KONJUGASI INVERS DAN GRUP SIMETRI BALIKAN

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh:

AGUS SALIM

NIM 961414017

NIRM 960051120501120017

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2003

HALAMAN PERSETUJUAN

SKRIPSI

KONJUGASI INVERS DAN GRUP SIMETRI BALIKAN

Disusun Oleh:

AGUS SALIM

NIM : 961414017

NIRM : 960051120501120017

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

M.V. Any Herawati S.Si, M.Si

tanggal 24 Februari 2003

SKRIPSI

KONJUGASI INVERS DAN GRUP SIMETRI BALIKAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

AGUS SALIM

NIM : 961414017

NIRM : 960051120501120017

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 19 Februari 2003 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	**Drs. A. Atmadi, M.Si**	....
Sekretaris	:	**Drs. Th. Sugiarto, M.T**	....
Anggota	:	**M.V. Any Herawati, S.Si, M.Si**	....
Anggota	:	**Dr. Y. Marpaung**	....
Anggota	:	**Wanty Widjaja, S.Pd, M.Ed**	....

Yogyakarta, 19 Februari 2003

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

(**Drs. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd**)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan

Untuk bapak dan ibuku

yang selalu mendahulukan

keperluan anak-anaknya

dan yang tercinta "NIKEN WITANTRI"

yang selalu memberikan dorongan.

Serta kakak-kakakku yang tercinta.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 24 Februari 2003

Penulis

Agus Salim

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan pada Program studi Pendidikan pada Program studi Pendidikan Matematika di Univesitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Namun demikian perlu disadari bersama tanpa bantuan dari semua pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, pengarahan, petunjuk-petunjuk, kerjasama, dukungan, kritik maupun saran.

Pada kesempatan ini pula, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga kepada:

1. M.V. Any Herawati S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bantuan, kesabaran, pengertian dan bimbingan dalam pengerjaan skripsi ini dari awal perencanaan , penulisan sampaiakhir dari penulisan skripsi ini
2. Drs. Thomas Sugiarto M.T selaku Ketua Jurusan Program Studi Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
3. Drs. St. Susento, M.Si atas saran dan dukungannya dalam penulisan skripsi ini.

4. Wanty Widjaya, M.Ed selaku dosen pembimbing akademik atas saran, bimbingan,dan bantuan dalam menempuh kuliah dan dalam pengerjaan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama proses belajar di Universitas Sanata Dharma.
6. Staf Sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma, Bp Sunardjo dan Bp Sugeng, yang telah dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
7. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan kerjasamanya selama ini.
8. Orang tuaku tercinta, yang selalu memberikan kesempatan dan kepercayaan kepada penulis.
9. Kakak-kakakku dan adik-adikku tercinta, semuanya atas cinta kasih dan segala dukungan yang diberikan
10. Rekan-rekan mahasiswa yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta khususnya rekan-rekan mahasiswa Program studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Angkatan 96.
11. Sahabat- sahabatku: Rina Widiastuti, Bambang, Retno, Endang dan Erika, Hery (98) atas segala dukungan dan doa. Khusus Hendra Setiawan dan Sri Kartini terima kasih atas komputer dan printernya.
12. Semua pihak yang dalam kesempatan ini belum dapat penulis sebutkan.

Semoga segala bantuan, dorongan, perhatian, kasih serta dukungan yang telah penulis terima akan mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan YME.

Akhirnya, semua kebenaran yang terkandung dalam skripsi ini semata-mata hanyalah berkat kemurahan-Nya dalam menuntun penulis menuju kebenaran, sedangkan segala kekeliruan yang terdapat di sini sepenuhnya bersumber dan menjadi tanggung jawab penulis.

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSETUJUAN ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERSEMBAHAN iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN KARYA v
KATA PENGANTAR vi
DAFTAR ISI ix
ABSTRAK x
ABSTRACT xi

BAB I PENDAHULUAN 1
- A. Latar Belakang Masalah 1
- B. Rumusan Masalah 2
- C. Tujuan Penulisan 2
- D. Ruang Lingkup Penulisan 2
- E. Metode Penulisan 2

BAB II LANDASAN TEORI 3
- A. Grup 3
- B. Subbgrup, Koset, Teorema Lagrange dan Subgrup Normal 9
- C. Homomorphisma dan Automorphisma 38

BAB III KONJUGASI INVERS DAN GRUP SIMETRI BALIKAN 45
- A. Sifat-sifat Dasar Himpunan Pemusat dan Pemusat Tak Simetris 45
- B. Grup Simetri Balikan 52
- C. Automorphisma Dalam Dari E(a) 70

BAB IV KESIMPULAN 78
DAFTAR PUSTAKA 79

ABSTRAK

Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$, didefinisikan himpunan C(a) = $\{x \in G : xa = ax\}$, yang disebut pemusat dari a, B(a) = $\{x \in G : xa = a^{-1}x\}$,yang disebut pemusat tak simetris dari a, dan E(a) = B(a) $\cup$ C(a) yang biasa dibahas dalam teori sistem dinamika.

Skripsi ini akan membahas struktur himpunan-himpunan tersebut dari sudut pandang aljabar abstrak, yaitu :

- C(a) merupakan subgrup dari G yang memuat $\langle a \rangle$.
- B(a) adalah grup bila dan hanya bila $a^2 = e$.
- E(a) adalah grup yang kemudian disebut grup simetri balikan dari a (*reversing symmetri group of a*).

ABSTRACT

Let G is group and $a \in G$, defined set $C(a) = \{x \in G : xa = ax\}$,the centralizer of a. $B(a) = \{x \in G : xa = a^{-1}x\}$, the skew centralizer of a and $E(a) = B(a) \cup C(a)$ ussualy to discuss in dynamical system theory.

In this tesis will be discussed about sets the structur from abstract algebra, i.e:

- $C(a)$ is subgrup of G that contain $\langle a \rangle$
- $B(a)$ is group if only if $a^2 = e$.
- $E(a)$ is group, which is called the reversing symmetry group of a (*reversing symmetry group of a*)

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah.

Pada mata kuliah Struktur Aljabar (Aljabar V) kita sudah diperkenalkan dengan konsep-konsep grup, grup Abel, subgrup, dan grup Siklik serta pusat dari suatu grup yakni misalkan G grup, pusat dari G yang dinotasikan dengan $Z(G)$ adalah himpunan semua elemen dari G yang komutatif dengan sebarang elemen di G.

Selain itu juga akan dibahas tentang pemusat dan pemusat tak simetris suatu elemen a. Yakni misalkan G grup dan $a \in G$ maka himpunan $C(a) = \{ x \in G : xa = ax \}$ disebut dengan pemusat dari a dan himpunan $B(a) = \{ x \in G : xa = a^{-1}x \}$ disebut dengan pemusat tidak simetris dari a yang merupakan dasar tebentuknya suatu grup simetri balikan yang dinotasikan dengan $E(a)$ yakni $E(a) = B(a) \cup C(a)$.

$B(a)$ sendiri biasanya bukan subgrup dari G dan juga $B(a)$ bisa berupa himpunan kosong. Elemen $a,b \in G$ dikatakan berada dalam kelas konjugasi yang sama (a berkonjugasi dengan b) bila ada $x \in G$ yang memenuhi $a = x^{-1}bx$. Jika $B(a) \neq \emptyset$ maka a berkonjugasi dengan inversnya.

Selanjutnya dalam skripsi ini akan dibahas secara terperinci tentang suatu elemen yang berkonjugasi dengan inversnya dan grup simetri balikan serta sifat-sifat yang dimiliki oleh grup simetri balikan.

B. Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Apa yang dimaksud dengan suatu elemen berkonjugasi dengan inversnya .

b. Apa yang dimaksud dengan grup simetri balikan dan sifat apa saja yang dimiliki oleh grup simetri balikan.

C. Tujuan Penulisan.

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk memahami pengertian suatu elemen yang berkonjugasi dengan inversnya dan memahami pengertian dari grup simetri balikan serta memahami sifat-sifat yang dimiliki oleh grup simetri balikan.

D. Manfaat Penulisan.

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah untuk lebih memahami pengertian suatu elemen yang berkonjugasi dengan inversnya dan memahami pengertian dari grup simetri balikan sehingga sebagai akibatnya dapat dipelajari lebih lanjut sifat-sifat yang dimiliki oleh grup simetri balikan itu sendiri.

E. Metode Penulisan.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah Metode Studi Pustaka yakni dengan mempelajari dan memahami beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan

BAB II

LANDASAN TEORI

Sebelum membahas tentang materi pokok yakni konjugasi invers dan grup simetri balikan terlebih dahulu dibahas beberapa materi prasyarat dari pokok bahasan tersebut.

A. Grup

Definisi 2.1.1:

Jika A dan B adalah sebarang dua himpunan , maka *hasil kali kartesius* himpunan-himpunan A dan B (ditulis A x B, dibaca A kali B) adalah himpunan semua pasangan terurut (x,y) dengan $x \in$ A dan $y \in$ B. Bila ditulis dengan notasi himpunan, A x B = { (x,y) / $x \in$ A dan $y \in$ B }.

Definisi 2.1.2:

Relasi biner (disingkat *Relasi*) R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian dari A x B. Jadi $R \subseteq$ A x B. Suatu elemen a disebut *berelasi* dengan elemen b bila (a,b) merupakan anggota R, dan ditulis $(a,b) \in R$ atau aRb. Bila A = B maka relasi R dari himpunan A ke himpunan B disebut *relasi pada* A. Dengan kata lain relasi pada A adalah relasi dari A ke dirinya sendiri.

Definisi 2.1.3:

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Suatu himpunan bagian α dari A x B disebut *pemetaan* dari A ke B dengan notasi α : A$\rightarrow$B bila dan hanya bila dipenuhi:

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x,y) \in \alpha$

2. $(x,y_1) \in \alpha$ dan $(x,y_2) \in \alpha \Rightarrow y_1 = y_2$

Bila $(x,y) \in \alpha$ maka ditulis $\alpha(x) = y$.

Definisi 2.1.4:

Misalkan α suatu pemetaan dari A ke B, maka:

α : A $\rightarrow$ B disebut pemetaan *injektif* bila dan hanya bila

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Definisi 2.1.5:

Misalkan α suatu pemetaan dari A ke B, maka:

α : A $\rightarrow$ B disebut pemetaan *surjektif* bila dan hanya bila

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ \alpha(x) = y.$$

Definisi 2.1.6:

Misalkan α suatu pemetaan dari A ke B, maka:

Pemetaan α : A $\rightarrow$ B disebut pemetaan *bijektif* bila dan hanya bila pemetaan α surjektif dan injektif.

Definisi 2.1.7:

Operasi biner $*$ pada suatu himpunan S adalah suatu aturan yang memasangkan setiap pasangan terurut $(a,b) \in S \times S$ dengan sebarang elemen tunggal dalam S, sehingga $(a,b) \mapsto a * b = c$, $c \in S$ adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S.

Definisi 2.1.8:

Suatu operasi $*$ pada himpunan S dikatakan mempunyai *sifat assosiatif*, jika dipenuhi:

$a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c\in S$.

Untuk selanjutnya definisi ini disebut *hukum assosiatif*.

Definisi 2.1.9:

Suatu elemen e dalam himpunan S disebut *elemen identitas* untuk suatu operasi $*$ pada S, jika dipenuhi:

$e*a=a*e=a,\ \forall a\in S$.

Definisi 2.1.10:

Jika $*$ adalah operasi pada suatu himpunan S dengan elemen identitas e dan sebarang $a\in S$, maka suatu elemen $b\in S$ disebut *invers* dari a terhadap $*$ apabila dipenuhi: $a*b=b*a=e$.

Definisi 2.1.11:

Suatu operasi $*$ pada himpunan S dikatakan mempuyai *sifat komutatif*, jika dipenuhi:

$a*b=b*a,\ \forall a,b\in S$.

Definisi ini selanjutnya disebut *hukum komutatif*.

Definisi 2.1.12:

Suatu himpunan G disebut *grup* bila di dalam G didefinisikan suatu operasi "$*$" sedemikian sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi

(i) $(\forall a,b,c \in G)\ a*(b*c) = (a*b)*c$ (assosiatif)

(ii) $(\exists e \in G)(\forall a \in G)\ e*a = a*e = a$ (identittas)

(iii) $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)\ a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (invers)

Selanjutnya grup tadi ditulis dengan notasi $(G,*)$.

Contoh 2.1.1:

Jika Z adalah himpunan semua bilangan bulat, maka $(Z,+)$ adalah suatu grup sebab:

(i) Operasi $+$ pada Z bersifat tertutup

(ii) Operasi $+$ pada Z bersifat assosiatf

(iii) Ada elemen identitas 0 dalam Z yang memenuhi $0 + x = x + 0 = x$ $\forall x \in Z$

(iv) Untuk setiap $x \in Z$ pasti terdapat invers $-x \in Z$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$

Teorema 2.1.1:

Jika $(G,*)$ grup maka $\forall a,b \in G$, berlaku:

(i) Jika $a*b = a*c$ maka $b = c$ (kanselasi kiri)

(ii) Jika $b*a = c*a$ maka $b = c$ (kanselasi kanan)

Bukti:

Misalkan $a,b,c \in G$ sedemikian sehingga $a * b = a * c$ karena $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$

(i) $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ (assosiatif)

$e * b = e * c$ (definisi 2.1.12(iii))

$b = c$ (definisi 2.1.12(ii))

(ii) Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa bila $b * a = c * a$ maka $b = c$. ■

Teorema 2.1.2:

Jika $(G, *)$ grup dan $a,b \in G$ maka berlaku

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$

(ii) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Bukti:

(i) Misalkan $x \in G$ adalah invers dari a^{-1} maka $a^{-1} * x = e$.

Akan tetapi $a^{-1} * a = e$, maka $a^{-1} * x = a^{-1} * a$ dengan menggunakan kanselasi kiri diperoleh $x = a$.

Sehingga invers dari a^{-1} adalah a sendiri. Jadi $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) Misalkan $a,b \in G$ maka $a * b \in G$

Akan dibuktikan bahwa $b^{-1} * a^{-1}$ adalah invers dari $a * b \in G$.

Perhatikan bahwa:

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} \quad \text{(assosiatif)}$$
$$= a * e * a^{-1} \quad \text{(definisi 2.1.12(iii))}$$
$$= a * a^{-1} \quad \text{(definisi 2.1.12(ii))}$$
$$= e \quad \text{(definisi 2.1.12(iii))}$$

Dan

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b \quad \text{(assosiatif)}$$
$$= b^{-1} * e * b \quad \text{(definisi 2.1.12(iii))}$$
$$= b^{-1} * b \quad \text{(definisi 2.1.12(ii))}$$
$$= e \quad \text{(definisi 2.1.12(iii))}$$

Karena $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b)$

Terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. ■

Definisi 2.1.13:

Jika $(G, *)$ grup dan $\forall a,b \in G$, $a * b = b * a$, maka $(G,*)$ disebut *grup Abel*.

Teorema 2.1.3:

Jika $(G, *)$ grup maka

(i) Elemen identitas dalam G tunggal, artinya bila $e,f \in G$ dan $\forall\ a \in G$, $e * a = a * e = a$ dan $f * a = a * f = a$ maka $e = f$

(ii) Setiap elemen dalam G mempunyai invers tunggal, artinya bila $a,x,y \in G$ dan e adalah elemen identitas sedemikian sehingga $a * x = x * a = e$ dan $a * y = y * a = e$, maka $x = y$.

Bukti:

(i) Diasumsikan bahwa e dan f elemen identitas dalam G.

Maka $e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$ dan $f * a = a * f = a, \quad \forall a \in G$.

Karena $f \in G$ maka $e * f = f * e = f$.

Demikian juga karena $e \in G$, maka $e * f = f * e = e$.

Sehingga diperoleh $f = e$.

Terbukti bahwa elemen identitas dalam G adalah tunggal

(ii) Misalkan $x,y \in G$ merupakan invers dari $a \in G$ maka $a * x = x * a = e$ dan $a * y = y * a = e$, menurut definisi 2.1.12(ii) $x = x * e$, maka

$$
\begin{aligned}
x &= x * (a * y) && \text{(pengandaian)} \\
&= (x * a) * y && \text{(assosiatif)} \\
&= e * y && \text{(pengandaian)} \\
&= y && \text{(definisi 2.1.12(ii))}
\end{aligned}
$$

Jadi invers dari $a \in G$ adalah tunggal. ■

B. Subgrup, Koset, Teorema Lagrange dan Subgrup Normal.

Kadang-kadang terjadi bahwa himpunan bagian dari suatu grup akan membentuk sebuah grup terhadap operasi yang sama dengan grupnya. Himpunan demikian itu disebut subgrup atau grup bagian.

Definisi 2.2.1:

Jika $(G, *)$ grup dan $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$ maka H disebut *subgrup dari G* bila H terhadap operasi "$*$" juga merupakan grup.

Teorema 2.2.1:

Jika$(G, *)$ grup dan $H \subseteq G$ maka H subgrup G bila dan hanya bila

(i) $H \neq \emptyset$

(ii) Jika $a,b \in H$ maka $a*b \in H$

(iii) Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan H adalah subgrup dari G

(i) $H \neq \emptyset$, karena sekurang-kurangnya memuat elemen identitas

(ii) Karena sifat tertutup dari operasi $*$ pada grup H maka kondisi (ii) diatas dipenuhi.

(iii) Karena H adalah grup maka menurut definisi 2.1.12. jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Diketahui kondisi (i), (ii), (iii) dan $H \subseteq G$ akan dibuktikan H subgrup G

- Sifat tertutup pada H dipenuhi karena kondisi (ii) dipenuhi.
- Sifat assosiatif dipenuhi karena $H \subseteq G$.
- H mempunyai elemen identitas, karena bila $x \in H$, dengan sifat (iii) maka ada $x^{-1} \in H$ sehingga $x * x^{-1} \in H$ (kondisi (ii)).

  Karena $x * x^{-1} = e$, maka $e \in H$.
- Menurut (iii) maka setiap elemen dalam H mempuyai invers dalam H .

  Jadi H subgrup dari G. ∎

Contoh 2.2.1:

$(Z,+)$ merupakan subgrup dari grup $(Q,+)$

Teorema 2.2.2:

Misalkan $(G, *)$ grup dan jika H dan N adalah subgrup dari $(G, *)$ maka $H \cap N$ subgrup dari G.

Bukti:

Terlebih dahulu didefinisikan $H \cap N = \{x \in G \,/\, x \in H$ dan $x \in N\}$.

Akan ditunjukkan $H \cap N$ subgrup dari G.

(i) $H \cap N \neq \emptyset$, karena $e \in H$ dan $e \in N$ maka $e \in H \cap N$.

(ii) Misalkan $x,y \in H \cap N$, maka $x,y \in H$ dan $x,y \in N$.

Karena H dan N subgrup maka $x * y \in H$ dan $x * y \in N$.

Dengan demikian $x * y \in H \cap N$.

(iii) Misalkan $x \in H \cap N$, maka $x \in H$ dan $x \in N$.

Karena H dan N subgrup maka $x^{-1} \in H$ dan $x^{-1} \in N$.

Dengan demikian $x^{-1} \in H \cap N$. ■

Definisi 2.2.2 (induksi matematika):

Jika P adalah suatu proposisi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif $N = \{1,2,3,...\}$, artinya $P(n)$ bisa bernilai benar atau salah, kemudian P mempunyai sifat:

1. $P(1)$ benar
2. $P(n+1)$ benar bila $P(n)$ benar,

maka P adalah benar untuk semua bilangan bulat positif n anggota N.

Definisi 2.2.3:

Misalkan $(G, *)$ grup dan $a \in G$ dan e elemen identitas dalam G dan n adalah bilangan bulat positif, maka didefinisikan:

(i) $a^0 = e$

(ii) $\begin{cases} a^1 = a \\ a^n = a^{n-1} * a \end{cases}$

(iii) $a^{-n} = (a^{-1})^n$

Teorema 2.2.3:

Jika $(G, *)$ grup dan $a \in G$, maka untuk setiap $m \in Z$ berlaku $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.

Bukti:

Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika

Misalkan $m \in Z$. Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $m = 0$, diperoleh $(a^{-1})^m = (a^{-1})^0$

$= e$

$= a^0$ definisi 2.2.3(i)

$= (a^0)^{-1}$

$= (a^m)^{-1}$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $m = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $m = 1,2,3\ldots$

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk $m = k$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut juga benar untuk $m = k+1$.

Karena pernyataan tersebut benar untuk $m = k$, maka $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$.

Sehingga $(a^{-1})^{k+1} = (a^{-1})^k * (a^{-1})$

$= (a^k)^{-1} * (a)^{-1}$ pengandaian

$= (a^{k+1})^{-1}$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $m = k+1$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $m = -1,-2,-3,\ldots$

Jika m adalah suatu bilangan bulat negatif, maka ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian sehingga $m = -p$.

Akan ditunjukkan bahwa $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$

Perhatikan $(a^{-1})^m = (a^{-1})^{-p}$

$= ((a^{-1})^{-1})^p$ definisi 2.2.3(iii)

$= ((a^{-1})^p)^{-1}$ definisi 2.2.3(iii)

$= (a^{-p})^{-1}$ definisi 2.2.3(iii)

$= (a^m)^{-1}$

Jadi $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$. ■

Teorema 2.2.4:

Jika $(G, *)$ grup dan $a,b \in G$ maka berlaku:

(i) $a^m * a^n = a^{m+n}$, $m,n \in Z$.

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$, $m,n \in Z$.

Bukti:

Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika

(i) Misalkan $m \in Z$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = 0$,

diperoleh $a^m * a^0 = a^m * e$ (definisi 2.2.3(i))

$= a^m$ (definisi 2.1.12(iii))

$= a^{m+0}$.

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = 0$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = 1,2,3,...$

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$.

Karena peryataan tersebut benar untuk $n = k$, maka $a^m * a^k = a^{m+k}$,

sehingga $a^m * a^{k+1} = a^m * (a^k * a)$ (definisi 2.2.3(iii))

$= (a^m * a^k) * a$ (assosiatif)

$= a^{m+k} * a$ (pengandaian)

$= a^{(m+k)+1}$ (definisi 2.2.3(iii))

$= a^{m+(k+1)}$ (assosiatif).

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = k+1$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = -1,-2,-3,...$

Jika n adalah suatu bilangan bulat negatif , maka ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian sehingga $n = -p$.

Akan ditunjukkan bahwa $a^m * a^n = a^{m+n}$.

Perhatikan $a^m * a^n = a^m * a^{(-p)}$

$= a^m * (a^{-1})^p$ teorema 2.2.3

$= a^{m-p}$ p bilangan bulat positif.

$= a^{m+(-p)}$

$= a^{m+n}$

Jadi $a^m * a^n = a^{m+n}$.

(ii) Misalkan $m \in Z$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = 0$.

$(a^m)^0 = e = a^0 = a^{m0}$.

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1,2,3,\ldots$.

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$.

Akan ditunjukkan pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$.

Karena peryataan benar untuk $n = k$, maka $(a^m)^k = a^{mk}$.

Sehingga $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k * a^m$ (definisi 2.2.3(ii))

$= a^{mk} * a^m$ (pengandaian)

$= a^{mk+m}$ (teorema 2.2.4(i))

$= a^{m(k+1)}$ (distributif).

Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = k+1$.

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = -1,-2,-3,\ldots$

Untuk n suatu bilangan bulat negatif, maka ada suatu bilangan positif p sedemikian sehingga $n = -p$.

Perhatikan $(a^m)^n = (a^m)^{-p}$

$= ((a^m)^{-1})^p$ (definisi 2.2.3(iii))

$= (a^{-m})^p$ (teorema 2.2.3)

$= ((a^{-1})^m)^p$ (teorema 2.2.3)

$= (a^{-1})^{mp}$

$= a^{-(mp)}$ (teorema 2.2.3)

$= a^{(-m)p}$ p bilangan bulat positif

$= a^{m(-p)}$

$= a^{mn}$.

Jadi pernyataan tersebut benar untuk n = -1,-2,-3,... ■

Teorema 2.2.5:

Jika $(G,*)$ grup dan $a \in G$ maka $\langle a \rangle = \{ a^n \mid n \in Z \}$ merupakan subgrup dari G

Bukti:

(i) $\langle a \rangle \neq \emptyset$, karena $a = a^1 \in \langle a \rangle$.

(ii) Misalkan $x, y \in \langle a \rangle$, maka $x = a^m$, $m \in Z$ dan $y = a^n$, $n \in Z$.

Akan ditunjukkan bahwa $x * y \in \langle a \rangle$

Perhatikan $x * y = a^m * a^n$

$= a^{m+n}$, karena $m, n \in Z$, maka $m + n \in Z$.

Jadi $x * y \in \langle a \rangle$.

(iii) Misalkan $x \in \langle a \rangle$, maka $x = a^m$, $m \in Z$.

Akan ditunjukkan bahwa $x^{-1} \in \langle a \rangle$.

Perhatikan $x^{-1} = (a^m)^{-1}$

$= a^{-m}$, karena $m \in Z$, maka $-m \in Z$. .

Jadi $x^{-1} \in \langle a \rangle$. ■

Definisi 2.2.4:

Jika $(G, *)$ grup dan $a \in G$ maka $\langle a \rangle = \{ x \in G \ / \ x = a^n,\ n \in Z \}$ disebut *subgrup siklik* yang dibangun oleh a.

Definisi 2.2.5:

Jika $(G, *)$ grup dan ada $a \in G$ sedemikian sehingga $G = \langle a \rangle = \{ a^n \ / \ n \in Z \}$ maka G disebut *grup siklik*, yang dibangun oleh a.

Pembangun (generator) dari suatu grup siklik tidak harus tunggal seperti terlihat dalam contoh berikut.

Contoh 2.2.2:

Misalkan $G = (Z_5 - \{\bar{0}\}, *)$ grup, dengan $(Z_5 - \{\bar{0}\}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Dan diberikan tabel dari $(Z_5 - \{\bar{0}\}, *)$

$*$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{2}$ adalah pembangun dari $G = (Z_5 - \{0\}, *)$, karena

$\langle \bar{2} \rangle = \{ \bar{2}^n / n \in Z \} = G.$

$\bar{3}$ juga merupakan pembangun dari $G = (Z_5 - \{0\}, *)$, karena

$\langle \bar{3} \rangle = \{ \bar{3}^n / n \in Z \} = G.$

Akan tetapi $\bar{4}$ bukan merupakan pembangun dari $G = (Z_5 - \{0\}, *)$, karena:

$\langle \bar{4} \rangle = \{ \bar{1}, \bar{4} \} \neq G.$

Definisi 2.2.6:

Jika $(G, *)$ grup dan $a \in G$, maka n disebut *orde dari* $a \in G$ bila n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$, orde dari a dilambangkan dengan $o(a)$

Jika tidak dapat ditemukan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = e$, maka a dikatakan *berorde tak hingga*.

Contoh 2.2.3:

1. Misalkan $(G, *) = (Z_4, +)$ dengan $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$=Himpunan bilangan bulat modulo 4 dan "+" adalah operasi penjumlahan bilangan bulat modulo 4.

   Maka elemen identitas dari G adalah $\bar{0}$

   orde($\bar{2}$) = 2.

   orde($\bar{3}$) = 4.

2. Misalkan $G = (Z_5 - \{0\}, *)$, dimana $Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$= Himpunan bilangan bulat modulo 5 dan" $*$ "adalah operasi perkalian bilangan bulat modulo 5.

   Maka elemen identitas dari G adalah $\bar{1}$.

   orde ($\bar{3}$) = 4.

   orde($\bar{2}$) = 4. dan orde($\bar{4}$) = 2.

Definisi 2.2.7:

Banyaknya elemen suatu grup, misalnya grup $(G, *)$, disebut *orde dari grup G*, dan dinotasikan dengan o(G). Grup G disebut *berhingga* apabila o(G) berhingga dan G disebut *grup takhingga* apabila o(G) tak hingga.

Teorema 2.2.6:

Jika $(G, *)$ grup, $a \in G$ dan $\exists r,s \in Z, r \neq s$ sehingga $a^r = a^s$, maka akan dipenuhi

(i) Ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$.

(ii) Jika t adalah bilangan bulat positif maka $a^t = e$ bila dan hanya bila n adalah pembagi dari t.

(iii) $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}$ adalah elemen-elemen yang saling berbeda dan $\langle a \rangle = \{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$.

Bukti:

(i) Untuk membuktikan (i) akan ditunjukan lebih dulu bahwa ada bilangan bulat positif t sehingga $a^t = e$.

• Andaikan $r>s$ maka $(r-s)>0$.

$$a^r = a^s$$

$\Leftrightarrow$ $a^r * a^{-s} = a^s * a^{-s}$

$\Leftrightarrow$ $a^{r-s} = a^{s-s}$ teorema 2.2.4(i)

$\Leftrightarrow$ $a^{r-s} = a^0$

$\Leftrightarrow$ $a^{r-s} = e$ definisi 2.2.3(i).

Jadi ada bilangan bulat positif $t = r-s$, sehingga $a^t = e$.

• Andaikan $r<s$, maka $(s-r)>0$.

$$a^r = a^s$$

$\Leftrightarrow$ $a^r * a^{-r} = a^s * a^{-r}$

$\Leftrightarrow$ $a^{r-r} = a^{s-r}$ teorema 2.2.4(i)

$\Leftrightarrow$ $a^0 = a^{s-r}$

$\Leftrightarrow$ $a^{s-r} = e$ definisi 2.2.3(i)

Jadi ada bilangan bulat positif $t = s\text{-}r$, sehingga $a^t = e$

Menurut prinsip dari himpunan bilangan bulat positif, pasti terdapat bilangan bulat positif terkecil n, sehingga $a^n = e$.

(ii) $(\Rightarrow)$Diketahui $t \in Z$ dan $a^t = e$.

Akan ditunjukkan bahwa n adalah pembagi dari t.

Menurut Algoritma Pembagian ada $q,r \in Z$ sedemikian sehingga $t = nq+r$, dimana $0 \le r < n$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$a^t = a^{nq+r}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^t = a^{nq} * a^r \qquad \text{teorema 2.2.4(i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^t = (a^n)^q * a^r \qquad \text{teorema 2.2.4(ii)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^t = e^q * a^r \qquad \text{teorema 2.2.6(i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e = a^r.$$

Oleh karena $0 \le r < n$ dan n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$, maka haruslah $r = 0$.

Jadi $t = nq$, $q \in Z$, sehingga n adalah pembagi dari t.

$(\Leftarrow)$Diketahui n adalah pembagi dari t.

Akan ditunjukkan $a^t = e$.

Jika n pembagi dari t maka $t = nv$, dengan $n \in Z$.

Diperoleh $a^t = a^{nv} = (a^n)^v = e^v = e$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen dalam $\langle a \rangle$ berbeda.

Andaikan $a^u = a^v$ dengan $0 \le u < n$, $0 \le v < n$, $u \ge v$ dan $u,v \in Z$, maka

$a^{u} * a^{-v} = a^{v} * a^{-v}$

$\Leftrightarrow \quad a^{u-v} = a^{v-v}$ teorema 2.2.4(i)

$\Leftrightarrow \quad a^{u-v} = a^{0}$

$\Leftrightarrow \quad a^{u-v} = e.$

Jadi menurut teorema 2.2.6(ii) n adalah pembagi dari (u-v) dan $0 \leq u\text{-}v < n$, maka $u = v$.

Akan ditunjukkan bahwa $\langle a \rangle = \{ a^{0}, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \}$.

Misalkan m adalah sebarang bilangan bulat. Menurut Algoritma Pembagian maka ada $q,r \in Z$ dengan $0 \leq r < n$ sedemikian sehingga $m = nq+r$.

Diperoleh $a^{m} = a^{nq+r} = a^{nq} * a^{r} = (a^{n})^{q} * a^{r} = e * a^{r} = a^{r}$.

Jadi $a^{m} \in \{ a^{0}, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \}$.Atau $\langle a \rangle \subseteq \{ a^{0}, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \}$.

Selain itu jelas bahwa $\{ a^{0}, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \} \subseteq \langle a \rangle$.

Jadi $\langle a \rangle = \{ a^{0}, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \}$. ■

Teorema 2.2.7:

Jika $\langle a \rangle$ grup siklik yang dibangun oleh a maka o($\langle a \rangle$) takhingga bila dan hanya bila $\forall\, r,s \in Z,\ a^{r} = a^{s} \Rightarrow r = s.$

Bukti:

($\Rightarrow$)Diketahui o($\langle a \rangle$) takhingga .

Akan ditunjukkan bahwa $(\forall r,s \in Z)\ a^{r} = a^{s} \Rightarrow r = s.$

Andaikan dan $r \neq s$ dan $a^{r} = a^{s}$. Berdasarkan teorema 2.2.6 (iii),

$\langle a \rangle = \{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$ untuk suatu bilangan bulat positif sehingga o($\langle a \rangle$) = n, berarti $\langle a \rangle$ berhingga. Terjadi kontradiksi .

Jadi $a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

($\Leftarrow$)Diketahui $a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

Akan ditunjukkan o($\langle a \rangle$) takhingga.

Perhatikan bahwa jika $r \neq s$ maka $a^r \neq a^s$, sehingga a berpangkat sebarang bilangan yang berbeda merupakan elemen-elemen yang berbeda sehingga semua anggota dari $\langle a \rangle$ adalah berlainan, maka o($\langle a \rangle$) takhingga. ■

Teorema 2.2.8:

Jika G grup dan $a \in G$ maka o(a) = o($\langle a \rangle$).

Bukti:

Andaikan o(a) berhingga yaitu o(a) = n, sehingga berlaku $a^n = e$.

Misalkan m adalah sebarang bilangan bulat. Menurut Algoritma Pembagian maka ada $q, r \in Z$ dengan $0 \leq r < n$ sedemikian sehingga $m = nq + r$.

Diperoleh $a^m = a^{nq+r} = a^{nq} * a^r = (a^n)^q * a^r = e * a^r = a^r$.

Jadi $a^m \in \{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$.Atau $\langle a \rangle \subseteq \{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$.

Selain itu jelas bahwa $\{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \} \subseteq \langle a \rangle$.

Jadi $\langle a \rangle = \{ a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$. Dengan demikian o($\langle a \rangle$) = n.

Jadi $\langle a \rangle$ berhingga.

Andaikan o(a) takhingga, maka a pangkat sebarang bilangan merupakan elemen - elemen yang berbeda akibatnya o($\langle a \rangle$) takhingga.

Jadi o(a) = o($\langle a \rangle$). ■

Definisi 2.2.8:

Misalkan (G,$*$) grup, $a \in G$, dan H subgrup dari G, maka:

himpunan $aH = \{\ a * h /\ h \in H\ \}$ disebut *koset kiri dari H.*

himpunan $Ha = \{\ h * a /\ h \in H\ \}$ disebut *koset kanan dari H.*

Definisi 2.2.9:

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong dan $P = \{\ S_1, S_2, ..., S_n\ \}$, dengan $S_i \subset S$, maka P *adalah partisi dalam* S bila dan hanya bila:

1. $S_i \neq \emptyset$, $\forall i$.
2. Jika $S_1, S_2 \in P$ dan $S_1 \neq S_2$, maka $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = P$.

Definisi 2.2.10:

Misalkan G himpunan tidak kosong, maka suatu relasi R pada G disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi:

1. sifat refleksif yaitu $(\forall a \in G)\ (a,a) \in R$.
2. sifat simetris yaitu $(\forall\ a,b \in G)\ ((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$.
3. sifat transitif yaitu $(\forall\ a,b,c \in G)((a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R)$.

Teorema 2.2.9:

Misalkan G himpunan tidak kosong, maka relasi ekuivalensi pada G menghasilkan suatu partisi dalam G.

Bukti:

Misalkan relasi ekuivalensi tersebut R. Misalkan $a \in G$ dan G_a adalah himpunan semua elemen-elemen yang berelasi dengan a.

Jadi $G_a = \{ x \in G : xRa \}$.

- $G_a \neq \emptyset$, karena R mempunyai sifat refleksif yaitu aRa. Jadi G_a sekurang-kurangnya mempunyai satu anggota yaitu a.
- Misalkan $b \in G$, dan $G_a \cap G_b \neq \emptyset$.

Misalkan $c \in G_a \cap G_b$ maka $c \in G_a$ dan $c \in G_b$.

Bila $c \in G_a$, maka berlaku cRa, karena R simetris maka diperoleh aRc.

Bila $c \in G_b$, maka berlaku cRb. Karena aRc dan cRb, dengan menggunakan sifat transitif pada R diperoleh aRb.

Misalkan $p \in G_a$ maka berlaku pRa dan karena aRb maka diperoleh pRb, sehingga $p \in G_b$. Jadi $G_a \subseteq G_b$.

Dengan jalan yang sama diperoleh $G_b \subseteq G_a$. Jadi $G_a = G_b$.

Sehingga terbukti bahwa jika $G_a \cap G_b \neq \emptyset$, maka $G_a = G_b$.

Kontradiksi dari keadaan diatas adalah jika $G_a \neq G_b$ maka $G_a \cap G_b = \emptyset$.

Jadi $G_a \neq G_b \Rightarrow G_a \cap G_b = \emptyset$. ■

Teorema 2.2.10:

Misalkan $(G, *)$ grup dan H subgrup dari G dan didefinisikan relasi "~" pada G sebagai berikut $a \sim b$ bila dan hanya bila $a * b^{-1} \in H$, maka "~" adalah relasi ekuivalensi pada G.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa "~" relasi ekuivalensi pada G.

1. Jika $a \in G$, maka $a \sim a$, karena $a * a^{-1} = e \in H$, $\forall a \in G$.

   Sifat refleksif dipenuhi.

2. Misalkan $a,b \in G$.

   Jika $a \sim b$, maka $a * b^{-1} \in H$ dan $(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1} \in H$ sehingga $b \sim a$.

   Sifat simetris dipenuhi.

3. Misalkan $a,b,c \in G$.

   Jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a * b^{-1} \in H$ dan $b * c^{-1} \in H$ sehingga

   $(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in H$

   $a * (b^{-1} * b) * c \in H$

   $a * c^{-1} \in H$, maka $a \sim c$.

   Sifat transitif dipenuhi.

Jadi "~" adalah relasi ekuivalensi. ∎

Definisi 2.2.11:

Misalkan $(G, *)$ grup, $a \in G$ dan relasi "~" adalah relasi ekuivalensi pada G, maka $[a] = \{ x \in G / a \sim x \}$ disebut *kelas ekuivalensi* dari grup G terhadap relasi "~".

Teorema 2.2.11:

Misalkan $(G, *)$ grup, H subgrup dari G dan untuk $a,b \in G$ didefinisikan $a \sim b$ jika $(a * b^{-1}) \in H$ dan bila $Hb = \{ h * b \,/\, h \in H \}$ maka $[b] = Hb$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $[b] \subseteq Hb$.

Misalkan $a \in [b]$, maka $a \sim b$ yang berarti $a * b^{-1} \in H$.

Sehingga $\exists\, h \in H$ sedemikian sehingga $a * b^{-1} = h$.

Perhatikan bahwa $(a * b^{-1}) * b = h * b \Leftrightarrow a * (b^{-1} * b) = h * b \Leftrightarrow a = h * b$.

Sehingga $a \in Hb$. Jadi $[b] \subseteq Hb$.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $Hb \subseteq [b]$.

Misalkan $a \in Hb$, maka $a = h * b$, untuk suatu $h \in H$.

Perhatiakan bahwa $a * b^{-1} = (h * b) * b^{-1} = h$.

Sehingga $a * b^{-1} \in H$ atau $a \sim b$. Jadi $Hb \subseteq [b]$.

Dengan demikian diperoleh $[b] = Hb$. ■

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa koset-koset kanan dari H dalam grup G membentuk suatu partisi dalam G.

Teorema 2.2.12:

Jika H adalah subgrup dari grup $(G, *)$ dan a,b adalah sebarang elemen dalam G, maka keempat kondisi berikut ekuivalen.

a. $a * b^{-1} \in H$

b. $a = h * b$, untuk suatu $h \in H$.

c. $a \in Hb$

d. $Hb = Ha$.

Bukti:

Untuk membuktikan ekuivalensi diatas cukup dibuktikan a$\Rightarrow$b$\Rightarrow$c$\Rightarrow$d$\Rightarrow$a.

a$\Rightarrow$b. Jika $a * b^{-1} \in H$, pasti terdapat $h \in H$ sehingga $a * b^{-1} = h$, jika kedua ruas dikalikan dengan b dari kanan, maka $a * b^{-1} * b = h * b$, selanjutnya diperoleh $a = h * b$ untuk suatu $h \in H$.

b$\Rightarrow$c. Jika $a = h * b$, untuk $h \in H$, maka jelas $a \in Hb$.

c$\Rightarrow$d. Jika $a \in Hb$ maka akan ditunjukkan bahwa $Hb \subseteq Ha$ dan $Ha \subseteq Hb$.

- Misalkan $c \in Hb$, maka terdapat $h_1 \in H$ sehingga $c = h_1 * b$.

  Karena $b = h * a$, untuk suatu $h \in H$ maka $c = h_1 * h * a$, dimana $h_1 * h \in H$.

  Jadi $c \in Ha$, berarti $Hb \subseteq Ha$.

- Misalkan $d \in Ha$, pasti terdapat $h_2 \in H$, sehingga $d = h_2 * a$.

  Karena $a = h * b$, untuk suatu $h \in H$, maka $d = h_2 * h * b$, dimana $h_2 * h \in H$.

  Sehingga $d \in Hb$, berarti $Ha \subseteq Hb$.

  Jadi $Hb = Ha$.

d$\Rightarrow$a. Akan dibuktikan bahwa jika $Hb = Ha$ maka $a * b^{-1} \in H$.

Karena $a \in Ha$ dan $Ha = Hb$,

maka $a \in Hb$ dengan demikian $a = h * b$, untuk suatu $h \in H$.

Oleh karena $b^{-1} \in G$, maka

$a * b^{-1} = (h * b) * b^{-1}$

$= h * (b * b^{-1})$

$= h * e$

$= h.$

Dengan demikian $a * b^{-1} \in H.$ ■

Teorema 2.2.13:

Jika $(G, *)$ grup berhingga, $a \in G$, dan H subgrup dari G maka o(H) = o(Ha).

Bukti:

Untuk membuktikan teorema diatas ditunjukkan bahwa ada korespondensi 1-1 antara H dan Ha.

Didefinisikan suatu pemetaan $\alpha : H \rightarrow Ha$, dengan aturan sebagai berikut $\alpha(h) = h * a, \forall h \in H$.

- Terlebih dahulu ditunjukkan α terdefinisi secara baik .

  Misalkan $h_1, h_2 \in H$ dengan $h_1 = h_2$, maka $h_1 * a = h_2 * a, \forall a \in G$, diperoleh $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$.

- Akan ditunjukan α injektif.

  Misalkan $h_1, h_2 \in H$ dengan $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$, maka $h_1 * a = h_2 * a$, dengan aturan kanselasi diperoleh $h_1 = h_2$.

Jadi α injektif.

- Akan ditunjukan α surjektif . Misalkan $x \in Ha$, maka $x = h_1 * a$, untuk suatu $h_1 \in H$.

  Sehingga dapat ditemukan $h_1 \in H$, sedemikian sehingga

  $\alpha(h_1) = h_1 * a = h_1$.

  Jadi α surjektif.

Karena ada korespondensi 1-1 antara H dan Ha, dan karena G berhingga, maka o(H) = o(Ha). ■

Setiap koset (kanan atau kiri) dari subgrup H mempunyai banyak elemen yang sama dengan H.

Teorema 2.2.14:

Misalkan $(G, *)$ grup dan H sugrup dari G. Terdapat pemetaan bijektif antara dua koset kanan dari H dalam G.

Bukti:

Misalkan Ha dan Hb adalah dua koset kanan dari H dalam G.

Akan ditunjukkan ada suatu pemetaan bijektif antara Ha dan Hb.

Didefinisikan $\phi : Ha \to Hb$ dengan aturan $\phi(h * a) = h * b$.

Misalkan $h_1 a, h_2 a \in Ha$.

Akan ditunjukkan bahwa jika $h_1 * a = h_2 * a$ maka $\phi(h_1 * a) = \phi(h_2 * a)$.

Perhatikan $h_1 * a = h_2 * a \Leftrightarrow h_1 = h_2$ (hukum kanselasi)

$$\Leftrightarrow h_1 * b = h_2 * b$$

$$\Leftrightarrow \phi(h_1 * a) = \phi(h_2 * a).$$

Jadi $(\forall h_1 a, h_2 a \in Ha)(h_1 * a = h_2 * a) \Rightarrow \phi(h_1 * a) = \phi(h_2 * a)$.

Sehingga ϕ well defined.

Jelas ϕ surjektif, karena jika diambil sebarang $y \in Hb$ dengan $y = h_1 * b$ untuk suatu $h_1 \in H$ pasti terdapat $h_1 * a \in Ha$ sedemikian sehingga $\phi(h_1 * a) = h_1 * b$.

Jika $\phi(h_1 * a) = \phi(h_2 * a)$, maka $h_1 * b = h_2 * b$, dengan menggunakan hukum kanselasi kanan maka diperoleh $h_1 = h_2$.

Jadi ϕ merupakan pemetaan injektif.

Karena ϕ surjektif dan injektif maka ϕ bijektif. ■

Teorema 2.2.15 (Teorema Lagrange):

Jika $(G, *)$ adalah grup berhingga dan H subgrup dari G, maka o(H) merupakan pembagi dari o(G) (ditulis o(H) | o(G)).

Bukti:

Andaikan G berhingga dan H subgrup dari G.

Karena H subgrup dari G, maka H berhingga pula.

Karena G berhingga, maka banyaknya koset kanan dari H berhingga pula, misalkan k, katakan koset kanan-koset kanan dari H tersebut adalah Ha_1, Ha_2, $Ha_3, \ldots, Ha_k$.

Menurut teorema 2.2.11, koset kanan-koset kanan ini membentuk partisi dalam G, yaitu $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_k$, dan $Ha_i \cap Ha_j = \emptyset$, untuk $i \neq j$.

Misalkan o(H) = n dan telah dibuktikan diatas bahwa $Ha_i \neq Ha_j$,maka $\forall i = 1,2,3,\ldots,k$, o($H_i$) = n.

Sehingga o(G) = kn, atau o(G) = ko(H).

Jadi o(H) pembagi o(G). ■

Teorema 2.2.16:

(i) Jika $(G, *)$ grup berhingga dan $a \in G$, maka o(a) merupakan faktor dari o(G).

(ii) Grup $(G, *)$ yang berorde prima hanya memuat subgrup $\{e\}$ dan G.

(iii) Setiap grup $(G, *)$ dengan orde prima adalah siklik yang dibangun dengan sebuah elemen yang bukan identitas.

(iv) Jika $(G, *)$ grup berhingga dengan orde k maka $a^k = e$, $\forall a \in G$.

(v) Jika $(G, *)$ grup berhingga dan H,K masing-masing adalah subgrup dari G, dengan o(H) $\neq$ o(K), dan H,K berorde prima maka $H \cap K = \{e\}$.

Bukti:

(i) Perhatikan bahwa menurut teorema 2.2.5 $H = \langle a \rangle$ adalah subgrup dari G. Menurut teorema 2.2.8. o(a) = o($\langle a \rangle$).

Menurut teorema Lagrange diperoleh bahwa o($\langle a \rangle$) merupakan faktor dari o(G). Jadi o(a) merupakan faktor dari o(G).

(ii) Misalkan o(G) = p dengan p adalah bilangan prima.. Misalkan H adalah subgrup dari G maka menurut teorema Lagrange diperoleh o(H) | o(G) sehingga o(H) = p atau o(H) = 1, yang berarti $H = G$ atau $H = \{e\}$.

Jadi G hanya memuat subgrup yang berorde satu yaitu $H = \{e\}$dan berorde p yaitu G.

(iii) Menurut teorema Lagrange jika H subgrup dari G maka o(H) | o(G), karena o(G) = p dengan p bilangan prima maka o(H) yang mungkin adalah 1 atau p.

Sehingga berakibat jika $H \neq \{e\}$, maka $H = G$.

Jika $a \in G$ dan $a \neq e$, maka perpangkatan dari a membentuk subgrup terhadap grup G dan tidak sama dengan $\{e\}$.

Sehingga subgrup ini tidak lain adalah G sendiri.

Dengan kata lain setiap $x \in G$ berbentuk $x = a^i$, dengan $i \in Z$.

Oleh karena itu G adalah siklik.

(iv) Misalkan orde dari grup G adalah k, yakni o(G) = k, maka menurut teorema 2.2.16(i), o(a) merupakan faktor dari o(G) sehingga o(G) = no(a) untuk suatu $n \in Z^+$.

Sehingga diperoleh $a^k = a^{o(G)} = a^{no(a)} = (a^{o(a)})^n = (e)^n = e$.

Jadi $a^k = e, \forall a \in G$.

(v) Misalkan o(H) = p dan o(K) = q, dengan p dan q adalah bilangan prima, dan $p \neq q$. Perhatikan bahwa $H \cap K \subseteq H$ dan $H \cap K \subseteq K$, maka $H \cap K$ subgrup dari H dan K .

Sehingga menurut teorema Lagrange o($H \cap K$) | o(H) dan o($H \cap K$) | o(K) berarti o($H \cap K$) | p dan o($H \cap K$) | q, padahal p dan q bilangan prima maka o($H \cap K$) = 1, sehingga haruslah o($H \cap K$) = 1.

Jadi $H \cap K$ tidak lain adalah $\{e\}$. ■

Definisi 2.2.12:

Suatu subgrup N dari grup $(G, *)$ disebut *subgrup normal dari G* bila $Ng = gN$, $\forall g \in G$.

Bila N subgrup normal dari G dinotasikan $N \triangleleft G$.

Teorema 2.2.17:

Diketahui N subgrup dari(G)

$N \triangleleft G$ bila dan hanya bila $(\forall g \in G)(\forall n \in N)\ g * n * g^{-1} \in N$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui N subgrup dari G dan $Ng = gN$.

Akan ditunjukkan $(\forall g \in G)\ (\forall n \in N)\ g * n * g^{-1} \in N$.

$g \in G$ dan $n \in N$ maka $g * n \in gN$.

Karena diketahui $Ng = gN$, maka $g * n \in Ng$.

Menurut teorema 2.2.12 diperoleh $g * n * g^{-1} \in N$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui N subgrup dari G dan $(\forall\, g \in G)\ (\forall\, n \in N)\ g * n * g^{-1} \in N$.

Akan ditunjukkan $N \lhd G$ yaitu $Ng = gN$.

Misalkan $x \in Ng$.

Karena $x \in Ng$ maka $x = n_1 * g$ untuk suatu $n_1 \in N$.

sehingga

$$g^{-1} * x = g^{-1} * n_1 * g \in N \Leftrightarrow g^{-1} * x = (g^{-1}) * n_1 * (g^{-1})^{-1} \in N.$$

Karena $g^{-1} x \in N$, maka $g * (g^{-1} * x) = (g * g^{-1}) * x = x \in gN$.

Jadi $Ng \subseteq gN$.

Misalkan $y \in gN$.

Karena $y \in gN$, maka $y = g * n_2$, untuk suatu $n_2 \in N$.

sehingga $y * g^{-1} = g * n_2 * g^{-1} \in N$.

Karena $y * g^{-1} \in N$, maka $(y * g^{-1}) * g = y * (g^{-1} * g) = y \in Ng$.

Jadi $gN \subseteq Ng$.

Karena $Ng \subseteq gN$ dan $gN \subseteq Ng$, maka $Ng = gN$. ■

Definisi 2.2.13:

Misalkan $(G, *)$ grup. *Pusat dari* G yang dinotasikan $Z(G)$ adalah himpunan semua elemen dari G yang komutatif dengan sebarang elemen dari G.

Teorema 2.2.18:

Jika $(G, *)$ grup dan dibentuk $Z(G) = \{\ x \in G /\ x * y = y * x, \forall y \in G\ \}$, maka $Z(G)$ merupakan subgrup normal dari G.

Bukti :

Akan ditunjukkan dulu bahwa $Z(G)$ subgrup dari G.

1. $Z(G) \neq \emptyset$. Karena $e * y = y * e = y$, $\forall y \in G$, maka $e \in Z(G)$.

2. Misalkan $p, q \in Z(G)$.

   Akan ditunjukkan $p * q \in Z(G)$ yakni $(p * q) * y = y * (p * q)$, $\forall y \in G$.

   Karena $p, q \in Z(G)$ maka $p * y = y * p$, $\forall y \in G$ dan $q * y = y * q, \forall y \in G$.

   Perhatikan $(p * q) * y = p * (q * y)$ (Assosiatif)

   $= p * (y * q)$ $(q \in Z(G))$

   $= (p * y) * q$ (Assosiatif)

$= (y * p) * q \qquad (p \in Z(G))$

$= y * (p * q) \qquad$ (Assosiatif).

Jadi $p * q \in Z(G)$.

3. Misalkan $p \in Z(G)$ akibatnya $p \in G$ dan $p^{-1} \in G$.

Ditunjukkan $p^{-1} \in Z(G)$ yakni $p^{-1} * y = y * p^{-1} \quad \forall y \in G$.

Karena $p \in Z(G)$ maka $p * y = y * p, \forall y \in G$.

Perhatikan $\quad (p * y) * p^{-1} = (y * p) * p^{-1}$ (kedua ruas dikali p^{-1} dari kanan)

$(p * y) * p^{-1} = y * (p * p^{-1})$ (assosiatif)

$p^{-1} * (p * y) * p^{-1} = p^{-1} * y$ (kedua ruas dikali p^{-1} dari kiri)

$(p^{-1} * p) * y * p^{-1} = p^{-1} * y$ (assosiatif)

$y * p^{-1} = p^{-1} * y$.

Jadi $p^{-1} \in Z(G)$.

Dari 1, 2, 3 terbukti $Z(G)$ subgrup dari G.

Sekarang ditunjukkan $Z(G)$ adalah subgrup normal dari G.

Misalkan $p \in G$ dan $q \in Z(G)$.

Akan ditunjukkan $p * q * p^{-1} \in Z(G)$ yakni $(p * q * p^{-1}) * y = y * (p * q * p^{-1}), \forall y \in G$.

Perhatikan $(p * q * p^{-1}) * y = p * (q * p^{-1}) * y$ (assosiatif)

$= p * (p^{-1} * q) * y$ $(q \in Z(G))$

$= (p * p^{-1}) * q * y$ (assosiatif)

$= q * y$

$= y * q$ $(q \in Z(G))$

$= y * q * (p * p^{-1})$

$= y * (q * p) * p^{-1}$ (assosiatif)

$= y * (p * q * p^{-1})$ $(q \in Z(G)$.

Jadi $p * q * p^{-1} \in Z(G)$.

Dengan demikian terbukti bahwa $Z(G)$ subgrup normal dari G. ■

C. Homomorphisma dan Automorphisma.

Definisi 2.3.1:

Andaikan $(G, \circ)$ grup dan $(H, *)$ grup. Pemetaan $\alpha: (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ disebut *homomorphisma grup* bila berlaku $(\forall a, b \in G)\ \alpha(a \circ b) = \alpha(a) * \alpha(b)$.

Contoh 2.3.1:

Misalkan $\Re$ adalah himpunan semua bilangan real; maka $(\Re,+)$ membentuk grup dan misalkan $\Re^+$ adalah himpunan semua bilangan real positif; maka $(\Re^+,\cdot)$ membentuk grup.

Jika didefinisikan suatu pemetaan $f : \Re \to \Re^+$ dengan aturan $f(x) = e^x$, $\forall x \in \Re$, akan ditunjukkan bahwa f suatu homomorphisma grup.

Untuk menunjukkan bahwa f suatu homomorphisma grup, berarti harus dibuktikan bahwa untuk sembarang $x,y \in \Re$, berlaku $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$,

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= e^{(x+y)} \\
&= e^x \cdot e^y \\
&= f(x) \cdot f(y).
\end{aligned}
$$

Jadi $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, terbukti bahwa f suatu homomorphisma grup.

Teorema 2.3.1:

Misalkan $(G, \circ)$ grup dan $(H, *)$ grup. Jika $\theta: (G, \circ) \to (H, *)$ adalah suatu homomorphisma, maka

(i) $\theta(e_G) = e_H$.

(ii) $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$, $\forall a \in G$.

Bukti:

(i) Karena θ homomorphisma dan $e_G \circ e_G = e_G$, maka

$\theta(e_G) \circ \theta(e_G) = \theta(e_G * e_G) = \theta(e_G)$.

Padahal $\theta(e_G) \in H$, sehingga $\theta(e_G) = \theta(e_G) * e_H$.

Jadi $\theta(e_G) * \theta(e_G) = \theta(e_G) * e_H$.

Sehingga dengan menggunakan hukum kanselasi kiri diperoleh

$\theta(e_G) = e_H$.

(ii) Misalkan $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e_G$,

maka $\theta(a \circ a^{-1}) = \theta(e_G)$.

Karena θ homomorphisma, maka $\theta(a) * \theta(a^{-1}) = e_H$. .....(1).

Karena $(\theta(a))^{-1} \in H$, maka $\theta(a) * (\theta(a))^{-1} = e_H$. ....(2).

Dari (1) dan (2) diperoleh $\theta(a) * \theta(a^{-1}) = \theta(a) * (\theta(a))^{-1}$,

Dengan menggunakan hukum kanselasi kiri diperoleh

$\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$ ■

Teorema 2.3.2:

Misalkan $\phi : (G, *) \rightarrow (G', \circ)$ adalah homomorphisma dengan $\phi(H) = \{\phi(h) / h \in H\}$, maka berlaku:

1. Jika H subgrup dari G, maka $\phi(H)$ subgrup dari G'.
2. Jika $H \lhd G$ maka $\phi(H) \lhd \phi(G)$.

Bukti:

1. Diketahui H subgrup dari G.

   Akan dibuktikan $\phi(H)$ adalah subgrup dari G.

   (i) $\phi(H) \neq \emptyset$, Karena $e \in H$, maka $\phi(e) \in \phi(H)$.

   (ii) Misalkan $x,y \in \phi(H)$, maka $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$, untuk suatu $a,b \in H$.

   Perhatikan $x \circ y = \phi(a) \circ \phi(b)$

   $= \phi(a * b)$ (ϕ homomorphisma).

   Dengan demikian $x \circ y \in \phi(H)$.

   (iii) Misalkan $y \in \phi(H)$, maka $y = \phi(a)$, untuk suatu $a \in H$.

   $y^{-1} = (\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$ (teorema 2.3.1).

Karena $a^{-1} \in H$ maka $y^{-1} = \phi(a)^{-1} \in \phi(H)$.

Dengan demikian $\phi(H)$ subgrup dari G'.

2). Diketahui $H \triangleleft G$. Akan ditunjukkan $\phi(H) = \{\phi(h) / h \in H\} \triangleleft \phi(G)$.

Misalkan $x \in \phi(G)$ dan $y \in \phi(H)$, maka $x = \phi(g)$, $y = \phi(h)$ untuk suatu $g \in G$, dan untuk suatu $h \in H$, maka

$$x \circ y \circ x^{-1} = \phi(g) \circ \phi(h) \circ (\phi(g))^{-1}$$

$$= \phi(g) \circ \phi(h) \circ \phi(g^{-1}) \qquad \text{(teorema 2.3.1)}$$

$$= \phi(g * h * g^{-1}). \qquad (\phi \text{ homomorphisma})$$

Karena $g * h * g^{-1} \in H$, maka $\phi(g * h * g^{-1}) \in \phi(H)$.

Dengan demikian $\phi(H) \triangleleft \phi(G)$. ■

Definisi 2.3.2:

Misalkan $(G,\circ)$ dan $(G', *)$ adalah grup. Suatu *Isomorphisma* $\beta: (G,\circ) \to (G', *)$ adalah suatu homomorphisma yang injektif dan surjektif.

Jika $\beta: (G,\circ) \to (G', *)$ suatu isomorphisma, maka $(G,\circ)$ dan $(G', *)$ dikatakan *isomorfik* dan notasi yang digunakan adalah $(G,\circ) \cong (G', *)$.

Contoh 2.3.2:

Akan ditunjukkan bahwa $(\Re,+) \cong (\Re^+, *)$

Penyelesaian:

Andaikan diberikan suatu aturan $\alpha : \Re \to \Re^+$, dengan aturan $\alpha(x) = e^x$, $\forall x \in \Re$.

Akan ditunjukkan bahwa α adalah suatu isomorphisma

- Akan ditnjukkan α terdefinisi dengan baik (well-defined).

  Misalkan $x_1, x_2 \in \Re$, dengan $x_1 = x_2$.

  Ditunjukkan bahwa $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.

  Karena $x_1 = x_2$, maka $e^{x_1} = e^{x_2}$.

  Sehingga $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.

  Jadi α well-defined.

- Akan ditunjukkan bahwa α suatu pemetaan injektif.

  Misalkan $x_1, x_2 \in \Re$ sehingga $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.

  Akan ditunjukkan bahwa $x_1 = x_2$.

  Perhatikan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

  Jadi α suatu pemetaan injektif.

- Akan ditunjukkan bahwa α adalah suatu pemetaan surjektif.

  Misalkan $r \in \Re^+$, maka pasti terdapat $y \in \Re$, sedemikian sehingga $r = e^y$.

  Sehingga $r = \alpha(y)$, $y \in \Re$.

  Jadi α pemetaan surjektif.

- Akan ditunjukkan bahwa α adalah suatu homomorphisma

  Misalkan $x, y \in \Re$.

  Akan ditujukkan bahwa $\alpha(x+y) = \alpha(x) * \alpha(y)$.

  Perhatikan $\alpha(x+y) = e^{(x+y)} = e^{x} * e^{y} = \alpha(x) * \alpha(y)$.

  Sehingga α suatu homomorphisma

  Jadi $(\Re, +) \cong (\Re^{+}, *)$.

Definisi 2.3.3:

Misalkan $(G, \circ)$ suatu grup. Jika $\beta: (G, \circ) \rightarrow (G, \circ)$ suatu isomorphisma maka β disebut *Automorphisma*

Untuk penulisan $(G, *)$ dan $x * y$ pada bab berikutnya cukup ditulis G dan xy.

BAB III

KONJUGASI INVERS DAN GRUP SIMETRI BALIKAN

A. Sifat-sifat Dasar Himpunan Pemusat dan Pemusat Tak Simetris.

Definisi 3.1.1:

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$, himpunan $C(a) = \{ x \in G : xa = a x \}$ disebut *pemusat dari a.*

Definisi 3.1.2:

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$, himpunan $B(a) = \{ x \in G : xa = a^{-1} x \}$ disebut *pemusat tak simetris dari a.*

Definisi 3.1.3:

Misalkan G adalah grup. Elemen-elemen $a,b \in G$ dikatakan *berada dalam kelas konjugasi yang sama* (yaitu a dan b *berkonjugasi*) bila ada $x \in G$ yang memenuhi $a = x^{-1}bx$.

Teorema 3.1.1

Misalkan G adalah grup, elemen $a \in G$ berkonjugasi dengan inversnya bila dan hanya bila $B(a) \neq \emptyset$.

Bukti:

($\Rightarrow$)Misalkan $a \in G$ dan a berkonjugasi dengan inversnya maka berlaku $a = x^{-1}a^{-1}x$, untuk suatu $x \in G$ dengan demikian diperoleh $xa = a^{-1}x$. Sehingga $x \in$ B(a). Jadi B(a) $\neq \acute{\emptyset}$.

($\Leftarrow$)Diketahui B(a) $\neq \acute{\emptyset}$, maka menurut definisi 3.1.2 ada $x \in$ G sehingga $xa = a^{-1}x$ sehingga diperoleh $a = x^{-1}a^{-1}x$

Jadi a dan a^{-1} berkonjugasi. ■

Teorema 3.1.2:

Misalkan G grup dan $a \in G$ maka C(a) = $\{x \in G : xa = ax\}$ adalah subgrup dari G.

Bukti:

- C(a) $\neq \acute{\emptyset}$, karena ada $e \in G$ sehingga $ex = xe$ $\forall x \in G$, sehingga $e \in$ C(a).
- Misalkan $x,y \in$ C(a), maka $xa = ax$, dan $ya = ay$.

  Akan ditunjukkan bahwa $xy \in$ C(a).

  Perhatikan $(xy)a = x(ya)$ assosiatif

  $= x(ay)$ $y \in$ C(a)

  $= (xa)y$ assosiatif

$= (ax)y$ $\quad$ $x \in \mathrm{C}(a)$

$= a(xy)$ $\quad$ assosiatif.

Sehingga diperoleh $(xy)a = a(xy)$.

Jadi $xy \in \mathrm{C}(a)$.

- Misalkan $x \in \mathrm{C}(a)$. Akan ditunjukkan bahwa $x^{-1} \in \mathrm{C}(a)$, yakni $x^{-1}a = ax^{-1}$.

  Perhatikan $xa = ax$

  $\Leftrightarrow x^{-1}(xa) = x^{-1}(ax)$

  $\Leftrightarrow (x^{-1}x)a = (x^{-1}a)x$ $\quad$ assosiatif

  $\Leftrightarrow ea = (x^{-1}a)x$ $\quad$ definisi 2.1.12(ii)

  $\Leftrightarrow ax^{-1} = (x^{-1}a)(xx^{-1})$

  $\Leftrightarrow ax^{-1} = (x^{-1}a)e$ $\quad$ definisi 2.1.12(ii)

  $\Leftrightarrow ax^{-1} = x^{-1}a$.

  Sehingga $ax^{-1} = x^{-1}a$.

  Jadi $x^{-1} \in \mathrm{C}(a)$. $\blacksquare$

Teorema 3.1.3:

Misalkan G grup, $a \in G$ dengan B(a)≠Ø, maka pernyataan-pernyataan berikut ini saling ekuivalen:

(i) B(a) adalah subgrup dari G

(ii) a memenuhi sifat $a^2 = e$

(iii) B(a) = C(a).

(iv) B(a) $\cap$ C(a) ≠ Ø.

Bukti:

Ekuivalensi-ekuivalensi tersebut akan diperlihatkan dengan membuktikan (i)⇒(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒(i)

(i) ⇒(ii): Jika B(a) adalah subgrup dari G maka B(a) mengandung elemen identitas dari G yang dilambangkan dengan e, jadi $ea = a^{-1}e$ sehingga $a = a^{-1}$ atau $a^2 = e$.

(ii) ⇒ (iii): Jika $a^2 = e$, berarti $aa = e$, maka $aaa^{-1} = ea^{-1}$ atau $a = a^{-1}$. Sehingga

B(a) = $\{ x \in G : xa = a^{-1} x \} = \{ x \in G : xa = a x \}$ = C(a).

(iii) ⇒ (iv): Jika B(a) = C(a) dan karena B(a) ≠ Ø maka B(a)$\cap$C(a) ≠ Ø .

(iv) ⇒ (i): Jika B(a)$\cap$C(a) ≠ Ø , maka ada $x \in$ B(a)$\cap$C(a)

Karena $x \in$ B(a), maka $xa = a^{-1}x$

Karena $x \in$ C(a), maka $xa = ax$

Sehingga $a^{-1}x = ax$.

Akibatnya $a^{-1}xx^{-1} = axx^{-1}$.

Atau $a^{-1} = a$.

Sehingga $a^2 = e$.

Dari (ii) $\Rightarrow$ (iii), diperoleh : B(a) = C(a).

Karena C(a) adalah subgrup dari G, maka B(a) juga subgrup dari G.

■

Teorema 3.1.4:

Jika G grup Abel dan $a \in G$, maka C(a) = G.

Bukti:

Diketahui G grup Abel dan $a \in G$ maka berlaku $xa = ax$, $\forall x \in G$.

Dengan melihat definisi 3.1.1, himpunan C(a) = $\{x \in G \,/\, xa = ax\}$=$G$.

Jadi C(a) = G. ■

Definisi 3.1.4:

Jika salah satu syarat dalam teorema 3.1.3 dipenuhi, maka dikatakan bahwa kita mempunyai *kasus trivial*.

Teorema 3.1.5:

Jika ada $x \in B(a)$, dengan $x^n = e$ untuk suatu $n \in Z$, maka diperoleh kasus trivial.

Bukti:

Misalkan $x \in B(a)$ dengan $x^n = e$ untuk suatu bilangan ganjil $n \in Z$, maka menurut definisi $B(a)$ diperoleh $xa = a^{-1}x$, sehingga diperoleh $x = a^{-1}xa^{-1}$

Perhatikan $x^n a = (xxx\ldots x)a$

$= (a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})\ldots(a^{-1}xa^{-1})a$

$= a^{-1}(xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})\ldots(a^{-1}x)(a^{-1}a)$ assosiatif

$= a^{-1}(xa^{-1})(xaa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})\ldots(a^{-1}x)$ $x \in B(a)$

$= a^{-1}(xa^{-1})(x)(a^{-1}xa^{-1})\ldots(a^{-1}x)$

$= a^{-1}(xa^{-1}x)(a^{-1}xa^{-1})\ldots(a^{-1}x)$ assosiatif

$= a^{-1}(xxa)(a^{-1}xa^{-1})(ax)\ldots(xa)(a^{-1}x)$ $x \in B(a)$

$= a^{-1}(xx)(aa^{-1})(x)(a^{-1}a)(x)\ldots(x)(aa^{-1})(x)$ assosiatif

$$= a^{-1}(xx)(x)(x)(x)\ldots(x)$$

$$= a^{-1}x^{n}.$$

Dengan demikian $x^n \in B(a)$ sehingga diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$x^n a = a^{-1}x^n \Rightarrow ea = a^{-1}e \Rightarrow a = a^{-1} \Rightarrow a^2 = e. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.1.6:

Misalkan G grup dan $a \in G$, a berkonjugasi dengan a^{-1} bila dan hanya bila ada $u, v \in G$ sedemikian sehingga $a = vu^{-1}$ dan $u^2 = v^2$

Bukti:

($\Rightarrow$)Misalkan $a \in G$ dan a berkonjugasi dengan a^{-1}, maka ada $w \in G$ sedemikian sehingga $a = w^{-1}a^{-1}w$.

Sedangkan $a = w^{-1}a^{-1}w \Leftrightarrow wa = a^{-1}w \Leftrightarrow awa = w \Leftrightarrow aw = wa^{-1}$

Maka $(aw)^2 = awaw = wa^{-1}aw = w^2$.

Pilih $v = aw \in B(a)$ dan $u = w$.

Maka $a = vu^{-1}$ dan $v^2 = (aw)^2 = w^2 = u^2$.

($\Leftarrow$)Sebaliknya, andaikan $a = vu^{-1}$ dan $u^2 = v^2$.

Maka $au = vu^{-1}u = v$ dan $ua^{-1} = u(vu^{-1})^{-1} = u^2 v^{-1} = v^2 v^{-1} = v$

Jadi $au = ua^{-1}$.

Sedangkan $au = ua^{-1} \Leftrightarrow u^{-1}au = a^{-1}$

$\Leftrightarrow (u^{-1}au)^{-1} = a$

$\Leftrightarrow u^{-1}a^{-1}u = a$

Jadi a berkonjugasi dengan a^{-1} ■

B. Grup Simetri Balikan

Definisi 3.2.1:

Misalkan G grup dan $a \in G$. Misalkan B(a) adalah pemusat tidak simetris dari a dan C(a) adalah pemusat dari a maka *grup simetri balikan dari a* ditulis dengan E(a) dan didefinisikan dengan E(a) = B(a) $\cup$ C(a)

Teorema 3.2.1:

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$, maka E(a) = B(a) $\cup$ C(a) adalah subgrup dari G.

Bukti:

Ini jelas bila B(a) berupa himpunan kosong. Jadi kita mengasumsikan bahwa B(a) himpunan tidak kosong.

Ambil invers kedua sisi dari $xa = a^{-1}x$ yang memberikan $a^{-1}\ x^{-1} = x^{-1}\ a$,

jadi $x \in$ B(a) $\Leftrightarrow$ $x^{-1} \in$ B(a).

Karena B(a) dan C(a) adalah tertutup terhadap inversnya maka demikian pula E(a).

Misalkan $x,y \in$ E(a).

-Bila $x,y \in$ C(a) maka $axy = xay = xya$. Maka $xy \in$ C(a) dan akibatnya

$xy \in$ E(a).

-Bila $x,y \in$ B(a) maka $axy = xa^{-1}y = xya$. Maka $xy \in$ C(a) dan akibatnya

$xy \in$ E(a)

-Kemungkinan ketiga adalah $x \in$ B(a), $y \in$ C(a) dalam hal ini

$xay = xa^{-1}y = a^{-1}xy$. Maka $xy \in$ B(a) dan akibatnya $xy \in$ E(a).

Dengan ketiga kondisi diatas maka E(a) tertutup terhadap perkalian dan mengingat

$e \in$ C(a) $\subseteq$ E(a), maka E(a) subgrup G. ∎

Teorema 3.2.2:

Misalkan G grup dan $a \in G$, maka himpunan C(a) adalah subgrup dari himpunan E(a)

Bukti:

- $C(a) \subseteq E(a)$, karena $E(a) = B(a) \cup C(a)$.
- $C(a) \neq \emptyset$, karena ada $e \in G$ sehingga $\forall x \in G$ $xe = ex = x$. Jadi $x \in C(a)$
- Misalkan $x, y \in C(a)$, maka $xa = ax, \forall x \in G$ dan $ya = ay, \forall y \in G$.

  Akan ditunjukkan bahwa $xy \in C(a)$.

  Perhatikan $(xy)a = x(ya)$ assosiatif

  $= x(ay)$ $(y \in C(a))$

  $= (xa)y$ assosiatif

  $= (ax)y$ $(x \in C(a))$

  $= a(xy)$.

  Sehingga diperoleh $(xy)a = a(xy)$.

  Jadi $xy \in C(a)$.

- Misalkan $x \in C(a)$. Akan ditujukkan bahwa $x^{-1} \in C(a)$.

  Perhatikan $xa = ax$

  $\Leftrightarrow x^{-1}(xa) = x^{-1}(ax)$

$\Leftrightarrow (x^{-1}x)a = (x^{-1}a)x$ assosiatif

$\Leftrightarrow ea = (x^{-1}a)x$ definisi 2.1.12(ii)

$\Leftrightarrow ax^{-1} = (x^{-1}a)(xx^{-1})$

$\Leftrightarrow ax^{-1} = (x^{-1}a)e$ definisi 2.1.12(ii)

$\Leftrightarrow ax^{-1} = x^{-1}a.$

Sehingga diperoleh $ax^{-1} = x^{-1}a$.

Jadi $x^{-1} \in C(a)$. ■

Teorema 3.2.3:

Bila G grup dan $a \in G$, maka $C(a)$ adalah subgrup normal dari $E(a)$.

Bukti:

Pada teorema 3.2.2 telah dibuktikan bahwa $C(a)$ adalah subgrup dari $E(a)$ Misalkan $y \in E(a)$ dan $b \in C(a)$ berarti $b \in G$.

Karena $E(a)$ grup maka $y^{-1} \in E(a)$.

Akan ditunjukkan bahwa $yby^{-1} \in C(a)$, yakni $(yby^{-1})a = a(yby^{-1})$.

Perhatikan $(yby^{-1})a = y(by^{-1})a$ assosiatif

$= y(y^{-1}b)a$ $y^{-1} \in E(a)$

$= (yy^{-1})ba$	assosiatif
$= ba$	definisi (2.1.12(iii))
$= ab$	$b \in \mathrm{C}(a)$
$= ab(yy^{-1})$	definisi (2.1.12(iii))
$= a(by)y^{-1}$	assositif
$= a(yb)y^{-1}$	$b \in \mathrm{C}(a)$
$= a(yby^{-1})$.	

Jadi $yby^{-1} \in \mathrm{C}(a)$. ■

Teorema 3.2.4

Misalkan G grup dan $a \in G$ dengan $a^2 \neq e$, $\mathrm{B}(a) \neq \acute{\varnothing}$ dan $\mathrm{B}(a) \cap \mathrm{C}(a) \neq \acute{\varnothing}$.

Jika $x, y \in \mathrm{B}(a)$, maka $x^{-1} y \in \mathrm{C}(a)$ dan $y \in x\,\mathrm{C}(a)$.

Bukti;

Bila $x, y \in \mathrm{B}(a)$, maka berlaku $xya = xa^{-1}y = axy$.

Karena $xya = axy$, maka $xy \in \mathrm{C}(a)$.

Karena $\mathrm{C}(a)$ grup maka $x^{-1} \in \mathrm{C}(a)$, sehingga $x^{-1}y \in \mathrm{C}(a)$.

Sehingga $x^{-1}y = c$ dengan $c \in \mathrm{C}(a)$, dan diperoleh $y = xc$, $c \in \mathrm{C}(a)$.

Maka menurut teorema 2.2.12 $y \in x\,\mathrm{C}(a)$. ■

Akibat dari teorema 3.2.4

Misalkan $x \in B(a)$, maka $B(a) = xC(a)$

Bukti:

Dari teorema diatas diperoleh $B(a) \subseteq xC(a)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $xC(a) \subseteq B(a)$

Misalkan $z \in xC(a)$, maka $z = xc$, untuk suatu $c \in C(a)$.

Akan ditunjukkan bahwa $z \in B(a)$, yakni $za = a^{-1}z$.

Perhatikan $za = (xc)a$

$= x(ca)$ assosiatif

$= x(ac)$ $c \in C(a)$

$= (xa)c$ assosiatif

$= (a^{-1}x)c$ $x \in B(a)$

$= a^{-1}(xc)$ assosiatif

$= a^{-1}z$

Sehingga diperoleh $za = a^{-1}z$. Jadi $z \in B(a)$

Karena B(a)$\subseteq$ xC(a) dan xC(a)$\subseteq$ B(a), maka B(a) = xC(a).

Teorema 3.2.5:

Misalkan G grup dan $a \in G$. Jika $\langle a \rangle = \{ a^n / n \in Z \}$ maka $\langle a \rangle$ adalah subgrup normal dari C(a) dan E(a).

Bukti:

Harus dibuktikan bahwa $\langle a \rangle$ subgrup normal dari C(a) dan $\langle a \rangle$ subgrup normal dari E(a).

Karena C(a) grup dan $a \in$ C(a) maka dari teorema 2.2.5 $\langle a \rangle$ subgrup dari C(a).

Sekarang tinggal dibuktikan bahwa $\langle a \rangle$ adalah subgrup normal dari C(a)

Misalkan $p \in$ C(a) dan $q \in \langle a \rangle$.

Akan ditunjukkan bahwa $pqp^{-1} \in \langle a \rangle$ yakni $pqp^{-1} = a^k$ untuk suatu $k \in Z$.

Karena $p \in$ C(a), dan C(a) grup maka $p^{-1} \in$ C(a).

Karena $q \in \langle a \rangle$, maka berlaku $q = a^k$.

Perhatikan $pqp^{-1} = pa^k p^{-1}$

$$= p\,(\underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{k\ faktor})\,p^{-1}$$

$$= p\,(\underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{k\text{-}1\ faktor})\,p^{-1}\,a$$

$$= p(\underbrace{a\,a\,a\,\ldots\,a}_{k\text{-}2\ faktor})p^{-1}aa$$

$$= p(\underbrace{a\,a\,a\,\ldots\,a}_{k\text{-}3\ faktor})\,p^{-1}aaa$$

$$\ldots$$

$$= pp^{-1}(\underbrace{a\,a\,a\ldots\,a}_{k\ faktor})$$

$$= (\underbrace{a\,a\,a\,\ldots\,a}_{k\ faktor})$$

$$= a^{k}.$$

Jadi $pqp^{-1} \in \langle a \rangle$.

Terbukti bahwa $\langle a \rangle$ subgrup normal dari C(a).

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\langle a \rangle$ adalah subgrup dari E(a).

Karena E(a) grup dan $a \in$ E(a) maka dari teorema 2.2.5 $\langle a \rangle$ subgrup dari E(a).

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\langle a \rangle$ merupakan subgrup normal dari E(a).

Misalkan $p \in$ E(a), karena E(a) grup maka $p^{-1} \in$ E(a) dan $q \in \langle a \rangle$, maka $q = a^{k}$ untuk suatu bilangan bulat k.

Akan ditunjukkan bahwa $pqp^{-1} \in \langle a \rangle$ yakni $pqp^{-1} = a^{k}$.

Karena $p \in$ E(a), maka $p \in$ B(a) atau $p \in$ C(a).

$p \in$ B(a), maka berlaku $pa = a^{-1}p$ ....1)

$p \in C(a)$, maka berlaku $pa = ap$ .....2)

Dari 1) dan 2) diperoleh $ap = a^{-1}p \Rightarrow app^{-1} = a^{-1}pp^{-1} \Rightarrow a = a^{-1}$.

Sehingga $pa = a^{-1}p \Rightarrow pa = ap$, karena $p^{-1} \in E(a)$, maka dengan jalan yang sama diperoleh juga $p^{-1}a = ap^{-1}$.

Perhatikan $pqp^{-1} = pa^kp^{-1}$

$$= p\,(\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\ faktor})\,p^{-1}$$

$$= p\,(\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\text{-}1\ faktor})\,p^{-1}a$$

$$= p(\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\text{-}2\ faktor})p^{-1}aa$$

$$= p(\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\text{-}3\ faktor})\,p^{-1}aaa$$

$$\ldots$$

$$= pp^{-1}(\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\ faktor})$$

$$= (\underbrace{a\,a\,a \ldots\, a}_{k\ faktor})$$

$$= a^k.$$

Jadi $pqp^{-1} \in \langle a \rangle$. ■

Teorema 3.2.6:

Jika G grup berhingga dan G Abel dengan orde genap, maka:

1. Ada $a \in G$, $a \neq e$ dengan $a^2 = e$

2. G selalu memuat *elemen nontrivial* (yakni elemen yang bukan elemen identitas) yang berkonjugasi dengan inversnya.

Bukti:

1. Diketahui G grup berhingga dengan orde genap maka o(G) = n, dengan $n = 2k$, untuk suatu k bilangan bulat positif.

   Akan ditunjukkan bahwa $\exists\, a \neq e \in G$, dengan $a^2 = e$.

   Misalkan $a \in G$, karena G berhingga maka menurut teorema 2.2.16(iv) $a^{o(G)} = e$.

   Misalkan $\forall\, a \neq e \in G$, $a^2 \neq e$.

   Perhatikan $a^{o(G)} = e$

   $\Leftrightarrow a^n = e$

   $\Leftrightarrow a^{2k} = e$

   $\Leftrightarrow (a^k)^2 = e$ teorema 2.2.4(ii)

   Karena o(G) berhingga dan k bilangan bulat positif maka ada $a^k = e$.

   Jadi $(a^k)^2 = e$. Terjadi kontradiksi

Jadi $\exists\, a \neq e \in G$, dengan $a^2 = e$.

2. Diketahui G grup berhingga dengan orde genap maka $o(G) = n$, dengan $n = 2k$, untuk suatu $k \in Z^+$.

Akan ditunjukkan bahwa $\exists\, a \in G$, $a \neq e$ dengan $a = x^{-1}a^{-1}x$, untuk suatu $x \in G$.
Menurut teorema 3.2.6(1) $\exists\, a \in G$, $a \neq e$ dan $a^2 = e$.

Perhatikan $a^2 = e$

$\Leftrightarrow aa = e$	
$\Leftrightarrow aaa^{-1} = ea^{-1}$	
$\Leftrightarrow ae = ea^{-1}$	definisi 2.1.12(iii)
$\Leftrightarrow a = ea^{-1}$	definisi 2.1.12(ii)
$\Leftrightarrow a = x^{-1}xa^{-1}$	untuk setiap $x \in G$
$\Leftrightarrow a = x^{-1}a^{-1}x$	G grup Abel. ■

Teorema 3.2.7:

Jika G grup berhingga dengan G Abel dan berorde ganjil dan $a \in G$, maka G tidak pernah mengandung elemen nontrivial yang berkonjugasi dengan inversnya.

Bukti:

Dketahui G grup berhingga dengan orde ganjil, maka o(G) = n, dengan $n = 2k+1$, untuk suatu $k \in Z$.

Misalkan $a \in G$, $a \neq e$ dan $a = x^{-1}a^{-1}x$ untuk suatu $x \in G$.

Menurut teorema 2.2.16(i) bila G grup berhingga dan $a \in G$ maka o(a) | o(G). Karena o(G) ganjil maka a tidak mungkin berorde genap, sehingga $a^2 \neq e$.

Pada bukti teorema 3.2.6(2) diketahui bahwa $a^2 = e$ akan mengakibatkan $a = x^{-1}a^{-1}x$, untuk setiap $x \in G$.

Sehingga untuk $a^2 \neq e \Rightarrow aa \neq e \Rightarrow a \neq a^{-1} \Rightarrow a \neq x^{-1}xa^{-1}$, untuk setiap $x \in G$ $\Rightarrow a \neq x^{-1}a^{-1}x$, karena G grup Abel. Dengan demikian diperoleh $a \neq x^{-1}a^{-1}x$. ■

Teorema 3.2.8:

Diketahui $a \in G$ dengan B(a) $\neq \emptyset$ dan B(a) $\cap$ C(a) $\neq \emptyset$.

(i) Jika $x \in$ B(a) dan $x^2 \in \langle a \rangle$, maka $x^4 = e$.

(ii) Jika C(a) $= \langle a \rangle$ maka $\{ x^2 : x \in$ B(a) $\}$ adalah himpunan dengan satu elemen dan merupakan subhimpunan dari C(a).

(iii) Jika $\{ x^2 : x \in$ B(a) $\}$ adalah himpunan dengan satu elemen, maka orde dari x membagi empat untuk semua $x \in$ B(a).

(iv) Pusat dari E(a) adalah subgrup dari C(a).

Bukti:

(i) Jika $x \in$ B(a) maka berlaku $xa = a^{-1}x$.

Jika $x^2 \in \langle a \rangle$ maka berlaku $x^2 = a^n$ untuk suatu $n \in Z$.

Perhatikan $xa^n = x(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\ faktor})$

$= (xa)(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}1\ faktor})$ assosiatif

$= a^{-1}x(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}1\ faktor})$ $x \in$ B(a)

$= a^{-1}(xa)(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}2\ faktor})$ assosiatif

$= a^{-1}a^{-1}x(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}2\ faktor})$ $x \in$ B(a)

$= a^{-1}a^{-1}(xa)(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}3\ faktor})$ assosiatif

$= a^{-1}a^{-1}a^{-1}x(\underbrace{a\ a\ a \ldots\ a}_{n\text{-}3\ faktor})$ $x \in$ B(a)

…

$= (a^{-1}a^{-1}a^{-1} \ldots a^{-1})x$

$= (a^{-1})^n x$

$= a^{-n}x$ definisi 2.2.3(iii)

Jadi diperoleh $xa^n = a^{-n}x$

Sehingga diperoleh $xa^n = a^{-n}x \Rightarrow xx^2 = x^{-2}x \Rightarrow x^3 = x^{-1} \Rightarrow x^4 = e$.

(ii) Diketahui $C(a) = \langle a \rangle$. Misalkan $\{ x^2 : x \in B(a) \} = H$

Misalkan $y_1, y_2 \in H$. Akan ditunjukkan bahwa $y_1 = y_2$

Bila $y_1 \in H$, maka berlaku $y_1 = x_1^2$, untuk suatu $x_1 \in B(a)$ ... 1)

Bila $y_2 \in H$, maka berlaku $y_2 = x_2^2$, untuk suatu $x_2 \in B(a)$ ... 2)

Dari 1) dan 2) diperoleh $x_1, x_2 \in B(a)$ sehingga berlaku $x_1x_2a = x_1a^{-1}x_2 = ax_1x_2$, dengan demikian diperoleh $x_1x_2 \in C(a)$, karena diketahui $C(a) = \langle a \rangle$, maka $x_1x_2 \in \langle a \rangle$ sehingga berlaku $x_1x_2 = a^n$, untuk suatu $n \in Z$.

Perhatikan $x_1a^n = a^{-n}x_1 \Leftrightarrow x_1x_1x_2 = (x_1x_2)^{-1}x_1 \Leftrightarrow x_1x_1x_2 = x_2^{-1}x_1^{-1}x_1 \Leftrightarrow x_1^2x_2 = x_2^{-1} \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^{-2} \Leftrightarrow x_1^2 = (x_2^{-1})^2$.

Karena $x_2 \in B(a)$, maka $x_2x_2a = x_2a^{-1}x_2 = ax_2x_2$, jadi $x_2^2 \in C(a)$, dengan demikian $x_2^2 \in \langle a \rangle$, sehingga menurut teorema 3.2.8(i) diperoleh $x_2^4 = e$.

Jadi $x_1^2 = x_2^{-2}e \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^{-2}x_2^4 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$.

Jadi $\{ x^2 : x \in B(a) \} = H$ adalah himpunan dengan satu elemen.

Akan ditunjukkan bahwa $\{ x^2 : x \in B(a) \} = H$ himpunan bagian dari $C(a)$

Misalkan himpunan $\{ x^2 : x \in B(a) \} = H$ yaitu himpunan dengan satu elemen.

Akan ditunjukkan bahwa $H \subseteq C(a)$ yakni jika $z \in H$ maka $z \in C(a)$.

Misalkan $z \in H$ maka berlaku $z = x^2$, untuk suatu $x \in B(a)$

Perhatikan $za = x^2 a$

$= (xx)a$

$= x(xa)$ assosiatif

$= x(a^{-1}x)$ $x \in B(a)$

$= (xa^{-1})x$ assosiatif

$= (ax)x$ $x \in B(a)$

$= a(xx)$ assosiatif

$= az$

Jadi $z \in C(a)$

(iii) Misalkan himpunan $\{ x^2 : x \in B(a) \} = H$.

Dan diketahui H adalah himpunan dengan satu elemen.

Misalkan $y \in H$, maka $y = x^2$, untuk suatu $x \in$ B(a)

Akan ditunjukkan bahwa o(x) | 4, yakni o(x) = 1 atau o(x) = 2 atau

o(x) = 4.

Andaikan H himpunan dengan satu elemen dan o(x) $\neq$ 1 dan o(x) $\neq$ 2. Akan ditunjukkan bahwa o(x) = 4 yakni $x^4 = e$.

Dari definisi B(a) diperoleh $xa = a^{-1}x$ dan $x = a^{-1}xa^{-1}$.

Perhatikan $x^3a = xxxa$

$= (a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})a$

$= a^{-1}(xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}x)(a^{-1}a)$ assosiatif

$= a^{-1}(xa^{-1})(a^{-1}xa^{-1})(a^{-1}x)$ definisi 2.1.12(iii)

$= a^{-1}(xa^{-1})(xaa^{-1})(a^{-1}x)$ definisi B(a)

$= a^{-1}(xa^{-1})(x)(a^{-1}x)$ definisi 2.1.12(iii)

$= a^{-1}(xa^{-1}x)(a^{-1}x)$ assosiatif

$= a^{-1}(xxa)(a^{-1}x)$ definisi B(a)

$= a^{-1}(xx)(aa^{-1}x)$ assosiatif

$= a^{-1}(x^2)(x)$ definisi 2.1.12(iii)

$= a^{-1}x^3$.

Sehingga diperoleh $x^3a = a^{-1}x^3$.

Jadi $x^3 \in \mathrm{B}(a)$.

Karena $x \in \mathrm{B}(a)$ dan $x^3 \in \mathrm{B}(a)$, sedangkan $\mathrm{B}(a)$ adalah himpunan dengan satu elemen, maka $x^2 = (x^3)^2 = x^6$ yang memberikan $x^4 = e$.

Karena $x^4 = e$, maka diperoleh $\mathrm{o}(x) = 4$ dan diketahui $\mathrm{o}(x) \neq 1$ dan $\mathrm{o}(x) \neq 2$.

Jadi orde dari x membagi empat untuk setiap $x \in \mathrm{B}(a)$

(iv) Misalkan $Z(\mathrm{E}(a))$ adalah pusat dari $\mathrm{E}(a)$, yaitu $Z(\mathrm{E}(a)) = \{x \in \mathrm{E}(a) : xg = gx\ \forall g \in \mathrm{E}(a)\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $Z(\mathrm{E}(a))$ adalah subgrup dari $\mathrm{C}(a)$.

- Misalkan $x \in Z(\mathrm{E}(a))$, maka $x \in \mathrm{E}(a)$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in \mathrm{C}(a)$.

  Karena $x \in \mathrm{E}(a)$, maka $x \in \mathrm{B}(a)$ atau $x \in \mathrm{C}(a)$.

  $x \in \mathrm{B}(a)$, maka berlaku $xa = a^{-1}x$ ...1)

  $x \in \mathrm{C}(a)$, maka berlaku $xa = ax$ ...2)

  Dari 1) dan 2) diperoleh $ax = a^{-1}x \Rightarrow axx^{-1} = axx^{-1} \Rightarrow a = a^{-1}$.

Karena $a = a^{-1}$, maka $xa = a^{-1}x \Rightarrow xa = ax$. Sehingga $x \in C(a)$

- $Z(E(a)) \neq \emptyset$, karena ada $e \in G$ sehingga $eg = ge = g$, $\forall\, g \in E(a)$, maka $e \in E(a)$.

- Misalkan $x,y \in Z(E(a))$, akibatnya $x,y \in E(a)$.

  Akan ditunjukkan bahwa $xy \in Z(E(a))$

  Karena $x,y \in Z(E(a))$ maka berlaku $xg = gx$, $\forall\, g \in E(a)$ dan $yg = gy$, $\forall\, g \in E(a)$.

  Perhatikan $(xy)g = x(yg)$ assosiatif

  $= x(gy)$ $y \in Z(E(a))$

  $= (xg)y$ assosiatif

  $= (gx)y$ $x \in Z(E(a))$

  $= g(xy)$ assosiatif.

  Sehingga $(xy)g = g(xy)$.

  Jadi $xy \in Z(E(a))$.

- Misalkan $x \in Z(E(a))$, akibatnya $x \in E(a)$ dan $x^{-1} \in E(a)$

  Akan ditujukkan bahwa $x \in Z(E(a))$ yakni $xg = gx$, $\forall\, g \in E(a)$.

Karena $x \in Z(\mathrm{E}(a))$ maka berlaku $xg = gx$, $\forall\, g \in \mathrm{E}(a)$.

Perhatikan $gx = xg$

$\Leftrightarrow (xg)x^{-1} = (gx)x^{-1}$

$\Leftrightarrow (xg)x^{-1} = g(xx^{-1})$ assosiatif

$\Leftrightarrow (xg)x^{-1} = g$ definisi 2.1.12(iii)

$\Leftrightarrow x^{-1}(xg)x^{-1} = x^{-1}g$

$\Leftrightarrow (x^{-1}x)(gx^{-1}) = x^{-1}g$ assosiatif

$\Leftrightarrow g\,x^{-1} = x^{-1}g$ definisi 2.1.12(iii)

Sehingga $gx^{-1} = x^{-1}g$

Jadi $x^{-1} \in Z(\mathrm{E}(a))$.

Terbukti bahwa $Z(\mathrm{E}(a))$ adalah subgrup dari $\mathrm{C}(a)$. ■

3.3. Automorphisma Dalam Dari E(a).

Teorema 3.3.1:

Misalkan G grup dan $a \in G$. Misalkan $s \in \mathrm{E}(a)$ dan $\mathrm{B}(a) \cap \mathrm{C}(a) \neq \emptyset$ dan didefinisikan $\phi_s(x) = sxs^{-1}$, $\forall\, x \in \mathrm{E}(a)$, maka ϕ_s adalah suatu automorphisma.

Bukti:

Diketahui $E(a)$ grup dan $s \in E(a)$. Andaikan diberikan suatu aturan $\phi_s : E(a) \to E(a)$ dengan aturan $\phi_s(x) = sxs^{-1}$, $\forall x \in E(a)$.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ_s adalah suatu automorphisma.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ_s well-defined.

Misalkan $x \in E(a)$ maka $x \in B(a)$ atau $x \in C(a)$ dan diketahui bahwa $s \in E(a)$ maka $s \in B(a)$ atau $s \in C(a)$.

Akan ditunjukkan bahwa $\phi_s(x) \in E(a)$.

Untuk menunjukkan bahwa $\phi_s(x) \in E(a)$, maka ada 4 kondisi yang harus diperhatikan yakni: $x \in B(a)$ dan $s \in B(a)$, $x \in B(a)$ dan $s \in C(a)$, $x \in C(a)$ dan $s \in B(a)$, serta $x \in C(a)$ dan $s \in C(a)$.

Misalkan $x \in B(a)$ dan $s \in B(a)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} sxs^{-1}a &= sx(s^{-1}a) && \text{assosiatif} \\ &= sx(a^{-1}s^{-1}) && s^{-1} \in B(a) \\ &= s(xa^{-1})s^{-1} && \text{assosiatif} \\ &= s(ax)s^{-1} && x \in B(a) \\ &= (sa)xs^{-1} && \text{assosiatif} \\ &= (a^{-1}s)xs^{-1} && s \in B(a) \\ &= a^{-1}sxs^{-1} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $sxs^{-1}a = a^{-1}sxs^{-1}$.

Jadi $sxs^{-1} \in B(a)$, dengan demikian $sxs^{-1} \in E(a)$.

Misalkan $x \in \mathrm{B}(a)$ dan $s \in \mathrm{C}(a)$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
sxs^{-1}a &= sx(s^{-1}a) && \text{assosiatif} \\
&= sx(as^{-1}) && s^{-1} \in \mathrm{C}(a) \\
&= s(xa)s^{-1} && \text{assosiatif} \\
&= s(a^{-1}x)s^{-1} && x \in \mathrm{B}(a) \\
&= (sa^{-1})xs^{-1} && \text{assosiatif} \\
&= (a^{-1}s)xs^{-1} && s \in \mathrm{C}(a) \\
&= a^{-1}sxs^{-1}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $sxs^{-1}a = a^{-1}sxs^{-1}$.

Jadi $sxs^{-1} \in \mathrm{B}(a)$, dengan demikian $sxs^{-1} \in \mathrm{E}(a)$.

Misalkan $x \in \mathrm{C}(a)$ dan $s \in \mathrm{B}(a)$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
sxs^{-1}a &= sx(s^{-1}a) && \text{assosiatif} \\
&= sx(a^{-1}s^{-1}) && s^{-1} \in \mathrm{B}(a) \\
&= s(xa^{-1})s^{-1} && \text{assosiatif} \\
&= s(ax)s^{-1} && x \in \mathrm{C}(a) \\
&= (sa)xs^{-1} && \text{assosiatif} \\
&= (as)xs^{-1} && s \in \mathrm{B}(a) \\
&= asxs^{-1}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $sxs^{-1}a = asxs^{-1}$.

Jadi $sxs^{-1} \in \mathrm{C}(a)$, dengan demikian $sxs^{-1} \in \mathrm{E}(a)$.

Misalkan $x \in \mathrm{C}(a)$ dan $s \in \mathrm{C}(a)$ maka diperoleh

$$
sxs^{-1}a = sx(s^{-1}a) \qquad \text{assosiatif}
$$

$= sx(as^{-1})$ $\qquad s^{-1} \in C(a)$

$= s(xa)s^{-1}$ $\qquad$ assosiatif

$= s(ax)s^{-1}$ $\qquad x \in C(a)$

$= (sa)xs^{-1}$ $\qquad$ assosiatif

$= (as)xs^{-1}$ $\qquad s \in C(a)$

$= asxs^{-1}$

Sehingga diperoleh $sxs^{-1}a = asxs^{-1}$.

Jadi $sxs^{-1} \in C(a)$, dengan demikian $sxs^{-1} \in E(a)$.

Jadi $\forall x \in E(a)$, $\phi_s(x) \in E(a)$.

Misalkan $x_1, x_2 \in E(a)$ dengan $x_1 = x_2$.

Akan ditunjukkan bahwa $\phi_s(x_1) = \phi_s(x_2)$

Perhatikan $x_1 = x_2$

$sx_1s^{-1} = sx_2s^{-1}$

$\phi_s(x_1) = \phi_s(x_2)$

$(\forall x_1, x_2 \in E(a))(x_1 = x_2 \Rightarrow \phi_s(x_1) = \phi_s(x_2))$

Jadi ϕ_s well-defined.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ_s suatu pemetaan injektif

Misalkan $x_1, x_2 \in E(a)$ sehingga $\phi_s(x_1) = \phi_s(x_2)$.

Akan ditujnukkan bahwa $x_1 = x_2$.

Perhatikan $\phi_s(x_1) = \phi_s(x_2)$

$$sx_1s^{-1} = sx_2s^{-1}$$

$$x_1 = x_2.$$

Jadi ϕ_s suatu pemetaan injektif.

Akan ditujukkan bahwa ϕ_s suatu pemetaan surjektif.

Misalkan $r \in E(a)$, maka pasti terdapat $y \in E(a)$, yaitu $y = s^{-1}rs \Rightarrow sy = sr \Rightarrow sys^{-1} = r$, sehingga diperoleh $r = sys^{-1}$, selain itu jelas $y = (s^{-1}rs) \in E(a)$, karena diketahui bahwa $s \in E(a)$ dan $r \in E(a)$.

Perhatikan bahwa $\phi_s(y) = sys^{-1} = s(s^{-1}rs)s^{-1} = r$

Jadi ϕ_s suatu pemetaan surjektif.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ_s suatu homomorphisma.

Misalkan $x,y \in E(a)$. Akan ditunjukkan bahwa $\phi_s(xy) = \phi_s(x)\ \phi_s(y)$.

Perhatikan $\phi_s(xy) = sxys^{-1}$

$$= sxs^{-1}sys^{-1}$$

$$= (sxs^{-1})(sys^{-1})$$

$$= \phi_s(x)\ \phi_s(y)$$

Sehingga diperoleh $\phi_s(xy) = \phi_s(x)\ \phi_s(y)$.

Jadi ϕ_s suatu homomorphisma

Jadi ϕ_s suatu Automorphisma. ∎

Definisi 3.3.1:

Misalkan G suatu grup dan $a \in G$. Misalkan $s \in \mathrm{E}(a)$ maka automorphisma yang didefinisikan pada teorema 3.3.1 disebut *automorphisma dalam dari* $E(a)$

Teorema 3.3.2:

Jika $s \in \mathrm{B}(a)$ dan $x \in \langle a \rangle$, maka $\phi_s(x) = x^{-1}$.

Bukti:

Karena $x \in \langle a \rangle$, berlaku $x = a^n$ untuk suatu $n \in Z$, maka

$$
\begin{aligned}
\phi_s(x) &= sxs^{-1} \\
&= sa^n s^{-1} \\
&= a^{-n} ss^{-1} && \text{lihat bukti teorema 3.2.8(i)} \\
&= a^{-n} && \text{definisi 2.1.12(iii)} \\
&= x^{-1}.
\end{aligned}
$$

■

Definisi 3.3.2:

Misalkan $s \in \mathrm{B}(a)$, maka s dikatakan mengkonjugasikan $\mathrm{C}(a)$ terhadap $\mathrm{C}(a)^{-1}$, jika $sx = x^{-1}s$ untuk semua $x \in \mathrm{C}(a)$, atau ekuivalen jika $\phi_s(x) = x^{-1}$ untuk semua $x \in \mathrm{C}(a)$.

Teorema 3.3.3:

Misalkan G grup dan $a \in G$ dan $s \in \mathrm{B}(a)$, s mengkonjugasi $\mathrm{C}(a)$ terhadap $\mathrm{C}(a)^{-1}$ bila dan hanya bila $\{\ s^2 : s \in \mathrm{B}(a)\ \}$ adalah himpunan dengan satu elemen .

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan s mengkonjugasi $\mathrm{C}(a)$ terhadap $\mathrm{C}(a)^{-1}, \forall\, s \in \mathrm{B}(a)$. Misalkan $s \in \mathrm{B}(a)$ maka berlaku $sx = x^{-1}s$, $\forall\, x \in \mathrm{C}(a)$ dan misalkan himpunan $\{\ s^2 : s \in \mathrm{B}(a)\ \} = H$.

Akan ditunjukkan bahwa H adalah himpunan dengan satu elemen.

Pertama-tama ditunjukkan bahwa H mempunyai elemen.

Akibat dari teorema 3.2.4 telah ditunjukkan bahwa $\mathrm{B}(a) = s\mathrm{C}(a)$, untuk suatu $s \in \mathrm{B}(a)$, dimana $s\mathrm{C}(a) = \{\ sx : x \in \mathrm{C}(a)\ \}$.

Perhatikan $(sx)^2 = sxsx$

$= sx(x^{-1}s)$ definisi 3.3.2

$= s(xx^{-1})s$ assosiatif

$= s^2$

Sehingga diperoleh $(sx)^2 = s^2$. Jadi $sx \in H$

Sekarang akan diperlihatkan bahwa $H = \{ s^2 : s \in B(a) \}$ adalah himpunan dengan satu elemen.

Misalkan $y \in H$ dan misalkan $y \neq sx$.

Karena $y \in H$, maka berlaku $y = s^2$, untuk suatu $s \in B(a)$ dan telah diketahui sebelumnya bahwa $sx = s^2$. Terjadi kontradiksi, sehingga seharusnya $y = sx$.

Jadi $H = \{ s^2 : s \in B(a) \}$ adalah himpunan dengan satu elemen.

$(\Leftarrow)$Diketahui $H = \{ s^2 : s \in B(a) \}$ adalah himpunan dengan satu elemen.

Akan ditunjukkan bahwa s mengkonjugasi $C(a)$ terhadap $C(a)^{-1}$.

Misalkan $y \in H$, maka berlaku $y = s^2$, untuk suatu $s \in B(a)$.

Dari akibat teorema 3.2.4 telah ditunjukkan bahwa $B(a) = sC(a)$, untuk suatu $s \in B(a)$, dimana $sC(a) = \{sx : x \in C(a)\}$.

Perhatikan $sxa = sax \qquad x \in C(a)$

$\qquad = a^{-1}sx \qquad s \in B(a)$.

Sehingga diperoleh $sxa = a^{-1}sx$. Jadi $sx \in B(a)$

Karena $sx \in B(a)$ dan $s \in B(a)$ dan $B(a)$ himpunan dengan satu elemen maka diperoleh $(sx)^2 = s^2 \Leftrightarrow sxsx = s^2$, kondisi ini dipenuhi bila dan hanya bila $sx = x^{-1}s$. Sehingga untuk $s \in B(a)$ dan $x \in C(a)$ diperoleh $sx = x^{-1}s$.

Jadi s mengkonjugasi $C(a)$ terhadap $C(a)^{-1}$. ■

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Misalkan G grup dan $a,b \in G$, a berkonjugasi dengan inversnya jika $B(a) \neq \emptyset$. Dan juga a berkonjugasi dengan inversnya bila dan hanya bila ada $v,u \in G$ sedemikian sehingga $a = vu^{-1}$ dan $u^2 = v^2$. Serta a berkonjugasi dengan b bila memenuhi $a = x^{-1}bx$ untuk suatu $x \in G$.

2. Misalkan G grup dan $a \in G$ maka $E(a) = B(a) \cup C(a)$ dimana $C(a)$ pemusat dari elemen a dan $B(a)$ adalah pemusat tak simetris dari elemen a. $E(a)$ merupakan subgrup dari G.

DAFTAR PUSTAKA

Durbin, J.R., 1985, *Modern Algebra*, New York: Jhon Wiley dan Sons inc.

Fraleigh, J.B., 1989, *A first Course in Abstract Algebra*, New York: Addison-Wesley Publising Company.

Goodson, G.R., *Inverse Conjugacies and Reversing Symetry Groups*, The American Matematical Monthly. 106(1999)19-26.

Herstein, I.N., 1964, *Topics in Algebra*, New York: Baisdell.

Herstein, I.N., 1996, *Abstract Algebra*, New Jersey: Pretince Hall.

Mc. Coy, N.H., 1987, *Introduction to Modern Algebra*, Alliyin and Bacon, Inc.

Pedersen, F.D., 1993, *Modern Algebra A Conceptual Approach*, Boulevard: Wm. C. Brown Communication, Inc.

Soehakso, R.M.J.T., 1980, *Pengantar Teori Grup*, Yogyakarta, FMIPA UGM.