

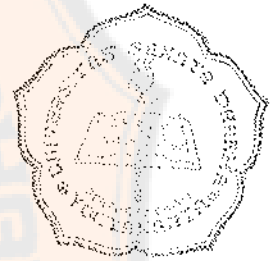
GRUP NILPOTEN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika



Disusun oleh:

Krecentia Adhi Arsanti

NIM : 961414018

NIRM : 960051120501120018

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
JURUSAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2001

S k r i p s i

GRUP NILPOTEN

Disusun oleh :

Krecentia Adhi Arsanti

NIM : 961414018

NIRM : 960051120501120018

telah disetujui oleh :

Pembimbing



Dra. Maria Agustiani, M.Si

Tanggal 22 September 2001

S k r i p s i

GRUP NILPOTEN

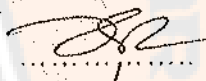
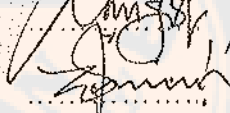
Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Krecentia Adhi Arsanti

NIM : 961414018
NIRM : 960051120501120018

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 22 September 2001
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua :	Drs. A. Atmadi, M.Si.	
Sekretaris :	Drs. Th. Sugiarto, MT.	
Anggota :	Dr. Y. Marpaung	
	Dra. Maria Agustiani, M.Si.	
	MV. Any Herawati, S.Si, M.Si.	

Yogyakarta, 22 september 2001
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP





Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

*Buluh yang patah terkulai tidak akan diputuskan-Nya dan
sumbu yang pudar nyalanya tidak akan dipadamkan-Nya
(Matius 12:20)*

*Dengan kesabaran,
kita memperoleh hasil
lebih daripada dengan kekuatan kita.
(Edmund Burke)*



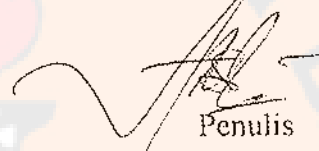
*Kupersembahkan skripsi ini sebagai ungkapan syukur,
raso hormat, cinta dan terimakasih saya atas dukungan,
bantuan, kebersamaan yang indah, doa dan cinta
dari orang-orang tercinta:*

*Keluarga besar Warsu Sukanto,
Bapak & Ibu Y. Daryanto, Mak'e, Mas Dovi, Mbak Nunik,
Mas Afwan, Mbak Betty, Dhita, Anton dan Mas Poer.*

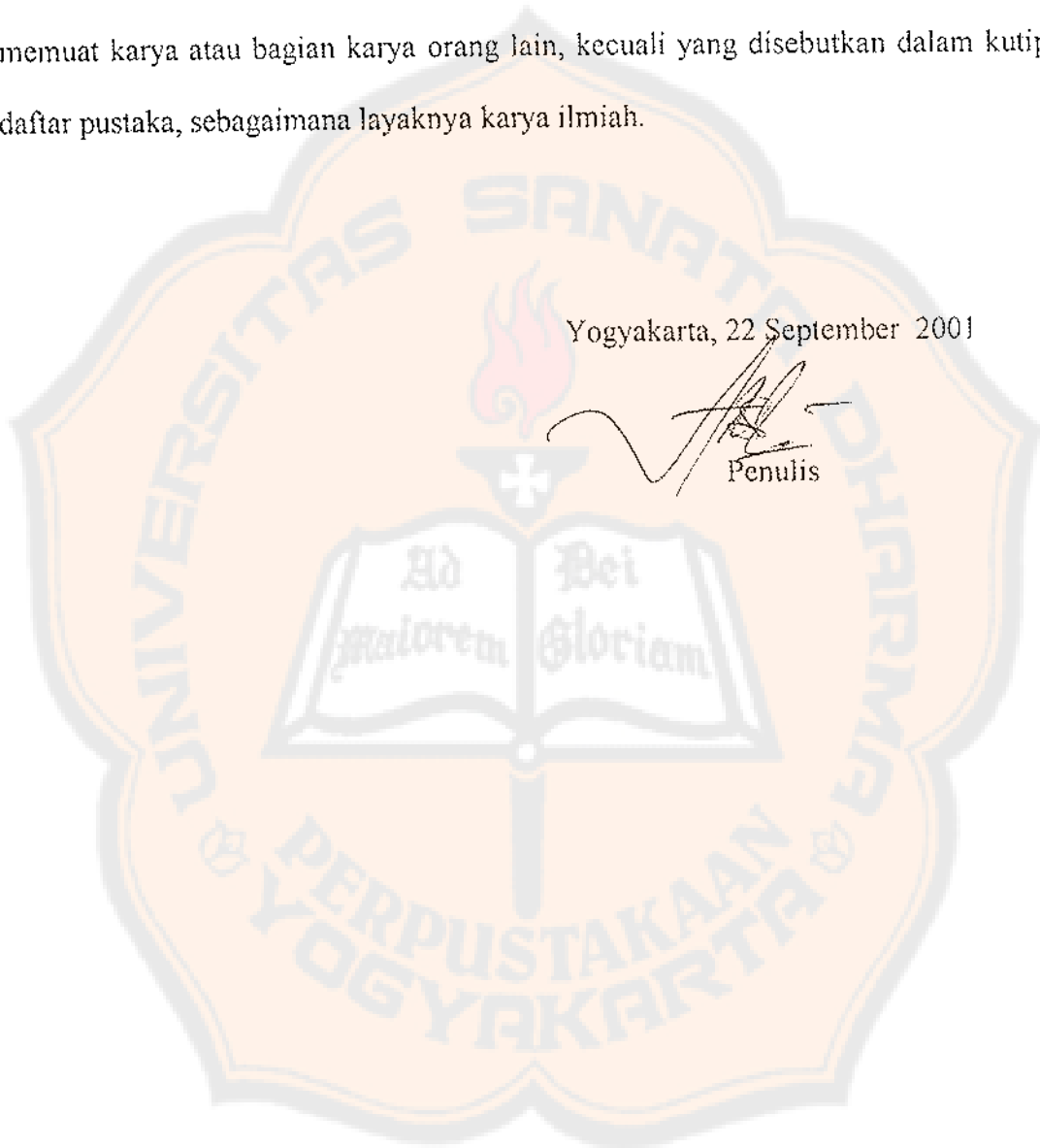
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang disebutkan dalam kutipan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 22 September 2001



Penulis



ABSTRAK

Barisan pusat naik dari suatu grup G adalah barisan subgrup normal - subgrup normal dalam G sedemikian sehingga $Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq \dots$ dengan $Z_0(G) = \{e\}$ dan $Z_1(G) = Z(G)$.

Suatu grup G dinamakan grup nilpoten jika dalam G terdapat barisan pusat naik sedemikian sehingga $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G$. Bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $Z_n(G) = G$ disebut klas nilpoten dari G . Akibatnya setiap grup Abel adalah grup nilpoten dengan klas nilpoten 1. Selain itu terdapat juga hubungan antara grup nilpoten dan grup berpenyelesaian yaitu bahwa jika suatu grup G adalah nilpoten maka G adalah grup berpenyelesaian.

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Kasih atas segala berkat, karunia, rahmat dan pertolongannya-Nya dalam penulisan skripsi ini. Skripsi ini disusun sebagai prasyarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan.

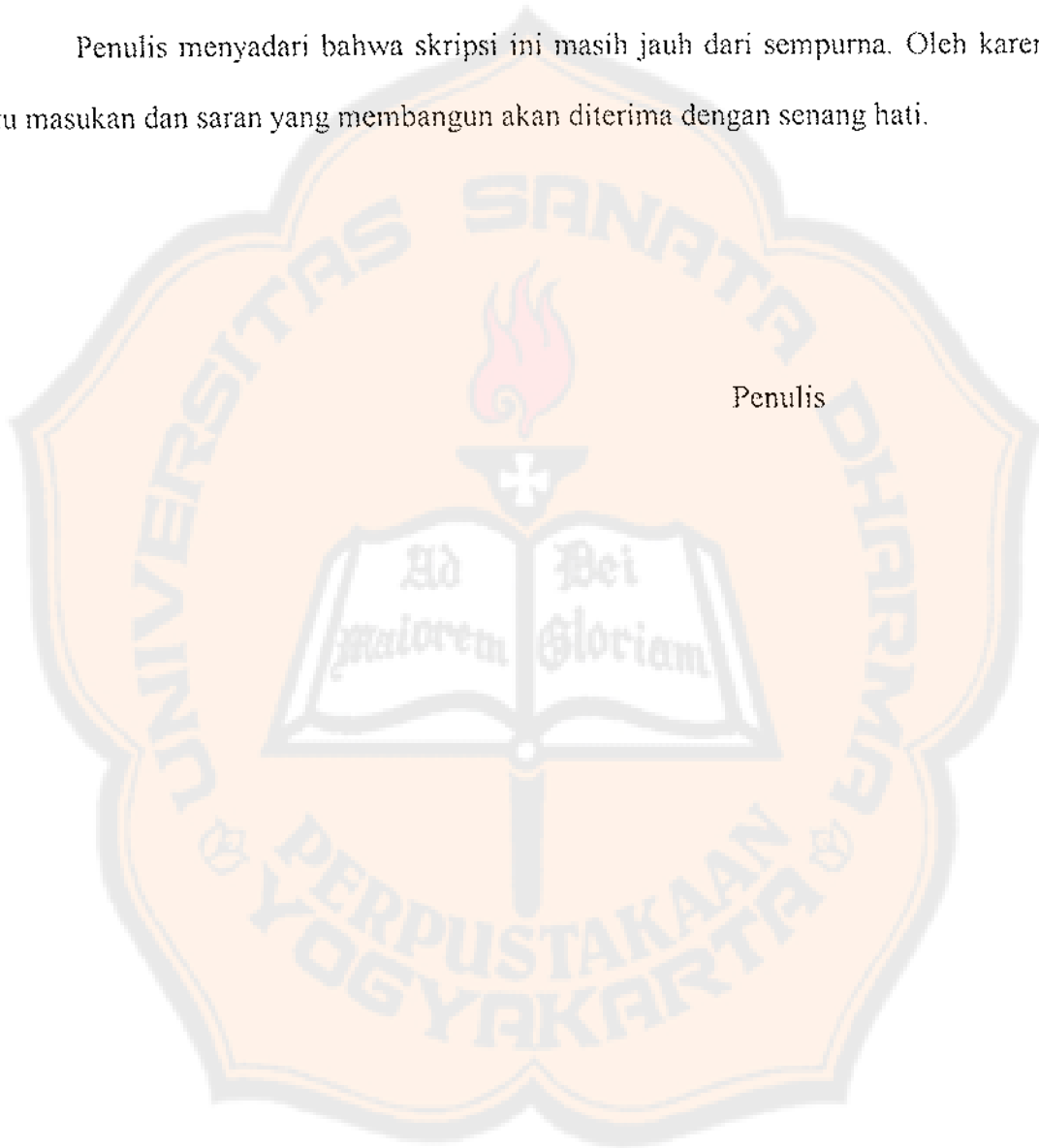
Penulis banyak mengalami kendala dan kesulitan dalam penyusunan skripsi ini tetapi dengan bantuan berbagai pihak dalam bermacam wujud penulis dapat mengatasinya. Oleh karena ini pada kesempatan yang baik ini dengan kerendahan hati penulis ingin mengahaturkan terimakasih kepada :

1. Ibu Dra. Maria Agustiani, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bantuan, kesabaran, pengertian dan bimbingan dalam pengerjaan skripsi ini mulai dari awal perencanaan, penulisan, penyusunan sampai akhir dari penulisan skripsi ini
2. Dr. Frans Susilo SJ atas saran dan bantuanya dalam perencanaan skripsi ini.
3. Ibu Wanty Widjaja, S.Pd. selaku dosen Pembimbing Akademik atas saran, bimbingan dan bantuan dalam menempuh kuliah dan dalam perencanaan skripsi ini.
4. Teman-teman yang baik : Rita, Ike, Mbak Rina, teman-teman Program Studi Pendidikan Matematika angkatan '96 dan '95 serta teman-teman Program Studi Matematika angkatan '96, atas kebersamaan, bantuan, dukungan dan doa.
5. Teman-teman Brojodento 7 atas kebersamaan, bantuan, dukungan dan doa.

6. Rental Aladin atas bantuannya dalam pengetikan skripsi ini.
7. Semua pihak yang tidak dapat satu-persatu yang telah banyak membantu baik selama kuliah maupun selama pembuatan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati.

Penulis





DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA.....	v
ABSTRAK	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI	ix
BAB I . PENDAHULUAN	1
BAB II . GRUP	3
2.1. Grup dan Subgrup	3
2.2. Koset dan Teorema Lagrange	25
2.3. Subgrup Normal dan Grup Faktor	36
2.4. Homomorfisma dan Isomorfisma	41
2.5. Hasil Kali (Direct Product)	53
BAB III . TEOREMA SYLOW	57
3.1. Konjungsi dan p -grup	57
3.2. Teorema Sylow	66
BAB IV. GRUP NILPOTEN	77
4.1. Barisan Pusat Naik	77
4.2. Grup Nilpoten.....	83

BAB V. PENUTUP	106
DAFTAR PUSTAKA	107



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Grup nilpoten merupakan salah satu bagian dari topik grup dalam Aljabar Abstrak. Dalam Aljabar Abstrak dikenal berbagai jenis grup antara lain : grup siklik, grup Abel dan grup berpenyelesaian. Suatu grup dapat dikatakan sebagai grup nilpoten bila dipenuhi syarat-syarat tertentu sehingga grup nilpoten mempunyai sifat-sifat yang khusus. Suatu grup G dikatakan sebagai grup nilpoten jika di dalam G terdapat suatu barisan pusat naik yaitu :

$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq \dots$, dimana $Z_i(G) \triangleleft G$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $Z_n(G) = G$, $0 \leq i \leq n$.

Grup nilpoten mempunyai karakteristik yang khusus dan unik. Pendalaman materi mengenai grup, p-grup, barisan pusat naik, teorema Sylow dan grup berpenyelesaian akan membantu untuk mengenal dan mempelajari tentang grup nilpoten dan sifat-sifat yang dimiliki oleh grup nilpoten.

1.2. Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apa syarat-syarat yang harus dipenuhi sehingga suatu grup dapat dikatakan sebagai grup nilpoten ?
2. Sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh grup nilpoten ?

1.3. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian lengkap tentang grup nilpoten termasuk sifat-sifat yang dimiliki oleh grup nilpoten.

1.4. Manfaat Penulisan

Manfaat dari mempelajari tentang grup nilpoten ini adalah untuk lebih mendalami pengertian tentang grup nilpoten sehingga sebagai akibatnya dapat dipelajari lebih lanjut sifat-sifat yang dimiliki oleh grup nilpoten.

1.5. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari dan memahami beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan.

BAB II

GRUP

Dalam Bab II ini pada subbab pertama akan dibahas mengenai grup dan subgrup, subbab kedua mengenai koset dan teorema Lagrange kemudian subbab ketiga mengenai subgrup normal dan grup faktor, pada subbab keempat mengenai homomorfisma dan isomorfisma dan terakhir pada subbab kelima mengenai hasil kali (direct product). Hal-hal yang dibahas dalam Bab II ini akan digunakan sebagai dasar untuk membahas dan mempelajari bab-bab selanjutnya.

2.1. Grup dan Subgrup

Definisi 2.1.1

Himpunan G yang tidak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner " $\circ$ " disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $(\forall a, b, c \in G) a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2. $(\exists e \in G)(\forall a \in G) a \circ e = e \circ a = a$
3. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Elemen e pada aksioma kedua disebut **elemen identitas** pada G terhadap operasi biner " $\circ$ ". Elemen a^{-1} pada aksioma ketiga disebut **invers** dari a pada G terhadap operasi biner " $\circ$ ". Untuk selanjutnya suatu grup G yang dilengkapi dengan operasi biner " $\circ$ " ditulis $(G, \circ)$.

Definisi 2.1.2

Suatu grup $(G, \circ)$ dikatakan Abel jika operasi biner " $\circ$ " bersifat komutatif yaitu $a \circ b = b \circ a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Teorema 2.1.1

Jika $(G, \circ)$ grup maka berlaku :

- Elemen identitas dari grup G adalah tunggal.
- Invers dari tiap elemen dalam G adalah tunggal.
- Persamaan $a \circ x = b$ dan $y \circ a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G , $\forall a, b \in G$.
- $(\forall a, b \in G) (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
- $(\forall a \in G) (a^{-1})^{-1} = a$

Bukti :

- a). Andaikan elemen identitas dari G tidak tunggal yaitu e dan f dimana $e \neq f$.

Menurut definisi 2.1.1(3) maka $a \circ e = e \circ a = a$ dan $a \circ f = f \circ a = a$, $\forall a \in G$.

Oleh karena $e \circ a = a$, $\forall a \in G$ maka $e \circ f = f$, untuk $f \in G$. Di lain pihak

$a \circ f = a$, $\forall a \in G$ maka $e \circ f = e$, untuk $e \in G$. Oleh karena $e \circ f = f$ dan

$e \circ f = e$ maka $e = f$ sehingga terdapat kontradiksi. Jadi terbukti bahwa elemen

identitas dari grup G adalah tunggal. ■

- b). Ambil sebarang $a \in G$ dan misalkan x, y adalah invers dari $a \in G$ dimana $x \neq y$,
 e adalah elemen identitas dari G .

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} x &= x \circ e && (e \text{ elemen identitas}) \\ &= x \circ (a \circ y) && (y \text{ invers dari } a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x \circ a) \circ y && \text{(sifat assosiatif dalam } G) \\
 &= e \circ y \\
 &= y
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $x=y$ maka terjadi kontradiksi. Jadi dapat disimpulkan bahwa invers dari tiap elemen dalam G adalah tunggal. ■

- c). Akan dibuktikan bahwa apabila $a \circ x = b$ mempunyai penyelesaian maka penyelesaian tersebut pasti tunggal. Misalkan x_1 merupakan penyelesaian maka $a \circ x_1 = b$. Perhatikan bahwa $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku :

$$\begin{aligned}
 a \circ x_1 &= b \\
 \Leftrightarrow a^{-1} \circ (a \circ x_1) &= a^{-1} \circ b \\
 \Leftrightarrow (a^{-1} \circ a) \circ x_1 &= a^{-1} \circ b \\
 \Leftrightarrow e \circ x_1 &= a^{-1} \circ b \\
 \Leftrightarrow x_1 &= a^{-1} \circ b
 \end{aligned}$$

menurut teorema 2.1.1(b), a^{-1} tunggal sehingga hasil operasi $a^{-1} \circ b = x_1$ adalah tunggal di G . Perhatikan bahwa x_1 adalah penyelesaian dari $a \circ x = b$ karena dipenuhi $a \circ x = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b$.

Jadi $x_1 = a^{-1} \circ b$ merupakan penyelesaian tunggal di G .

Analog dengan pembuktian di atas dapat dibuktikan bahwa $y \circ a = b$ juga mempunyai penyelesaian tunggal di G . ■

- d). Ambil sebarang $a, b \in G$ maka $a^{-1}, b^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned}
 (a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) &= a \circ (b \circ (b^{-1} \circ a^{-1})) = a \circ ((b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}) = a \circ (e \circ a^{-1}) \\
 &= a \circ a^{-1} = e
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = e$.

$$\begin{aligned}(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) &= b^{-1} \circ (a^{-1} \circ (a \circ b)) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) = b^{-1} \circ (e \circ b) \\ &= b \circ b^{-1} = e\end{aligned}$$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bahwa $(b^{-1} \circ a^{-1})$ adalah invers dari $(a \circ b)$.

Menurut teorema 2.1.1(b) invers dari tiap elemen dalam grup adalah tunggal maka $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$. ■

e). Ambil sebarang $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$, sehingga $(a^{-1})^{-1} \in G$, berarti $(a^{-1})^{-1}$ adalah invers dari a^{-1} sehingga :

$$\begin{aligned}(a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} &= e \\ \Leftrightarrow ((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a &= e \circ a \\ \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) &= e \circ a && \text{(sifat assosiatif)} \\ \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} \circ e &= e \circ a \\ \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} &= a\end{aligned}$$

Teorema 2.1.2

Jika $(G, \circ)$ grup maka berlaku :

- $(\forall a, b, c \in G) a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$ (kanselasi kiri)
- $(\forall a, b, c \in G) b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$ (kanselasi kanan)

Bukti :

a). Ambil sebarang $a, b, c \in G$, karena $a \in G$ menurut definisi 2.1.1(3) ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

$$\begin{aligned}a \circ b &= a \circ c \\ \Leftrightarrow a^{-1} \circ (a \circ b) &= a^{-1} \circ (a \circ c) \\ \Leftrightarrow (a^{-1} \circ a) \circ b &= (a^{-1} \circ a) \circ c && \text{(sifat assosiatif)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e \circ b = e \circ c \quad (\text{sifat invers})$$

$$\Leftrightarrow b = c \quad \blacksquare$$

- b). Ambil sebarang $a, b, c \in G$, karena $a \in G$ menurut definisi 2.1.1(3) ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

$$b \circ a = c \circ a$$

$$\Leftrightarrow (b \circ a) \circ a^{-1} = (c \circ a) \circ a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow b \circ (a \circ a^{-1}) = c \circ (a \circ a^{-1}) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$\Leftrightarrow b \circ e = c \circ e \quad (\text{sifat invers})$$

$$\Leftrightarrow b = c \quad \blacksquare$$

Definisi 2.1.3

Jika $(G, \circ)$ grup dan $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$ dan $(H, \circ)$ membentuk grup maka H dikatakan **subgrup** dari G .

Teorema 2.1.3

Misalkan $(G, \circ)$ grup dan H subgrup dari G .

- Jika f elemen identitas dalam H dan e elemen identitas dalam G maka $f=e$.
- Jika $a \in H$ maka invers dari a dalam H sama dengan invers dari a dalam G .

Bukti :

- a). Ambil sebarang $a \in H$, karena H subgrup dari G maka $a \in G$. Diketahui f elemen identitas dalam H sehingga berlaku $a \circ f = f \circ a = a$. Di lain pihak e elemen identitas dalam G sehingga berlaku $a \circ e = e \circ a = a$. Perhatikan bahwa $a \circ f = a \circ e$ dan $f \circ a = e \circ a$, menurut teorema 2.1.2 maka $f = e$. $\blacksquare$

b). Ambil sebarang $a \in H$, misalkan invers dari a dalam G adalah a^{-1} dan invers dari a dalam H adalah c maka $a \circ c = c \circ a = f$ dan $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Menurut teorema 2.1.3(a) maka $f = e$ sehingga diperoleh $a \circ c = c \circ a = e$. Di lain pihak $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Oleh karena $a \circ c = a \circ a^{-1} = e$ dan $c \circ a = a^{-1} \circ a = e$ maka menurut teorema 2.1.2, $c = a^{-1}$. ■

Teorema 2.1.4

Jika $(G, \circ)$ grup dan $H \subseteq G$ maka H subgrup dari G bila dan hanya bila :

- $H \neq \emptyset$
- $(\forall a, b \in H) a \circ b \in H$
- Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

$(\Rightarrow)$ H subgrup dari G akan dibuktikan :

- $H \neq \emptyset$
- $(\forall a, b \in H) a \circ b \in H$
- Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Diketahui H subgrup dari G maka H membentuk grup dengan operasi biner " $\circ$ " pada G , sehingga menurut definisi 2.1.1 dan teorema 2.1.3, kondisi (a),(b),(c) dipenuhi.

$(\Leftarrow)$ Diketahui :

- $H \neq \emptyset$
- $(\forall a, b \in H) a \circ b \in H$
- Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

i). Menurut kondisi (b) sifat tertutup dengan operasi biner " $\circ$ " dipenuhi dalam H .

ii). Diketahui $H \subseteq G$ untuk $a, b, c \in H$ maka $a, b, c \in G$. Diketahui bahwa G grup maka sifat asosiatif berlaku untuk elemen-elemen dalam G . Oleh karena $H \subseteq G$ maka sifat asosiatif berlaku untuk elemen-elemen dalam H .

iii). Menurut kondisi (c), bila $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$ sehingga untuk $a \in H$ dan $a^{-1} \in H$ menurut kondisi (b) berlaku $a \circ a^{-1} = e \in H$. Jadi H mempunyai elemen identitas.

iv). Dari kondisi (c) diperoleh bahwa setiap $a \in H$ pasti mempunyai invers yaitu $a^{-1} \in H$.

Dari (i),(ii),(iii) dan (iv) dapat disimpulkan bahwa $(H, \circ)$ merupakan grup.

Jadi H adalah subgrup dari G . ■

Teorema 2.1.5

Diketahui $(G, \circ)$ grup dan $H \subseteq G$ maka H subgrup dari G bila dan hanya bila:

- a. $H \neq \emptyset$
- b. $(\forall a, b \in H) a \circ b^{-1} \in H$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diketahui H subgrup dari G maka menurut definisi 2.1.3 $(H, \circ)$ merupakan grup sehingga akibatnya kondisi (a) dan (b) dipenuhi.

$(\Leftarrow)$ Diketahui :

- a. $H \neq \emptyset$
- b. $(\forall a, b \in H) a \circ b^{-1} \in H$

Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari G .

- i). Ambil $a, b \in H$ dimana $a=b$ maka menurut kondisi (b) $a \circ a^{-1} \in H$ sehingga diperoleh $a \circ a^{-1} = e \in H$. Jadi paling sedikit ada $e \in H$ sehingga $H \neq \emptyset$.
- ii). Ambil $e, a \in H$ maka menurut kondisi (b), $e \circ a^{-1} = a^{-1} \in H$. Jadi setiap elemen a di H pasti mempunyai invers yaitu a^{-1} di H .
- iii). Ambil $a, b \in H$ maka menurut kondisi (2), $b^{-1} \in H$. Di lain pihak menurut kondisi (b) untuk $a, b^{-1} \in H$ maka berlaku $a \circ (b^{-1})^{-1} \in H$ sehingga diperoleh $a \circ b \in H$. Jadi sifat tertutup dipenuhi.

Dari kondisi (i),(ii),(iii) dapat disimpulkan bahwa $(H, \circ)$ subgrup. ■

Teorema 2.1.6

Jika H dan K subgrup dari G maka $H \cap K$ subgrup dari G .

Bukti :

- i). Akan dibuktikan $H \cap K \neq \emptyset$, H subgrup dari G maka $e \in H$ demikian juga K subgrup dari G maka $e \in K$. Perhatikan bahwa $e \in H$ dan $e \in K$, sehingga $e \in H \cap K$. Jadi $H \cap K \neq \emptyset$.
- ii). Ambil sebarang $a, b \in H \cap K$ maka $a, b \in H$ dan $a, b \in K$. Oleh karena H dan K subgrup dari G maka berlaku $ab \in H$ dan $ab \in K$ sehingga $ab \in H \cap K$. Jadi sifat tertutup dipenuhi.
- iii). Ambil sebarang $a \in H \cap K$ maka $a \in H$ dan $a \in K$. Oleh karena H dan K subgrup dari G maka $a^{-1} \in H$ dan $a^{-1} \in K$. Jadi $a^{-1} \in H \cap K$.

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa $H \cap K$ subgrup dari G . ■

Definisi 2.1.4

Jika $(G, \circ)$ grup, $a \in G$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$ maka

1. $a^0 = e$
2. $a^{n+1} = a^n \circ a$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$
3. $a^{-n} = (a^{-1})^n$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Untuk mempermudah penulisan maka operasi biner " $\circ$ " tidak akan dituliskan secara eksplisit jika tidak diperlukan.

Teorema 2.1.7

Jika G grup dan $a \in G$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ berlaku $a^n a^{-1} = a^{n-1}$.

Bukti:

Pembuktian teorema ini akan menggunakan induksi matematika.

- Langkah 1

Akan dibuktikan $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n = 0$.

$$\begin{aligned}
 a^n a^{-1} &= a^0 a^{-1} && (\text{definisi 2.1.4(1)}) \\
 &= e a^{-1} && (\text{sifat identitas}) \\
 &= a^{-1} \\
 &= a^{n-1}
 \end{aligned}$$

Jadi $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n = 0$.

- Langkah 2.

Akan dibuktikan $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Andaikan $a^n a^{-1} = a^{n-1}$

benar untuk $n=k$ sehingga diperoleh $a^k a^{-1} = a^{k-1}$. Akan dibuktikan $a^n a^{-1} = a^{n-1}$

benar untuk $n=k+1$.

$$\begin{aligned}
 a^n a^{-1} &= a^{k+1} a^{-1} \\
 &= (a^k a) a^{-1} && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\
 &= a^k (a a^{-1}) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= a^k e \\
 &= a^k (a^{-1} a) \\
 &= (a^k a^{-1}) a && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= a^{k-1} a && \text{(pengandaian)} \\
 &= a^{(k-1)+1} && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\
 &= a^{(k+1)-1} \\
 &= a^{n-1}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n=k+1$. Dari langkah 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n=0,1,2,3,\dots$

- Langkah 3.

Akan dibuktikan $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$. Misalkan untuk $n \in \mathbb{Z}^-$ ada bilangan positif $p \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga $n = -p$.

$$\begin{aligned}
 a^n a^{-1} &= (a^{-1})^p a^{-1} \\
 &= a^{-(p+1)} && \text{(definisi 2.1.4(3))} \\
 &= a^{-p-1} && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\
 &= a^{n-1}
 \end{aligned}$$

Jadi dari langkah 3 dapat disimpulkan bahwa $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$.

Dari langkah 1,2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa $a^n a^{-1} = a^{n-1}$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema 2.1.8

Jika G grup dan $a \in G$ maka untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$ berlaku :

a. $a^m a^n = a^{m+n}$

b. $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti :

Pembuktian teorema ini menggunakan induksi matematika di n .

a). Akan dibuktikan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$.

- Langkah 1.

Ambil sebarang $m \in \mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=0$.

$$\begin{aligned} a^m a^0 &= a^m e && \text{(definisi 2.1.4(c))} \\ &= a^m \\ &= a^{m+0} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

Jadi $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=0$.

- Langkah 2.

Akan dibuktikan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Andaikan

$a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=k$ berarti $a^m a^k = a^{m+k}$. Akan ditunjukkan bahwa

$a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=k+1$.

$$\begin{aligned} a^m a^{k+1} &= a^m (a^k a^1) && \text{(definisi 2.1.4(1))} \\ &= (a^m a^k) a^1 && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= (a^{m+k}) a^1 && \text{(pengandaian)} \\ &= a^{(m+k)+1} && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\ &= a^{m+(k+1)} && \text{(sifat asosiatif di } \mathbb{Z} \text{)} \end{aligned}$$

Jadi $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=k+1$. Dari langkah 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n=0,1,2,3,\dots$

- Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$. Misalkan untuk $n \in \mathbb{Z}^-$ ada bilangan positif $p \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga $n = -p$. Andaikan $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $p=k$ berarti $a^m a^{-k} = a^{m-k}$. Akan ditunjukkan bahwa $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $p=k+1$.

$$\begin{aligned}
 a^m a^n &= a^m a^{-p} \\
 &= a^m a^{-(k+1)} \\
 &= a^m ((a^{-1})^{k+1}) && \text{(definisi 2.1.4(3))} \\
 &= a^m ((a^{-1})^k (a^{-1})) && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\
 &= a^m (a^{-k} a^{-1}) && \text{(definisi 2.1.4(3))} \\
 &= (a^m a^{-k}) a^{-1} && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (a^{m-k}) a^{-1} && \text{(pengandaian)} \\
 &= a^{(m-k)-1} && \text{(teorema 2.1.7)} \\
 &= a^{m+(-k-1)} && \text{(sifat asosiatif di } \mathbb{Z} \text{)} \\
 &= a^{m-(k+1)} && \text{(sifat distributif di } \mathbb{Z} \text{)} \\
 &= a^{m+n}
 \end{aligned}$$

Jadi $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$. Dari langkah 1,2 dan 3 $a^m a^n = a^{m+n}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}$. ■

b). Akan dibuktikan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$.

- Langkah 1.

Ambil sebarang $m \in \mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=0$.

$$\begin{aligned}(a^m)^0 &= e && \text{(definisi 2.1.4(1))} \\ &= a^0 \\ &= a^{m \cdot 0} \\ &= a^{m \cdot n}\end{aligned}$$

Jadi $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=0$.

- Langkah 2.

Akan dibuktikan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Andaikan $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=k$ berarti $(a^m)^k = a^{mk}$. Akan ditunjukkan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=k+1$.

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= (a^m)^{k+1} \\ &= (a^m)^k a^m && \text{(definisi 2.1.4(2))} \\ &= a^{mk} a^m && \text{(pengandaian)} \\ &= a^{m(k+1)} \\ &= a^{m \cdot n}\end{aligned}$$

Jadi $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=k+1$. Dari langkah 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n=0,1,2,3,\dots$

- Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$. Untuk $n \in \mathbb{Z}^-$ ada bilangan positif $p \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga $n = -p$

$$(a^m)^n = (a^m)^{-p} \quad \text{(definisi 2.1.4(3))}$$

$$= a^{(-m)p} \quad (\text{definisi 2.1.4(3)})$$

$$= a^{m(\sim p)}$$

$$= a^{m,n}$$

Jadi $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}^-$. Dari langkah 1,2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$ benar untuk $n \in \mathbb{Z}$. ■

Definisi 2.1.5

1. Order suatu grup

Order dari suatu grup G adalah banyaknya elemen dalam himpunan G dan dinotasikan dengan $|G|$. Jika banyaknya elemen dalam G tak berhingga maka G disebut grup tak berhingga.

2. Order suatu elemen

Jika G adalah grup G dan a adalah suatu elemen dalam grup G maka bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$ disebut **order** dari a dan ditulis $|a|$. Jika tidak ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$ maka $|a|$ tak berhingga.

Teorema 2.1.9

Jika G grup dan $a \in G$ maka $\langle a \rangle = \{x \in G \mid x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subgrup dari G .

Bukti :

- i). $\langle a \rangle \neq \emptyset$ karena $a = a^1 \in \langle a \rangle$.

ii). Ambil $x, y \in \langle a \rangle$ maka $x = a^m, m \in \mathbb{Z}$ dan $y = a^n, n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $xy \in \langle a \rangle$.

$$xy = a^m a^n = a^{m+n} \quad (\text{teorema 2.1.8(a)})$$

karena $m, n \in \mathbb{Z}$ maka $m+n \in \mathbb{Z}$. Jadi $xy \in \langle a \rangle$.

iii). Ambil sebarang $x \in \langle a \rangle$ maka $x = a^n, n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $x^{-1} \in \langle a \rangle$. Berdasar teorema 2.1.8(b), $x^{-1} = (a^n)^{-1} = a^{-n}$, karena $n \in \mathbb{Z}$ maka $-n \in \mathbb{Z}$. Jadi $x^{-1} \in \langle a \rangle$.

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan $\langle a \rangle$ merupakan subgrup dari G . ■

Definisi 2.1.6

Jika H merupakan subgrup dari G dan $H = \langle a \rangle$ untuk suatu $a \in H$ maka H dikatakan **subgrup siklik** yang dibangun oleh a .

Definisi 2.1.7

Suatu elemen a dari grup G dikatakan membangun G jika $\langle a \rangle = G$. Suatu grup G disebut **siklik** jika ada $a \in G$ yang membangun G .

Teorema 2.1.10

Jika G grup $a \in G$ dan $r, s \in \mathbb{Z}, r \neq s$ sehingga $a^r = a^s$ maka akan dipenuhi :

- Ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$.
- Jika t adalah bilangan bulat positif maka $a^t = e$ bila dan hanya bila n adalah pembagi dari t .

c. $e = a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$ adalah elemen – elemen yang berbeda dan

$$\langle a \rangle = \{ e = a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1} \}$$

Bukti :

a). Untuk membuktikan bagian (a) harus ditunjukkan bahwa $a^t = e$, t adalah elemen himpunan bilangan bulat positif. Dalam prinsip dari himpunan bilangan bulat positif pasti memuat elemen terkecil yang kita sebut n .

- Andaikan $r > s$ maka $(r-s) > 0$.

$$a^r = a^s$$

$$\Leftrightarrow a^r a^{-s} = a^s a^{-s}$$

$$\Leftrightarrow a^{r-s} = a^{s-s} \quad (\text{teorema 2.1.8(a)})$$

$$\Leftrightarrow a^{r-s} = a^0 \quad (\text{definisi 2.4.1(1)})$$

$$\Leftrightarrow a^{t_1} = e$$

- Andaikan $r < s$ maka $(s-r) > 0$.

$$a^r = a^s$$

$$\Leftrightarrow a^r a^{-r} = a^s a^{-r}$$

$$\Leftrightarrow a^{r-r} = a^{s-r} \quad (\text{teorema 2.1.8(a)})$$

$$\Leftrightarrow a^0 = a^{s-r}$$

$$\Leftrightarrow e = a^{t_2} \quad (\text{definisi 2.4.1(1)})$$

Dari dua keadaan tersebut diperoleh $a^{t_1} = e$ dan $a^{t_2} = e$, menurut prinsip dari himpunan bilangan bulat positif, untuk $\{t_1, t_2\}$ pasti terdapat bilangan bulat positif terkecil n . Oleh karena itu $a^n = e$. ■

b). ($\Rightarrow$) Diketahui $t \in \mathbb{Z}$ dan $a^t = e$ akan ditunjukkan bahwa n adalah pembagi dari t .

Menurut Algoritma Pembagian ada $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $t = nq + r$

dimana $0 \leq r < n$ sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$a^t = a^{nq+r}$$

$$\Leftrightarrow a^t = a^{nq} a^r \quad (\text{teorema 2.1.8(a)})$$

$$\Leftrightarrow a^t = (a^n)^q a^r \quad (\text{teorema 2.1.8(b)})$$

$$\Leftrightarrow a^t = e^q a^r \quad (\text{teorema 2.1.10(a)})$$

$$\Leftrightarrow e = a^r \quad (\text{definisi 2.1.4 (1)})$$

Oleh karena $0 \leq r < n$ dan n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$ maka haruslah $r = 0$. Jadi $t = nq$, $q \in \mathbb{Z}$ sehingga n adalah pembagi dari t .

($\Leftarrow$) Diketahui n adalah pembagi dari $t \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan $a^t = e$. Jika n pembagi dari t maka $t = nv$ untuk $n, v \in \mathbb{Z}$ maka $a^t = a^{nv} = (a^n)^v = e^v = e$. ■

c). Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen dalam $\langle a \rangle$ berbeda. Andaikan $a^u = a^v$

dengan $0 \leq u < n$, $0 \leq v < n$, $u \geq v$ dan $u, v \in \mathbb{Z}$

$$a^u = a^v$$

$$\Leftrightarrow a^u a^{-v} = a^v a^{-v}$$

$$\Leftrightarrow a^{u-v} = a^{v-v} \quad (\text{teorema 2.1.8(a)})$$

$$\Leftrightarrow a^{u-v} = a^0 \quad (\text{definisi 2.1.4(1)})$$

$$\Leftrightarrow a^{u-v} = e$$

Jadi menurut (b), n adalah pembagi dari $(u-v)$. Tetapi $(u-v) \leq n$, $0 \leq u < n$ dan $0 \leq v < n$ sehingga n adalah pembagi dari $(u-v)$ dan $0 \leq u-v < n$, hal ini akan terjadi bila $u-v=0$ atau $u=v$.

Akan ditunjukkan bahwa $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$. Untuk sebarang pangkat dari a pasti berada dalam $\langle a \rangle$.

Andaikan diberikan a^m , $m \in \mathbb{Z}$ menurut Algoritma Pembagian maka ada $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $m=nq+r$.

$$a^m = a^{nq+r} = a^{nq} a^r = (a^n)^q a^r = e^q a^r = a^r, \text{ untuk } 0 \leq r < n$$

Jadi $a^m \in \{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$. ■

Teorema 2.1.11

Jika $\langle a \rangle$ grup siklik yang dibangun oleh a maka $|\langle a \rangle|$ tak berhingga bila dan hanya bila $a^r = a^s \Rightarrow r = s$, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $|\langle a \rangle|$ tak berhingga akan ditunjukkan $a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

Andaikan $a^r = a^s$ dan $r \neq s$. Berdasar teorema 2.1.10(c), n elemen dalam $\langle a \rangle$ adalah berlainan sehingga $|\langle a \rangle| = n$, berarti $\langle a \rangle$ berhingga, terjadi kontradiksi. Jadi $a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

($\Leftarrow$) Diketahui $a^r = a^s \Rightarrow r = s$ akan ditunjukkan $|\langle a \rangle|$ tak berhingga. Perhatikan bahwa $r \neq s$ dipenuhi hanya jika $a^r \neq a^s$, sehingga a pangkat sebarang bilangan yang

berbeda merupakan elemen-elemen yang berbeda sehingga semua anggota dari $\langle a \rangle$ adalah berlainan maka $|\langle a \rangle|$ tak berhingga. ■

Teorema 2.1.12

Jika G grup dan $a \in G$ maka $|a| = |\langle a \rangle|$

Bukti :

Jika $|a|$ berhingga, menurut teorema 2.1.10(c), $\langle a \rangle = \{ e = a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1} \}$

sehingga $|\langle a \rangle| = n$ berarti $|a| = |\langle a \rangle| = n$.

Jika $|a|$ tak berhingga berarti tidak ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$ sedangkan menurut teorema 2.1.11, a pangkat sebarang bilangan merupakan elemen-elemen yang berbeda sehingga $|\langle a \rangle|$ tak berhingga.

Jadi $|a| = |\langle a \rangle|$ tak berhingga. ■

Definisi 2.1.8

Jika G grup dan $a \in G$ maka pemusat dari a dalam G adalah $C(a) = \{ x \in G \mid xa = ax \}$.

Teorema 2.1.13

Jika G grup dan $C(a)$ adalah pemusat dari a dalam G maka $C(a)$ adalah subgrup dari G .

Bukti:

i). $C(a) \neq \emptyset$ sebab ada $e \in G$ sedemikian sehingga $ea = ae$. Jadi $e \in C(a)$.

ii). Ambil sebarang $x, y \in C(a)$ maka $xa = ax$ dan $ya = ay$. Akan ditunjukkan bahwa $xy \in C(a)$.

$$\begin{aligned} (xy)a &= x(ya) && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= x(ay) && (y \in C(a)) \\ &= (xa)y && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= (ax)y && (x \in C(a)) \\ &= a(xy) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(xy)a = a(xy)$. Jadi $xy \in C(a)$.

iii). Ambil $x \in C(a)$ akan ditunjukkan bahwa $x^{-1} \in C(a)$.

$$\begin{aligned} xa &= ax \\ \Leftrightarrow x^{-1}(xa) &= x^{-1}(ax) \\ \Leftrightarrow (x^{-1}x)a &= x^{-1}(ax) && \text{(sifat asosiatif)} \\ \Leftrightarrow ea &= (x^{-1}a)x && \text{(sifat asosiatif)} \\ \Leftrightarrow ax^{-1} &= (x^{-1}a)(xx^{-1}) \\ \Leftrightarrow ax^{-1} &= (x^{-1}a)e \\ \Leftrightarrow ax^{-1} &= (x^{-1}a) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $ax^{-1} = (x^{-1}a)$. Jadi $x^{-1} \in C(a)$.

Jadi terbukti bahwa $C(a)$ subgrup dari G . ■

Definisi 2.1.9

Jika G grup dan H adalah subgrup dari G maka pemusat dari H dalam G adalah $C_G(H) = \{x \in G \mid xh = hx, \forall h \in H\}$.

Teorema 2.1.14

Jika G grup dan $C_G(H)$ adalah pemusat dari H dalam G maka $C_G(H)$ adalah subgrup dari G .

Bukti:

- i). $C_G(H) \neq \emptyset$ sebab ada $e \in G$ sedemikian sehingga $eh = he, \forall h \in H$. Jadi $e \in C_G(H)$
- ii). Ambil sebarang $x, y \in C_G(H)$ maka $xh = hx$ dan $yh = hy, \forall h \in H$.

Akan ditunjukkan bahwa $xy \in C_G(H)$.

$$\begin{aligned}
 (xy)h &= x(yh) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= x(hy) && (y \in C_G(H)) \\
 &= (xh)y && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (hx)y && (x \in C_G(H)) \\
 &= h(xy)
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(xy)h = h(xy)$. Jadi $xy \in C_G(H)$.

- iii). Ambil $x \in C_G(H)$ akan ditunjukkan bahwa $x^{-1} \in C_G(H)$.

$$\begin{aligned}
 & xh = hx \\
 \Leftrightarrow & x^{-1}(xh) = x^{-1}(hx) \\
 \Leftrightarrow & (x^{-1}x)h = x^{-1}(hx) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 \Leftrightarrow & eh = (x^{-1}h)x && \text{(sifat asosiatif)} \\
 \Leftrightarrow & hx^{-1} = (x^{-1}h)(xx^{-1}) \\
 \Leftrightarrow & hx^{-1} = (x^{-1}h)e \\
 \Leftrightarrow & hx^{-1} = (x^{-1}h)
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $hx^{-1} = (x^{-1}h)$. Jadi $x^{-1} \in C_G(H)$.

Jadi terbukti bahwa $C_G(H)$ subgrup dari G . ■

Definisi 2.1.9

Jika G grup maka $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$ disebut pusat dari G .

Teorema 2.1.15

Jika G grup maka $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$ adalah subgrup dari G .

Bukti:

- i). Ambil $e \in G$ dapat dibentuk $ex = xe, \forall x \in G$. Jadi $e \in Z(G)$ sehingga $Z(G) \neq \emptyset$.
- ii). Ambil $g_1, g_2 \in Z(G)$ maka $g_1x = xg_1$ dan $g_2x = xg_2, \forall x \in G$, karena G grup maka $g_1g_2 \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $g_1g_2 \in Z(G)$.

$$\begin{aligned}
 (g_1g_2)x &= g_1(g_2x) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= g_1(xg_2) && \text{(definisi 2.1.10)} \\
 &= (g_1x)g_2 && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (xg_1)g_2 && \text{(definisi 2.1.10)} \\
 &= x(g_1g_2) && \text{(sifat asosiatif)}
 \end{aligned}$$

Oleh karena $g_1g_2 \in G$ dan berlaku $(g_1g_2)x = (g_1x)g_2$ dapat disimpulkan bahwa $g_1g_2 \in Z(G)$.

- iii). Ambil sebarang $g \in Z(G)$ maka $gx = xg, \forall x \in G$, karena $g \in Z(G)$ maka $g \in G$ dan $g^{-1} \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $g^{-1} \in Z(G)$.

$$\begin{aligned}
 &gx = xg \\
 \Leftrightarrow &g^{-1}(gx) = g^{-1}(xg) \\
 \Leftrightarrow &(g^{-1}g)x = g^{-1}(xg) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 \Leftrightarrow &ex = g^{-1}(xg) && \text{(sifat invers)} \\
 \Leftrightarrow &xg^{-1} = g^{-1}(xg)g^{-1}
 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow xg^{-1} = (g^{-1}x)(g g^{-1}) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$\Leftrightarrow xg^{-1} = (g^{-1}x)e \quad (\text{sifat invers})$$

$$\Leftrightarrow xg^{-1} = g^{-1}x$$

sehingga diperoleh bahwa $g^{-1} \in Z(G)$.

Jadi terbukti bahwa $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$ adalah subgrup dari G . ■

Teorema 2.1.16

Jika G grup maka $Z(G) = G$ bila dan hanya bila G merupakan grup Abel.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui G grup dan $Z(G) = G$ sehingga untuk setiap $x, g \in G$ berlaku $gx = xg$ berarti G merupakan grup Abel.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa G adalah grup Abel, akan ditunjukkan $Z(G) = G$ yaitu dengan memperlihatkan bahwa $Z(G) \subseteq G$ dan $G \subseteq Z(G)$.

i). Berdasarkan teorema 2.1.14 jelas bahwa $Z(G) \subseteq G$.

ii). Ambil sebarang $g \in G$ karena G adalah grup Abel maka untuk setiap $x \in G$ berlaku $gx = xg$ sehingga $g \in Z(G)$. Jadi $G \subseteq Z(G)$. ■

2.2. Koset dan Teorema Lagrange

Definisi 2.2.1

Jika H subgrup dari grup G dan $a \in G$ maka:

a. $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut **koset kanan**.

b. $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut **koset kiri**.

Teorema 2.2.1

Jika H subgrup dari grup G dan $a, b \in G$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

- a. $ab^{-1} \in H$
- b. $a = hb$, untuk suatu $h \in H$
- c. $a \in Hb$
- d. $Ha = Hb$

Bukti :

- (a) $\Rightarrow$ (b)

Diketahui $ab^{-1} \in H$ akan ditunjukkan $a = hb$, untuk suatu $h \in H$. Oleh karena $ab^{-1} \in H$ maka $ab^{-1} = h$ untuk suatu $h \in H$.

$$\begin{aligned}
 & ab^{-1} = h \\
 \Leftrightarrow & (ab^{-1})b = hb \\
 \Leftrightarrow & a(b^{-1}b) = hb && \text{(sifat asosiatif)} \\
 \Leftrightarrow & ae = hb && \text{(sifat invers)} \\
 \Leftrightarrow & a = hb
 \end{aligned}$$

- (b) $\Rightarrow$ (c)

Diketahui $a = hb$, akan ditunjukkan $a \in Hb$.

Oleh karena $Hb = \{hb \mid h \in H\}$ maka $a \in Hb$.

- (c) $\Rightarrow$ (d)

Diketahui $a \in Hb$ akan ditunjukkan $Ha = Hb$ yaitu $Ha \subseteq Hb$ dan $Hb \subseteq Ha$

- i). Akan ditunjukkan $Ha \subseteq Hb$. Ambil $x \in Ha$ maka $x = h_1a$ untuk suatu $h_1 \in H$, karena $a \in Hb$ maka $a = h_2b$ untuk suatu $h_2 \in H$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
 x &= h_1(h_2b) \\
 &= (h_1h_2)b && \text{(sifat asosiatif di } H) \\
 &= h_3b && (h_1h_2 = h_3 \in H)
 \end{aligned}$$

Jadi $x \in Hb$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $Ha \subseteq Hb$.

ii). Akan ditunjukkan $Hb \subseteq Ha$. Ambil $y \in Hb$ maka $y = h_4b$ untuk suatu $h_4 \in H$, karena $a \in Hb$ maka $a = h_5b$ sehingga $b = h_5^{-1}a$, untuk suatu $h_5 \in H$ sehingga didapat :

$$\begin{aligned}
 y &= h_4(h_5^{-1}a) \\
 &= (h_4h_5^{-1})a && \text{(sifat asosiatif di } H) \\
 &= h_6b && (h_4h_5^{-1} = h_6 \in H)
 \end{aligned}$$

Jadi $x \in Hb$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $Ha \subseteq Hb$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $Ha = Hb$.

• (d) $\Rightarrow$ (a)

Diketahui $Ha = Hb$ akan ditunjukkan $ab^{-1} \in H$. Karena $Ha = Hb$ maka $a \in Hb$ sehingga didapat :

$$\begin{aligned}
 a &= hb \\
 \Leftrightarrow ab^{-1} &= (hb)b^{-1} \\
 \Leftrightarrow ab^{-1} &= h(bb^{-1}) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 \Leftrightarrow ab^{-1} &= he && \text{(sifat invers)} \\
 \Leftrightarrow ab^{-1} &= h
 \end{aligned}$$

Jadi $ab^{-1} \in H$. ■

Teorema 2.2.2

Jika G grup dan H subgrup dari G maka $Ha = H$ bila dan hanya bila $a \in H$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $Ha=H$ akan dibuktikan bahwa $a \in H$. Karena $Ha=H$ maka $ha \in H$,

$\forall h \in H$. Dilain pihak H subgrup maka $e \in H$ sehingga $ea = a \in H$

($\Leftarrow$) Diketahui $a \in H$ akan dibuktikan bahwa $Ha=H$ yaitu $Ha \subseteq H$ dan $H \subseteq Ha$.

i). Ambil sebarang $x \in Ha$ maka $x=ha$ untuk suatu $h \in H$, karena H subgrup dan $a \in H$ maka $x=ha \in H$. Jadi $Ha \subseteq H$.

ii). Ambil sebarang $z \in H$, karena H subgrup dan $a \in H$ maka menurut teorema 2.1.1(c), $z = ya$ pasti mempunyai penyelesaian tunggal di H sehingga $z \in Ha$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $H \subseteq Ha$. ■

Teorema 2.2.3

Jika H subgrup berhingga dari grup G dan $a \in G$ maka $|H| = |Ha|$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara H dengan Ha .

Didefinisikan : $\alpha : H \rightarrow Ha$ dengan aturan $\alpha(h) = ha$.

- Akan ditunjukkan bahwa α terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $h_1 = h_2$ maka $h_1a = h_2a \Leftrightarrow \alpha(h_1) = \alpha(h_2)$.

Jadi terbukti $(\forall h_1, h_2 \in H)(h_1 = h_2 \Rightarrow \alpha(h_1) = \alpha(h_2))$.

- Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$ akan ditunjukkan bahwa $h_1 = h_2$.

$$\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$$

$$\Leftrightarrow h_1a = h_2a$$

$$\Leftrightarrow h_1a a^{-1} = h_2a a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow h_1e = h_2e$$

$$\Leftrightarrow h_1 = h_2 \quad (\text{teorema 2.1.2(b)})$$

Jadi terbukti α injektif yaitu $(\forall h_1, h_2 \in H)(\alpha(h_1) = \alpha(h_2) \Rightarrow h_1 = h_2)$.

- Ambil sebarang $x \in Ha$ maka $x = ha$ untuk suatu $h \in H$, maka terdapat $h \in H$ sehingga $\alpha(h) = ha = x$. Jadi terbukti bahwa α surjektif yaitu $(\forall h \in H)(\exists x \in Ha)(x = ha)$ ■

Teorema 2.2.4

Jika H subgrup dari grup G dan $a, b \in G$ maka berlaku $Ha \cap Hb \neq \emptyset \Rightarrow Ha = Hb$.

Bukti :

Diketahui $Ha \cap Hb \neq \emptyset$ maka ada $x \in G$ sedemikian sehingga $x \in Ha \cap Hb$ yaitu $x \in Ha$ dan $x \in Hb$. $x \in Ha$ artinya $x = h_1 a$, untuk suatu $h_1 \in H$ sedangkan $x \in Hb$ $x = h_2 b$, untuk suatu $h_2 \in H$ sehingga diperoleh :

$$h_1 a = h_2 b \Leftrightarrow a = h_1^{-1} h_2 b \Leftrightarrow b = h_2^{-1} h_1 a.$$

- i) Ambil sebarang $y \in Ha$ maka $y = h_3 a$ untuk suatu $h_3 \in H$.

$$\begin{aligned} y &= h_3 a \\ &= h_3 (h_1^{-1} h_2 b) \\ &= (h_3 h_1^{-1} h_2) b && (\text{sifat asosiatif}) \\ &= h_4 b && (h_3 h_1^{-1} h_2 = h_4 \in H) \end{aligned}$$

Jadi $y \in Hb$ sehingga dapat disimpulkan $Ha \subseteq Hb$.

- ii) Ambil sebarang $z \in Hb$ maka $z = h_5 b$ untuk suatu $h_5 \in H$.

$$\begin{aligned} z &= h_5 b \\ &= h_5 (h_2^{-1} h_1 a) \\ &= (h_5 h_2^{-1} h_1) a && (\text{sifat asosiatif}) \\ &= h_6 a && (h_5 h_2^{-1} h_1 = h_6 \in H) \end{aligned}$$

Jadi $y \in Hb$ sehingga dapat disimpulkan $Hb \subseteq Ha$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $Ha = Hb$. ■

Definisi 2.2.2

Jika G grup dan A subgrup dari G didefinisikan $gAg^{-1} = \{gag^{-1} | a \in A\}$ maka

$N_G(A) = \{g \in G | gAg^{-1} = A\}$ adalah penormal dari A dalam G .

Teorema 2.2.5

Jika G grup dan A subgrup dari G dan maka $N_G(A) = \{g \in G | gAg^{-1} = A\}$ merupakan subgrup dari G .

Bukti :

- i). $N_G(A) \neq \emptyset$ sebab ada $e \in G$ sehingga berlaku $eAe^{-1} = A$. Jadi $e \in N_G(A)$.
- ii). Ambil $g_1, g_2 \in N_G(A)$. $g_1 \in N_G(A)$ berarti $g_1Ag_1^{-1} = A$, untuk $g_1 \in G$ dan $g_2 \in N_G(A)$ berarti $g_2Ag_2^{-1} = A$, untuk $g_2 \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $g_1g_2 \in N_G(A)$

$$(g_1g_2)A(g_1g_2)^{-1} = (g_1g_2)A(g_2^{-1}g_1^{-1}) \quad (\text{teorema 2.1.1(c)})$$

$$= g_1(g_2Ag_2^{-1})g_1^{-1} \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$= g_1Ag_1^{-1} \quad (\text{definisi 2.2.2})$$

$$= A \quad (\text{definisi 2.2.2})$$

Oleh karena $g_1 \in G$, $g_2 \in G$ dan G grup sehingga $g_1g_2 \in G$ dan berlaku

$$(g_1g_2)A(g_1g_2)^{-1} = A \text{ maka } g_1g_2 \in N_G(A)$$

- iii). Ambil $g \in N_G(A)$ maka $gAg^{-1} = A \Leftrightarrow gAg^{-1}g = Ag \Leftrightarrow gA = Ag \Leftrightarrow g^{-1}gA = g^{-1}Ag \Leftrightarrow A = g^{-1}Ag \Leftrightarrow A = g^{-1}A(g^{-1})^{-1}$ sehingga diperoleh $g^{-1}Ag = A$. Jadi $g^{-1} \in N_G(A)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $N_G(A)$ subgrup dari G . ■

Definisi 2.2.3

Jika G grup berhingga dan H subgrup dari G maka banyaknya koset kanan dari H yang berada pada G disebut indeks dari H pada G dan ditulis $[G:H]$.

Teorema 2.2.6 (Teorema Lagrange)

Jika G grup berhingga dan H subgrup dari G maka order dari H membagi order dari G .

Bukti :

Diketahui G grup berhingga dan H subgrup dari G . Misalkan $P = \{Ha \mid a \in G\}$, P merupakan partisi dari G , karena G berhingga maka P juga berhingga. Misalkan $|P| = k$, karena P merupakan partisi dari G maka:

$$\begin{aligned} |G| &= |Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3 \cup \dots \cup Ha_k| \\ &= |Ha_1| + |Ha_2| + |Ha_3| + \dots + |Ha_k| \\ &= |H| + |H| + |H| + \dots + |H| \\ &= k|H| \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $|H|$ membagi $|G|$. ■

Teorema 2.2.7

Jika G grup berhingga dan H subgrup dari G maka $[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$.

Bukti :

Perhatikan teorema 2.2.6 k adalah bilangan bulat positif yang menyatakan banyaknya koset kanan dari H yang berada pada G sehingga menurut definisi 2.2.3, k disebut

indeks dari H pada G dan ditulis $[G:H] = k$. Di lain pihak $|G| = k|H| \Leftrightarrow k =$

sehingga dapat disimpulkan bahwa $[G:H] =$

Teorema 2.2.8

- Jika G grup berhingga dan $a \in G$ maka
- Grup G yang berorder prima hanya memuat subgrup $\{e\}$ dan G .
- Setiap grup G dengan order prima adalah siklik yang dibangun dengan sebuah elemen yang bukan identitas.
- Jika G grup berhingga dengan order k maka $a^k = e, \forall a \in G$.
- Jika G grup berhingga dan H, K masing masing adalah subgrup dari G yang berorder prima maka $H \cap K = \{e\}$.

Bukti :

- Perhatikan bahwa menurut teorema 2.1.9, $\langle a \rangle$ adalah subgrup dari G . Sehingga menurut Teorema Lagrange diperoleh $|\langle a \rangle|$ dilain pihak menurut teorema 2.1.12, jika G grup dan $a \in G$ maka $|a| = |\langle a \rangle|$ sehingga dapat disimpulkan bahwa

■

- Misalkan $|G|=p$, dengan p bilangan prima. $|G|-1, p$ sehingga 1 dan p merupakan faktor dari p . Misalkan H adalah subgrup dari G maka menurut Teorema Lagrange diperoleh $|H| \mid |G|$ sehingga $|H| = p$ dan $|H| = 1$ berarti $H=G$ dan $H=\{e\}$. Jadi G hanya memuat subgrup yang berorder satu yaitu $\{e\}$ dan berorder p yaitu G .

■

- c). Menurut Teorema Lagrange jika H subgrup dari G maka $|H| \mid |G|$, karena $|G|=p$ maka menurut teorema 2.2.8(b) H yang mungkin adalah G atau $\{e\}$ sehingga bila $H \neq \{e\}$ maka $H=G$. Menurut teorema 2.1.9 $\langle a \rangle$ merupakan subgrup dari G dan menurut teorema 2.1.9 $\langle a \rangle \neq \{e\}$. Jadi subgrup $\langle a \rangle$ tidak lain adalah G sendiri sehingga G adalah siklik. ■
- d). Jika $a \in G$ dan G grup berhingga menurut teorema 2.2.8(a), berlaku $|G| = k|a|$ sehingga $a^{|G|} = a^{k|a|} = (a^{|a|})^k = (e)^k = e$. ■
- e). Misalkan $|H| = p$ dan $|K| = q$, dengan p dan q bilangan prima. Perhatikan bahwa $H \cap K \subseteq H$ dan $H \cap K \subseteq K$ maka $H \cap K$ subgrup dari H dan K sehingga menurut teorema Lagrange $|H \cap K| \mid |H|$ dan $|H \cap K| \mid |K|$ berarti $|H \cap K| \mid p$ dan $|H \cap K| \mid q$, padahal p dan q bilangan prima sehingga haruslah $|H \cap K| = 1$. Jadi $H \cap K$ tidak lain adalah $\{e\}$. ■

Definisi 2.2.4

Jika H dan K adalah subgrup dari G maka HK didefinisikan sebagai $HK = \{x \in G \mid x = hk, h \in H \text{ dan } k \in K\}$.

Teorema 2.2.9

Jika H dan K subgrup berhingga dari G maka $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

Bukti :

HK merupakan gabungan koset-koset kiri dari K dituliskan $HK = \bigcup_{h \in H} hK$, karena untuk

setiap hK mempunyai $|K|$ elemen sehingga hal ini cukup untuk menemukan

banyaknya koset yang berbeda yang berbentuk hK , $h \in H$. Akan tetapi $h_1K = h_2K$ untuk $h_1, h_2 \in H$ bila dan hanya bila $h_2^{-1}h_1 \in K$. $h_1K = h_2K \Leftrightarrow h_2^{-1}h_1 \in H \cap K \Leftrightarrow h_1(H \cap K) = h_2(H \cap K)$. Jadi banyaknya koset yang berbeda yang berbentuk hK untuk $h \in H$ merupakan banyaknya koset yang berbeda $h(H \cap K)$ untuk $h \in H$. Menurut Teorema Lagrange banyaknya koset-koset yang berbeda adalah $\frac{|H|}{|H \cap K|}$. Jadi HK terdiri dari $\frac{|H|}{|H \cap K|}$ koset-koset dari K dan masing-masing mempunyai $|K|$ elemen sehingga $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

Teorema 2.2.10

Diberikan H dan K adalah subgrup dari G maka HK adalah subgrup dari G bila dan hanya bila $HK = KH$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui HK subgrup dari G akan ditunjukkan bahwa $HK = KH$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $HK \subseteq KH$ dan $KH \subseteq HK$.

i). Ambil sebarang $x \in HK$, maka $x^{-1} \in HK$ berdasar definisi 2.2.4, $x^{-1} = hk$, untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$. $x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$ sehingga diperoleh $x \in KH$.
Jadi $HK \subseteq KH$.

ii). Ambil sebarang $y \in KH$, maka berdasar definisi 2.2.4, $y = kh$, untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$. Perhatikan bahwa y dapat dinyatakan sebagai $y = (h^{-1}k^{-1})^{-1}$ dimana $h^{-1}k^{-1} \in HK$, karena HK subgrup berarti $(h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$. Jadi $y \in HK$ sehingga $KH \subseteq HK$.

($\Leftarrow$) Diketahui $HK=KH$, akan ditunjukkan bahwa HK subgrup dari G .

- i). H dan K adalah subgrup dari G maka $e_G \in H$ dan $e_G \in K$ sehingga $e_G = e_G e_G \in HK$. Jadi $HK \neq \emptyset$.
- ii) Ambil sebarang $x, y \in HK$ sehingga $x = h_1 k_1$ dan $y = h_2 k_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$.

$$\begin{aligned} xy &= (h_1 k_1)(h_2 k_2) \\ &= h_1(k_1 h_2)k_2 && \text{(asosiatif di } G) \\ &= h_1(h_3 k_3)k_2 && (k_1 h_2 = h_3 k_3, \text{ karena } HK=KH) \\ &= (h_1 h_3)(k_3 k_2) \end{aligned}$$

karena H dan K subgrup maka $h_1 h_3 \in H$ dan $k_3 k_2 \in K$ sehingga diperoleh $xy = (h_1 h_3)(k_3 k_2) \in HK$. Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam HK .

- iii). Ambil sebarang $x \in HK$ sehingga $x = hk$, untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$ maka $x^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$. Jadi $x^{-1} \in HK$.

Dari (i),(ii) dan (iii) terbukti bahwa HK subgrup dari G . ■

Teorema 2.2.11

Jika H adalah subgrup dari G maka $HH=H$.

Bukti :

Diketahui H adalah subgrup dari G akan ditunjukkan bahwa $HH=H$, yaitu dengan memperlihatkan $HH \subseteq H$ dan $H \subseteq HH$.

- i). Ambil sebarang $x \in HH$, maka $x = h_1 h_2$, untuk suatu $h_1, h_2 \in H$, karena H subgrup maka $x = h_1 h_2 \in H$. Jadi $HH \subseteq H$.

- ii). Ambil sebarang $h \in H$, karena H subgrup maka $e \in H$. Perhatikan bahwa untuk $e \in H$ dapat dibentuk He , dimana $H = He = he$ untuk suatu $e \in H$. Oleh karena $h \in H$ dan $e \in H$ maka $he = h \in H$. Jadi $H \subseteq HH$. ■

2.3. Subgrup Normal dan Grup Faktor

Definisi 2.3.1

Jika G grup dan H subgrup dari G maka H disebut subgrup normal G bila dan hanya bila $xH = Hx, \forall x \in G$, dinotasikan $H \triangleleft G$.

Teorema 2.3.1

Jika G grup dan H subgrup dari G maka $H \triangleleft G$ bila dan hanya bila $(\forall x \in G)(\forall h \in H)xhx^{-1} \in H$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui G grup, H subgrup dari G dan $H \triangleleft G$ akan ditunjukkan $(\forall x \in G)(\forall h \in H)xhx^{-1} \in H$. Ambil sebarang $x \in G$ dan sebarang $h \in H$ sedemikian sehingga $xh \in xH$. Oleh karena $H \triangleleft G$ maka $xh \in Hx$ sehingga

$$xh = h_1x, \quad \text{untuk suatu } h_1 \in H$$

$$\Leftrightarrow (xh)x^{-1} = (h_1x)x^{-1}$$

$$\Leftrightarrow xhx^{-1} = h_1(x x^{-1}) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$\Leftrightarrow xhx^{-1} = h_1e \quad (\text{sifat invers})$$

$$\Leftrightarrow xhx^{-1} = h_1 \in H$$

Jadi terbukti $(\forall x \in G)(\forall h \in H)xhx^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Diketahui $(\forall x \in G)(\forall h \in H)xhx^{-1} \in H$ akan ditunjukkan $H \triangleleft G$, yaitu $xH \subseteq Hx$ dan $Hx \subseteq xH$.

i). Ambil sebarang $t \in xH$ maka ada $h_1 \in H$ sedemikian sehingga $t = xh_1$.

$t = xh_1 \Leftrightarrow tx^{-1} = xh_1x^{-1} \in H$, sehingga $tx^{-1} \in H$ maka $(tx^{-1})x \in Hx$, padahal $(tx^{-1})x = t(x^{-1}x) = t$. Jadi $t \in Hx$ sehingga $xH \subseteq Hx$.

ii). Ambil sebarang $m \in Hx$ maka ada $h_2 \in H$ sedemikian sehingga $m = h_2x$, sehingga

$x^{-1}m = x^{-1}h_2x \in H$ dan $x(x^{-1}m) \in xH$, padahal $x(x^{-1}m) = (xx^{-1})m = m$.

Jadi $m \in xH$ sehingga $Hx \subseteq xH$. ■

Teorema 2.3.2

Jika H subgrup dari grup Abel G maka $H \triangleleft G$.

Bukti :

Ambil sebarang $h \in H$ dan $g \in G$ akan dibuktikan $ghg^{-1} \in H$.

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= gg^{-1}h && (G \text{ grup Abel}) \\ &= eh \\ &= h \in H \end{aligned}$$

Jadi $ghg^{-1} \in H$ sehingga terbukti $H \triangleleft G$. ■

Teorema 2.3.3

H adalah subgrup normal dalam G bila dan hanya bila $N_G(H) = G$.

Bukti :

($\Rightarrow$) H adalah subgrup normal dalam G berarti $(\forall g \in G)(\forall h \in H)ghg^{-1} \in H$.

Akan ditunjukkan bahwa $N_G(H) = G$ yaitu dengan memperlihatkan $N_G(H) \subseteq G$ dan $G \subseteq N_G(H)$.

i). Pada teorema 2.2.5 telah dibuktikan bahwa $N_G(H)$ adalah subgrup dari G maka jelas bahwa $N_G(H) \subseteq G$.

ii). Oleh karena H adalah subgrup normal dalam G maka menurut definisi 2.3.1, $xH = Hx, \forall x \in G$ padahal $xH = Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} = H, \forall x \in G$. Jadi $G \subseteq N_G(H)$.

Dari hasil (i) dan (ii) terbukti bahwa $N_G(H) = G$.

($\Leftarrow$) Diketahui $N_G(H) = G$ akan ditunjukkan bahwa $H \triangleleft G$. Ambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $h \in H$, karena $N_G(H) = G$ maka $g \in N_G(H)$. Perhatikan bahwa $g \in N_G(H)$ maka $gHg^{-1} = H$ sehingga jelas bahwa $ghg^{-1} \in H$. Jadi terbukti bahwa H adalah subgrup normal dalam G . ■

Teorema 2.3.4

Diketahui K dan N subgrup dari G dengan $N \triangleleft G$. Jika $K \triangleleft G$ dan $K \cap N = \{e\}$ maka $nk = kn, \forall k \in K$ dan $\forall n \in N$.

Bukti :

Diketahui K dan N subgrup dari G , $N \triangleleft G$ dan $K \triangleleft G$, akan dibuktikan $nk = kn, \forall k \in K$ dan $\forall n \in N$. Ambil sebarang $k \in K$ dan $n \in N$ karena N subgrup dari G maka $n \in G$ di lain pihak $K \triangleleft G$ sehingga diperoleh $nk n^{-1} \in K, k^{-1} \in K$ maka $(nk n^{-1})k^{-1} \dots \dots \dots$ (i)

Selain itu karena N subgrup dari G maka untuk $n \in N$ didapat $n^{-1} \in N$, karena K subgrup dari G maka $k \in G$ di lain pihak $N \triangleleft G$ sehingga diperoleh $kn^{-1}k^{-1} \in N$, $n \in N$ sehingga $n(kn^{-1}k^{-1}) \dots\dots\dots$ (ii)

Perhatikan hasil (i) dan (ii) maka $(nkn^{-1})k^{-1} \in K \cap N = \{e\}$ maka diperoleh :

$$\begin{aligned} (nkn^{-1})k^{-1} &= e \\ \Leftrightarrow (nkn^{-1})k^{-1}k &= ek \\ \Leftrightarrow (nkn^{-1}) &= k \\ \Leftrightarrow (nk)(n^{-1}n) &= kn \\ \Leftrightarrow nk &= kn \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $nk=kn$, $\forall k \in K$ dan $\forall n \in N$. ■

Teorema 2.3.5

Jika $(G,*)$ grup dan $K \triangleleft G$ maka $G/K = \{Ka \mid a \in G\}$ merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan dengan $(Ka) \bullet (Kb) = K(a*b)$, $Ka, Kb \in G/K$.
Selanjutnya G/K disebut grup faktor.

Bukti :

- i). Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa operasi dalam G/K terdefinisi dengan baik, yaitu jika $Ka_1 = Ka_2$ dan $Kb_1 = Kb_2$ akan ditunjukkan bahwa $K(a_1*b_1) = K(a_2*b_2)$. Menurut teorema 2.2.1, $Ka_1 = Ka_2 \Leftrightarrow a_1 = k_1*a_2$, untuk $k_1 \in K$ demikian juga $Kb_1 = Kb_2 \Leftrightarrow b_1 = k_2*b_2$, untuk $k_2 \in K$.

$$\begin{aligned} a_1*b_1 &= (k_1*a_2) * (k_2*b_2) \\ &= k_1*(a_2*k_2)*b_2 \quad (a_2*k_2 = a_2K) \end{aligned}$$

$$= k_1 * (k_3 * a_2) * b_2 \quad (K \triangleleft G \text{ maka } a_2 K = K a_2 \text{ sehingga } a_2 * k_3 = k_3 * a_2)$$

$$= (k_1 * k_3) * (a_2 * b_2) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$= k_4 * (a_2 * b_2) \quad (\text{misalkan } k_1 * k_3 = k_4)$$

Jadi menurut teorema 2.2.1 karena $a_1 * b_1 = k_4 * (a_2 * b_2)$ maka $K(a_1 * b_1) = K(a_2 * b_2)$

sehingga dapat disimpulkan bahwa operasi dalam G/K terdefinisi dengan baik.

ii). Ambil sebarang $Ka, Kb \in G/K$ akan dibuktikan $Ka \bullet Kb \in G/K$. Perhatikan bahwa $(Ka) \bullet (Kb) = K(a * b)$, karena G grup maka $a * b \in G$ sehingga $K(a * b) \in G/K$.

iii). Ambil sebarang $Ka, Kb, Kc \in G/K$.

Akan dibuktikan $Ka \bullet (Kb \bullet Kc) = (Ka \bullet Kb) \bullet Kc$.

$$\begin{aligned} Ka \bullet (Kb \bullet Kc) &= Ka \bullet (b * c) \\ &= K(a * (b * c)) \\ &= K((a * b) * c) \quad (\text{sifat asosiatif di } G) \\ &= K(a * b) \bullet Kc \\ &= (Ka \bullet Kb) \bullet Kc \end{aligned}$$

Jadi terbukti sifat asosiatif dipenuhi dalam G/K .

iv). Ambil sebarang $Ka \in G/K$, karena G grup maka ada $e \in G$ sedemikian sehingga $Ke \in G/K$. $Ka \bullet Ke = K(a * e) = Ka, \forall Ka \in G/K$. Jadi G/K mempunyai elemen identitas yaitu Ke .

v). Ambil sebarang $Ka \in G/K$, $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ karena G grup maka $Ka^{-1} \in G/K$. $Ka \bullet Ka^{-1} = K(a * a^{-1}) = Ke$.

Jadi Ka^{-1} adalah invers dari Ka dalam G/K .

Dari hasil (i) sampai dengan (v) dapat disimpulkan bahwa G/N adalah grup. ■

Teorema 2.3.6

Jika G grup berhingga dan $N \triangleleft G$ maka $|G/N| = |G|/|N|$.

Bukti :

Diketahui G grup berhingga dan $N \triangleleft G$ sehingga N adalah subgrup dari G maka menurut Teorema Lagrange banyaknya koset-koset kanan dari N dalam G adalah

$|G/N|$. Di lain pihak $|G/N|$ merupakan order dari G/N . Jadi $|G/N| = |G|/|N|$. ■

2.4. Homomorfisma dan Isomorfisma

Definisi 2.4.1

Jika $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup maka pemetaan $\theta : G \rightarrow H$ disebut homomorfisma jika $\forall a, b \in G$ berlaku $\theta(a \bullet b) = \theta(a) * \theta(b)$.

Definisi 2.4.2

Misalkan $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma maka berlaku :

1. Jika θ merupakan fungsi surjektif yaitu bila dipenuhi

$(\forall y \in H)(\exists x \in G) y = \theta(x)$ maka θ disebut ephimorfisma.

2. Jika θ merupakan fungsi injektif yaitu bila dipenuhi

$(\forall x \in G) \theta(x_1) = \theta(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ maka θ disebut monomorfisma.

3. Jika θ sekaligus merupakan ephimorfisma dan monomorfisma maka θ disebut isomorfisma.

Jika $\theta : (G, \bullet) \rightarrow (H, *)$ isomorfisma maka G dikatakan isomorfis dengan H dan ditulis $(G, \bullet) \approx (H, *)$.

Teorema 2.4.1

Jika $\theta : (G, \bullet) \rightarrow (H, *)$ isomorfisma, e_G dan e_H adalah berturut-turut elemen identitas dari $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ maka berlaku :

- $\theta(e_G) = e_H$
- $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}, \quad \forall a \in G$
- $\theta(a^k) = (\theta(a))^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\theta(G)$ subgrup dalam H
- Jika θ injektif maka $G \approx \theta(G)$

Bukti :

a). Diketahui $(G, \bullet)$ grup dan $e_G \in G$ maka $e_G \bullet e_G = e_G$. θ adalah fungsi dari G ke H maka diperoleh $\theta(e_G \bullet e_G) = \theta(e_G)$ dan karena θ homomorfisma maka $\theta(e_G \bullet e_G) = \theta(e_G) * \theta(e_G)$ sehingga diperoleh $\theta(e_G) * \theta(e_G) = \theta(e_G)$. Perhatikan bahwa $\theta(e_G) \in H$ dan $e_H \in H$ maka $\theta(e_G) * e_H = \theta(e_G)$ di lain pihak $\theta(e_G) * \theta(e_G) = \theta(e_G)$, karena H grup maka berlaku hukum kanselasi kanan sehingga diperoleh $e_H = \theta(e_G)$. ■

b). Ambil sebarang $a \in G$, karena $(G, \bullet)$ grup maka $a^{-1} \in G$ dan berlaku $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e_G$, dari kondisi a didapat $e_H = \theta(e_G)$. θ adalah fungsi dari G ke H dan θ homomorfisma sehingga $e_H = \theta(e_G) = \theta(a \bullet a^{-1}) = \theta(a) * \theta(a^{-1})$.

Selain itu karena H grup maka untuk $\theta(a) \in H$ ada $\theta(a^{-1}) \in H$ sedemikian hingga $\theta(a) * \theta(a^{-1}) = e_H$ dan $\theta(a) * (\theta(a))^{-1} = e_H$ sehingga menurut hukum kanselasi di H didapat $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$. ■

c). Ambil sebarang $a \in G$ dan $k \in \mathbb{Z}$ akan ditunjukkan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$.

i). Untuk $k=0$

$$\begin{aligned}\theta(a^k) &= \theta(a^0) \\ &= \theta(e_G) && \text{(definisi 2.1.5)} \\ &= e_H && \text{(teorema 2.4.1(a))} \\ &= (\theta(a))^0, \text{ untuk } \theta(a) \in H && \text{(definisi 2.1.5)} \\ &= (\theta(a))^k\end{aligned}$$

Untuk kasus $k < 0$ dan $k > 0$ pembuktian menggunakan induksi matematika.

ii). Untuk $k > 0$.

- Langkah 1.

$$\text{Untuk } k=1 \text{ maka } \theta(a^1) = \theta(a) = (\theta(a))^1$$

Jadi pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $k=1$.

- Langkah 2.

Andaikan pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $k=n$ sehingga

$$\theta(a^n) = (\theta(a))^n.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $k=n+1$.

$$\begin{aligned}\theta(a^{n+1}) &= \theta(a^n \cdot a) && \text{(teorema 2.1.7)} \\ &= \theta(a^n) * \theta(a) && (\theta \text{ homomorfisma}) \\ &= (\theta(a))^n * (\theta(a))^1 && (\text{pengandaian untuk } k=n) \\ &= (\theta(a))^{n+1} && (\text{teorema 2.1.7})\end{aligned}$$

$$= (\theta(a))^k$$

Jadi pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $k > 0$.

iii). Untuk $k < 0$. Misalkan $k = -p$, $p \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $\theta(a^k) = \theta(a^{-p}) = \theta((a^{-1})^p)$, akan ditunjukkan $\theta((a^{-1})^p) = (\theta(a^{-1}))^p$

- Langkah 1.

$$\text{Untuk } p=1 \text{ maka } \theta((a^{-1})^1) = (\theta(a^{-1}))^1$$

Jadi pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $p=1$.

- Langkah 2.

Andaikan pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $p=m$ sehingga $\theta((a^{-1})^m) = (\theta(a^{-1}))^m$. Akan ditunjukkan bahwa $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $p=m+1$.

$$\begin{aligned} \theta((a^{-1})^p) &= \theta((a^{-1})^{m+1}) && (\text{teorema 2.1.7}) \\ &= \theta((a^{-1})^m \cdot a^{-1}) && (\theta \text{ homomorfisma}) \\ &= (\theta(a^{-1}))^m * (\theta(a^{-1}))^1 && (\text{pengandaian untuk } k=n) \\ &= (\theta(a^{-1}))^{m+1} && (\text{teorema 2.1.7}) \\ &= (\theta(a^{-1}))^p \end{aligned}$$

Jadi pernyataan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$ benar untuk $k < 0$.

Dari hasil (i),(ii),(iii) dapat disimpulkan $\theta(a^k) = (\theta(a))^k$, untuk $\forall k \in \mathbb{Z}$. ■

d). Akan ditunjukkan bahwa $\theta(G)$ subgrup dalam H .

$$\theta(G) = \{h \in H \mid (\exists g \in G) h = \theta(g)\}.$$

i). $\theta(G) \neq \emptyset$, sebab ada $e_H \in H$ sehingga $e_H = \theta(e_G)$ dengan $e_G \in G$. Jadi $e_H \in \theta(G)$.

ii). Ambil sebarang $h_1, h_2 \in \theta(G)$ maka ada $g_1, g_2 \in G$, sehingga $h_1 = \theta(g_1)$ dan $h_2 = \theta(g_2)$. Akan dibuktikan bahwa $h_1 * h_2 \in \theta(G)$.

$$\begin{aligned} h_1 * h_2 &= \theta(g_1) * \theta(g_2) \\ &= \theta(g_1 \bullet g_2) \quad (\theta \text{ homomorfisma}) \end{aligned}$$

Oleh karena $g_1, g_2 \in G$ dan G grup maka $g_1 \bullet g_2 \in G$ di lain pihak $\theta(g_1 \bullet g_2) = h_1 * h_2$ maka $h_1 * h_2 \in \theta(G)$.

iii). Ambil sebarang $h \in \theta(G)$ maka ada $g \in G$ sedemikian sehingga $h = \theta(g)$ akan ditunjukkan bahwa $h^{-1} \in \theta(G)$.

$h = \theta(g)$ maka $h^{-1} = (\theta(g))^{-1} = \theta(g^{-1})$, menurut teorema 2.4.1(b)

Oleh karena ada $g^{-1} \in G$ sedemikian hingga $h^{-1} = \theta(g^{-1})$ maka $h^{-1} \in \theta(G)$.

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa $\theta(G)$ subgrup dalam H . ■

e). Diketahui θ injektif dari G ke H , akan ditunjukkan bahwa θ isomorfisma. Ambil sebarang $h \in \theta(G)$ maka ada $g \in G$ sedemikian sehingga $h = \theta(g)$. Jadi θ surjektif. Oleh karena $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma dan sekaligus θ merupakan fungsi injektif dan surjektif maka menurut definisi 2.4.2, $G \approx \theta(G)$. ■

Definisi 2.4.3

Jika $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma maka kernel θ adalah himpunan semua $a \in G$ sedemikian sehingga $\theta(a) = e_H$.

Kernel θ dapat dituliskan dengan $\ker \theta = \{ a \in G \mid \theta(a) = e_H \}$.

Teorema 2.4.2

Jika $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma maka :

- $\ker \theta$ subgrup dalam G .
- $\ker \theta = \{ e_G \}$ bila dan hanya bila θ injektif.
- $\ker \theta \triangleleft G$

Bukti :

a). Akan ditunjukkan bahwa $\ker\theta$ subgrup dalam G .

i). $\ker\theta \neq \emptyset$ sebab ada $e_G \in G$, $\theta(e_G) = e_H$ sehingga $e_G \in \ker\theta$.

ii). Ambil sebarang $x, y \in \ker\theta$, sehingga $\theta(x) = e_H$ dan $\theta(y) = e_H$, akan ditunjukkan $x \bullet y \in \ker\theta$.

$$\begin{aligned}\theta(x \bullet y) &= \theta(x) * \theta(y) && (\theta \text{ homomorfisma}) \\ &= e_H * e_H \\ &= e_H\end{aligned}$$

Jadi $(\forall x, y \in \ker\theta)(x \bullet y \in \ker\theta)$ sehingga sifat tertutup dipenuhi.

iii). Ambil sebarang $x \in \ker\theta$ sehingga untuk $x \in G$ didapat $\theta(x) = e_H$, akan ditunjukkan $x^{-1} \in \ker\theta$. $x \in G$ dan G grup maka $x^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned}\theta(x^{-1}) &= (\theta(x))^{-1} && (\text{teorema 2.4.1(a)}) \\ &= (e_H)^{-1} \\ &= e_H\end{aligned}$$

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa $\ker\theta$ subgrup dalam G . ■

b). $(\Rightarrow)$ Diketahui $\ker\theta = \{ e_G \}$ akan ditunjukkan bahwa θ injektif. Ambil sebarang $x, y \in G$ sedemikian sehingga $\theta(x) = \theta(y)$, akan dibuktikan $x=y$, karena $x, y \in G$ maka $y^{-1} \in G$ dan $x \bullet y^{-1} \in G$.

$$\theta(x) = \theta(y)$$

$$\Leftrightarrow \theta(x) * (\theta(y))^{-1} = \theta(y) * (\theta(y))^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \theta(x) * \theta(y^{-1}) = \theta(y) * (\theta(y))^{-1} \quad (\text{teorema 2.4.1(b)})$$

$$\Leftrightarrow \theta(x \bullet y^{-1}) = e_H \quad (\theta \text{ homomorfisma})$$

Jadi $x \bullet y^{-1} \in \ker\theta$.

Diketahui $\ker\theta = \{ e_G \}$ maka $x \bullet y^{-1} \in \{ e_G \}$ sehingga :

$$x \bullet y^{-1} = e_G$$

$$\Leftrightarrow (x \bullet y^{-1}) \bullet y = e_G \bullet y$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Jadi dipenuhi $(\forall x, y \in G)(\theta(x) = \theta(y) \Rightarrow x = y)$.

($\Leftarrow$) Diketahui θ injektif akan ditunjukkan bahwa $\ker\theta = \{ e_G \}$.

$$\ker\theta = \{ x \in G \mid \theta(x) = e_H \}$$

$$= \{ x \in G \mid \theta(x) = \theta(e_G) \}$$

$$= \{ x \in G \mid x = e_G \}$$

$$= \{ e_G \}$$

Jadi terbukti bahwa $\ker\theta = \{ e_G \}$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\ker\theta = \{ e_G \}$ bila dan hanya bila θ injektif. ■

c). Ambil sebarang $g \in G$ dan $h \in \ker\theta$ maka $\theta(h) = e_H$ akan ditunjukkan $g \bullet h \bullet g^{-1} \in \ker\theta$.

$$\theta(g \bullet h \bullet g^{-1}) = \theta(g) * \theta(h) * \theta(g^{-1}) \quad (\theta \text{ homomorfisma})$$

$$= \theta(g) * e_H * \theta(g^{-1}) \quad (h \in \ker\theta)$$

$$= \theta(g) * \theta(g)^{-1} \quad (\text{teorema 2.4.1(b)})$$

$$= e_H$$

Dengan demikian $\theta(g \bullet h \bullet g^{-1}) = e_H$ sehingga $g \bullet h \bullet g^{-1} \in \ker\theta$.

Jadi terbukti bahwa $\text{Ker}\theta \triangleleft G$. ■

Teorema 2.4.3

Jika $(G, *)$ grup, $K \triangleleft G$ dan grup faktor maka pemetaan $\theta : G \rightarrow$ yang didefinisikan $\theta(a) = Ka$ adalah homomorfisma yang surjektif dan $\ker\theta = K$.

Bukti :

- i). Akan ditunjukkan bahwa θ terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $x, y \in G$ sedemikian sehingga $x = y$. Perhatikan bahwa $x = y \Leftrightarrow xy^{-1} = yy^{-1} \Leftrightarrow xy^{-1} = e \in K$ berarti $xy^{-1} \in K$. Jadi menurut teorema 2.2.1, $Kx = Ky$ atau $\theta(x) = \theta(y)$.
- ii). Ambil sebarang $x, y \in G$ akan ditunjukkan bahwa θ homomorfisma.

$$\begin{aligned}\theta(xy) &= K(xy) \\ &= Kx \bullet Ky \\ &= \theta(x) \bullet \theta(y)\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\theta : G \rightarrow$ homomorfisma.

- iii). Pemetaan θ surjektif karena untuk sebarang $Kx \in$ maka ada $x \in G$ sedemikian sehingga $\theta(x) = Kx$.
- iv). Akan ditunjukkan bahwa $\ker\theta = K$.

$$\begin{aligned}\ker\theta &= \{x \in G \mid \theta(x) = e\} \\ &= \{x \in G \mid \theta(x) = K\} \\ &= \{x \in G \mid Kx = K\} \\ &= K\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\ker\theta = K$. ■

Teorema 2.4.4 (Teorema Fundamental Homomorfisma)

Jika $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma surjektif dengan $\ker \theta = K$ maka $\varphi : G/K \rightarrow H$ yang didefinisikan $\varphi(Ka) = \theta(a)$, $\forall Ka \in G/K$ merupakan isomorfisma dari G/K ke H .

Bukti :

- i). Akan ditunjukkan bahwa φ terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $Ka, Kb \in G/K$ sedemikian sehingga $Ka = Kb$ maka menurut teorema 2.2.1 $a = k \bullet b$ untuk suatu $k \in K$.

$$\begin{aligned} \theta(a) &= \theta(k \bullet b) \\ \Leftrightarrow \theta(a) &= \theta(k) * \theta(b) && (\theta \text{ homomorfisma}) \\ \Leftrightarrow \theta(a) &= e_H * \theta(b) \\ \Leftrightarrow \theta(a) &= \theta(b) \\ \Leftrightarrow \varphi(Ka) &= \varphi(Kb) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi : G/K \rightarrow H$ terdefinisi dengan baik.

- ii). Ambil sebarang $Ka, Kb \in G/K$ akan ditunjukkan bahwa φ homomorfisma.

$$\begin{aligned} \varphi(Ka \bullet Kb) &= \varphi(Ka \bullet Kb) \\ &= \theta(a \bullet b) \\ &= \varphi(Ka) * \varphi(Kb) \end{aligned}$$

Jadi φ homomorfisma.

- iii). Akan dibuktikan φ surjektif ambil sebarang $y \in H$ karena $\theta : G \rightarrow H$ homomorfisma surjektif maka ada $x \in G$ sehingga $\theta(x) = y$, karena $x \in G$ maka $Kx \in G/K$ sedemikian sehingga $\varphi(Kx) = \theta(x) = y$.



Jadi terbukti bahwa φ surjektif.

iv). Akan ditunjukkan bahwa φ injektif. Ambil sebarang $Ka, Kb \in G/K$ dengan

$$\varphi(Ka) = \varphi(Kb) \text{ maka } \theta(a) = \theta(b).$$

$$\theta(a) = \theta(b)$$

$$\Leftrightarrow \theta(a) * (\theta(b))^{-1} = \theta(b) * (\theta(b))^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \theta(a) * \theta(b^{-1}) = e_H \quad (\text{teorema 2.4.1(b)})$$

$$\Leftrightarrow \theta(a \bullet b^{-1}) = e_H$$

berarti $a \bullet b^{-1} \in K$ dan mengakibatkan $Ka = Kb$. Jadi terbukti φ injektif.

Dari hasil (i),(ii),(iii) dan (iv) dapat disimpulkan $\varphi : G/K \rightarrow H$ isomorfisma. ■

Teorema 2.4.5

Diketahui $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\varphi : G \rightarrow G'$ homomorfisma surjektif dengan $\ker \varphi = K$ dan H' adalah subgrup dari G' .

a. Jika $H = \{a \in G \mid \varphi(a) \in H'\}$ maka H adalah subgrup dari G , $H \supset K$ dan

$$G/K \approx H'$$

b. Jika $H' \triangleleft G'$ maka $H \triangleleft G$

Bukti :

a). Diketahui $H = \{a \in G \mid \varphi(a) \in H'\}$

- Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari G .

i). $H \neq \emptyset$ sebab ada $e' = \varphi(e) \in H'$, untuk suatu $e \in H$. ii). Ambil

sebarang $a, b \in H$ maka $\varphi(a), \varphi(b) \in H'$, akan ditunjukkan $a \bullet b \in H$.

Diketahui H' adalah subgrup dari G' dan φ homomorfisma, sehingga dipenuhi :

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a \bullet b), \text{ untuk } a \bullet b \in H.$$

Jadi $(\forall a, b \in H)(a \bullet b \in H)$ sehingga sifat tertutup dipenuhi.

iii). Ambil sebarang $a \in H$ maka $\varphi(a) \in H'$, akan ditunjukkan $a^{-1} \in H$.

Diketahui H' adalah subgrup dari G' maka berlaku:

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} \quad \text{untuk suatu } a^{-1} \in H$$

Jadi sifat invers dipenuhi dalam H .

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa H subgrup dalam G .

Akan ditunjukkan bahwa $H \supset K$ yaitu untuk $x \in K$ maka $x \in H$. Diketahui bahwa

$\ker \varphi = K$, sehingga jika diambil sebarang $b \in K$ maka $\varphi(b) = e'$, $e' \in H'$.

Oleh karena $e' \in H'$ maka $\varphi(b) \in H'$ berarti $b \in H$. Jadi terbukti $H \supset K$. ■

- Akan ditunjukkan bahwa $G/K \approx H'$. Diketahui bahwa H dan H' berturut-turut adalah subgrup dari G dan G' dan $\varphi : G \rightarrow G'$ homomorfisma surjektif sehingga berlaku juga $\varphi : H \rightarrow H'$ homomorfisma surjektif dengan $\ker \varphi = K$. Perhatikan bahwa $H \supset K$, sehingga menurut Teorema Fundamental Homomorfisma $G/K \approx H'$. ■

b). Diketahui bahwa $H' \triangleleft G'$ akan ditunjukkan $H \triangleleft G$. Karena $H' \triangleleft G'$ maka

untuk sebarang $a \in G$ berlaku $(\varphi(a))^{-1} * H' * \varphi(a) \subset H'$.

$$\begin{aligned} (\varphi(a))^{-1} * H' * \varphi(a) &= \varphi(a^{-1}) * \varphi(H) * \varphi(a) \\ &= \varphi(a^{-1} \bullet H \bullet a) \quad (\varphi \text{ homomorfisma}) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\varphi(a^{-1} \bullet H \bullet a) \subset H'$ maka $a^{-1} \bullet H \bullet a \in H$.

Jadi terbukti $H \triangleleft G$. ■

Teorema 2.4.6

Diberikan homomorfisma grup $\phi : G \rightarrow G'$.

- a). Jika N adalah subgrup normal dari G maka $\phi(N)$ adalah subgrup normal dari G' .
- b). Jika N' adalah subgrup normal dari G' maka $\phi^{-1}(N')$ adalah subgrup normal dari G .

Bukti :

- a). Diketahui N adalah subgrup normal dari G . Akan diperlihatkan bahwa $\phi(N)$ adalah subgrup normal dari G' .

Oleh karena N adalah subgrup normal dari G maka berdasar teorema 2.3.1 berlaku $gng^{-1} \in N, \forall g \in G$ dan $\forall n \in N$ sehingga :

$$\begin{aligned} \phi(gng^{-1}) &= \phi(gn) \phi(g^{-1}) \\ &= \phi(g) \phi(n) \phi(g^{-1}) && (\phi \text{ homomorfisma}) \\ &= \phi(g) \phi(n) \phi(g)^{-1} && (\text{teorema 2.4.1.(b)}) \end{aligned}$$

berarti $\phi(gng^{-1}) = \phi(g) \phi(n) \phi(g)^{-1} \in \phi(N)$. Jadi $\phi(N)$ adalah subgrup normal dari G' . ■

- b). Diketahui N' adalah subgrup normal dari G' . Akan diperlihatkan bahwa $\phi^{-1}(N')$ adalah subgrup normal dari G . Berdasarkan definisi invers dari suatu fungsi $\phi^{-1}(N') = \{x \in G \mid \phi(x) \in N'\}$. Ambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $x \in \phi^{-1}(N')$ maka $x \in G$ sedemikian sehingga $\phi(x) \in N'$. Akan diperlihatkan $gxg^{-1} \in \phi^{-1}(N')$, $g, x, g^{-1} \in G$ maka $gxg^{-1} \in G$ sehingga :

$$\begin{aligned}
 \phi(gxg^{-1}) &= \phi(gx) \phi(g^{-1}) \\
 &= \phi(g) \phi(x) \phi(g^{-1}) && (\phi \text{ homomorfisma}) \\
 &= \phi(g) \phi(x) \phi(g)^{-1} && (\text{teorema 2.4.1.(b)})
 \end{aligned}$$

$\phi(g), \phi(g)^{-1} \in G'$ dan $\phi(x) \in N'$ dan N' adalah subgrup normal dari G' maka $\phi(gxg^{-1}) = \phi(g) \phi(x) \phi(g)^{-1} \in N'$. Oleh karena $gxg^{-1} \in G$ dan $\phi(g) \phi(x) \phi(g)^{-1} \in N'$ maka $gxg^{-1} \in \phi^{-1}(N')$. Jadi menurut teorema 2.3.1 $\phi^{-1}(N')$ adalah subgrup normal dari G . ■

2.5. Hasil Kali (Direct Product)

Definisi 2.5.1

Jika H dan K adalah himpunan-himpunan yang tidak kosong maka $G = H \times K$ adalah hasil kali antara H dan K yang didefinisikan $\{(h, k) \mid h \in H \text{ dan } k \in K\}$.

Teorema 2.5.1

Jika H dan K grup maka $G = H \times K$ adalah grup dimana didefinisikan suatu operasi pada G yaitu $(\forall (h_1, k_1), (h_2, k_2) \in G) (h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2)$.

Bukti :

- i). Akan ditunjukkan bahwa operasi yang didefinisikan di dalam G terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2), ((h_3, k_3), (h_4, k_4)) \in G$ sedemikian sehingga $((h_1, k_1), (h_2, k_2)) = ((h_3, k_3), (h_4, k_4))$ maka diperoleh $(h_1, k_1) = (h_3, k_3)$ dan $(h_2, k_2) = (h_4, k_4)$ yang berarti $h_1 = h_3, k_1 = k_3, h_2 = h_4, k_2 = k_4$. Oleh karena itu $h_1 h_2 = h_3 h_4$ dan $k_1 k_2 = k_3 k_4$, sehingga diperoleh $(h_1 h_2, k_1 k_2) = (h_3 h_4, k_3 k_4)$.

Perhatikan bahwa $(h_1 h_2, k_1 k_2) \in G$. Jadi terbukti bahwa operasi yang didefinisikan di dalam G terdefinisi dengan baik.

- ii). Ambil sembarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3) \in G$, akan ditunjukkan sifat asosiatif dipenuhi dalam G .

$$\begin{aligned} ((h_1, k_1)(h_2, k_2))(h_3, k_3) &= (h_1 h_2, k_1 k_2)(h_3, k_3) && \text{(definisi 2.5.1)} \\ &= ((h_1 h_2) h_3, (k_1 k_2) k_3) && \text{(definisi 2.5.1)} \\ &= (h_1 (h_2 h_3), k_1 (k_2 k_3)) && \text{(sifat asosiatif di } H \text{ dan } K) \\ &= ((h_1, k_1)(h_2 h_3, k_2 k_3)) \\ &= (h_1, k_1)((h_2, k_2)(h_3, k_3)) \end{aligned}$$

Jadi sifat asosiatif dipenuhi dalam G .

- iii). Diketahui H dan K grup maka $e_H \in H$ dan $e_K \in K$ sehingga $(e_H, e_K) \in G$. Ambil sebarang $(h, k) \in G$ maka $(h, k)(e_H, e_K) = (h e_H, k e_K) = (h, k)$.

Jadi $(e_H, e_K) \in G$ merupakan elemen identitas dari G .

- iv). Ambil sebarang $(h, k) \in G$ dengan $h \in H$ dan $k \in K$, karena H dan K grup maka $h^{-1} \in H$ dan $k^{-1} \in K$ sehingga $(h^{-1}, k^{-1}) \in G$.

$$(h, k)(h^{-1}, k^{-1}) = (h h^{-1}, k k^{-1}) = (e_H, e_K)$$

Jadi $(\forall (h, k) \in G)(\exists (h^{-1}, k^{-1}) \in G) (h, k)(h^{-1}, k^{-1}) = (h h^{-1}, k k^{-1}) = (e_H, e_K)$

Dari langkah (i),(ii),(iii) dan (iv) dapat disimpulkan bahwa $G = H \times K$ grup. ■

Teorema 2.5.2

Diberikan H dan K subgrup dari grup G sedemikian sehingga :

1. H dan K normal dalam G
2. $H \cap K = \{e\}$

maka $HK \approx H \times K$

Bukti :

Diketahui G grup H, K subgrup, $H \triangleleft G$ dan $K \triangleleft G$ serta $H \cap K = \{e\}$ maka menurut teorema 2.3.4 $hk = kh$, $\forall h \in H$ dan $\forall k \in K$. bentuk suatu pemetaan $\varphi : HK \rightarrow H \times K$ dimana $\varphi(hk) = (h, k)$

i). Akan ditunjukkan bahwa φ terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang

$(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ sedemikian sehingga $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$ maka diperoleh

$h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$. Oleh karena itu $h_1 k_1 = h_2 k_2$ berarti $\varphi(h_1 k_1) = (h_2 k_2)$.

Jadi φ terdefinisi dengan baik.

ii). Akan ditunjukkan bahwa φ homomorfisma. Ambil sebarang $x, y \in HK$ maka

$x = h_1 k_1$ dan $y = h_2 k_2$ untuk $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$.

$$\begin{aligned} xy &= (h_1 k_1)(h_2 k_2) \\ &= h_1(k_1 h_2)k_2 && \text{(sifat asosiatif dalam } G \text{)} \\ &= h_1(h_2 k_1)k_2 && \text{(teorema 2.3.4)} \\ &= (h_1 h_2)(k_1 k_2) && \text{(sifat asosiatif dalam } G \text{)} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi((h_1 k_1)(h_2 k_2)) \\ &= \varphi((h_1 h_2)(k_1 k_2)) \\ &= (h_1 h_2, k_1 k_2) \\ &= (h_1, k_1)(h_2, k_2) \\ &= \varphi(h_1 k_1) \varphi(h_2 k_2) \\ &= \varphi(x) \varphi(y) \end{aligned}$$

Jadi φ homomorfisma.

iii). Akan ditunjukkan bahwa φ injektif. Ambil sebarang $x, y \in HK$ maka $x = h_1 k_1$ dan $y = h_2 k_2$ untuk $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$ sedemikian sehingga $\varphi(x) = \varphi(y)$.

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(h_1 k_1) = \varphi(h_2 k_2)$$

$$\Leftrightarrow (h_1, k_1) = (h_2, k_2)$$

sehingga diperoleh $h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$. Oleh karena itu $h_1 k_1 = h_2 k_2$.

Jadi terbukti bahwa φ injektif.

iv). Akan ditunjukkan bahwa φ surjektif. Ambil sebarang $(h, k) \in H \times K$ berarti $h \in H$ dan $k \in K$ sehingga pasti ada $hk \in HK$ sedemikian sehingga $\varphi(hk) = (h, k)$.

Jadi terbukti bahwa φ surjektif.

Dari hasil (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti bahwa $HK \approx H \times K$. ■

BAB III

TEOREMA SYLOW

3.1. Konjugasi dan p -grup

Definisi 3.1.1

Diketahui G grup dan $x, y \in G$, y dikatakan konjugat dari x jika ada $g \in G$ sedemikian sehingga $y = g^{-1}xg$.

Teorema 3.1.1

Misalkan G grup. Jika didefinisikan relasi " $\sim$ " dalam G yaitu untuk $x, y \in G$, $x \sim y$ bila dan hanya bila $y = g^{-1}xg$ maka konjugasi merupakan relasi ekuivalensi dalam G .

Bukti :

- i). Relasi " $\sim$ " bersifat refleksif sebab $x = e^{-1}xe$ untuk suatu $e \in G$.
- ii). Akan ditunjukkan bahwa relasi " $\sim$ " bersifat simetris. Jika $x \sim y$ maka $y = g^{-1}xg$ untuk suatu $g \in G$. Oleh karena $y = g^{-1}xg$ maka $x = gvg^{-1} = (g^{-1})^{-1}yg^{-1}$ untuk suatu $g^{-1} \in G$, berarti $y \sim x$. Jadi sifat simetris dipenuhi.
- iii). Akan ditunjukkan bahwa relasi " $\sim$ " bersifat transitif. Jika $x \sim y$ dan $y \sim z$ maka $y = g^{-1}xg$ dan $z = h^{-1}yh$ untuk suatu $g, h \in G$.

$$z = h^{-1}yh$$

$$\Leftrightarrow z = h^{-1}(g^{-1}xg)h$$

$$\Leftrightarrow z = (h^{-1}g^{-1})x(gh) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$\Leftrightarrow z = (gh)^{-1}x(gh)$$

Oleh karena $g, h \in G$ maka $gh \in G$ sehingga $x \sim z$. Jadi sifat transitif dipenuhi. ■

Definisi 3.1.2

Jika G grup dan $g \in G$ maka kelas konjugasi dari g adalah $cl(g) = \{y \in G \mid y = x^{-1}gx, x \in G\}$.

Definisi 3.1.3

Jika A dan B subgrup dari G maka B dikatakan konjugat dari A jika ada $g \in G$ sedemikian sehingga $B = g^{-1}Ag$.

Teorema 3.1.2

Jika G grup dan $g \in G$ maka $g \in Z(G)$ bila dan hanya bila $cl(g) = \{g\}$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $cl(g) = \{g\}$. Diketahui $g \in Z(G)$ maka $gx = xg, \forall x \in G$ dan $x^{-1} \in G$ maka berlaku :

$$\begin{aligned} & gx = xg, \quad \forall x \in G \\ \Leftrightarrow & x^{-1}(gx) = x^{-1}(xg), \quad \forall x \in G \\ \Leftrightarrow & (x^{-1}g)x = (x^{-1}x)g, \quad \forall x \in G \quad (\text{sifat asosiatif}) \\ \Leftrightarrow & (x^{-1}g)x = g, \quad \forall x \in G \\ \Leftrightarrow & cl(g) = \{g\} \end{aligned}$$

Jadi terbukti $cl(g) = \{g\}$.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $g \in Z(G)$. Diketahui $cl(g) = \{g\}$ maka berlaku :

$$\begin{aligned} & x^{-1}gx = g, \quad \forall x \in G \\ \Leftrightarrow & x(x^{-1}gx) = xg, \quad \forall x \in G \\ \Leftrightarrow & (xx^{-1})gx = xg, \quad \forall x \in G \quad (\text{sifat asosiatif}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow gx = xg, \quad \forall x \in G$$

Jadi terbukti $g \in Z(G)$. ■

Teorema 3.1.3

Jika $G = Z(G)$ maka y merupakan konjugat dari x bila dan hanya bila $x=y$.

Bukti :

Diketahui $G = Z(G)$ maka G Abel. Jika y merupakan konjugat dari x maka $y = g^{-1}xg$, untuk suatu $g \in G$.

$$\begin{aligned} y &= g^{-1}xg \\ \Leftrightarrow gy &= gg^{-1}(xg) \\ \Leftrightarrow gy &= (gg^{-1})xg && \text{(sifat asosiatif)} \\ \Leftrightarrow gy &= xg \\ \Leftrightarrow gy &= xg && (G \text{ Abel}) \\ \Leftrightarrow y &= x && \text{(hukum kanselasi kiri)} \end{aligned}$$

Jadi telah terbukti bahwa jika $G = Z(G)$ maka y merupakan konjugat dari x bila dan hanya bila $x=y$. ■

Lemma 3.1.1

Jika $b = x^{-1}ax$ dan $c = y^{-1}ay$ konjugat dari a maka $x^{-1}ax = y^{-1}ay$ bila dan hanya bila $C(a)x = C(a)y$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui b dan c dua konjugat yang sama dari a dengan $b=c$ sehingga dipenuhi $b = x^{-1}ax$ dan $c = y^{-1}ay$, untuk suatu $x, y \in G$, karena $b=c$ maka berlaku :

$$x^{-1}ax = y^{-1}ay$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (x^{-1}ax)y^{-1} = (y^{-1}ay)y^{-1} \\
 &\Leftrightarrow (x^{-1}ax)y^{-1} = y^{-1}a(yy^{-1}) \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &\Leftrightarrow (x^{-1}ax)y^{-1} = y^{-1}a \\
 &\Leftrightarrow x(x^{-1}ax)y^{-1} = xy^{-1}a \\
 &\Leftrightarrow (xx^{-1})axy^{-1} = xy^{-1}a \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &\Leftrightarrow axy^{-1} = xy^{-1}a
 \end{aligned}$$

Oleh karena $axy^{-1} = xy^{-1}a$ maka $xy^{-1} \in C(a)$ dan menurut teorema 2.2.1, $C(a)x = C(a)y$. Dengan demikian x dan y terletak dalam koset kanan dari $C(a)$ dalam G yang sama.

($\Leftarrow$) Jika $C(a)x = C(a)y$, maka menurut teorema 2.2.1, $xy^{-1} \in C(a)$ sehingga $axy^{-1} = xy^{-1}a$.

$$\begin{aligned}
 &axy^{-1} = xy^{-1}a \\
 &\Leftrightarrow (axy^{-1})y = (xy^{-1}a)y \\
 &\Leftrightarrow ax(y^{-1}y) = (xy^{-1}a)y \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &\Leftrightarrow ax = (xy^{-1}a)y \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}ax = x^{-1}(xy^{-1}a)y \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}ax = (x^{-1}x)y^{-1}ay \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}ax = y^{-1}ay
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti $x^{-1}ax = y^{-1}ay$ dua konjugat yang sama dari a . ■

Teorema 3.1.4

Jika G grup berhingga dan $y \in G$ maka banyaknya konjugat dari a dalam G adalah $[G : C(a)]$.

Bukti :

Menurut lemma 3.1.1 $x^{-1}ax = y^{-1}ay$ bila dan hanya bila $C(a)x = C(a)y$, berarti $x^{-1}ax \neq y^{-1}ay$ bila dan hanya bila $C(a)x \neq C(a)y$. Diketahui bahwa G grup berhingga dan $C(a)$ subgrup dari G , maka menurut definisi 2.2.2 banyaknya koset kanan yang berbeda dari $C(a)$ dalam G adalah $[G : C(a)]$, sehingga banyaknya konjugat dari a yang berbeda adalah $[G : C(a)]$. Jadi terbukti banyaknya konjugat dari a yang berbeda dari a dalam G sama dengan indeks dari $C(a)$ dalam G , yaitu $[G : C(a)]$. ■

Sekarang kita dapatkan bahwa indeks dari $C(a)$ dalam G sama dengan banyaknya konjugat dari a . Sedangkan banyaknya konjugat dari a tersebut sama dengan banyaknya elemen dalam $cl(a)$. Jadi dapat dituliskan $|cl(a)| = \frac{|G|}{|C(a)|}$.

Teorema 3.1.5

Jika G grup berhingga maka $|G| = \sum_{i=1}^k [G : C(a_i)] = \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{|C(a_i)|}$

Bukti :

Menurut teorema 3.1.1 konjugasi merupakan relasi ekivalensi pada G , maka G merupakan gabungan kelas-kelas konjugasi yang saling asing. Misalkan $P = \{cl(a_1), cl(a_2), cl(a_3), \dots, cl(a_k)\}$ merupakan partisi dari G , sehingga berlaku :

$$\begin{aligned} |G| &= |cl(a_1) \cup cl(a_2) \cup cl(a_3) \cup \dots \cup cl(a_k)| \\ &= |cl(a_1)| \cup |cl(a_2)| \cup |cl(a_3)| \cup \dots \cup |cl(a_k)| \\ &= \frac{|G|}{|C(a_1)|} + \frac{|G|}{|C(a_2)|} + \frac{|G|}{|C(a_3)|} + \dots + \frac{|G|}{|C(a_k)|} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{|C(a_i)|}$$

■

Definisi 3.1.3

1. Jika G grup dan p bilangan prima maka G disebut p -grup bila setiap elemen dalam grup G mempunyai order perpangkatan bilangan prima p .
2. Suatu subgrup dari grup G disebut p -grup dari G jika H adalah subgrup dari G dan H adalah p -grup.

Teorema 3.1.6

Jika $|G| = p^n$ dimana p adalah bilangan prima maka $Z(G) \neq \{e\}$

Bukti :

Diketahui $|G| = p^n$ dimana p adalah bilangan prima akan ditunjukkan bahwa $Z(G) \neq \{e\}$ yang berarti $\exists a \neq e \in G \ni ax = xa, \forall x \in G$. Andaikan $|Z(G)| = z$, dimana z merupakan banyaknya elemen dalam G yang kelas-kelas konjugasinya masing-masing hanya memuat satu elemen, $Z(G)$ adalah subgrup dari G maka ada $e \in Z(G)$ sehingga $z \geq 1$. Untuk sebarang $b \in G$ dan $b \notin Z(G)$ maka kelas konjugasinya masing-masing memuat lebih dari satu elemen. Menurut teorema 2.1.11, $C(b)$ adalah subgrup dari G , maka berdasarkan Teorema Lagrange $|C(b)|$ membagi G . Andaikan $|C(b)| = p^{n_b}$ dimana $1 \leq n_b \leq n$. Kelas konjugasi telah dibagi menjadi dua bagian yaitu kelas konjugasi yang memuat satu elemen dan kelas konjugasi yang memuat lebih dari satu elemen, sehingga kita peroleh :

$$\begin{aligned}
 |G| &= z + \sum_{b \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(b)|} \\
 \Leftrightarrow p^n &= z + \sum_{b \notin Z(G)} \frac{p^n}{p^{n_b}} \\
 \Leftrightarrow p^n &= z + \sum_{b \notin Z(G)} p^{n-n_b} \\
 \Leftrightarrow z &= p^n - \sum_{n_b < n} p^{n-n_b}
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $p \mid p^n$ dan $p \mid p^{n-b}$ maka $p \mid z$. Oleh karena itu untuk $z \geq 1$ dan p prima maka kemungkinan nilai z yang terkecil adalah p . Jadi karena $z = |Z(G)|$ dan $z \geq p$ maka $\exists a \in G$ sehingga $a \in Z(G)$. Jadi $Z(G) \neq \{e\}$. ■

Lemma 3.1.2

Jika G grup maka $a \in Z(G)$ bila dan hanya bila $Z(G) = G$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $a \in G$ akan ditunjukkan $C(a) = G$, $a \in Z(G)$ maka $ax = xa, \forall x \in G$, sehingga $C(a) = G$.

($\Leftarrow$) Diketahui $C(a) = G$ maka $ax = xa, \forall x \in G$ sehingga $a \in Z(G)$. ■

Lemma 3.1.3

Jika G grup berhingga maka $a \in Z(G)$ bila dan hanya bila $|C(a)| = |G|$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $a \in Z(G)$ maka menurut lemma 3.1.2, $C(a) = G$ sehingga $|C(a)| = |G|$.

($\Leftarrow$) Diketahui $|C(a)| = |G|$ di lain pihak menurut teorema 2.1.13, $C(a)$ subgrup dari G maka menurut lemma 3.1.3 $a \in Z(G)$ ■

Teorema 3.1.7 (Teorema Cauchy)

Jika G grup dan $p \mid |G|$, dimana p adalah bilangan prima maka G memuat elemen yang berorder p .

Bukti :

- Langkah 1.

Untuk $|G|=1$ maka tidak ada bilangan p yang membagi $|G|$. Jadi teorema benar untuk $|G|$.

- Langkah 2.

Andaikan teorema benar untuk $|T| < |G|$ sehingga ada $t \in T$ yang memenuhi $t^p = e$. Ambil sebarang subgrup N dari G dimana $N \neq G$ dan $N \neq \{e\}$ dimana $|N| < |G|$.

- Jika $p \mid |N|$ maka menurut pengandaian terdapat $n \in N$ sedemikian sehingga $n^p = e$ dan N subgrup dari G maka $n \in G$. Jadi G memuat elemen yang berorder p .
- Jika $p \nmid |N|$ khususnya $a \notin Z(G)$ maka menurut lemma 3.1.2, $C(a) \neq G$, padahal $C(a)$ subgrup dari G maka $p \nmid |C(a)|$ sehingga menurut teorema 3.1.5 :

$$|G| = \sum_{a \in G} \frac{|G|}{|C(a)|}$$

$$\Leftrightarrow |G| = \sum_{a \in Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} + \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$$

$$\Leftrightarrow |G| = |Z(G)| + \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$$

$$\Leftrightarrow |Z(G)| = |G| - \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$$

Perhatikan bahwa $p \mid |G|$ dan $p \nmid |C(a)|$ sehingga didapat $p \nmid \frac{|G|}{|C(a)|}$ maka

$p \nmid \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$. Kita dapat menarik kesimpulan bahwa $p \mid |Z(G)|$ dimana $Z(G)$

adalah subgrup dari G . Kita telah mengasumsikan bahwa p tidak membagi order dari subgrup G maka haruslah $Z(G)=G$, akibatnya G Abel. Jika G Abel maka untuk N subgrup dari G dapat dibentuk G/N , karena $N \neq \{e\}$ berarti $|N| > 1$ maka

$|G/N| = \frac{|G|}{|N|} < |G|$. Jadi sesuai pengandaian $\exists b \in G$ dimana $Nb \in G/N$ sedemikian

sehingga $(Nb)^p = Ne = N$ tetapi $Nb \neq Ne$ sehingga menurut teorema 2.2.1 $b \notin N$.

Perhatikan bahwa $(Nb)^p = Nb^p = N$ berarti menurut teorema 2.2.1 $b^p \in N$ dimana $b \notin N$.

Sekarang misalkan $|N| = m$ maka $(b^p)^m = (b^m)^p = e$. Jika dapat ditunjukkan

$c = b^m \neq e$ maka c merupakan elemen dalam G yang berorder p . Andaikan $c = b^m = e$

maka $(Nb)^m = Nb^m = N$, padahal diketahui $p \nmid |N|$ berarti p dan N masing-masing

adalah bilangan-bilangan prima, sehingga ada $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $xp + ym = 1$.

$$\begin{aligned} (Nb)^1 &= (Nb)^{xp+ym} \\ &= (Nb)^{xp} (Nb)^{ym} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (Nb^p)^x (Nb^m)^y \\
 &= N^x N^y \\
 &= N^{x+y} \\
 &= N
 \end{aligned}$$

Berarti kita peroleh $Nb=N$ maka $b \in N$ padahal di atas diketahui $b \notin N$, sehingga terjadi kontradiksi. Oleh karena itu haruslah $c \neq e$, sehingga ada $c \in G$ dengan $c = b^m \neq e$ maka $c^p = e$. Jadi terbukti teorema benar untuk $|G|$. ■

3.2. Teorema Sylow

Teorema 3.2.1 (Teorema Sylow I)

Jika G grup dan $|G| = p^n m$ dimana p adalah bilangan prima dan $p \nmid m$ maka G mempunyai subgrup dengan order p^n .

Bukti :

- Langkah 1.

Jika $n=0$ maka G mempunyai subgrup dengan order 1 sehingga subgrup dari G tersebut adalah $\{e\}$.

- Langkah 2.

Untuk $n \geq 1$ akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi pada $|G|$ dengan mengasumsikan teorema benar untuk semua subgrup H dari G sedemikian sehingga $|H| < |G|$. Ambil sebarang subgrup H dari G dimana $H \neq G$ dan $|H| < |G|$ akan ditunjukkan teorema benar untuk $|G|$.

i). Jika $p^n \mid |H|$ maka menurut hipotesis induksi H mempunyai subgrup K yang berorder p^n . Kita tahu bahwa K subgrup dari H dan H subgrup dari G maka K subgrup dari G juga. Jadi G mempunyai subgrup K yang berorder p^n .

ii). Jika $p^n \nmid |H|$ khususnya $a \notin Z(G)$ maka menurut lemma 3.1.2 $C(a) \neq G$ di lain pihak menurut teorema 2.1.11, $C(a)$ adalah subgrup dari G maka $p^n \nmid |C(a)|$. $C(a)$ adalah subgrup dari G maka menurut teorema Lagrange

$$[G : C(a)] = \frac{|G|}{|C(a)|} \text{ padahal } p \mid |G| \text{ maka } p \mid \frac{|G|}{|C(a)|}.$$

Bentuk kelas-kelas konjugasi untuk G berdasar teorema 3.1.6 jika $z = |Z(G)|$ maka $z \geq 1$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{a \in G} \frac{|G|}{|C(a)|} \\ \Leftrightarrow p^n m &= \sum_{a \in Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} + \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} \\ \Leftrightarrow p^n m &= |Z(G)| + \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} \\ \Leftrightarrow p^n m &= z + \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} \\ \Leftrightarrow z &= p^n m - \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|} \end{aligned}$$

Perhatikan jika $a \notin Z(G)$, $p \mid \frac{|G|}{|C(a)|}$ maka $p \mid \sum_{a \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$ di lain pihak $p \mid p^n m$

maka $p \mid z$ dimana $z = |Z(G)|$ sehingga menurut teorema Cauchy ada $a \in Z(G)$

dengan $|a| = p$. Misalkan $A = \langle a \rangle$ subgrup yang dibangun oleh a maka menurut teorema 2.1.12, $|A| = |\langle a \rangle| = |a| = p$. Untuk $a \in Z(G)$ maka berlaku $ax = xa, \forall x \in G$ sehingga diperoleh $A \triangleleft G$ dan dapat dibentuk $T = G/A$ sehingga menurut teorema 2.3.6 berlaku :

$$|T| = |G/A| = \frac{|G|}{|A|} = \frac{p^n m}{p} = p^{n-1} m$$

Padahal $|T| < |G|$ sehingga menurut hipotesis induksi T mempunyai subgrup M yang berorder p^{n-1} . Di lain pihak menurut teorema korespondensi terdapat P yaitu subgrup dari G sedemikian sehingga $P \supset A$ dan $P/A = M$ maka :

$$|P/A| = |M| \Leftrightarrow \frac{|P|}{|A|} = |M| \Leftrightarrow |P| = |M||A| = p^{n-1} p = p^n$$

dengan demikian maka P adalah subgrup dari G yang berorder p^n . Padahal telah diasumsikan bahwa G tidak memuat subgrup dengan order p^n sehingga terjadi kontradiksi. Jadi dapat disimpulkan bahwa jika G grup berhingga dan $|G| = p^n m$ dimana p adalah bilangan prima dan $p \nmid m$ maka G mempunyai subgrup dengan order p^n . ■

Definisi 3.2.1

Jika G adalah grup berhingga yang berorder $p^n m$, dimana $p \nmid m$ dan p bilangan prima maka subgrup dari G yang berorder p^n disebut *p-subgrup Sylow* dari G .

Teorema 3.2.2

Misalkan A dan B subgrup dari G , jika didefinisikan relasi " $\sim$ " dalam G yaitu untuk $x, y \in G$, $x \sim y$ bila dan hanya bila $y = axb$, untuk suatu $a \in A$ dan $b \in B$ maka relasi " $\sim$ " merupakan relasi ekuivalensi dalam G .

Bukti :

- i). Relasi " $\sim$ " bersifat refleksif sebab A dan B subgrup dari G maka $e \in A$, $e \in B$ dan $x = exe$ berarti $x \sim x$.
- ii). Diketahui $x \sim y$ maka untuk suatu $a \in A$ dan $b \in B$ berlaku $y = axb$. Akan ditunjukkan $y \sim x$. Perhatikan bahwa $a \in A$ dan $b \in B$, A dan B subgrup maka $a^{-1} \in A$ dan $b^{-1} \in B$.

$$\Leftrightarrow y = axb$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}y = a^{-1}axb$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}y = xb$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}y b^{-1} = x b b^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}y b^{-1} = x$$

sehingga diperoleh $a^{-1}y b^{-1} = x$ untuk $a^{-1} \in A$ dan $b^{-1} \in B$. Jadi $y \sim x$ sehingga sifat simetris dipenuhi.

- iii). Diketahui $x \sim y$ dan $y \sim z$ maka berlaku $y = axb$ dan $z = cyd$ untuk suatu $a, c \in A$ dan $b, d \in B$. Akan ditunjukkan bahwa $x \sim z$.

$$z = cyd$$

$$\Leftrightarrow z = c(axb)d$$

$$\Leftrightarrow z = (ca)x(bd) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$a, c \in A$ dan $b, d \in B$ di lain pihak A dan B subgrup maka $ac \in A$ dan $bd \in B$, sehingga $x \sim z$. Jadi sifat transitif dipenuhi.

Dari hasil (i), (ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa relasi " $\sim$ " merupakan relasi ekuivalensi pada G . ■

Jika A dan B subgrup dari G maka kelas ekuivalensi dari $x \in G$ adalah $AxB = \{axb \mid a \in A, b \in B\}$ yang membentuk partisi dalam G . Himpunan AxB disebut juga koset ganda dari A, B dalam G .

Teorema 3.2.3

Jika B subgrup berhingga dari G maka untuk setiap $x \in G$ berlaku :

- xBx^{-1} subgrup dari G
- $|xBx^{-1}| = |B|$

Bukti :

a). Akan dibuktikan bahwa xBx^{-1} subgrup dari G .

i). $xBx^{-1} \neq \emptyset$ sebab untuk $e \in B$, $xex^{-1} = xx^{-1} = e$. Jadi $e \in xBx^{-1}$.

ii). Akan ditunjukkan sifat tertutup dipenuhi dalam xBx^{-1} . Ambil sebarang

$u, v \in xBx^{-1}$ maka untuk $b_1, b_2 \in B$, $u = xb_1x^{-1}$ dan $v = xb_2x^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 uv &= (xb_1x^{-1})(xb_2x^{-1}) \\
 &= xb_1(x^{-1}x)b_2x^{-1} && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= xb_1eb_2x^{-1} \\
 &= x(b_1b_2)x^{-1} \\
 &= xb_3x^{-1} && (b_3 = b_1b_2 \in B)
 \end{aligned}$$

Jadi $uv \in xBx^{-1}$ berarti sifat tertutup dipenuhi .

iii). Ambil sebarang $w \in xBx^{-1}$ maka untuk suatu $b \in B$, $w = xbx^{-1}$, akan ditunjukkan bahwa $w^{-1} \in xBx^{-1}$. Untuk $w = xbx^{-1}$ maka

$$\begin{aligned} w^{-1} &= (xbx^{-1})^{-1} \\ &= ((xb)x^{-1})^{-1} && \text{(sifat assosiatif)} \\ &= (x^{-1})^{-1}(xb)^{-1} && \text{(teorema 2.1.1(c))} \\ &= xb^{-1}x^{-1}, \quad \text{untuk suatu } b^{-1} \in B && \text{(teorema 2.1.1(c))} \end{aligned}$$

Jadi $w^{-1} = xb^{-1}x^{-1}$, untuk suatu $b^{-1} \in B$ berarti $w^{-1} \in xBx^{-1}$.

Dari hasil (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa xBx^{-1} subgrup dari G .

b). Akan ditunjukkan $|xBx^{-1}| = |B|$, yaitu akan diperlihatkan bahwa ada pemetaan bijektif dari B ke xBx^{-1} . Bentuk suatu pemetaan $\pi : B \rightarrow xBx^{-1}$ sehingga untuk setiap $b \in B$, $\pi(b) = xbx^{-1}$.

i). Akan ditunjukkan bahwa π terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang

$b_1, b_2 \in B$ dengan $b_1 = b_2$.

$$\begin{aligned} &b_1 = b_2 \\ \Leftrightarrow &xb_1 = xb_2 \\ \Leftrightarrow &xb_1x^{-1} = xb_2x^{-1} \\ \Leftrightarrow &\pi(b_1) = \pi(b_2) \end{aligned}$$

Jadi π terdefinisi dengan baik.

ii). Akan ditunjukkan bahwa π injektif. Ambil sebarang $b_1, b_2 \in B$ dengan $\pi(b_1) = \pi(b_2)$ sehingga akan diperoleh :

$$\pi(b_1) = \pi(b_2)$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow xb_1x^{-1} = xb_2x^{-1} \\
 &\Leftrightarrow (xb_1x^{-1})x = (xb_2x^{-1})x \\
 &\Leftrightarrow (xb_1)(x^{-1}x) = (xb_2)(x^{-1}x) \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &\Leftrightarrow (xb_1)e = (xb_2)e \\
 &\Leftrightarrow xb_1 = xb_2 \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}xb_1 = x^{-1}xb_2 \\
 &\Leftrightarrow b_1 = b_2
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa π injektif.

iii). Akan ditunjukkan bahwa π surjektif. Ambil sebarang $w \in xBx^{-1}$ maka untuk suatu $b \in B$, $w = xbx^{-1}$. Jadi ada $b \in B$ sedemikian sehingga $\pi(b) = xbx^{-1} = w$, sehingga terbukti bahwa π surjektif.

Dari (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa terdapat pemetaan bijektif dari B ke xBx^{-1} . ■

Teorema 3.2.4

Jika A dan B subgrup berhingga dari G maka $|AxB| = |AxBx^{-1}|$.

Bukti :

Akan ditunjukkan $|AxB| = |AxBx^{-1}|$, yaitu akan diperlihatkan bahwa terdapat pemetaan bijektif dari AxB ke $AxBx^{-1}$.

Bentuk suatu pemetaan $\pi : AxB \rightarrow AxBx^{-1}$ dengan aturan $\pi(axb) = axbx^{-1}$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$.

i). Akan ditunjukkan bahwa π terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $u, v \in AxB$ dengan $u = v$ maka $u = axb$ dan $v = cxd$ untuk $a, c \in A$ dan $b, d \in B$.

$$u = v$$

$$\Leftrightarrow axb = cxd$$

$$\Leftrightarrow axbx^{-1} = cxdx^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \pi(axb) = \pi(cxd)$$

Jadi π terdefinisi dengan baik.

- ii). Akan ditunjukkan bahwa π injektif. Ambil sebarang $u, v \in AxB$ maka $u = axb$ dan $v = cxd$ untuk $a, c \in A$ dan $b, d \in B$ sedemikian sehingga $\pi(axb) = \pi(cxd)$ sehingga akan diperoleh :

$$\pi(axb) = \pi(cxd)$$

$$\Leftrightarrow axbx^{-1} = cxdx^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (axbx^{-1})x = (cxdx^{-1})x$$

$$\Leftrightarrow (axb)(x^{-1}x) = (cxd)(x^{-1}x) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$\Leftrightarrow (axb)e = (cxd)e$$

$$\Leftrightarrow axb = cxd$$

Jadi terbukti bahwa π injektif.

- iii). Akan ditunjukkan bahwa π surjektif. Ambil sebarang $w \in AxBx^{-1}$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$ maka $w = axbx^{-1}$ sehingga pasti ada $axb \in AxB$ sedemikian sehingga $\pi(axb) = axbx^{-1} = w$. Jadi terbukti bahwa π surjektif.

Dari (i),(ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa terdapat pemetaan bijektif dari AxB ke $AxBx^{-1}$. Jadi $|AxB| = |AxBx^{-1}|$. ■

Teorema 3.2.5

Jika A dan B subgrup berhingga dari G maka $|AxB| = \frac{|A||B|}{|A \cap xBx^{-1}|}$.

Bukti :

Diketahui A dan B subgrup berhingga dari G dan menurut teorema 2.3.2, xBx^{-1} subgrup dari G .

$$|AxB| = |AxBx^{-1}| \quad (\text{teorema 3.2.4})$$

$$= \frac{|A||xBx^{-1}|}{|A \cap xBx^{-1}|} \quad (\text{teorema 2.2.9})$$

$$= \frac{|A||B|}{|A \cap xBx^{-1}|} \quad (\text{teorema 3.2.3})$$

Jadi terbukti bahwa $|AxB| = \frac{|A||B|}{|A \cap xBx^{-1}|}$. ■

Teorema 3.2.6 (Teorema Sylow II)

Jika G grup berhingga $p^n \mid |G|$ dan $p^{n+1} \nmid |G|$ maka dua subgrup dari G yang berorder p^n saling konjugat.

Bukti :

Misalkan A dan B subgrup berhingga dari G , dimana $|A| = |B| = p^n$.

Akan ditunjukkan bahwa A dan B saling berkonjugat, yaitu untuk suatu $g \in G$, $A = gBg^{-1}$. Diketahui G grup berhingga sehingga G dapat dinyatakan sebagai gabungan koset-koset ganda dari A, B dalam G yaitu $G = \bigcup_{x \in G} AxB$. Di lain pihak



menurut teorema 2.3.5, $|AxB| = \frac{|A||B|}{|A \cap xBx^{-1}|}$. Andaikan $A \neq xBx^{-1}$, $\forall x \in G$. Misalkan

$|A \cap xBx^{-1}| = p^m$. $A \cap xBx^{-1}$ subgrup dari A dan juga subgrup dari xBx^{-1} , sedangkan $|A| = |B| = |AxBx^{-1}| = p^n$, maka $m < n$. Kita peroleh :

$$|AxB| = \frac{|A||B|}{|A \cap xBx^{-1}|} = \frac{p^n p^n}{p^m} = \frac{p^{2n}}{p^m}$$

Kita telah mengetahui bahwa $m < n$ sehingga

$$m < n \Leftrightarrow m+1 \leq n \Leftrightarrow m+1 \leq 2n-n \Leftrightarrow 2n-m \geq n+1 \Leftrightarrow n+1 \leq 2n-m$$

Perhatikan bahwa $n+1 \leq 2n-m$ maka $p^{n+1} \mid p^{2n-m}$ sehingga $p^{n+1} \mid |AxB|$, sedangkan untuk $G = \bigcup_{x \in G} AxB$ mempunyai order $|G| = \sum |AxB|$ sehingga $p^{n+1} \mid |G|$, padahal diketahui bahwa $p^{n+1} \nmid |G|$ sehingga terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $A = gBg^{-1}$, untuk suatu $g \in G$. ■

Teorema 3.2.7

Diberikan P suatu p -subgrup Sylow dari grup berhingga G .

Jika $N_G(P) \leq H \leq G$ maka $H = N_G(H)$.

Bukti :

Akan diperlihatkan bahwa $H \subseteq N_G(H)$ dan $N_G(H) \subseteq H$.

i). Ambil sebarang $x \in H$ akan ditunjukkan bahwa $x \in N_G(H)$ yaitu dengan

memperlihatkan bahwa $xH = Hx$, $\forall x \in H$.

- Ambil sebarang $a \in xH$ maka ada $h_1 \in H$ sedemikian sehingga $a = xh_1$. Akan diperlihatkan bahwa $a \in Hx$. Perhatikan bahwa :

$$a = xh_1 \in H \Leftrightarrow ax^{-1} = xh_1x^{-1} \in H$$

berarti $(ax^{-1})x \in Hx$ padahal $(ax^{-1})x = a(x^{-1}x) = ae = a$. Jadi $a \in Hx$.

- Ambil sebarang $b \in Hx$ maka ada $h_2 \in H$ sedemikian sehingga $b = h_2x$. Akan diperlihatkan bahwa $b \in xH$. Perhatikan bahwa :

$$b = h_2x \in H \Leftrightarrow x^{-1}b = x^{-1}h_2x \in H$$

berarti $x(x^{-1}b) \in xH$ padahal $x(x^{-1}b) = (xx^{-1})b = eb = b$. Jadi $b \in xH$.

Perhatikan bahwa dari hasil di atas diperoleh bahwa $xH = Hx$, $\forall x \in H$ padahal $xH = Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} = H$, $\forall x \in H$. Jadi terbukti bahwa $x \in N_G(H)$.

- ii). Ambil sebarang $x \in N_G(H)$, karena P subgrup dari H dan H normal dalam $N_G(H)$ maka xPx^{-1} subgrup dari H . Perhatikan bahwa P dan xPx^{-1} adalah p -subgrup Sylow dari H . Berdasarkan teorema 3.2.3.(b), $|xPx^{-1}| = |P|$ sehingga berdasarkan teorema Sylow II, xPx^{-1} berkonjugat dengan P dalam H . Akibatnya ada $h \in H$ sehingga berlaku :

$$\begin{aligned} h(xPx^{-1})h^{-1} &= P \\ \Leftrightarrow (hx)P(x^{-1}h^{-1}) &= P \\ \Leftrightarrow (hx)P(hx)^{-1} &= P \quad (\text{teorema 2.1.1.(d)}) \end{aligned}$$

hal ini menunjukkan bahwa $hx \in H$. Perhatikan bahwa $h \in H$ maka $h^{-1} \in H$ sehingga diperoleh $h^{-1}(hx) \in H \Leftrightarrow (h^{-1}h)x \in H \Leftrightarrow ex \in H \Leftrightarrow x \in H$.

Jadi $x \in H$ sehingga terbukti $N_G(H) \subseteq H$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $N_G(H) = H$. ■

BAB IV

GRUP NILPOTEN

4.1. Barisan Pusat Naik

Pada bab II yang lalu telah didefinisikan pusat dari grup G yaitu $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$. Kita akan mendefinisikan tentang barisan pusat naik, tetapi sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu lemma - lemma dibawah ini.

Lemma 4.1.1

Jika $Z(G)$ adalah pusat dari grup G maka $Z(G)$ adalah subgrup normal dalam G .

Bukti :

Pada teorema 2.1.15, telah dibuktikan bahwa $Z(G)$ subgrup dari G . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $Z(G) \triangleleft G$. Ambil sebarang $a \in Z(G)$ dan $x \in G$. Oleh karena $Z(G)$ subgrup dari G maka jelas bahwa $a \in G$ sehingga $xax^{-1} \in G$. Untuk sebarang $g \in G$ berlaku :

$$\begin{aligned}
 (xax^{-1})g &= (xa)(x^{-1}g) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (ax)(x^{-1}g) && (a \in Z(G)) \\
 &= a(xx^{-1})g && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= aeg \\
 &= ag \\
 &= ga \\
 &= g(ae) \\
 &= g(axx^{-1})
 \end{aligned}$$

$$= g((ax)x^{-1}) \quad (\text{sifat assosiatif})$$

$$= g((xa)x^{-1}) \quad (a \in Z(G))$$

$$= g(xax^{-1}) \quad (\text{sifat assosiatif})$$

Kita peroleh $(xax^{-1})g = g(xax^{-1})$ sehingga $xax^{-1} \in Z(G)$. Jadi menurut teorema 2.3.1,

$$Z(G) \triangleleft G.$$

■

Sekarang kita akan mendefinisikan barisan pusat naik. Sebelumnya kita akan mendefinisikan $Z_i(G)$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. Untuk suatu grup G didefinisikan bahwa :

$$Z_0(G) = \{e\}$$

$$Z_1(G) = Z(G)$$

Langkah pertama kita akan menentukan $Z_2(G)$. Misalkan G grup dan $Z(G)$ pusat dari G . Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $Z(G) \triangleleft G$ maka berdasarkan teorema 2.3.5 dapat kita bentuk grup faktor $G/Z(G)$ yang memiliki pusat $Z(G/Z(G))$.

Bentuk proyeksi natural : $\phi : G \rightarrow G/Z(G)$ dimana $G/Z(G) = \{gZ(G) \mid g \in G\}$ sehingga $\phi(g) = gZ(G)$. $Z_2(G)$ adalah bayangan dari $Z(G/Z(G))$ dibawah proyeksi natural $\phi : G \rightarrow G/Z(G)$ sehingga $Z_2(G) = \phi^{-1} [Z(G/Z(G))]$.

$$Z(G/Z(G)) = \{bZ(G) \in G/Z(G) \mid aZ(G)bZ(G) = bZ(G)aZ(G), \forall aZ(G) \in G/Z(G)\}$$

$$Z_2(G) = \{g \in G \mid \phi(g) \in Z(G/Z(G))\}$$

$$= \{g \in G \mid gZ(G) \in Z(G/Z(G))\}$$

$$= \{g \in G \mid gZ(G)aZ(G) = aZ(G)gZ(G), \forall aZ(G) \in G/Z(G)\}$$

$$= \{g \in G \mid gaZ(G) = agZ(G), \forall a \in G\}$$

Kita peroleh bahwa $Z_2(G) = \varphi^{-1}[Z(G/Z(G))] = \{g \in G \mid gaZ(G) = agZ(G)\}, \forall a \in G$.

Berdasarkan teorema 2.4.6, $\varphi^{-1}[Z(G/Z(G))] = Z_2(G)$ adalah subgrup normal dari G .

Selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa $Z_1(G)$ subgrup dari $Z_2(G)$ dengan lemma berikut ini.

Lemma 4.1.2

Jika G grup maka $Z_1(G)$ subgrup dari $Z_2(G)$.

Bukti :

Ambil sebarang $a \in Z_1(G)$ maka $ax = xa, \forall x \in G$. Oleh karena $ax = xa$ maka $axZ(G) = xaZ(G), \forall x \in G$. Jadi $a \in Z_2(G)$. Kita dapat menyimpulkan bahwa $Z_1(G) \subseteq Z_2(G)$. Kita telah membuktikan pada teorema 2.1.15 bahwa $Z(G)$ subgrup dari G terhadap suatu operasi biner tertentu, sehingga $Z_1(G)$ subgrup dari $Z_2(G)$ terhadap operasi biner yang sama. ■

Langkah pertama yang telah kita kerjakan menghasilkan suatu kesimpulan bahwa $Z_2(G) \triangleleft G$ dan $Z_1(G)$ subgrup dari $Z_2(G)$. Langkah selanjutnya kita akan menentukan $Z_3(G)$. $Z_2(G) \triangleleft G$ maka berdasarkan teorema 2.3.5 dapat kita bentuk grup faktor $G/Z_2(G)$ yang memiliki pusat $Z(G/Z_2(G))$.

Bentuk proyeksi natural : $\varphi : G \rightarrow G/Z_2(G)$ maka $\varphi(g) = gZ_2(G)$. $Z_3(G)$ adalah bayangan dari $Z(G/Z_2(G))$ dibawah proyeksi natural $\varphi : G \rightarrow G/Z_2(G)$ sehingga $Z_3(G) = \varphi^{-1}[Z(G/Z_2(G))]$.

$$Z_3(G) = \varphi^{-1}[Z(G/Z_2(G))]$$

$$= \{g \in G \mid \varphi(g) \in Z(G/Z_2(G))\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{g \in G \mid gZ_2(G) \in Z(G/Z_2(G))\} \\
 &= \{g \in G \mid gZ_2(G) aZ_2(G) = aZ_2(G) gZ_2(G), \forall aZ_2(G) \in G/Z_2(G)\} \\
 &= \{g \in G \mid gaZ_2(G) = agZ_2(G), \forall a \in G\}
 \end{aligned}$$

$Z(G/Z_2(G))$ adalah subgrup normal $G/Z_2(G)$ maka menurut teorema 2.4.6, $\phi^{-1}[Z(G/Z_2(G))] = Z_3(G)$ adalah subgrup normal dalam G . Analog dengan pembuktian lemma 4.1.2 akan kita peroleh $Z_2(G)$ subgrup dari $Z_3(G)$.

Selanjutnya untuk menentukan $Z_4(G), Z_5(G), \dots, Z_i(G), \dots$ analog dengan langkah-langkah yang telah kita lakukan di atas, sehingga kita akan memperoleh subgrup-subgrup normal dari G yaitu :

$$\begin{aligned}
 Z_0(G) &= \{e\} \\
 Z_1(G) &= Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}. \\
 Z_2(G) &= \{g \in G \mid gaZ(G) = agZ(G), \forall a \in G\} \\
 Z_3(G) &= \{g \in G \mid gaZ_2(G) = agZ_2(G), \forall a \in G\} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Z_i(G) &= \{g \in G \mid gaZ_{i-1}(G) = agZ_{i-1}(G), \forall a \in G\}.
 \end{aligned}$$

Sebelum didefinisikan secara formal tentang barisan pusat naik akan dibahas beberapa lemma berikut ini :

Lemma 4.1.3

Jika G grup dan $Z_i(G)$ adalah pusat ke i dari G maka $Z_i(G) \triangleleft Z_{i+1}(G)$.

Bukti :

Ambil sebarang $a \in Z_i(G)$ dan sebarang $x \in Z_{i+1}(G)$. Oleh karena $Z_i(G)$ subgrup dari $Z_{i+1}(G)$ maka jelas bahwa $xax^{-1} \in Z_{i+1}(G)$. Akan ditunjukkan bahwa $xax^{-1} \in Z_i(G)$.

Perhatikan bahwa $Z_{i+1}(G)$ subgrup dari G maka $xax^{-1} \in G$ padahal $Z_{i+1}(G) \triangleleft G$ sehingga dapat dibentuk $G/Z_{i+1}(G)$ berarti $xax^{-1}Z_{i+1}(G) \in G/Z_{i+1}(G)$. Untuk sebarang $gZ_{i+1}(G) \in G/Z_{i+1}(G)$ berlaku :

$$\begin{aligned}
 xax^{-1}Z_{i+1}(G)gZ_{i+1}(G) &= (xax^{-1})gZ_{i+1}(G) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (xa)(x^{-1}g)Z_{i+1}(G) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= (ax)(x^{-1}g)Z_{i+1}(G) && (a \in Z_i(G)) \\
 &= a(xx^{-1})gZ_{i+1}(G) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= aegZ_{i+1}(G) \\
 &= agZ_{i+1}(G) \\
 &= gaZ_{i+1}(G) && (a \in Z_i(G)) \\
 &= g(ae)Z_{i+1}(G) \\
 &= g(a(xx^{-1}))Z_{i+1}(G) \\
 &= g((ax)x^{-1})Z_{i+1}(G) && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= g((xa)x^{-1})Z_{i+1}(G) && (a \in Z_i(G)) \\
 &= g(xax^{-1})Z_{i+1}(G) && \text{(sifat asosiatif)}
 \end{aligned}$$

Kita peroleh $(xax^{-1})gZ_{i+1}(G) = g(xax^{-1})Z_{i+1}(G)$ sehingga $xax^{-1} \in Z_i(G)$.

Jadi menurut teorema 2.3.1, $Z_i(G) \triangleleft Z_{i+1}(G)$. ■

Lemma 4.1.4

Jika G grup dan $Z_i(G)$ adalah pusat ke i dari G maka

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G)).$$

Bukti :

Akan ditunjukkan $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$ yaitu dengan memperlihatkan bahwa $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) \subseteq Z(G/Z_{i-1}(G))$ dan $Z(G/Z_{i-1}(G)) \subseteq Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$.

i). Ambil sebarang $aZ_{i-1}(G) \in Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ karena $a \in Z_i(G)$ maka berlaku,

$$axZ_{i-1}(G) = xaZ_{i-1}(G), \quad \forall x \in G \Leftrightarrow aZ_{i-1}(G) xZ_{i-1}(G) = xZ_{i-1}(G) aZ_{i-1}(G),$$

$$\forall xZ_{i-1}(G) \in G/Z_{i-1}(G) \text{ berarti } aZ_{i-1}(G) \in Z(G/Z_{i-1}(G)). \text{ Jadi dapat}$$

disimpulkan bahwa $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) \subseteq Z(G/Z_{i-1}(G))$.

ii). Akan ditunjukkan bahwa $Z(G/Z_{i-1}(G)) \subseteq Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$. Ambil sebarang

$$bZ_{i-1}(G) \in Z(G/Z_{i-1}(G)) \text{ berarti } bZ_{i-1}(G) xZ_{i-1}(G) = xZ_{i-1}(G) bZ_{i-1}(G),$$

$$\forall xZ_{i-1}(G) \in G/Z_{i-1}(G) \Leftrightarrow bxZ_{i-1}(G) = xbZ_{i-1}(G), \quad \forall x \in G \text{ maka } b \in Z_i(G).$$

Oleh karena $Z_{i-1}(G) \triangleleft Z_i(G)$ maka dapat dibentuk $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ sehingga

$$bZ_{i-1}(G) \in Z_i(G)/Z_{i-1}(G). \text{ Jadi } Z(G/Z_{i-1}(G)) \subseteq Z_i(G)/Z_{i-1}(G). \quad \blacksquare$$

Berdasarkan lemma-lemma dan pembahasan di atas dapat disimpulkan secara umum bahwa $Z_i(G) = \varphi^{-1} [Z(G/Z_{i-1}(G))]$ normal dalam G dan $Z_{i-1}(G)$ subgrup dari $Z_i(G)$. $Z_i(G)$ memuat $Z_{i-1}(G)$ sedemikian sehingga $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$. Akibatnya kita peroleh suatu barisan pusat naik. Untuk mempermudah penulisan

maka subgrup disimbolkan dengan “ $\leq$ ” dan subgrup sejati disimbolkan dengan “ $<$ ”.

Barisan pusat naik disajikan sebagai berikut :

$$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq \dots \leq Z_m(G) \leq \dots$$

Selanjutnya barisan pusat naik akan dituangkan dalam definisi secara formal berikut ini :

Definisi 4.1.1

Diberikan suatu grup G , didefinisikan secara induktif subgrup-subgrup dari G sebagai berikut :

$$Z_0(G) = \{e\}$$

$$Z_1(G) = Z(G)$$

dan $Z_i(G)$ adalah subgrup normal dalam G yang memuat $Z_{i-1}(G)$ sedemikian

sehingga $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$. $Z_i(G)$ adalah bayangan dari

$Z(G/Z_{i-1}(G))$ dibawah proyeksi natural $\varphi : G \rightarrow G/Z_{i-1}(G)$ sehingga

$Z_i(G) = \varphi^{-1} [Z(G/Z_{i-1}(G))]$. Subgrup normal - subgrup normal yang memenuhi

$$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq \dots$$

disebut **barisan pusat naik**.

4.2. Grup Nilpoten

Definisi 4.2.1

Perhatikan barisan pusat naik $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq \dots$ suatu

grup G disebut **grup nilpoten** jika terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga

$Z_n(G) = G$, dan bilangan bulat positif terkecil n disebut **kelas nilpoten** dari G .

Teorema 4.2.1

Jika G Abel maka G adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten 1.

Bukti :

Diketahui G Abel akan ditunjukkan bahwa G adalah grup nilpoten. Oleh karena G Abel maka menurut teorema 2.1.16, $Z(G)=G$. Jadi G adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten 1. ■

Teorema 4.2.3

Jika H subgrup dari grup nilpoten G dengan kelas nilpoten n maka H adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten $\leq n$.

Bukti :

Diketahui H adalah subgrup dari grup nilpoten G , karena G grup nilpoten maka terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga berlaku : $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G$, dimana n adalah kelas nilpoten dari G . Akan ditunjukkan bahwa H adalah grup nilpoten.

- i). Jika $H=G$ maka jelas bahwa H adalah grup nilpoten.
- ii). Jika $H < G$ (H subgrup sejati dari G) akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Langkah 1.

Akan dibuktikan bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = 0$. Kita tahu bahwa $Z_0(H) = Z_0(G) = \{e\}$, karena H subgrup dari G . Jadi terbukti bahwa $Z_0(H) \subset Z_0(G)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = 0$.

- Langkah 2.

Andaikan $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = k$, berarti $Z_k(H) \subset Z_k(G)$.

Akan dibuktikan bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = k+1$. Ambil sebarang $p \in Z_{k+1}(H)$ berarti dipenuhi $paZ_k(H) = apZ_k(H), \forall a \in H$, akan ditunjukkan bahwa $p \in Z_{k+1}(G)$ sedemikian sehingga dipenuhi $paZ_k(G) = apZ_k(G), \forall a \in G$. Perhatikan bahwa $paZ_k(H) = apZ_k(H)$ maka menurut teorema 2.2.1, $(pa)^{-1}(ap) \in Z_k(H)$, di lain pihak berdasarkan pengandaian $Z_k(H) \subset Z_k(G)$ berarti $(pa)^{-1}(ap) \in Z_k(G)$ sehingga menurut teorema 2.2.1, $paZ_k(G) = apZ_k(G), \forall a \in G$. Jadi terbukti bahwa $p \in Z_{k+1}(G)$.

Dari langkah 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Di lain pihak telah dibuktikan bahwa $Z_i(H) \subset Z_i(G)$ benar untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, berarti $Z_n(H) \subset Z_n(G), \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Perhatikan bahwa G grup nilpoten maka $Z_n(H) \subset Z_n(G) = G$. Perhatikan juga bahwa $Z_n(H) \subset H$ dan $H \subset G$, sehingga pasti ada $m \in \mathbb{Z}^+$, dimana $m \leq n$ sedemikian sehingga $Z_m(H) = H$.

Jadi terbukti bahwa H adalah grup nilpoten. ■

Teorema 4.2.3

Jika G adalah grup nilpoten dan $G \neq \{e\}$ maka $Z(G) \neq \{e\}$.

Bukti :

Misalkan G adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten n maka terdapat suatu barisan $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G$. Andaikan $Z(G) = \{e\}$. Selanjutnya akan ditentukan $Z_2(G), Z_3(G), \dots, Z_n(G)$.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan induksi matematika akan diperoleh bahwa $Z_i(G) = \{e\}$ untuk $i = 2, 3, 4, \dots$

- Langkah 1.

Bentuk suatu pemetaan $\varphi : G \rightarrow G/Z(G)$.

Akan ditunjukkan bahwa $Z_2(G) = \{e\}$ benar untuk $i = 2$.

$$\begin{aligned} Z_2(G) &= \varphi^{-1}[Z(G/Z(G))] \\ &= \{g \in G \mid \varphi(g) \in Z(G/Z(G))\} \\ &= \{g \in G \mid gZ(G) \in Z(G/Z(G))\} \\ &= \{g \in G \mid gZ(G)xZ(G) = xZ(G)gZ(G), \forall xZ(G) \in G/Z(G)\} \\ &= \{g \in G \mid gxZ(G) = xgZ(G), \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} \in Z(G), \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} \in \{e\}, \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} = e, \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\} \\ &= \{e\} \end{aligned}$$

- Langkah 2.

Andaikan bahwa $Z_i(G) = \{e\}$ benar untuk $i = k$ berarti $Z_k(G) = \{e\}$. Akan ditunjukkan bahwa $Z_{k+1}(G) = \{e\}$ benar untuk $i = k+1$.

Bentuk suatu pemetaan $\varphi : G \rightarrow G/Z_k(G)$.

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(G) &= \varphi^{-1}[Z(G/Z_k(G))] \\ &= \{g \in G \mid \varphi(g) \in Z(G/Z_k(G))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ g \in G \mid gZ_k(G) \in Z(G/Z_k(G)) \} \\
 &= \{ g \in G \mid gZ_k(G)xZ_k(G) = xZ_k(G)gZ_k(G), \forall xZ_k(G) \in G/Z_k(G) \} \\
 &= \{ g \in G \mid gxZ_k(G) = xgZ_k(G), \forall x \in G \} \\
 &= \{ g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} \in Z_k(G), \forall x \in G \} \\
 &= \{ g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} \in \{e\}, \forall x \in G \} \\
 &= \{ g \in G \mid (gx)(xg)^{-1} = e, \forall x \in G \} \\
 &= \{ g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G \} \\
 &= \{e\}
 \end{aligned}$$

berarti $Z_i(G) = \{e\}$ benar untuk $i = k+1$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $Z_i(G) = \{e\}$, benar untuk $i = 2, 3, \dots$

Oleh karena itu berdasarkan pembuktian di atas yaitu $Z_n(G) = \{e\} \neq G, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga dapat disimpulkan bahwa G bukan merupakan grup nilpoten sehingga terjadi kontradiksi.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $Z(G) \neq \{e\}$. ■

Definisi 4.2.2

Suatu subgrup maksimal dari G adalah subgrup sejati M dari G sedemikian sehingga tidak ada subgrup H yang memenuhi $M < H < G$.

Definisi 4.2.3

Suatu subgrup A dari grup G disebut subgrup minimal, jika $A \neq \{e\}$ dan tidak ada subgrup H dari G yang memenuhi $\{e\} < H < A$.

Teorema 4.2.4

Jika G adalah grup nilpoten dan H adalah subgrup dari G , $H \neq \{e\}$ maka $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

Bukti :

Misalkan G adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten n maka terdapat suatu barisan $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G$. Oleh karena H adalah subgrup dari G maka menurut teorema 4.2.2 H adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten $m \leq n$ sedemikian sehingga terdapat barisan $\{e\} = Z_0(H) \leq Z_1(H) \leq \dots \leq Z_m(H) = H$. Perhatikan bahwa H grup nilpoten maka menurut teorema 4.2.3, $Z(H) \neq \{e\}$, sehingga terdapat $a \neq e \in Z(H)$, di lain pihak $Z(H)$ subgrup dari H maka $a \in H$. Perhatikan juga bahwa berdasar pembuktian teorema 4.2.2, $Z(H) \leq Z(G)$ sehingga $a \in Z(G)$. Oleh karena $a \in H$ dan $a \in Z(G)$ maka $a \in H \cap Z(G)$.
Jadi dapat disimpulkan bahwa $H \cap Z(G) \neq \{e\}$. ■

Teorema 4.2.5

Jika A minimal normal subgrup dari grup nilpoten G maka A termuat dalam $Z(G)$.

Bukti :

Berdasarkan teorema 4.2.4, $A \cap Z(G) \neq \{e\}$. Perhatikan bahwa $A \cap Z(G) \leq A$ berarti $A \cap Z(G) < A$ atau $A \cap Z(G) = A$. Oleh karena A adalah minimal subgrup maka haruslah $A \cap Z(G) = A$ berarti $A \subseteq Z(G)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa A termuat dalam $Z(G)$. ■

Teorema 4.2.6

Setiap p -grup berhingga adalah nilpoten.

Bukti :

Misalkan G adalah p -grup berhingga dengan order p^n maka menurut teorema 3.1.6,

$Z(G) \neq \{e\}$ atau $|Z(G)| > 1$. Misalkan untuk $i \in \mathbb{Z}^+$, $Z_i(G) < G$ maka :

$$Z(G/Z_i(G)) \neq Z_i(G)$$

$$\Leftrightarrow |Z(G/Z_i(G))| > 1$$

$$\Leftrightarrow |Z_{i+1}(G)/Z_i(G)| > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|Z_{i+1}(G)|}{|Z_i(G)|} > 1$$

$$\Leftrightarrow |Z_{i+1}(G)| > |Z_i(G)|$$

$$\Leftrightarrow |Z_i(G)| < |Z_{i+1}(G)|$$

Oleh karena G berhingga maka harus ada bilangan i sedemikian sehingga $Z_i(G) = G$ maka G nilpoten. ■

Teorema 4.2.7

Jika H dan K adalah grup nilpoten maka $G = H \times K$ adalah grup nilpoten.

Bukti :

Diketahui H dan K adalah grup nilpoten maka $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga $Z_m(H) = H$ dan $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian hingga $Z_n(K) = K$, dimana m dan n masing-masing adalah kelas nilpoten dari H dan K .

Kasus 1.

Untuk kelas nilpotensi dari H dan K yang sama yaitu $m = n$.

Pembuktian ini akan menggunakan induksi matematika berarti harus dapat ditunjukkan bahwa : $Z_i(G) = Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K)$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$.

- Langkah 1.

Akan ditunjukkan bahwa $Z_i(G) = Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K)$ benar untuk $m=1$.

$$\begin{aligned} Z_1(G) &= Z_1(H \times K) \\ &= \{(h,k) \mid (h,k)(x,y) = (x,y)(h,k), \forall x,y \in H \times K\} \\ &= \{(h,k) \mid (hx,ky) = (xh,yk), \forall x \in H, \forall y \in K\} \\ &= \{(h,k) \mid hx=xh, ky=yk, \forall x \in H, \forall y \in K\} \\ &= \{h \mid hx=xh, \forall x \in H\} \times \{k \mid ky=yk, \forall y \in H\} \\ &= Z(H) \times Z(K) \end{aligned}$$

Jadi $Z_1(G) = Z_1(H \times K) = Z_1(H) \times Z_1(K)$ benar untuk $m=1$.

- Langkah 2.

Andaikan $Z_i(G) = Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K)$ benar untuk $i=m$ berarti $Z_m(G) = Z_m(H \times K) = Z_m(H) \times Z_m(K)$. Akan ditunjukkan $Z_i(G) = Z_i(H) \times Z_i(K)$ benar untuk $i=m+1$. Andaikan $\pi_H : H \rightarrow H/Z_m(H)$ dan $\pi_K : K \rightarrow K/Z_m(K)$ serta $\phi : G \rightarrow G/Z_m(G)$ merupakan proyeksi natural sehingga :

$$\begin{aligned} G = H \times K &\xrightarrow{\pi_H \times \pi_K} (H/Z_m(H)) \times (K/Z_m(K)) \xrightarrow{\phi} \frac{H \times K}{Z_m(H) \times Z_m(K)} \\ &= \frac{H \times K}{Z_m(H \times K)} = G/Z_m(G) \end{aligned}$$

dimana ϕ isomorfisma sehingga :

$$\begin{aligned}
 Z_{m+1}(G) &= \varphi^{-1}[Z(G/Z_m(G))] \\
 &= \pi^{-1}\theta^{-1}[Z(G/Z_m(G))] \\
 &= \pi^{-1}[Z(H/Z_m(H) \times K/Z_m(K))] \\
 &= \pi_H^{-1}[Z(H/Z_m(H))] \times \pi_K^{-1}[Z(K/Z_m(K))] \\
 &= Z_{m+1}(H) \times Z_{m+1}(K)
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $Z_i(G) = Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K)$ benar untuk $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ berarti $Z_m(G) = Z_m(H \times K) = Z_m(H) \times Z_m(K) = H \times K = G$. Oleh karena itu $G = H \times K$ adalah grup nilpoten.

Kasus 2.

Untuk kelas nilpotensi dari H dan K yang tidak sama yaitu $m \neq n$. Misalkan $m < n$, perhatikan bahwa jika H dan K masing-masing adalah grup nilpoten maka berlaku :

$$\{e\} = Z_0(H) \leq Z_1(H) \leq Z_2(H) \leq \dots \leq Z_m(H) = H = Z_{m+1}(H) = \dots = Z_n(H)$$

$$\{e\} = Z_0(K) \leq Z_1(K) \leq Z_2(K) \leq \dots \leq Z_m(K) \leq Z_{m+1}(K) \leq \dots \leq Z_n(K) = K$$

$$Z_m(H \times K) = Z_m(H) \times Z_m(K)$$

$$= H \times Z_m(K)$$

$$Z_{m+1}(H \times K) = Z_{m+1}(H) \times Z_{m+1}(K)$$

$$= H \times Z_{m+1}(K)$$

...

$$Z_n(H \times K) = Z_n(H) \times Z_n(K)$$

$$= H \times Z_n(K)$$

$$= H \times K$$

$$= G$$

Jadi terbukti $Z_n(G) = G$.

Untuk pembuktian $m > n$ analog dengan $m < n$. Berdasarkan kasus 1 dan kasus 2 dapat disimpulkan bahwa $G = H \times K$ adalah grup nilpoten. ■

Lemma 4.2.1

Jika G grup nilpoten dan H subgrup dari G maka $HZ_i(G) \triangleleft HZ_{i+1}(G)$.

Bukti :

- i). Ambil sebarang $x \in HZ_i(G)$ berarti $x = h_1 a_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $a_1 \in Z_i(G)$.
Oleh karena $Z_i(G)$ subgrup dari $Z_{i+1}(G)$ maka $a_1 \in Z_{i+1}(G)$ sehingga $x = h_1 a_1 \in HZ_{i+1}(G)$ berarti $HZ_i(G) \subseteq HZ_{i+1}(G)$. Jadi diperoleh $HZ_i(G)$ subgrup dari $HZ_{i+1}(G)$.
- ii). Ambil sebarang $x \in HZ_i(G)$ dan $y \in HZ_{i+1}(G)$ berarti $x = h_1 a_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $a_1 \in Z_i(G)$ demikian juga $y = h_2 a_2$ untuk suatu $h_2 \in H$ dan $a_2 \in Z_{i+1}(G)$.
Oleh karena $Z_i(G)$ subgrup dari $Z_{i+1}(G)$ dan $a_1 \in Z_i(G)$ maka $a_1 \in Z_{i+1}(G)$.
Oleh karena $a_1 \in Z_{i+1}(G)$ maka berlaku $h_1 a_1 Z_i(G) = a_1 h_1 Z_i(G)$, untuk $h_1 \in H$ demikian juga karena $a_2 \in Z_{i+1}(G)$ maka berlaku $h_2 a_2 Z_i(G) = a_2 h_2 Z_i(G)$, untuk $h_2 \in H$. Perhatikan bahwa :

$$y Z_i(G) x Z_i(G) y^{-1} Z_i(G) = y x y^{-1} Z_i(G)$$

$$= (h_2 a_2)(h_1 a_1)(h_2 a_2)^{-1} Z_i(G)$$

$$= (h_2 a_2)(h_1 a_1)(a_2^{-1} h_2^{-1}) Z_i(G) \quad (\text{teorema 2.1.1(d)})$$

$$= (h_2(a_2 h_1) a_1)(a_2^{-1} h_2^{-1}) Z_i(G) \quad (\text{sifat assosiatif})$$

$$\begin{aligned}
 &= (h_2(h_1a_2)a_1)(a_2^{-1}h_2^{-1})Z_i(G) && (a_2 \in Z_{i+1}(G)) \\
 &= (h_2h_1)(a_2a_1)(a_2^{-1}h_2^{-1})Z_i(G) && (\text{sifat assosiatif}) \\
 &= (h_2h_1)(a_1a_2)(a_2^{-1}h_2^{-1})Z_i(G) && (a_2 \in Z_{i+1}(G)) \\
 &= (h_2h_1)(a_1(a_2a_2^{-1})h_2^{-1})Z_i(G) && (\text{sifat assosiatif}) \\
 &= (h_2h_1)(a_1eh_2^{-1})Z_i(G) \\
 &= (h_2h_1)(a_1h_2^{-1})Z_i(G) \\
 &= (h_2h_1)(h_2^{-1}a_1)Z_i(G) && (a_2 \in Z_{i+1}(G)) \\
 &= (h_2h_1h_2^{-1})a_1Z_i(G) && (\text{sifat assosiatif})
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $xyx^{-1}Z_i(G) = (h_2h_1h_2^{-1})a_1Z_i(G)$ berarti $xyx^{-1} = (h_2h_1h_2^{-1})a_1$ karena $h_2h_1h_2^{-1} \in H$ dan $a_1 \in Z_i(G)$ maka $(h_2h_1h_2^{-1})a_1 \in HZ_i(G)$.

Jadi $xyx^{-1} \in HZ_i(G)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $HZ_i(G) \triangleleft HZ_{i+1}(G)$. ■

Teorema 4.2.8

Diberikan suatu grup berhingga G , misalkan $p_1, p_2, \dots, p_k$ adalah bilangan prima yang berbeda yang membagi setiap ordernya dan misalkan P_i adalah p_i -subgrup Sylow dari G , $1 \leq i \leq k$ maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.

- G nilpoten
- Setiap subgrup dari G normal dalam G .
- Jika $H < G$ maka $H < N_G(H)$.
- Jika M maksimal subgrup dari G maka $M \triangleleft G$.
- $P_i \triangleleft G$, untuk $1 \leq i \leq k$

$$f). G = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_k$$

Bukti :

(a) $\Rightarrow$ (b) Misalkan G grup nilpoten dengan kelas n dan H subgrup dari G maka menurut lemma 4.2.1, $HZ_i(G) \triangleleft HZ_{i+1}(G)$ sehingga dapat dibentuk suatu barisan $H = HZ_0(G) \triangleleft HZ_1(G) \triangleleft HZ_2(G) \triangleleft \dots \triangleleft HZ_n(G) = G$. Oleh karena itu akan diperoleh bahwa $H \triangleleft G$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Diketahui H subgrup sejati dari G maka menurut kondisi (b) $H \triangleleft G$. Oleh karena $H \triangleleft G$ maka menurut teorema 2.3.3, $N_G(H) = G$. Jadi terbukti bahwa H subgrup sejati dari $N_G(H)$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Diketahui M maksimal subgrup dari G . Perhatikan bahwa M adalah subgrup dari G sehingga menurut kondisi (c) $M < N_G(M)$. Oleh karena M adalah maksimal subgrup dari G maka berdasar pada definisi 4.2.3 haruslah $N_G(M) = G$ sehingga menurut teorema 2.3.3, $M \triangleleft G$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Misalkan $P_i = P$, akan ditunjukkan bahwa $P \triangleleft G$. Andaikan P bukan subgrup normal dari G maka menurut teorema 2.3.3 P adalah subgrup sejati dari G yang termuat dalam suatu maksimal subgrup dari G yaitu M , dapat dituliskan $N_G(P) < M < G$ sehingga menurut teorema 3.2.7, $N_G(M) = M$ padahal menurut kondisi (d) $N_G(M) = G$ sehingga terjadi kontradiksi. Jadi terbukti $P_i \triangleleft G$.

(e) $\Rightarrow$ (f) Misalkan $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ dengan p_i prima dan $p_i \neq p_j, i \neq j, n_i > 0$ dan

$|P_i| = p_i^{n_i}, 1 \leq i \leq k$. Menurut kondisi (e) $P_i \triangleleft G$ dan menurut teorema 2.2.8(e)

karena P_i dan P_j masing-masing berorder prima maka $P_i \cap P_j = \{e\}$ sehingga berdasar teorema 2.3.4 $xy=yx, \forall x \in P_i, \forall y \in P_j$. Akibatnya untuk setiap $i, P_1 P_2 \dots P_{k-1}$ adalah subgrup dari G .

Misalkan $H = P_1 P_2 \dots P_{k-1}$ dan $K = P_k$. Perhatikan bahwa P_i normal dalam G dan $P_i \cap P_j = \{e\}$ maka menurut teorema 2.5.2, $H = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{k-1}$.

Oleh karena H dan K masing-masing mempunyai order prima maka menurut teorema 2.2.7(e) $H \cap K = \{e\}$ di lain pihak H dan K normal dalam G sehingga menurut teorema 2.5.2 berlaku :

$$HK = H \times K \Leftrightarrow P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{k-1} \times P_k$$

Perhatikan bahwa $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$

$$= |P_1 P_2 \dots P_k|$$

$$= |P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k|$$

maka haruslah $G = P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{k-1} \times P_k$

(f) $\Rightarrow$ (a) Misalkan P_i adalah semua p_i -subgrup Sylow dari G dimana $1 \leq i \leq k$. G merupakan hasil kali dari semua p_i -subgrup Sylow dari G dituliskan $G = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_k$ maka G merupakan p -grup berhingga sehingga menurut teorema 4.2.6 dan teorema 4.2.7, G merupakan grup nilpoten.

Selanjutnya kita akan membahas sebuah teorema yang menunjukkan keterkaitan antara grup nilpoten dan grup berpenyelesaian. Oleh karena itu sebelumnya akan dibahas mengenai pengertian grup berpenyelesaian.

Definisi 4.2.3

Suatu grup G disebut grup berpenyelesaian bila G mempunyai barisan $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$, dimana G_i adalah subgrup normal dari G dan setiap grup faktornya yaitu G_{i+1}/G_i Abel, $0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}^+$.

Sebelumnya juga akan disajikan sebuah lemma yang akan membantu untuk membuktikan sebuah teorema mengenai keterkaitan antara grup nilpoten dan grup berpenyelesaian.

Teorema 4.2.9

Jika G adalah grup nilpoten maka G adalah grup berpenyelesaian.

Bukti :

Diketahui G adalah grup nilpoten maka terdapat suatu barisan pusat naik yaitu :

$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G, n \in \mathbb{Z}^+$ dimana $Z_i(G) \triangleleft G, 0 \leq i \leq n$. Diketahui

bahwa menurut lemma 4.1.3, $Z_i(G) \triangleleft Z_{i+1}(G)$, sehingga dapat dibentuk barisan

$\{e\} = Z_0(G) \triangleleft Z_1(G) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(G) = G$. Oleh karena $Z_i(G) \triangleleft Z_{i+1}(G)$ maka dapat

dibentuk grup faktor $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ di lain pihak perhatikan bahwa menurut lemma

4.1.4, $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ sehingga jelas bahwa $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ Abel. Oleh

karena grup nilpoten G mempunyai barisan $\{e\} = Z_0(G) \triangleleft Z_1(G) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(G) = G$

yang setiap grup faktornya yaitu $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ Abel maka G adalah grup

berpenyelesaian.

Teorema 4.2.9 tidak berlaku kebalikanya karena ada grup berpenyelesaian yang bukan merupakan grup nilpoten. Keadaan tersebut akan diperjelas dalam contoh 4.2.1 sebagai berikut :

Contoh 4.2.1

S_3 merupakan grup berpenyelesaian tetapi bukan grup nilpoten.

Pembahasan :

➤ Akan ditunjukkan bahwa S_3 merupakan grup berpenyelesaian.

Diberikan $A=\{1,2,3\}$ maka

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

Hasil operasi setiap elemen dalam S_3 dengan suatu operasi komposisi disajikan dalam tabel 4.2.1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_1	x_4	x_3	x_6	x_5
x_3	x_3	x_6	x_5	x_2	x_1	x_4
x_4	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_4	x_1	x_6	x_3	x_2
x_6	x_6	x_3	x_2	x_5	x_4	x_1

Tabel 4.2.1

	x_1	x_3	x_5
x_1	x_1	x_3	x_5
x_3	x_3	x_5	x_1
x_5	x_5	x_1	x_3

Tabel 4.2.2

S_3 merupakan grup karena dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

- Sifat tertutup dalam S_3 .
- Sifat assosiatif dalam S_3 .

iii). S_3 mempunyai elemen identitas yaitu x_1 .

iv). Setiap elemen dalam S_3 mempunyai invers yaitu : $x_1^{-1} = x_1$, $x_2^{-1} = x_2$, $x_3^{-1} = x_5$,
 $x_4^{-1} = x_6$, $x_5^{-1} = x_3$ dan $x_6^{-1} = x_4$.

Perhatikan tabel 4.2.2 misalkan $H = \{x_1, x_3, x_5\}$ maka H merupakan subgrup dari S_3 karena dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

i). $H \neq \emptyset$

ii). Sifat tertutup dipenuhi dalam H .

iii). Setiap elemen dalam H mempunyai invers yaitu : $x_1^{-1} = x_1$, $x_3^{-1} = x_5$, $x_5^{-1} = x_3$.

Perhatikan bahwa $\{x_1\}$ merupakan subgrup dari S_3 . Misalkan $\{x_1\} = P$ jelas bahwa

$P \triangleleft H$ karena :

$$\begin{aligned} \triangleright \quad & x_1 x_1 x_1^{-1} = x_1 \in P, \quad x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1 \in P, \quad x_3 x_1 x_3^{-1} = x_1 \in P, \quad x_4 x_1 x_4^{-1} = x_1 \in P, \\ & x_5 x_1 x_5^{-1} = x_1 \in P \quad \text{dan} \quad x_6 x_1 x_6^{-1} = x_1 \in P. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $H/P = \{x_1P, x_3P, x_5P\}$. Hasil operasi setiap elemen dari H/P disajikan dalam tabel 4.2.3, tampak bahwa berlaku sifat komutatif dalam H/P .

Jadi dapat disimpulkan bahwa H/P Abel.

	x_1P	x_3P	x_5P
x_1P	x_1P	x_3P	x_5P
x_3P	x_3P	x_5P	x_1P
x_5P	x_5P	x_1P	x_3P

Tabel 4.2.3

	x_1P	x_2P
x_1P	x_1P	x_2P
x_2P	x_2P	x_1P

Tabel 4.2.4

$H \triangleleft S_3$ karena :

$$\triangleright x_1 x_1 x_1^{-1} = x_1 \in H, x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1 \in H, x_3 x_1 x_3^{-1} = x_1 \in H, x_4 x_1 x_4^{-1} = x_1 \in H, \\ x_5 x_1 x_5^{-1} = x_1 \in H \text{ dan } x_6 x_1 x_6^{-1} = x_1 \in H.$$

$$\triangleright x_1 x_3 x_1^{-1} = x_3 \in H, x_2 x_3 x_2^{-1} = x_5 \in H, x_3 x_3 x_3^{-1} = x_3 \in H, x_4 x_3 x_4^{-1} = x_5 \in H, \\ x_5 x_3 x_5^{-1} = x_3 \in H \text{ dan } x_6 x_3 x_6^{-1} = x_5 \in H.$$

$$\triangleright x_1 x_5 x_1^{-1} = x_1 \in H, x_2 x_5 x_2^{-1} = x_3 \in H, x_3 x_5 x_3^{-1} = x_5 \in H, x_4 x_5 x_4^{-1} = x_3 \in H, \\ x_5 x_5 x_5^{-1} = x_1 \in H \text{ dan } x_6 x_5 x_6^{-1} = x_3 \in H.$$

Langkah selanjutnya akan diselidiki apakah S_3/H Abel. Perhatikan bahwa $S_3/H = \{ x_1H, x_2H \}$ dari tabel 4.2.4 tampak bahwa berlaku sifat komutatif dalam S_3/H . Jadi dapat disimpulkan bahwa S_3/H Abel.

Kita telah memperoleh bahwa $\{x_1\} \triangleleft H$ dan $H \triangleleft S_3$ sehingga dapat dibentuk barisan dalam S_3 yaitu : $\{x_1\} \triangleleft H \triangleleft S_3$. Selain itu telah diperoleh bahwa setiap grup faktor dari S_3 yaitu $H/\{x_1\}$ dan S_3/H Abel.

Jadi dapat disimpulkan bahwa S_3 adalah grup berpenyelesaian.

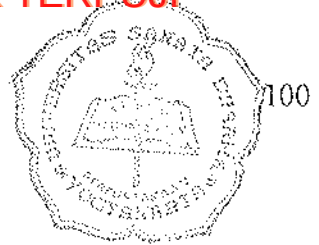
$\triangleright$ Akan ditunjukkan bahwa S_3 bukan merupakan grup nilpoten.

Perhatikan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\} \neq S_3, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Pembuktian dengan menggunakan induksi matematika dapat menunjukkan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, untuk lebih jelasnya perhatikan langkah-langkah berikut :

- Langkah 1.

Akan ditunjukkan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\}$ untuk $n = 1$.

Perhatikan tabel 4.2.1 diperoleh bahwa $Z_1(S_3) = Z(S_3) = \{x_1\}$.



• Langkah 2.

Andaikan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\}$ benar untuk $n = k$ berarti $Z_k(S_3) = \{x_1\}$ benar untuk $n = k$. Akan ditunjukkan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\}$ benar untuk $n = k+1$.

Bentuk suatu pemetaan $\varphi : S_3 \rightarrow S_3/Z_k(S_3)$.

$$\begin{aligned}
 Z_{k+1}(S_3) &= \varphi^{-1}[Z(S_3/Z_k(S_3))] \\
 &= \{s \in S_3 \mid \varphi(s) \in Z(S_3/Z_k(S_3))\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid s Z_k(S_3) \in Z(S_3/Z_k(S_3))\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid s Z_k(S_3) x_n Z_k(S_3) = x_n Z_k(S_3) s Z_k(S_3), \forall x_n Z_k(S_3) \in S_3/Z_k(S_3)\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid s x_n Z_k(S_3) = x_n s Z_k(S_3), \forall x_n \in S_3\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid (s x_n)(x_n s)^{-1} \in Z_k(S_3), \forall x_n \in S_3\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid (s x_n)(x_n s)^{-1} \in \{x_1\}, \forall x_n \in S_3\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid (s x_n)(x_n s)^{-1} = x_1, \forall x_n \in S_3\} \\
 &= \{s \in S_3 \mid s x_n = x_n s, \forall x_n \in S_3\} \\
 &= \{x_1\}
 \end{aligned}$$

Jadi $Z_n(S_3) = \{x_1\}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ benar untuk $n = k+1$.

Dari langkah 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $Z_n(S_3) = \{x_1\}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Oleh karena itu berdasarkan pembuktian di atas yaitu $Z_n(S_3) = \{x_1\} \neq S_3, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga dapat disimpulkan bahwa S_3 bukan merupakan grup nilpoten.

Contoh 4.2.4

Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$D_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \}$$

Hasil operasi setiap elemen dalam D_8 dengan suatu operasi komposisi disajikan dalam tabel 4.2.3.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Tabel 4.2.5

	ρ_2
ρ_0	ρ_2
ρ_1	ρ_3
ρ_2	ρ_0
ρ_3	ρ_1
μ_1	μ_2
μ_2	μ_1
δ_1	δ_2
δ_2	δ_1

Tabel 4.2.6

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1

Tabel 4.2.7

D_8 merupakan grup karena dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

- Sifat tertutup dalam D_8 .
- Sifat asosiatif dalam D_8 .

iii). D_8 mempunyai elemen identitas yaitu ρ_0 .

iv). Setiap elemen dalam D_8 mempunyai invers yaitu : $\rho_0^{-1} = \rho_0$, $\rho_1^{-1} = \rho_3$, $\rho_2^{-1} = \rho_2$,

$$\rho_3^{-1} = \rho_1, \mu_1^{-1} = \mu_1, \mu_2^{-1} = \mu_2, \delta_1^{-1} = \delta_1 \text{ dan } \delta_2^{-1} = \delta_2.$$

- $Z_0(D_8) = \{\rho_0\}$

- ρ_0 jelas merupakan elemen $Z(D_8)$ karena ρ_0 komutatif dengan setiap elemen dalam D_8 . Perhatikan tabel 4.2.6 dan tabel 4.2.7, ρ_2 juga merupakan elemen $Z(D_8)$ karena ρ_2 komutatif dengan setiap elemen dalam D_8 .

Jadi $Z(D_8) = \{\rho_0, \rho_2\}$.

- $Z_0(D_8) \triangleleft Z(D_8)$ karena dipenuhi :

➤ $\rho_0 \rho_0 \rho_0^{-1} = \rho_0 \in Z_0(D_8)$ dan $\rho_2 \rho_0 \rho_2^{-1} = \rho_0 \in Z_0(D_8)$

- Perhatikan bahwa $Z(D_8) \triangleleft D_8$ karena dipenuhi :

➤ $\rho_0 \rho_0 \rho_0^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$, $\rho_1 \rho_0 \rho_1^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$, $\rho_2 \rho_0 \rho_2^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$,

$\rho_3 \rho_0 \rho_3^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$, $\mu_1 \rho_0 \mu_1^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$, $\mu_2 \rho_0 \mu_2^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$,

$\delta_1 \rho_0 \delta_1^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$ dan $\delta_2 \rho_0 \delta_2^{-1} = \rho_0 \in Z(D_8)$.

➤ $\rho_0 \rho_2 \rho_0^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$, $\rho_1 \rho_2 \rho_1^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$, $\rho_2 \rho_2 \rho_2^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$,

$\rho_3 \rho_2 \rho_3^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$, $\mu_1 \rho_2 \mu_1^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$, $\mu_2 \rho_2 \mu_2^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$,

$\delta_1 \rho_2 \delta_1^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$ dan $\delta_2 \rho_2 \delta_2^{-1} = \rho_2 \in Z(D_8)$.

Oleh karena $Z(D_8) \triangleleft D_8$ maka dapat dibentuk grup faktor $D_8/Z(D_8)$ yang

elemen – elemennya adalah $\rho_0 Z(D_8) = \rho_2 Z(D_8)$, $\rho_1 Z(D_8) = \rho_3 Z(D_8)$,

$\mu_1 Z(D_8) = \mu_2 Z(D_8)$ dan $\delta_1 Z(D_8) = \delta_2 Z(D_8)$.

- Selanjutnya akan dicari elemen – elemen dari $Z_2(D_8)$ yaitu $x \in D_8$ yang memenuhi $xZ(D_8) yZ(D_8) = yZ(D_8) xZ(D_8)$, $\forall yZ(D_8) \in D_8/Z(D_8)$. Perhatikan tabel 4.2.8 tampak bahwa setiap elemen dari $D_8/Z(D_8)$ mempunyai sifat komutatif. Di lain pihak diketahui juga bahwa $\rho_0Z(D_8) = \rho_2Z(D_8)$, $\rho_1Z(D_8) = \rho_3Z(D_8)$, $\mu_1Z(D_8) = \mu_2Z(D_8)$ dan $\delta_1Z(D_8) = \delta_2Z(D_8)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa $Z_2(D_8) = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\} = D_8$.
- Perhatikan bahwa $Z_0(D_8)$ subgrup dari $Z(D_8)$ dan $Z(D_8)$ adalah subgrup dari $Z_2(D_8) = D_8$, sehingga dapat dibentuk barisan pusat naik dalam D_8 yaitu : $Z(D_8) < Z(D_8) < Z_2(D_8) = D_8$, dengan $Z_0(D_8) \triangleleft Z(D_8)$ dan $Z(D_8) \triangleleft D_8$. Jadi dapat disimpulkan bahwa D_8 adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten 2.

	$\rho_0Z(D_8)$	$\rho_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$	$\delta_1Z(D_8)$
$\rho_0Z(D_8)$	$\rho_0Z(D_8)$	$\rho_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$	$\delta_1Z(D_8)$
$\rho_1Z(D_8)$	$\rho_1Z(D_8)$	$\rho_0Z(D_8)$	$\delta_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$
$\mu_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$	$\delta_1Z(D_8)$	$\rho_0Z(D_8)$	$\rho_1Z(D_8)$
$\delta_1Z(D_8)$	$\delta_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$	$\mu_1Z(D_8)$	$\rho_0Z(D_8)$

Tabel 4.2.8

Contoh 4.2.3

Berdasarkan contoh 4.2.2, D_8 merupakan grup nilpoten maka menurut torema 4.2.9, D_8 merupakan grup berpenyelesaian. Untuk memperjelas keadaan tersebut perhatikan pembahasan berikut ini :

- Perhatikan contoh 4.2.2 telah diperoleh bahwa $Z_0(D_8) \triangleleft Z(D_8)$ dan $Z(D_8) \triangleleft D_8$ sehingga dapat dibentuk suatu barisan $Z_0(D_8) \triangleleft Z(D_8) \triangleleft D_8$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa D_8 merupakan grup berpenyelesaian maka harus ditunjukkan bahwa setiap grup faktor dari D_8 Abel.

Oleh karena $Z_0(D_8) \triangleleft Z(D_8)$ dan $Z(D_8) \triangleleft D_8$ maka dapat dibentuk dua buah grup faktor yaitu $Z(D_8)/Z_0(D_8)$ dan $D_8/Z(D_8)$

- Akan diselidiki apakah $Z(D_8)/Z_0(D_8)$ Abel.

$Z(D_8)/Z_0(D_8) = \{ \rho_0 Z_0(D_8), \rho_2 Z_0(D_8) \}$. Perhatikan tabel 4.2.9 berikut ini :

	$\rho_0 Z_0(D_8)$	$\rho_2 Z_0(D_8)$
$\rho_0 Z_0(D_8)$	$\rho_0 Z_0(D_8)$	$\rho_2 Z_0(D_8)$
$\rho_2 Z_0(D_8)$	$\rho_2 Z_0(D_8)$	$\rho_0 Z_0(D_8)$

Tabel 4.2.9

tampak bahwa berlaku sifat komutatif untuk setiap elemen dalam $Z(D_8)/Z_0(D_8)$. Jadi $Z(D_8)/Z_0(D_8)$ Abel.

- Akan diselidiki apakah $D_8/Z(D_8)$ Abel.

$D_8/Z(D_8) = \{ \rho_0 Z(D_8), \rho_1 Z(D_8), \mu_1 Z(D_8), \delta_1 Z(D_8) \}$ perhatikan tabel 4.2.8

tampak bahwa berlaku sifat komutatif untuk setiap elemen dalam $D_8/Z(D_8)$.

Jadi $D_8/Z(D_8)$ Abel.

- Perhatikan bahwa dalam D_8 terdapat barisan yaitu $Z_0(D_8) \triangleleft Z_1(D_8) \triangleleft D_8$ dan setiap grup faktornya yaitu $Z(D_8)/Z_0(D_8)$ dan $D_8/Z(D_8)$ Abel maka dapat disimpulkan bahwa D_8 merupakan grup berpenyelesaian.



BAB V

KESIMPULAN

Pembahasan yang runtut dari bab II sampai dengan bab IV mengantar kita untuk mendefinisikan suatu grup nilpoten. Suatu grup G dikatakan sebagai grup nilpoten jika di dalam G terdapat suatu barisan pusat naik yaitu :

$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq \dots$, dimana $Z_i(G) \triangleleft G$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $Z_n(G) = G$, $0 \leq i \leq n$. Bilangan bulat positif terkecil n disebut kelas nilpoten dari G .

Pemahaman mengenai p -grup, teorema Sylow dan grup berpenyelesaian dapat membantu untuk memahami dan menyimpulkan sifat-sifat dari grup nilpoten sebagai berikut :

1. Setiap grup Abel adalah grup nilpoten dengan kelas nilpoten 1.
2. Setiap p -grup berhingga adalah grup nilpoten.
3. Setiap subgrup dari grup nilpoten adalah grup nilpoten.
4. Hasil kali dari dua grup nilpoten adalah grup nilpoten.
5. Grup nilpoten dapat dinyatakan sebagai hasil kali berhingga dari p -subgrup Sylow.
6. Setiap grup nilpoten adalah grup berpenyelesaian.



DAFTAR PUSTAKA

- Dummit, David S and Richard M. Foote., 1991, *Abstract Algebra*, New York :
Prentice Hall.
- Durbin, John R., 1985, *Modern Algebra*, New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Fraleigh, John B., 1989, *A First Course in Abstract Algebra*, New York : Addison
Wesley Publishing Company.
- Herstein, I.N., 1975, *Topics in Algebra*, New York : Baisdell.
- Herstein, I.N., 1975, *Abstract Algebra*, New Jersey : Prentice Hall.
- Hungerford, Thomas H.W., 1974, *Graduate Texts in Mathematics*, New York :
Springer Verlag .
- McCoy, Neal H., 1987, *Introduction to Modern Algebra*, Allyn and Bacon, Inc.
- Rotman, Joseph, J., *An Introduction to the Theory of Group*, 1985, Fourt Edition,
New York : Springer Verlag.
- Soehakso, R.M.J.T., *Pengantar Teori Grup*, 1980, Yogyakarta, FMIPA UGM.