigma_{M2} + \ldots + x_M x_{M-1} \sigma_{MM-1}]\,]$$

$$= \sum_{k=1}^{M} x_k^{\,2}\sigma_k^{\,2} + \left[\sum_{\substack{k=1 \\ l\neq 1}}^{M} x_1 x_l\,\sigma_{1l} + \sum_{\substack{k=2 \\ l\neq 2}}^{M} x_2 x_l\,\sigma_{2l} + \ldots \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{k=M \\ l\neq M}}^{M} x_M x_l\,\sigma_{Ml} \right]$$

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{k=1}^{M} x_k^{\,2}\sigma_k^{\,2} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ k\neq l}}^{M} x_k\,x_l\,\sigma_{kl} \qquad \ldots..(4.26)$$

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} x_k\,x_l\,\sigma_{kl} \qquad \ldots..(4.27)$$

Jika diasumsikan probabilitas kejadian pada setiap periode (P_{ij}) sama dengan kata lain R_i berdistribusi seragam diskret maka perhitungan resiko portofolio dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{[R_p - E(R_p)]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} + .. + x_M R_{Mj} - E(R_p)]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{[x_1(R_{1j} - E(R_1)) + x_2(R_{2j} - E(R_2)) + ... + x_M(R_{Mj} - E(R_M))]^2}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{x_1^2(R_{1j} - E(R_1))^2}{N} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_1(R_{1j} - E(R_1))x_2(R_{2j} - E(R_2))}{N} + \dots$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{x_1(R_{1j} - E(R_1))x_2(R_{2j} - E(R_2))}{N}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2(R_{2j} - E(R_2))x_1(R_{1j} - E(R_1))}{N} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2}{N}$$

$$+ \dots + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2(R_{2j} - E(R_2))x_M(R_{Mj} - E(R_M))}{N} + \dots$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_1(R_{1j} - E(R_1))}{N}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_2(R_{2j} - E(R_2))}{N} + \dots$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{x_M(R_{Mj} - E(R_M))x_M(R_{Mj} - E(R_M))}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{x_1^2(R_{1j} - E(R_1))^2}{N} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2}{N} + \dots$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_M{}^2(R_{Mj}-E(R_M))^2}{N}+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_1x_2(R_{1j}-E(R_1)(R_{2j}-E(R_2))}{N}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_1x_3(R_{1j}-E(R_1))(R_{3j}-E(R_3))}{N}+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_1x_M(R_{1j}-E(R_1))(R_{Mj}-E(R_M))}{N}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_2x_1(R_{2j}-E(R_2))(R_{1j}-E(R_1))}{N}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_2x_3(R_{2j}-E(R_2))(R_{3j}-E(R_3))}{N}+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_2x_M(R_{2j}-E(R_2))(R_{Mj}-E(R_M))}{N}+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_Mx_1(R_{Mj}-E(R_M))(R_{1j}-E(R_1))}{N}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_Mx_2(R_{Mj}-E(R_M))(R_{2j}-E(R_2))}{N}+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{x_Mx_{M-1}(R_{Mj}-E(R_M))(R_{M-1j}-E(R_{M-1}))}{N} \qquad \dots..(4.\ 28)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{x_kx_l(R_{kj}-E(R_k))(R_{lj}-E(R_l))}{N} \qquad \dots..(4.\ 29)$$

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}x_k\,x_l\,\sigma_{kl}$$

di mana $\sigma_{kl}=\sum_{j=1}^{N}\frac{(R_{kj}-E(R_k))(R_{lj}-E(R_l))}{N}$ merupakan kovariansi saham k dan l dan bentuk $\sigma_{kk}=\sigma_k{}^2$.

Dari persamaan (4. 27), dapat disimpulkan bahwa resiko portofolio akan dipengaruhi oleh:

(a) Resiko (deviasi standar) masing-masing saham

(b) proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham

(c) kovariansi antara keuntungan yang diharapkan dari berbagai saham yang dibandingkan dalam portofolio.

Persamaan (4. 27) dapat juga dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\sigma_p^{\,2} = \left[x_1 \ldots x_{\mathrm{M}}\right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{\mathrm{1M}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{\mathrm{M1}} & \ldots & \sigma_{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_{\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

Penulisan rumus untuk menghitung variansi portofolio seperti di atas, bagi bagi beberapa orang tampaknya cukup rumit. Tapi pada dasarnya, untuk memahami rumus tersebut kita bisa menggunakan bantuan matriks yang menunjukkan bagaimana proses menghitung variansi portofolio.

Sel yang menunjukkan perpotongan antara saham 1 dengan saham 1, isinya adalah $x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_1$. Sel yang menunjukkan perpotongan antara saham 1 dengan saham 2, isinya adalah $x_1 x_2 \sigma_{12}$. Sel yang menunjukkan perpotongan antara saham 1 dengan saham 3, isinya adalah $x_1 x_3 \sigma_{13}$. Demikian seterusnya. Kalau kita membentuk portofolio yang terdiri dari tiga saham, maka kita hanya perlu menjumlahkan sembilan sel tersebut. Kalau empat saham berarti enam belas sel, dan seterusnya. Perhatikan bahwa sel-sel yang berada dalam posisi diagonal menunjukkan variansi saham-saham yang membentuk portofolio tersebut.

	Saham 1	Saham 2	Saham 3	Saham M
Saham 1	$x_1\, x_1\, \sigma_1\, \sigma_1$	$x_1\, x_2\, \sigma_{12}$	$x_1\, x_3\, \sigma_{13}$	$x_1\, x_M\, \sigma_{1M}$
Saham 2	$x_2\, x_1\, \sigma_{21}$	$x_2\, x_2\, \sigma_2\, \sigma_2$	$x_2\, x_3\, \sigma_{23}$	$x_2\, x_M\, \sigma_{2M}$
Saham 3	$x_3\, x_1\, \sigma_{31}$	$x_3\, x_2\, \sigma_{32}$	$x_3\, x_3\, \sigma_3\, \sigma_3$	$x_3\, x_M\, \sigma_{3M}$
Saham M	$x_M\, x_1\, \sigma_{M1}$	$x_M\, x_2\, \sigma_{M2}$	$x_M\, x_3\, \sigma_{M3}$	$x_M\, x_M\, \sigma_M\, \sigma_M$

Gambar 4. 1 Matriks Variansi Portofolio

Dari rumus (4. 29), σ_{kl}, kovariansi saham k dan l dapat diuraikan lebih lanjut sebagai berikut:

$$\sigma_{kl} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{kj} - E(R_k))(R_{lj} - E(R_l))}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(R_{kj} - E(R_k)\right)\left(R_{lj} - E(R_l)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj}\, R_{lj} - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{lj}\, E(R_k) - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj}\, E(R_l)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} E(R_k)\, E(R_l)$$

Karena R_i berdistribusi seragam diskret maka menurut rumus (4. 4) $E(R_l)$ = $\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{lj}}{N}$, atau $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{lj} = E(R_l)$ dan $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj} = E(R_k)$. Sehingga rumus di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj}\, R_{lj} - E(R_l)\, E(R_k) - E(R_k)\, E(R_l) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} E(R_k) E(R_l)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj}\, R_{lj} - E(R_l)\, E(R_k) - E(R_k)\, E(R_l) + E(R_k)\, E(R_l)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} R_{kj}\, R_{lj} - E(R_l)\, E(R_k)$$

Karena menurut rumus (4. 4) $E(R_l) = \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{lj}}{N}$, maka rumus di atas menjadi

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_{kj}\, R_{lj} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{kj}}{N} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} R_{lj}}{N} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_{kj}\, R_{lj} - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_{kj} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_{lj} \right)$$

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_{kj}\, R_{lj} - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^{N} R_{kj} \right) \left(\sum_{j=1}^{N} R_{lj} \right) \qquad \text{.....(4. 30)}$$

Selanjutnya akan dibahas karakteristik tingkat keuntungan yang diharapkan dan resiko portofolio. Untuk mempermudah pemahaman, pembahasan dimulai dari pembentukan portofolio yang terdiri dari dua saham. Persoalan kemudian diperluas dengan pembentukan portofolio yang terdiri lebih dari dua saham.

Misal terdapat portofolio yang hanya terdiri dari dua saham (misal saham A dan saham B). Jika kita menginvestasikan seluruh dana yang tersedia pada dua saham tersebut maka

$$x_A + x_B = 1, \text{ atau}$$

$$x_B = 1 - x_A$$

Dengan demikian tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut adalah:

$$E(R_p) = x_A E(R_A) + x_B E(R_B)$$

$$E(R_p) = x_A E(R_A) + (1 - x_A) E(R_B) \qquad \text{.....(4. 31)}$$

Sementara itu resiko portofolio dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB}$$

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB}\right]^{1/2}$$

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_B^2 + 2x_A (1 - x_A) \sigma_{AB}\right]^{1/2}$$

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_B^2 + 2x_A (1 - x_A) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B\right]^{1/2} \qquad \text{.....(4. 32)}$$

Kita tahu bahwa koefisien korelasi (ρ_{AB}) berada antara +1 (maksimum) dan –1 (minimum). Kita mulai pembahasan dari kasus yang ekstrem kemudian bergerak ke kasus yang lebih moderat.Untuk mempermudah pembahasan di atas, berikut disajikan contoh data yang terdapat pada tabel 4. 4.

Keterangan	Tingkat Keuntungan yang Diharapkan	Deviasi Standar
Saham A	14%	6%
Saham B	8%	3%

Tabel 4. 4 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Saham A dan Saham B

Nampak bahwa saham A mempunyai tingkat keuntungan yang diharapkan lebih besar dan resiko yang lebih besar dari saham B

Kasus 1. Korelasi positif sempurna (ρ_{AB} = +1)

Apabila koefisien korelasi tingkat keuntungan yang diharapkan saham A dengan saham B sebesar +1, maka rumus untuk resiko portofolio (yaitu rumus (4. 32)) menjadi:

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\ \sigma_A\sigma_B\right]^{1/2} \quad \text{.....(4. 33)}$$

Rumus di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\sigma_p^2 = \left[x_A \sigma_A + (1-x_A)\sigma_B\right]^2 \text{, oleh karena itu:}$$

$$\sigma_p = x_A \sigma_A + (1-x_A)\sigma_B \quad \text{.....(4. 34)}$$

Sementara tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut dituliskan

$$E(R_p) = x_A E(R_A) + (1-x_A)E(R_B)$$

Pada rumus untuk deviasi standar di atas (4. 24), x_A dapat dinyatakan sebagai

$$x_A = \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} \quad \text{.....(4. 35)}$$

Dengan mensubstitusikan pada x_A pada rumus untuk tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut, diperoleh

$$E(R_p) = \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} \; E(R_A) + \left(1 - \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}\right) E(R_B)$$

$$E(R_p) = \left(E(R_B) - \frac{E(R_p) - E(R_B)}{\sigma_A - \sigma_B}\sigma_B\right) + \left(\frac{E(R_A) - E(R_B)}{\sigma_A - \sigma_B}\right)\sigma_p \quad \text{.....(4. 36)}$$

Jadi dengan koefisien korelasi sebesar +1, baik resiko maupun tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut kombinasi linier dari resiko dan tingkat keuntungan yang diharapkan dari masing-masing saham.Untuk contoh yang digunakan maka

$$E(R_p) = 14x_A + 8(1 - x_A) = 8 + 6x_A \quad \text{.....(4. 37)}$$

$$\sigma_p = 6x_A + 3(1 - x_A) = 3 + 3x_A \quad \text{.....(4. 38)}$$

di mana $E(R_p)$ dan σ_p dinyatakan dalam %.

Tergantung pada berapa besarnya nilai x_A , maka persamaan-persamaan tersebut bisa digambarkan pada Gambar 4. 2. Sedangkan nilai tingkat keuntungan yang diharapkan dan deviasi standar portofolio untuk berbagai nilai x_A disajikan pada Tabel 4.5.

Persamaan garis lurus pada Gambar 4. 2 tersebut dengan mudah bisa dihitung sebagai berikut. Pada rumus (4. 37), x_A dapat dinyatakan sebagai

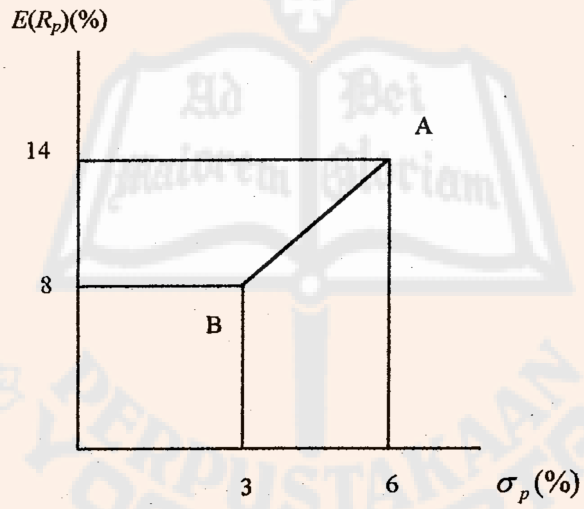
$$x_A = \frac{\sigma_p}{3} - 1 \quad \text{.....(4. 39)}$$

Masukkan nilai x_A pada rumus (4. 39) ke dalam rumus (4. 37) dan dengan menyederhanakannya akan diperoleh

$$E(R_p) = 2 + 2\sigma_p \qquad \text{.....(4. 40)}$$

Tabel 4. 5 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B dengan $\rho_{AB} = +1$

x_A	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(R_p)$	8,0	9,2	10,4	11,6	12,8	14,0
σ_p	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4	6,0



Gambar 4. 2. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar, jika $\rho_{AB} = +1$

Dari uraian di atas bisa disimpulkan bahwa apabila terdapat korelasi positif sempurna (+1) , maka diversifikasi tidak akan memberikan manfaat apa-apa, sama halnya dengan membeli saham individual yang membentuk portofolio tersebut.

Kasus 2. Korelasi negatif sempurna (ρ_{AB} = -1)

Misalkan sekarang kita menghadapi kasus ekstrem lainnya, yaitu koefisien korelasi antara tingkat keuntungan saham A dan B negatif sempurna (ρ_{AB} = -1). Dengan memasukkan keadaan tersebut pada rumus (4. 32), akan diperoleh

$$\sigma_p = \left[x_A^2\,\sigma_A^2 + (1-x_A)^2\,\sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\,\sigma_A\,\sigma_B\right]^{1/2} \quad .....(4.41)$$

$$\sigma_p^2 = \left[x_A\,\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B\right]^2, \text{ atau}$$

$$\sigma_p^2 = \left[-x_A\,\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B\right]^2, \text{ sehingga}$$

$$\sigma_p = \left[x_A\,\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B\right], \text{ atau} \quad .....(4.42)$$

$$\sigma_p = \left[-x_A\,\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B\right] \quad .....(4.43)$$

Sementara tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut dituliskan

$$E(R_p) = x_A\,E(R_A) + (1-x_A)E(R_B)$$

Karena kita menghitung akar untuk memperoleh persamaan σ_p dan karena akar dari bilangan negatif merupakan bilangan imajiner, maka persamaan-persamaan di atas hanya *valid* apabila nilai sisi kanan persamaan merupakan bilangan positif. Pengamatan terhadap kedua persamaan tersebut menunjukkan bahwa persamaan yang satu hanyalah merupakan perkalian antara persamaan satunya dengan angka –1. Jadi masing-masing persamaan hanya *valid* jika nilai sisi kanan positif. Karena persamaan yang satu akan positif kalau yang satunya negatif (kecuali kedua persamaan tersebut nilainya sama dengan nol), maka kita akan memperoleh solusi yang unik tentang resiko dan keuntungan yang yang diharapkan dari kombinasi A dan B. Persamaan-persamaan tersebut akan sangat mirip dengan persamaan pada saat ρ_{AB} = +1. Masing-masing juga akan menunjukkan garis lurus pada saat σ_p digambarkan terhadap x_A. Dengan demikian dapat diduga bahwa kita akan memperoleh dua persamaan garis lurus, masing-masing untuk σ_p.

Pada rumus untuk deviasi standar (4. 42) dan (4. 43), x_A dapat dinyatakan berturut-turut sebagai berikut:

$$x_A = \frac{\sigma_p + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}, \text{ atau} \qquad \text{.....(4. 44)}$$

$$x_A = -\frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \qquad \text{.....(4. 45)}$$

Dengan mensubstitusikan pada x_A pada rumus untuk tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut, diperoleh

$$E(R_p) = \frac{\sigma_p + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} E(R_A) + \left(1 - \frac{\sigma_p + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}\right) E(R_B)$$

$$E(R_p) = \left(E(R_B) - \frac{E(R_p) - E(R_B)}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B\right) + \left(\frac{E(R_A) - E(R_B)}{\sigma_A + \sigma_B}\right)\sigma_p \qquad \text{.....(4. 46)}$$

atau $$E(R_p) = -\frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} E(R_A) + \left(1 + \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}\right) E(R_B)$$

$$E(R_p) = \left(E(R_B) + \frac{E(R_p) - E(R_B)}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B\right) + \left(\frac{-E(R_A) + E(R_B)}{\sigma_A + \sigma_B}\right)\sigma_p \qquad \text{.....(4. 47)}$$

Nilai σ_p pada rumus (4. 42) atau (4. 43) selalu lebih kecil dari nilai σ_p pada saat ρ_{AB} = +1 untuk semua nilai x_A di antara 0 dan 1. Jadi resiko suatu portofolio selalu lebih kecil pada saat tingkat keuntungan sahamnya berkorelasi -1 dibandingkan dengan apabila tingkat keuntungan sahamnya berkorelasi +1. Dengan demikian mungkin untuk diperoleh suatu kombinasi yang akan menghilangkan resiko portofolio yang terdiri dari dua saham pada saat tingkat keuntungan saham tersebut berkorelasi negatif sempurna. Dengan menyamakan baik rumus (4. 42) maupun (4. 43) dengan nol, diperoleh suatu portofolio dengan $x_A = \sigma_B/(\sigma_B + \sigma_A)$ akan mempunyai resiko sama dengan nol. Karena $\sigma_B > 0$ dan $(\sigma_B + \sigma_A) > \sigma_B$, maka berarti bahwa $0 < x_A < 1$, atau bahwa portofolio yang memberikan resiko sebesar nol selalu terdiri dari investasi yang positif pada kedua saham tersebut.

Dengan menggunakan contoh di depan, dapat dihitung bahwa resiko minimum terjadi pada saat $x_A = 3/(3+6) = 1/3$. Untuk kasus korelasi negatif sempurna, diperoleh

$$E(R_p) = 8 + 6x_A \qquad \text{.....(4. 37)}$$

$$\sigma_p = 6x_A - 3(1-x_A) = 9x_A - 3; \text{ atau} \qquad \text{.....(4. 48)}$$

$$\sigma_p = -6x_A + 3(1-x_A) = -9x_A + 3 \qquad \text{.....(4. 49)}$$

di mana $E(R_p)$ dan σ_p dinyatakan dalam %.

Persamaan (4. 48) dan (4. 49) di atas dapat dinyatakan ke dalam bentuk lain, yaitu:

$$x_A = \frac{\sigma_p}{9} + \frac{1}{3} \qquad \text{.....(4. 50)}$$

$$x_A = -\frac{\sigma_p}{9} + \frac{1}{3} \qquad \text{.....(4. 51)}$$

Dengan memasukkan persamaan (4. 50) dan (4. 51) ke dalam persamaan (4. 37), maka akan diperoleh:

$$E(R_p) = 8 + 6x_A$$

$$E(R_p) = 8 + 6\left(\frac{\sigma_p}{9} + \frac{1}{3}\right)$$

$$E(R_p) = 8 + \frac{6\sigma_p}{9} + 2$$

$$E(R_p) = 10 + \frac{2\sigma_p}{3} \qquad \text{.....(4. 52)}$$

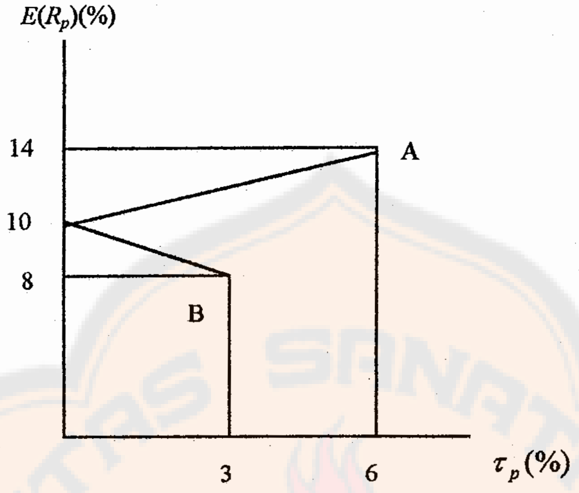
$$E(R_p) = 8 + 6x_A$$

$$E(R_p) = 8 + 6\left(-\frac{\sigma_p}{9} + \frac{1}{3}\right)$$

$$E(R_p) = 8 - \frac{6\sigma_p}{9} + 2$$

$$E(R_p) = 10 - \frac{2\sigma_p}{3} \qquad \text{.....(4. 53)}$$

Resiko selalu bernilai positif, sehingga hubungan antara tingkat keuntungan dengan deviasi standar portofolio jika tingkat keuntungan sahamnya berkorelasi negatif sempurna, persamaan (4. 52) dan (4. 53) akan berbentuk:



Gambar 4. 3. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio, jika ρ_{AB} = -1

Sedangkan Tabel 4. 6 menunjukkan nilai tingkat keuntungan yang diharapkan dan deviasi standar pada berbagai nilai x_A pada saat ρ_{AB} = -1

x_A	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(R_p)$	8,0	9,2	10,4	11,6	12,8	14,0
τ_p	3,0	1,2	0,6	2,4	4,2	6,0

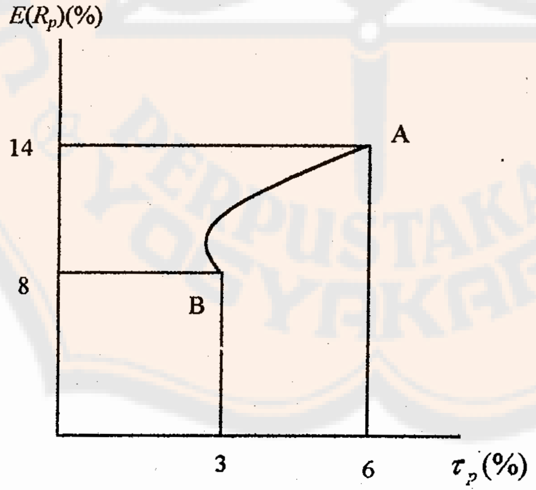
Tabel 4. 6 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B dengan ρ_{AB} = -1

Kasus 3. Korelasi moderat (ρ_{AB} berada di antara +1 dan –1)

Dalam kenyataannya kita tidak akan menjumpai dua saham yang tingkat keuntungan sahamnya berkorelasi sempurna, baik positif maupun negatif. Umumnya tingkat keuntungan saham mempunyai korelasi yang berada di antara +1 dan –1. Untuk mengetahui bagaimana bentuk garis yang menghubungkan antara saham A dan saham B seandainya $-1 < \rho_{AB} < +1$, berikut dengan bantuan Tabel Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B untuk $\rho_{AB} = 0$, $\rho_{AB} = 1/2$ dan $\rho_{AB} = -1/2$.

x_A	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(R_p)$	8,0	9,2	10,4	11,6	12,8	14,0
τ_p	3,0	2,7	3,0	3,8	4,8	6,0

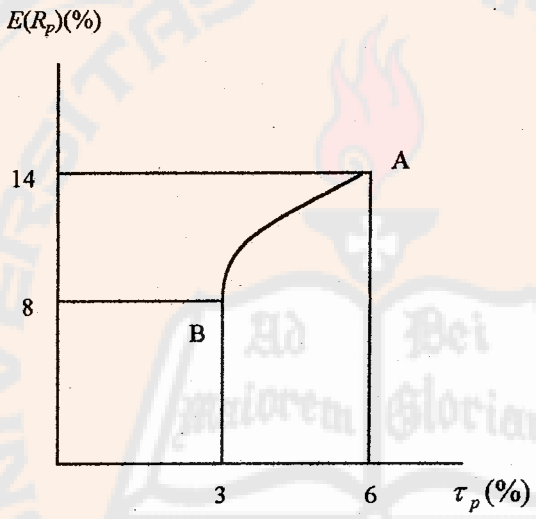
Tabel 4. 7 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B dengan $\rho_{AB} = 0$



Gambar 4. 4. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio, jika $\rho_{AB} = 0$

x_A	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(R_p)$	8,0	9,2	10,4	11,6	12,8	14,0
τ_p	3,0	3,2	3,6	4,3	5,1	6,0

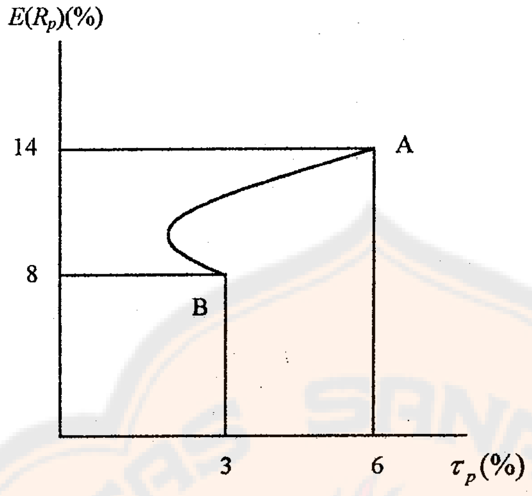
Tabel 4. 8 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B dengan $\rho_{AB} = 1/2$



Gambar 4. 5. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio, jika $\rho_{AB} = 1/2$

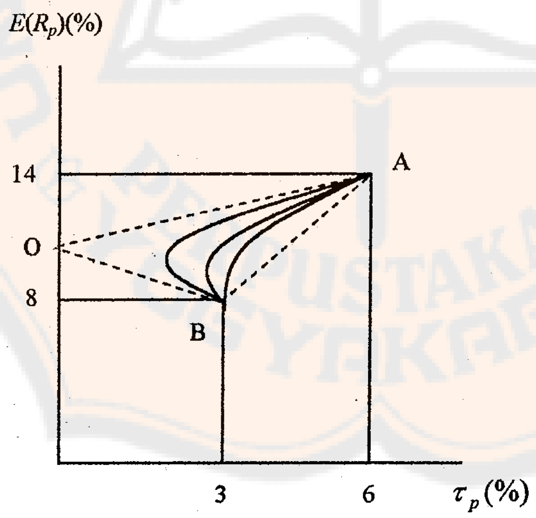
x_A	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(R_p)$	8,0	9,2	10,4	11,6	12,8	14,0
τ_p	3,0	2,0	2,2	3,2	4,5	6,0

Tabel 4. 9 Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio Saham A dan Saham B dengan $\rho_{AB} = -1/2$.



Gambar 4. 6. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar Portofolio, jika ρ_{AB} = -1/2

Selanjutnya Gambar (4. 2) hingga Gambar (4. 6) digabungkan. Penggabungan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. 7. Hubungan Tingkat Keuntungan yang Diharapkan dan Deviasi Standar pada Berbagai Koefisien Korelasi

Pada saat ρ_{AB} = +1, maka kombinasi portofolio-portofolio yang terdiri dari saham A dan B akan berada pada garis AB. Sedangkan pada saat ρ_{AB} = -1, kombinasi portofolio-portofolio akan menghubungkan garis AOB. Pada saat koefisien korelasi berada di antara +1 dan –1 kurva yang menghubungkan titik A dan B akan berada di antara kedua garis tersebut. Pada gambar nampak bahwa kelengkungan kurva tersebut akan selalu ke arah ke kiri. Semakin besar koefisien korelasinya semakin dekat ke garis lurus AB, dan semakin kecil koefisien korelasinya semakin dekat ke garis AOB.

Dari contoh pada kasus-kasus di atas bisa diambil beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Melalui diversifikasi, yaitu menginvestasikan dana pada beberapa saham,investor dapat memperoleh keuntungan yang lebih tinggi dengan resiko yang lebih rendah.
2. Diversifikasi akan sangat efektif menurunkan resiko investasi, jika koefisien korelasi antar saham dalam portofolio semakin rendah. Apabila terdapat koefisien korelasi yang positif, maka diversifikasi tidak akan mampu mengurangi resiko.

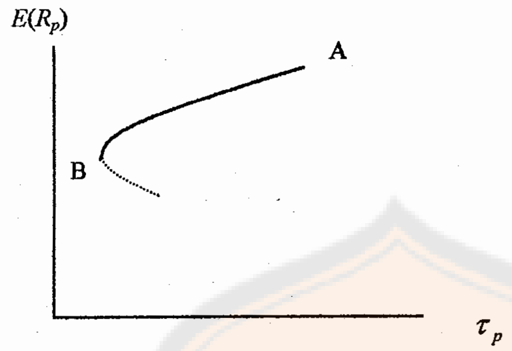
Setelah memahami cara penghitungan tingkat keuntungan dan resiko portofolio, berikut akan diperlihatkan cara membentuk portofolio yang efisien. Portofolio yang efisien adalah portofolio yang bila dibandingkan portofolio lainnya, memenuhi salah satu kriteria berikut:

1. Dengan resiko yang sama, mampu memberikan tingkat keuntungan yang lebih tinggi.
2. Mampu menghasilkan tingkat keuntungan yang sama, tetapi dengan resiko yang lebih rendah.

Suatu portofolio dikategorikan sebagai portofolio yang efisien (*efficient portfolio*) jika portofolio tersebut terletak pada permukaan yang efisien (*efficient frontier*). *Efficient frontier* adalah kurva yang menghubungkan *efficient portfolio* yang memiliki deviasi standar terendah dengan *efficient portfolio* yang memiliki tingkat keuntungan tertentu yang diinginkan.

Pada pembahasan di atas adalah portofolio yang terdiri dari dua saham. Kenyataannya, suatu portofolio dapat dibentuk dari kombinasi banyak saham. Tidak semua portofolio yang tersedia merupakan portofolio yang efisien . Hanya portofolio yang memberikan tingkat keuntungan yang diharapkan terbesar dengan resiko yang sama atau portofolio yang memberikan resiko terkecil dengan tingkat keuntungan pengharapan yang sama yang merupakan portofolio efisien. Portofolio efisien terletak pada *efficient frontier* yang merupakan kurva AB pada Gambar (4. 8).

Jika diasumsikan investor hanya mempertimbangkan resiko portofolio yang terkecil, maka titik B pada Gambar 4. 8 merupakan titik yang dipilih, yang merupakan portofolio yang optimal. Pada titik ini, kombinasi saham akan memberikan portofolio yang efisien dengan resiko terkecil.



Gambar 4. 8 *Efficient Frontier* Kombinasi Saham yang Tersedia

Titik portofolio optimal (titik B pada Gambar 4. 8) dapat ditentukan dengan menggunakan metode penyelesaian optimasi. Fungsi obyektif yang digunakan adalah fungsi resiko (deviasi standar) portofolio. Fungsi obyektif ini kemudian diminimalkan dengan memasang beberapa kendala. Kendala yang pertama adalah total proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham untuk seluruh N saham sama dengan 1 (atau dana yang diinvestasikan seluruhnya berjumlah 100%). Kendala yang kedua adalah jumlah dari seluruh tingkat keuntungan yang diharapkan masing-masing saham atau tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio, $E(R_p)$, tidak boleh lebih kecil dari suatu nilai tertentu yang diinginkan, L, dengan $E(R_p)$ dan L dinyatakan dalam persen. Kendala yang ketiga adalah proporsi dari masing-masing saham tidak boleh bernilai negatif.

Dengan demikian model penyelesaian optimasi ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\textit{Minimumkan} \quad \sigma_p^{\ 2} = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} x_k\, x_l\, \sigma_{kl}$$

$$\textit{terhadap} \quad \sum_{l=1}^{M} x_l = 1$$

$$E(R_p) \geq L$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M \qquad \ldots..(4.\ 44)$$

Masalah minimasi ini merupakan masalah Pemrograman Kuadrat. Selanjutnya dengan memberikan nilai yang berbeda untuk L maka kita akan mendapatkan serangkaian titik yang akan membentuk kurva yang merupakan *efficient frontier*.

4. 3. Penerapan Pemrograman Kuadrat dalam Investasi Saham

Sejumlah uang tertentu hendak diinvestasikan pada M buah investasi saham yang berbeda, yang dari data tingkat keuntungannya masing-masing diketahui. Penerapan analisis portofolio adalah menentukan berapa proporsi dana yang harus dialokasikan pada tiap saham agar keuntungan pengharapannya lebih besar daripada atau sama dengan jumlah terendah yang dapat diterima, L, sedemikian rupa sehingga variansi total tingkat keuntungan yang akan diperoleh dapat diminimumkan.

Pada subbahasan sebelumnya dimisalkan x_i (i = 1, 2, …, M) menunjukkan proporsi dana yang akan dialokasikan pada investasi saham i, misalkan R_{ij} menunjukkan hasil per dolar atau per rupiah yang diinvestasikan dari investasi saham i selama periode ke-j di masa lampau (j = 1, 2, …, N). Jika keuntungan di masa lampau merupakan petunjuk bagi penampilannya yang akan datang, dengan menggunakan asumsi R_i berdistribusi seragam diskret, maka tingkat keuntungan yang diharapkan dari investasi saham i menurut rumus (4. 4) adalah:

$$E(R_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{ij}}{N}$$

dan tingkat keuntungan yang diharapkan dari gabungan semua investasi saham tersebut atau tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio tersebut menurut rumus (4. 7) adalah:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{M} x_i \, E(R_i)$$

atau menurut rumus (4. 25)

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{M} x_i \frac{\sum_{j=1}^{N} R_{ij}}{N}$$

Karena ukuran dari variansi total tingkat keuntungan yang diharapkan dari portofolio pada masa yang akan datang berdasarkan pada tingkat keuntungan saham-sahamnya pada masa lalu, maka menurut rumus (4. 9) adalah:

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{[R_p - E(R_p)]^2}{N}$$

atau menurut rumus (4. 27)

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} x_k \, x_l \, \sigma_{kl}$$

di mana kovariansi σ_{kl} menurut (4. 30) dapat dinyatakan dalam

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} R_{kj}\, R_{lj} - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{j=1}^{N} R_{kj}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} R_{lj}\right)$$

Karena dari (4. 9) jelas bahwa ${\sigma_p}^2$ merupakan suatu jumlah dari suku-suku kuadrat, maka ${\sigma_p}^2$ bernilai tak negatif untuk semua harga $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_M$. Ini berarti bahwa matriks simetris C $\equiv \sigma_{kl}$ pada rumus (4. 27), yang juga disebut sebagai matriks kovariansi merupakan matriks yang semi-definit positif.

Menurut (4. 44) persoalan analisis portofolio dapat dimodelkan dengan Pemrograman Kuadrat sebagai berikut:

Minimumkan, $${\sigma_p}^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} x_k\, x_l\, \sigma_{kl}$$

$$= \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\, \sigma\, \mathbf{X}$$

terhadap, $$\sum_{i=1}^{M} x_i = 1$$

$$E(R_p) \geq L$$

dan, $$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M$$

Nilai L biasanya diambil di sekitar nilai rata-rata $E(R_i)$. Hal ini karena jika L terlalu kecil, artinya tingkat keuntungan yang diharapkan sangat kecil, sedangkan jika L terlalu besar berarti tingkat keuntungan yang diharapkan sangat besar dan resiko tidak dapat diminimumkan.

Kendala $x_1 + x_2 + \ldots + x_M = 1$ ekuivalen dengan dua ketidaksamaan

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_M \leq 1 \quad \text{dan} \quad - x_1 - x_2 - \ldots - x_M \leq 1$$

Sehingga kendala di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N \le 1$$

$$- x_1 - x_2 - \dots - x_N \le 1$$

$$-E(R_1)x_1 - E(R_2)x_2 - \dots - E(R_M)x_M \le L$$

Dengan demikian persoalan analisis portofolio tersebut dapat dinyatakan secara matriks sebagai berikut:

Minimumkan,

$$\sigma_p^{\,2} = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{M1} & \dots & \sigma_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_M \end{bmatrix}$$

terhadap,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ -E(R_1) & -E(R_2) & \dots & -E(R_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_M \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -L \end{bmatrix}$$

dan, $x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$

Dengan mengambil fungsi $z = -\sigma_p^{\,2}$, maka sistem pemodelan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

Maksimumkan, $z = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{X}$, dengan $\mathbf{C} = -\sigma$

terhadap, $\mathbf{A}\,\mathbf{X} \le \mathbf{B}$

dan $x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$

dengan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ -E(R_1) & -E(R_2) & \dots & -E(R_M) \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -L \end{bmatrix}$

Sistem persamaan diatas merupakan bentuk umum maksimasi Pemrograman Kuadrat (3. 17) dengan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Penyelesaian persoalan Pemrograman Kuadrat ini dapat diperoleh melalui penerapan kondisi Kuhn-Tucker yang kemudian diselesaikan dengan Metode Frank dan Wolfe.

Contoh sederhana analisa perhitungan dalam investasi saham di pasar modal dapat dipelajari pada kasus berikut:

Seseorang yang ingin menginvestasikan uang sebanyak \$ 10.000 telah menemukan tiga buah perusahaan investasi uang yang memberi peluang baginya untuk berkembang. Selama 5 tahun terakhir, pembayaran deviden (dalam dolar per dolar yang diinvestasikan) adalah seperti yang diperlihatkan dalam Tabel 4.10, dan orang tersebut menganggapnya sebagai pertanda mengenai apa yang diharapkan dalam masa akan datang. Ia mempunyai dua persyaratan: (1) tingkat keuntungan yang diharapkan akan diperoleh tidak boleh lebih kecil dari pada \$ 800 (jumlah \$ 10.000 akan mendapat bunga 8 persen) dan (2) perbedaan antara pembayaran deviden per tahun dalam masa yang akan datang haruslah sekecil mungkin. Berapa banyak jumlah uang yang harus diinvestasikannya dalam tiap-tiap saham agar kedua persyaratan di atas terpenuhi ?

	Tahun				
	1	2	3	4	5
Saham 1	0,10	0,04	0,12	0,13	0,06
Saham 2	0,06	0,09	0,06	0,05	0,09
Saham 3	0,17	0,01	0,11	0,19	0,02

Tabel 4. 10 Tingkat Keuntungan Saham 1, 2 dan 3 selama 5 tahun terakhir

Penyelesaian:

Lebih dulu ditentukan matriks kovariansi untuk data-data dalam Tabel 4. 10, yang merupakan laba (dalam sen) per dolar yang ditanamkan.

Untuk menerapkan rumus (4. 30), akan lebih mudah apabila data-data tersebut didaftarkan kembali seperti pada Tabel 4. 11

k	R_{1k}	R_{2k}	R_{3k}	R_{1k}^2	R_{2k}^2	R_{3k}^2	$R_{1k}\,R_{2k}$	$R_{1k}\,R_{3k}$	$R_{2k}\,R_{3k}$
1	0,10	0,06	0,17	0,0100	0,0036	0,0289	0,0060	0,0170	0,0102
2	0,04	0,09	0,01	0,0016	0,0081	0,0001	0,0036	0,0004	0,0009
3	0,12	0,06	0,11	0,0144	0,0036	0,0121	0,0072	0,0132	0,0066
4	0,13	0,05	0,19	0,0169	0,0025	0,0361	0,0065	0,0247	0,0085
5	0,06	0,09	0,02	0,0036	0,0081	0,0004	0,0054	0,0012	0,0018
TOTAL	0,45	0,35	0,50	0,0465	0,0259	0,0776	0,0287	0,0565	0,0290

Tabel 4. 11 Perhitungan Kovariansi

Dari Tabel 4. 11

$$\sigma_{11} = \sigma_1^2 = \frac{0{,}0465}{5} - \frac{(0{,}45)^2}{25} = 0{,}0012$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2^2 = \frac{0{,}0259}{5} - \frac{(0{,}35)^2}{25} = 0{,}00028$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3^2 = \frac{0{,}0776}{5} - \frac{(0{,}50)^2}{25} = 0{,}00552$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{0{,}0287}{5} - \frac{(0{,}45)(0{,}35)}{25} = -0{,}00056$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{0{,}0565}{5} - \frac{(0{,}45)(0{,}50)}{25} = 0{,}0023$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{0{,}0290}{5} - \frac{(0{,}35)(0{,}50)}{25} = -0{,}0012$$

dan dengan demikian

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0{,}0012 & -0{,}00056 & 0{,}0023 \\ -0{,}00056 & 0{,}00028 & -0{,}0012 \\ 0{,}0023 & -0{,}0012 & 0{,}00552 \end{bmatrix}$$

Dari Tabel 4. 11, dengan menggunakan rumus (4. 4) juga diperoleh

$$E(R_1) = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09\$$$

$$E(R_2) = \frac{0{,}35}{5} = 0{,}07\$$$

$$E(R_3) = \frac{0{,}50}{5} = 0{,}1\$$$

Berdasarkan persyaratan (1) maka besar L = 0,08$ sehingga kendala pada (4. 44) menjadi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$0{,}09x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}08 \qquad \text{.....(4. 45)}$$

Kendala $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ekuivalen dengan dua ketidaksamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \text{ dan } -x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$

Sehingga himpunan kendala dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$

$$-0{,}09x_1 - 0{,}07x_2 - 0{,}1x_3 \leq -0{,}08$$

Dengan menggunakan kovariansi-kovariansi yang telah diperoleh maka fungsi obyektifnya adalah

$$\textit{Minimumkan, } z = 0{,}0012\, x_1^2 + 0{,}00028\, x_2^2 + 0{,}00552\, x_3^2 - 0{,}00056\, x_1 x_2 + 0{,}0023\, x_1 x_3 - 0{,}00056\, x_2 x_1 - 0{,}0012\, x_2 x_3 + 0{,}0023\, x_3 x_1 - 0{,}0012\, x_3 x_2 \qquad \text{.....(4. 46)}$$

Persamaan (4. 45) dan (4. 46) ditambah dengan persyaratan tak negatif pada variable-variabelnya merupakan bentuk persoalan pemrograman kuadrat.

Dengan mengalikan fungsi obyektif dengan –1, maka diperoleh bentuk maksimasi Pemrograman Kuadrat berikut:

$$\textit{Maksimumkan, } z = -0{,}0012 x_1^2 - 0{,}00028\, x_2^2 - 0{,}00552\, x_3^2 + 0{,}00056\, x_1 x_2 - 0{,}0023\, x_1 x_3 + 0{,}00056\, x_2 x_1 + 0{,}0012\, x_2 x_3 - 0{,}0023\, x_3 x_1 + 0{,}0012\, x_3 x_2$$

$$\begin{aligned} \textit{terhadap, } \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & -0{,}09\, x_1 - 0{,}07 x_2 - 0{,}1 x_3 \leq -0{,}08 \\ \textit{dan, } \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

atau, dinyatakan dalam bentuk matriks

Maksimumkan,

$$z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}0012 & 0{,}00056 & -0{,}0023 \\ 0{,}00056 & -0{,}00028 & 0{,}0012 \\ -0{,}0023 & 0{,}0012 & -0{,}00552 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

terhadap,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -0{,}09 & -0{,}07 & -0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}08 \end{bmatrix}$$

dan, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

merupakan bentuk standar maksimasi Pemrograman Kuadrat dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -0{,}09 & -0{,}07 & -0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}08 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0{,}0012 & 0{,}00056 & -0{,}0023 \\ 0{,}00056 & -0{,}00028 & 0{,}0012 \\ -0{,}0023 & 0{,}0012 & -0{,}00552 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pemrograman Kuadrat merupakan bentuk maksimasi, berdasarkan (4. 45) maka Matriks **C** merupakan matriks semi-definit negatif sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf). (Syarat Kondisi Kuhn Tucker)

Lebih lanjut untuk membuktikan syarat tersebut dipenuhi atau tidak, maka ditentukan nilai-nilai eigen dari matriks simetris **C** sebagai berikut:

$$0 = \mathrm{Det}(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0{,}0012-\lambda & 0{,}00056 & -0{,}0023 \\ 0{,}00056 & -0{,}00028-\lambda & 0{,}0012 \\ -0{,}0023 & 0{,}0012 & -0{,}00552-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-0{,}0012-\lambda)(-0{,}00028-\lambda)(-0{,}00552-\lambda)+(0{,}00056)(0{,}0012)(-0{,}0023)$$

$$+ (-0{,}0023)(0{,}00056)(0{,}0012) - (-0{,}0023)(-0{,}00028-\lambda)(-0{,}0023) -$$

$$(0{,}0012)(0{,}0012)(-0{,}0012-\lambda) - (0{,}00056)(0{,}00056)(-0{,}00552-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - 0{,}0070\lambda^2 - 0{,}000001462\lambda - 0{,}000000000005648$$

Solusi dari persamaan eigen diatas adalah, λ_1 = - 0,006785, λ_2 = - 0,000211 dan $\lambda_3 = -0{,}000004$. Karena λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah negatif, maka matriks **C** adalah semi-definit negatif (syarat bentuk kuadratis), sehingga fungsi obyektif, *z*, adalah cekung (konkaf).

Dengan menggunakan matriks-matriks yang didefinisikan di atas maka (3. 27) menjadi

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}09 & -0{,}07 & -0{,}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0{,}0024 & -0{,}00112 & 0{,}0046 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -0{,}09 \\ -0{,}00112 & 0{,}00056 & -0{,}0024 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -0{,}07 \\ 0{,}0046 & -0{,}0024 & 0{,}01104 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -0{,}1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}08 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

.....(1)

dan (3. 28) menjadi

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad .....(2)$$

Persamaan (1) dan (2), bersama-sama dengan persyaratan bahwa semua variabel tak negatif, membentuk kondisi Kuhn-Tucker.

Pemecahan optimal bagi persoalan Pemrograman Kuadrat ini tercakup dalam pemecahan kondisi Kuhn-Tucker yang bersangkutan. Kondisi Kuhn-Tucker akan diselesaikan dengan Metode Frank dan Wolfe

Sebagai langkah pendahuluan, agar memenuhi syarat simplex diperiksa apakah $b_i \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2, 3. Karena b_2 dan b_3 negatif, maka persamaan-persamaan kendala kedua dan ketiga dalam (1) dikalikan dengan -1, yang memberikan sistem persamaan

$$
\begin{array}{llllllllllll}
x_1 & + x_2 & + x_3 & + s_1 & & & & & & & = & 1 \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & - s_2 & & & & & & & = & 1 \\
0{,}09x_1 & + 0{,}07x_2 & + 0{,}1x_3 & - s_3 & & & & & & & = & 0{,}08 \\
0{,}0024x_1 & - 0{,}00112x_2 & + 0{,}0046x_3 & & - u_1 & & + v_1 & - v_2 & - 0{,}09v_3 & & = & 0 \\
-0{,}00112x_1 & + 0{,}00056x_2 & - 0{,}0024x_3 & & & - u_2 & + v_1 & - v_2 & - 0{,}07v_3 & & = & 0 \\
0{,}0046x_1 & - 0{,}0024x_2 & + 0{,}01104x_3 & & & - u_3 & + v_1 & - v_2 & - 0{,}1v_3 & & = & 0
\end{array}
$$

Langkah 1

Untuk menghasilkan suatu pemecahan layak bagi sistem persamaan diatas, kita dapat memperkenalkan suatu variabel buatan dalam tiap-tiap persamaan dan kemudian meminimumkan M kali jumlah dari variable-variabel buatan tadi. Cara lainnya adalah dengan mengingat bahwa s_1 dapat digunakan sebagai variabel dasar dasar untuk memecahkan lima persamaan terakhir (s_1 = 1), sehingga variabel-variabel buatan W_1, W_2, W_3, W_4 dan W_5 hanyalah perlu ditambahkan berturut-turut pada kelima persamaan terakhir. Dengan melakukannya dan kemudian meminimumkan M W_1 + M W_2 + M W_3 + M W_4 + M W_5 dengan metode dua tahap, maka kita hasilkan Tablo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dan 9 (lihat Lampiran 2) Pemecahan awal yang dapat dibaca dari Tablo 9 adalah

$$[0{,}196454\ \ 0{,}768062\ \ 0{,}085547\ \ -0{,}069710\ \ 0{,}050064\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4.77\text{E}-06\ \ 0]^T$$

Langkah 2

$$\mathbf{Ø} = \overline{\mathbf{P}}^{T}\ \mathbf{Y_c}$$

=

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4.77E-06 & 0 & 0{,}1965 & 0{,}7681 & 0{,}0855 & -0{,}0697 & 0{,}0501 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1965 \\ 0{,}7681 \\ 0{,}0855 \\ -0{,}0697 \\ 0{,}0501 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.77E-06 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0{,}047835 \neq 0$$

Langkah 3

Fungsi obyektif yang baru adalah *Memaksimumkan*

$z = -\, \overline{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4.77E-06 & 0 & 0{,}1965 & 0{,}7681 & 0{,}0855 & -0{,}0697 & 0{,}0501 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$= -\ 0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - 0s_1 - 4.77E\text{-}06s_2 - 0s_3 - 0{,}196454u_1$

$-0{,}768062u_2 - 0{,}085547u_3 + 0{,}069710v_1 - 0{,}050064v_2 - 0v_3$

Dengan menggabungkan fungsi obyektif ini dengan sistem persamaan kendala dan variabel-variabel dasar yang diberikan dalam Tablo 9 (lihat Lampiran 2), diperolah Tablo 10 (lihat Lampiran 2) satu kali pengulangan dari metode simpleks dihasilkan Tablo 11 (lihat Lampiran 2) sehingga diperoleh pemecahan

$$[0{,}196867\ \ 0{,}767698\ \ 0{,}085430\ \ -0{,}069683\ \ 0{,}049996\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 6.27E-06]^T$$

Vektor ini menjadi $\mathbf{Y}_c$ yang diperbaharui.

Langkah 4

$$\varnothing_c = \overline{\mathbf{Y}_c}^T \mathbf{Y}_c$$

$$= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 6.27E-05\ \ 0{,}196867\ \ 0{,}767698\ \ 0{,}085431\ \ -0{,}069683\ \ 0{,}049996\ \ 0] \begin{bmatrix} 0{,}196867 \\ 0{,}767698 \\ 0{,}085431 \\ -0{,}06968 \\ 0{,}049996 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.27E-05 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

Karena, untuk masalah maksimasi, penyelesaian dinyatakan optimal jika sudah tidak ada lagi unsur bertanda positif pada C_j - Z_j dilakukan satu pengulangan lagi dari metode simpleks dan diperoleh Tablo 12 (lihat Lampiran 2).

Dan, ketiga komponen pertama dari $\mathbf{Y}_c$ membentuk pemecahan optimal bagi maksimasi Pemrograman Kuadrat awal, yaitu $x_1^* = 0{,}5$, $x_2^* = 0{,}5$ dan $x_3^* = 0$ dengan $z^* = 0{,}000090$.

Jika disajikan secara lengkap adalah sebagai berikut:

$E(R_p)$	τ_p^2	τ_p	x_1	x_2	x_3
0,08	0,000090	0,009487	0,5	0,5	0

Artinya dengan investasi sebesar 10.000$ agar dapat memperoleh keuntungan sebesar 800$ (0,08 x 10.000), orang tersebut dapat meminimumkan resiko atau penyimpangan tingkat pengembalian yang diharapkan hingga sebesar 94,87$ (0,009487 x 10.000) dengan membagi dananya sebesar 5.000$ (0,5 x 10.000) pada saham 1 dan saham 2 sedangkan untuk saham 3 sama sekali tidak ada dana yang diinvestasikan (0 x 10.000).

Sebagai perbandingan hasil perhitungan untuk contoh di atas digunakan Program GINO (lihat Lampiran 2).

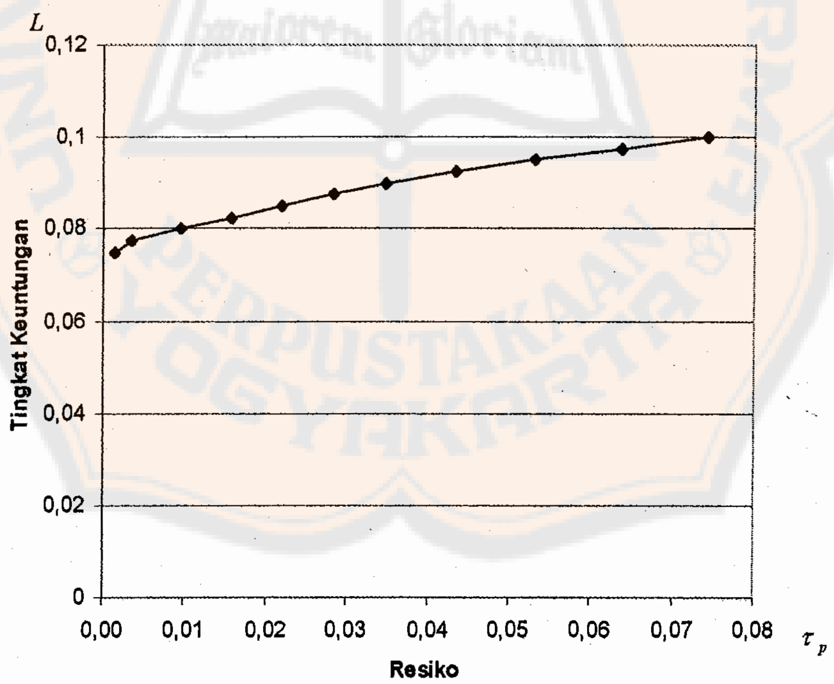
Lebih lanjut akan diperlihatkan perhitungan *efficient frontier* dengan menggunakan Program GINO.

Dengan menggunakan data yang sama seperti pada kasus di atas, maka portofolio-portofolio yang efisien (dihitung sebanyak 11 portofolio) dengan komposisi saham 1, saham 2 dan saham 3 adalah sebagai berikut.

Portofolio ke	L	$\tau_p^{\ 2}$	τ_p	Komposisis (%)		
				Investasi 1	Investasi 2	Investasi 3
1	0,075	0,000002	0,001414	0,187169	0,731099	0,081731
2	0,0775	0,000013	0,003605	0,295722	0,651093	0,053185
3	0,08	0,000090	0,009487	0,5	0,5	0
4	0,0825	0,000246	0,015684	0,625	0,375	0
5	0,085	0,000483	0,021977	0,75	0,25	0
6	0,0875	0,000801	0,028302	0,875	0,125	0
7	0,09	0,001200	0,034641	0,999966	0,000044	0
8	0,0925	0,001883	0,043393	0,75	0	0,25
9	0,095	0,002830	0,053197	0,5	0	0,5
10	0,0975	0,004043	0,063584	0,25	0	0,75
11	0,1	0,005520	0,074297	0	0	1

Dengan demikian investor dapat menentukan tingkat resiko yang minimum pada tingkat keuntungan tertentu.

Kesebelas portfolio yang efisien tersebut kalau digambarkan akan nampak sebagai titik-titik berikut. Kalau kesebelas titik tersebut dihubungkan kita akan memperoleh *efficient frontier* seperti pada Gambar 4. 9.



Gambar 4. 9 *Efficient Frontier* untuk contoh kasus

BAB V

PENUTUP

Pemrograman matematika adalah suatu model dan teknik Riset Operasional yang bertujuan utama untuk memecahkan persoalan-persoalan optimasi dalam mengalokasikan sumber daya atau sumber dana yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing, baik bertujuan untuk memaksimumkan keuntungan ataupun meminimumkan biaya dan resiko yang mungkin terjadi. Pemrograman matematika ini banyak digunakan dalam proses pengambilan keputusan manajerial dan teknologi yang sangat penting, meskipun hasil yang diperoleh tidak selalu tepat benar seperti yang diharapkan. Hal ini disebabkan, setiap keputusan yang diambil didasarkan dengan pendekatan model menurut asumsi-asumsi tertentu.

Pemrograman Kuadrat merupakan bagian dari persoalan pemrograman non linier, di mana fungsi tujuan (obyektif) dari persoalan tersebut diasumsikan sebagai fungsi yang berbentuk hubungan non linier secara kuadrat dan kendala-kendala yang membatasinya diasumsikan berbentuk hubungan linier.

5. 1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan mengenai Pemrograman Kuadrat pada bab-bab terdahulu, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Teori dasar pemrograman non-linier, yaitu syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn Tucker memberikan ide analitis yang mampu mengidentifikasikan suatu karakter penyelesaian dari masalah umum pemrograman non linier, apakah merupakan optimum global atau optimum lokal. Pada persoalan Pemrograman Kuadrat, syarat-syarat ini merupakan penyelesaian basis awal dalam bentuk matriks partisi yang juga merupakan kendala baru dari persoalan Pemrograman Kuadrat.
2. Penyelesaian optimal untuk persoalan Pemrograman Kuadrat dipecahkan dengan menggunakan Metode Frank dan Wolfe, yaitu suatu algoritma delapan langkah untuk memecahkan syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn Tucker. Metode ini merupakan pengembangan dari algoritma simpleks pada Pemrograman Linier, yang dengan sendirinya mempertahankan semua variabel tak negatif.
3. Dalam pengambilan keputusan investasi, dalam hal ini investasi saham, sebagai seorang yang rasional, perhatian investor akan diarahkan pada tingkat pengembalian investasi. Ia akan memilih investasi yang menjanjikan tingkat keuntungan tertinggi. Karena investasi yang dilakukan mengandung unsur ketidakpastian, maka investor harus mempertimbangkan faktor resiko (*risk*).
4. Teori Portofolio merupakan suatu teori yang membicarakan hubungan antara tingkat keuntungan dan tingkat resiko pada lebih dari satu jenis investasi. Dengan melakukan portofolio saham maka resiko yang diperoleh diharapkan lebih rendah dari resiko setiap jenis investasi secara individual. Penurunan

resiko tersebut akan efektif jika investasi-investasi yang membentuk portofolio tersebut mempunyai kovariansi yang rendah. Dengan membentuk portofolio yang efisien akan diperoleh suatu investasi yang memberikan tingkat keuntungan tertentu dengan resiko yang terendah.

5. Penerapan Pemrograman Kuadrat pada analisis portofolio adalah menentukan proporsi dana yang harus dialokasikan pada tiap investasi agar tingkat pengembalian total yang diharapkan (*expected return*) lebih besar atau sama dengan jumlah terendah yang dapat diterima, sedemikian rupa sehingga variansi dalam pembayaran yang akan datang atau resiko yang diperoleh dari pengambilan keputusan investasi ini dapat diminimumkan. Lebih lanjut dapat dibentuk *efficient frontier* sehingga investor dapat menentukan tingkat resiko yang minimum pada tingkat keuntungan tertentu.

5. 2 Saran

Sesuai dengan tujuan dilakukannya penulisan skripsi ini dan hasil pembahasan maka berikut dikemukakan beberapa saran yang berguna bagi pengembangan penulisan lebih lanjut.

1. Perlu dilakukan tinjauan ulang tentang Metoda Simplex dengan tablo berbasis $C_j - Z_j$ pada penyelesaian persoalan Pemrograman Kuadrat.
2. Perlu dibandingkan metoda penyelesaian Pemrograman Kuadrat lainnya untuk kasus penerapan analisis portofolio, atau mungkin lebih luas lagi untuk

menunjukkan perbedaan antara berbagai metoda penyelesaian Pemrograman Kuadrat.

3. Perlu dipikirkan pengembangan lebih lanjut program komputer untuk menyelesaikan Pemrograman Kuadrat sehingga dapat mengerjakan persoalan dengan jumlah variabel yang lebih besar atau mungkin lebih jauh mampu menampilkan tablo iterasi yang dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, Mokhtar S., *Nonlinear Programing Theory and Algorithms*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1993.

Bronson, Richard, *Operation Research*, Mc Graw-Hill Book Company, Singapore, 1983.

Chong, Edwink P and Stani Slaw H Zak, *An Introduction to Optimation*, John Wiley & Sons, Inc., 1996

Dumairy, *Matematika terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*, Edisi Kedua, PT BPFE Yogyakarta, 1996.

Elton, Edwin J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., USA 1995.

Gass, Saus I., *Linier Programing Methods and Aplications*, Mc Graw-Hill Book Company, Tokyo, 1969.

Hillier, Frederick S., Gerald J Lieberman dan Ellen Gunawan, *Pengantar Riset Operasi*, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1994

Husnan, Suad, *Dasar-dasar Teori Portofolio dan Analisa Sekuritas*, Edisi Pertama, UPP-AMP YKPN Yogyakarta, 1993.

Jaya, Wihana Kirana, *Manajemen Keuangan Metode Penilaian investasi*, Edisi pertama, PT BPFE Yogyakarta, 1993

Mulyono, Sri, *Operation Research*, Edisi Kedua, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta, 1999.

Susanta B., *Program Linier* – Sari Buku Ajar, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, 1994

Taha, Hamdy A., *Operation Research An Introduction*, Fifth Edition, Mac Millan Publishing Co., Inc., New York, 1982.

Tandelin, Eduardus, *Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio*, Edisi Pertama, PT BPFE Yogyakarta, 2001.

Walpole, Ronald E, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi Keempat, Penerbit ITB Bandung, 1995.

Widoatmodjo, Sawidji, *Cara Sehat Investasi Di Pasar Modal: Pengetahuan Dasar*, PT Jurnalindo Aksara Grafika, Jakarta 1996.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh 1

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh 2

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh 1

```
GINO/PC (20 APR 90)

COPYRIGHT(C) 1984-89  LEON LASDON,  ALLAN WAREN,  AND LINDO
SYSTEMS  INC.    PORTIONS   COPYRIGHT(C)   1981   MICROSOFT
CORPORATION.   LICENSED  MATERIAL,  ALL  RIGHTS  RESERVED.
COPYING  EXCEPT  AS  AUTHORIZED  IN  LICENSE  AGREEMENT  IS
PROHIBITED.

SINGLE USER LICENSE FOR EDUCATIONAL USE ONLY
DISTRIBUTED WITH TEXTBOOKS BY WADSWORTH PUBLISHING

: MODEL:
:       1) MAX= - 2 * X1 ^ 2 - 2 * X1 * X2 - 2 * X2 ^ 2 + 4 * X1 + + 6 *
:          X2 ;
:       2) X1 + 2 * X2 < 2 ;
:       3) X1 > 0 ;
:       4) X2 > 0 ;
:    END
:
:
:  LEAVE
:  GO
NUMBER OF ARITHMETIC ERRORS =      1
SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

            OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)          4.166667

   VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
         X1          .333333           .000010
         X2          .833333           .000000

        ROW    SLACK OR SURPLUS           PRICE
         2)          .000000           .999990
         3)          .333333           .000000
         4)          .833333           .000000

:
```

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh 2

```
GINO/PC (20 APR 90)

COPYRIGHT(C) 1984-89  LEON LASDON,  ALLAN WAREN,  AND LINDO
SYSTEMS  INC.    PORTIONS   COPYRIGHT(C)   1981   MICROSOFT
CORPORATION.   LICENSED  MATERIAL,  ALL  RIGHTS  RESERVED.
COPYING  EXCEPT  AS  AUTHORIZED  IN  LICENSE  AGREEMENT  IS
PROHIBITED.

SINGLE USER LICENSE FOR EDUCATIONAL USE ONLY
DISTRIBUTED WITH TEXTBOOKS BY WADSWORTH PUBLISHING

:
:     MODEL:
:       1) MIN= X1 ^ 2 + 5 * X2 ^ 2 + 10 * X3 ^ 2 - 4 * X1 * X2 +
:          6 * X1 * X3 - 12 * X2 * X3 - 2 * X1 + 10 * X2 + 5 * X3;
:       2) X1 + 2 * X2 + X3 > 4 ;
:       3) X1 > 0 ;
:       4) X2 > 0 ;
:       5) X3 > 0 ;
:    END
:
:
:  LEAVE
:  GO
NUMBER OF ARITHMETIC ERRORS =      1
SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  UNSATISFIED.

            OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)          3.235294

  VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
        X1        2.941176           -.000015
        X2         .529412            .000000
        X3         .000000            .000000

       ROW    SLACK OR SURPLUS          PRICE
        2)         .000000          -1.764731
        3)        2.941176            .000000
        4)         .529412            .000000
        5)         .000000         -14.529487

:
```

LAMPIRAN 2

TABLO ITERASI Contoh Kasus

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh Kasus

TABLO ITERASI Contoh Kasus

Tablo 1

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W1	W2	W3	W4	W5	
S1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
W1	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
W2	0,09	0,07	0,1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,08
W3	0,0024	-0,00112	0,0046	0	0	0	-1	0	0	1	-1	-0,09	0	0	1	0	0	0
W4	-0,00112	0,00056	-0,0024	0	0	0	0	-1	0	1	-1	-0,07	0	0	0	1	0	0
W5	0,0046	-0,0024	0,01104	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-0,1	0	0	0	0	1	0
(Cj- Zj)	-1,09588	-1,06704	-1,11324	0	1	1	1	1	1	-3	3	0,26	0	0	0	0	0	-1,08

Tablo 2

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W1	W3	W4	W5	
S1	0,1	0,3	0	1	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2
W1	0,1	0,3	0	0	-1	10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,2
X3	0,9	0,7	1	0	0	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8
W3	-0,00174	-0,00424	0	0	0	0,046	-1	0	0	1	-1	-0,09	0	1	0	0	-0,00368
W4	0,00104	0,00224	0	0	0	-0,024	0	-1	0	1	-1	-0,07	0	0	1	0	0,00192
W5	-0,005336	-0,010128	0	0	0	0,1104	0	0	-1	1	-1	-0,1	0	0	0	1	-0,008832
(Cj- Zj)	-0,093964	-0,287772	0	0	1	-10,1324	1	1	1	-3	3	0,26	-1	0	0	0	-0,189408

Tablo 3

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W3	W4	W5	
S1	0,1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S3	0,01	0,03	0	0	-0,1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02
X3	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
W3	-0,0022	-0,00572	0	0	0,0046	0	-1	0	0	1	-1	-0,09	1	0	0	-0,0046
W4	0,00128	0,00296	0	0	-0,0024	0	0	-1	0	1	-1	-0,07	0	1	0	0,0024
W5	-0,00644	-0,01344	0	0	0,01104	0	0	0	-1	1	-1	-0,1	0	0	1	-0,01104
(Cj- Zj)	0,00736	0,0162	0	0	-0,01324	0	1	1	1	-3	3	0,26	0	0	0	0,01324

Tablo 4

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W3	W4	W5	
S1	0,1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X2	0,333333	1	0	0	-3,333333	33,33333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,6666667
X3	0,666667	0	1	0	2,333333	-33,33333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333333
W3	-0,000293	0	0	0	-0,014467	0,190667	-1	0	0	1	-1	-0,09	1	0	0	-0,0007867
W4	0,000293	0	0	0	0,007467	-0,098667	0	-1	0	1	-1	-0,07	0	1	0	0,0004267
W5	-0,00196	0	0	0	-0,03376	0,448	0	0	-1	1	-1	-0,1	0	0	1	-0,00208
(Cj- Zj)	0,00196	0	0	0	0,04076	-0,54	1	1	1	-3	3	0,26	0	0	0	0,00244

Tablo 5

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W3	W5	
S1	0,060714	0	0	1	0	13,21429	0	133,9286	0	-133,9286	133,9286	9,375	0	0	-0,0571429
X2	0,464286	1	0	0	0	-10,71429	0	-446,4286	0	446,4286	-446,4286	-31,25	0	0	0,8571429
X3	0,575	0	1	0	0	-2,5	0	312,5	0	-312,5	312,5	21,875	0	0	0,2
W3	0,000275	0	0	0	0	-0,0005	-1	-1,9375	0	2,9375	-2,9375	-0,225625	1	0	4E-05
S2	0,039286	0	0	0	1	-13,21429	0	-133,9286	0	133,9286	-133,9286	-9,375	0	0	0,0571429
W5	-0,000634	0	0	0	0	0,001886	0	-4,521429	-1	5,521429	-5,521429	-0,4165	0	1	-0,0001509
(Cj- Zj)	0,000359	0	0	0	0	-0,001386	1	6,458929	1	-8,458929	8,458929	0,642125	0	0	0,0001109

Tablo 6

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W5	
S1	0,073252	0	0	1	0	13,19149	-45,59271	45,59271	0	0	0	-0,911854	0	-0,0553191
X2	0,422492	1	0	0	0	-10,6383	151,9757	-151,9757	0	0	0	3,039514	0	0,8510638
X3	0,604255	0	1	0	0	-2,553191	-106,383	106,383	0	0	0	-2,12766	0	0,2042553
V1	9,36E-05	0	0	0	0	-0,00017	-0,340426	-0,659574	0	1	-1	-0,076809	0	1,362E-05
S2	0,026748	0	0	0	1	-13,19149	45,59271	-45,59271	0	0	0	0,911854	0	0,0553191
W5	-0,001151	0	0	0	0	0,002826	1,879635	-0,879635	-1	0	0	0,007593	1	-0,000226
(Cj- Zj)	0,001151	0	0	0	0	-0,002826	-1,879635	0,879635	1	0	0	-0,007593	0	0,000226

Tablo 7

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W5	
S1	0	0	0	1	0	13,32468	220,7792	561,6883	0	-782,4675	782,4675	59,18831	0	-0,065974
X2	0	1	0	0	0	-9,87013	1688,312	2824,675	0	-4512,987	4512,987	349,6753	0	0,7896104
X3	0	0	1	0	0	-1,454545	2090,909	4363,636	0	-6454,545	6454,545	493,6364	0	0,1163636
X1	1	0	0	0	0	-1,818182	-3636,364	-7045,455	0	10681,82	-10681,82	-820,4545	0	0,1454545
S2	0	0	0	0	1	-13,14286	142,8571	142,8571	0	-285,7143	285,7143	22,85714	0	0,0514286
W5	0	0	0	0	0	0,000734	-2,304416	-8,986234	-1	12,29065	-12,29065	-0,936434	1	-5,868E-05
(Cj- Zj)	0	0	0	0	0	-0,000734	2,304416	8,986234	1	-12,29065	12,29065	0,936434	0	5,868E-05

Tablo 8

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	W5	
S1	0	0	-0,121227	1	0	13,50101	-32,69618	32,69618	0	0	0	-0,653924	0	-0,0800805
X2	0	1	-0,699195	0	0	-8,853119	226,3581	-226,3581	0	0	0	4,527163	0	0,7082495
V2	0	0	0,000155	0	0	-0,000225	0,323944	0,676056	0	-1	1	0,076479	0	1,803E-05
X1	1	0	1,65493	0	0	-4,225352	-176,0563	176,0563	0	0	0	-3,521127	0	0,3380282
S2	0	0	-0,044266	0	1	-13,07847	50,30181	-50,30181	0	0	0	1,006036	0	0,0462777
W5	0	0	0,001904	0	0	-0,002036	1,677062	-0,677062	-1	0	0	0,003541	1	0,0001629
(Cj- Zj)	0	0	-0,001904	0	0	0,002036	-1,677062	0,677062	1	0	0	-0,003541	0	-0,0001629

Tablo 9

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	
S1	0	0	0	1	0	13,37137	74,07173	-10,40808	-63,66364	0	0	-0,428475	-0,0697098
X2	0	1	0	0	0	-9,600795	842,1564	-474,9678	-367,1887	0	0	5,827469	0,7680636
V2	0	0	0	0	0	-5,97E-05	0,187493	0,731144	0,081363	-1	1	0,076191	4,774E-06
X1	1	0	0	0	0	-2,455673	-1633,593	764,4921	869,1012	0	0	-6,598829	0,1964539
S2	0	0	0	0	1	-13,12581	89,2876	-66,04113	-23,24648	0	0	1,088358	0,0500645
X3	0	0	1	0	0	-1,069338	880,7244	-355,5654	-525,159	0	0	1,859718	0,085547
(Cj- Zj)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablo 10

		X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	
		0	0	0	0	-4,77E-06	0	-0,196454	-0,768064	-0,085547	0,06971	-0,050064	0	
S1	0	0	0	0	1	0	13,37137	74,07173	-10,40808	-63,66364	0	0	-0,428475	-0,0697098
X2	0	0	1	0	0	0	-9,600795	842,1564	-474,9678	-367,1887	0	0	5,827469	0,7680636
V2	-0,050064	0	0	0	0	0	-5,97E-05	0,187493	0,731144	0,081363	-1	1	0,076191	4,774E-06
X1	0	1	0	0	0	0	-2,455673	-1633,593	764,4921	869,1012	0	0	-6,598829	0,1964539
S2	-4,77E-06	0	0	0	0	1	-13,12581	89,2876	-66,04113	-23,24648	0	0	1,088358	0,0500645
X3	0	0	0	1	0	0	-1,069338	880,7244	-355,5654	-525,159	0	0	1,859718	0,085547
(Zj-Cj)		0	0	0	0	0	6,57E-05	0,186641	0,731775	0,081585	-0,019645	0	-0,00382	0

Tablo 11

		X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	
		0	0	0	0	-4,77E-06	0	-0,196454	-0,768064	-0,085547	0,06971	-0,050064	1	
S1	0	0	0	0	1	0	13,37104	75,12613	-6,296338	-63,20608	-5,623712	5,623712	0	-0,069683
X2	0	0	1	0	0	0	-9,59623	827,8159	-530,8895	-373,4117	76,48526	-76,48526	0	0,7676984
V3	1	0	0	0	0	0	-0,000783	2,460842	9,59623	1,067881	-13,12495	13,12495	1	6,266E-05
X1	0	1	0	0	0	0	-2,460842	-1617,355	827,8159	876,148	-86,60932	86,60932	0	0,1968674
S2	-4,77E-06	0	0	0	0	1	-13,12495	86,60932	-76,48526	-24,40871	14,28464	-14,28464	0	0,0499963
X3	0	0	0	1	0	0	-1,067881	876,148	-373,4117	-527,145	24,40871	-24,40871	0	0,0854305
(Zj-Cj)		0	0	0	0	0	-0,000721	2,656882	10,36466	1,153545	-13,19473	13,17509	0	0

Tablo 12

		X1	X2	X3	S1	S2	S3	U1	U2	U3	V1	V2	V3	
		0	0	0	0	-4,77E-06	0	-0,196454	-0,768064	-0,085547	1	-0,050064	1	
S1	0	0	0	0,230398	1	0	13,125	276,9886	-92,32955	-184,6591	0	0	0	-0,05
X2	0	0	1	-3,133523	0	0	-6,25	-1917,614	639,2045	1278,409	0	0	0	0,5
V3	1	0	0	0,537716	0	0	-0,575	473,5795	-191,1932	-282,3864	0	0	1	0,046
X1	0	1	0	3,548295	0	0	-6,25	1491,477	-497,1591	-994,3182	0	0	0	0,5
S2	-4,77E-06	0	0	-0,585227	0	1	-12,5	-426,1364	142,0455	284,0909	0	0	0	-2,123E-15
V1	1	0	0	0,040969	0	0	-0,04375	35,89489	-15,2983	-21,59659	1	-1	0	0,0035
(Zj-Cj)		0	0	0,578688	0	0	-0,61869	509,6729	-205,7241	-303,8988	0	-0,949936	0	0

PENYELESAIAN PROGRAM GINO Contoh Kasus

```
GINO/PC (20 APR 90)

COPYRIGHT(C) 1984-89  LEON LASDON,  ALLAN WAREN,  AND LINDO
SYSTEMS  INC.    PORTIONS   COPYRIGHT(C)   1981   MICROSOFT
CORPORATION.   LICENSED MATERIAL, ALL  RIGHTS  RESERVED.
COPYING EXCEPT AS AUTHORIZED IN LICENSE AGREEMENT IS
PROHIBITED.

SINGLE USER LICENSE FOR EDUCATIONAL USE ONLY
DISTRIBUTED WITH TEXTBOOKS BY WADSWORTH PUBLISHING

:MODEL:
:      1) MIN= ( 12 * X1 ^ 2 + 2.8 * X2 ^ 2 + 55.2 * X3 ^ 2 - 11.2 * X1 * X2
          + 46 * X1 * X3 - 24 * X2 * X3 ) / 10000 ;
:      2) .09 * X1 + .07 * X2 + .10 * X3 > .08 ;
:      3) X1 + X2 + X3 = 1 ;
:      4) X1 > 0 ;
:      5) X2 > 0 ;
:      6) X3 > 0 ;
:    END
:
: LEAVE
:  GO
NUMBER OF ARITHMETIC ERRORS =      4
SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

            OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)          .000090

   VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
         X1         .500000          .000000
         X2         .500000          .000000
         X3         .000000          .000000

        ROW   SLACK OR SURPLUS          PRICE
         2)         .000000         -.000460
         3)         .000000          .004052
         4)         .500000          .000000
         5)         .500000          .000000
         6)         .000000          .000000

:
```