APROKSIMASI NILAI EIGEN : DOMINAN DAN TAK DOMINAN

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

THERESIA SRI RAHAYU

NIM : 961414021

NIRM : 960051120501120021

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

APROKSIMASI NILAI EIGEN : DOMINAN DAN TAK DOMINAN

Yang diajukan oleh

THERESIA SRI RAHAYU

NIM : 961414021

NIRM : 960051120501120021

Telah disetujui oleh

Pembimbing I

Dr. F. Susilo, S. J. Tanggal : 6 Februari 2001

Pembimbing II

M. V. Any Herawati, S. Si, M. Si. Tanggal : 6 Februrari 2001

Pengesahan Skipsi Berjudul

APROKSIMASI NILAI EIGEN :
DOMINAN DAN TAK DOMINAN

Yang dipersiapkan dan ditulis oleh :

THERESIA SRI RAHAYU

NIM : 961414021

NIRM : 960051120501120021

Dipertahankan di hadapan Panitia Penguji Skripsi
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Pada tanggal : 22 Januari 2001

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. R. Rohandi, M. Ed.	Rohandi
Sekretaris	: Drs. St. Susento, M. Si.	
Anggota	: Dr. F. Susilo, S. J.	
Anggota	: Dr. Y. Marpaung	
Anggota	: M. V. Any Herawati, S. Si, M. Si.	

Yogyakarta, Februari 2001
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. Paul Suparno S. J. , M. ST.

Halaman Persembahan

Dengan tarikan cinta dan suara panggilan-Nya, aku berhenti mencari.

Dan hasil semua pencarianku akan berakhir, di tempat, di mana aku berangkat

dan mengenali tempat untuk pertama kalinya.

(T. S. Hiot)

Dengan segenap ketulusan hatiku kupersembahkan skripsi ini buat :

Ibu – Bapakku, sebagai bakti, hormat dan terima kasihku

Mas Widodo, Adik Asih, dan Simbah sebagai kasih dan sayangku

Mas Agung sebagai cinta dan penghargaanku

Teman – temanku seangkatan " 96

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, Februari 2001

Penulis

Theresia Sri Rahayu

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas petunjuk dan pertolongan-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi yang berjudul *"APROKSIMASI NILAI EIGEN : DOMINAN DAN TAK DOMINAN"*. Ini merupakan salah satu syarat untuk mencapai jenjang kesarjanaan SI pada Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta sekaligus sebagai upaya untuk memperdalam dan memperkaya wawasan berpikir pada umumnya.

Dengan segenap kerendahan hati Penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak yang turut membantu penyelesaian skripsi ini :

1. Kepada Romo Dr. F. Susilo, S. J , selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan saran dan masukan demi terselesaikannya skripsi ini
2. Kepada Ibu M. V. Any Herawati, S. Si, M. Si , selaku Dosen Pembimbing II yang telah dengan teliti, sabar dan pengertian dalam menyelesaikan skripsi serta memberikan saran dan masukan demi terselesaikannya skripsi ini
3. Drs. St. Susento, M. Si , selaku Kaprodi yang telah memberi saran dan bimbingan selama studi.
4. Ibu Wanty Widjaja, S. Pd , selaku Dosen Wali yang telah membimbing dan memberikan saran dan bimbingan selama studi.
5. Pihak pengajaran dan segenap Dosen MIPA / PMIPA Universitas Sanata Dharma Yogyakarta yang telah banyak membantu saya selama masih duduk di bangku kuliah.

6. Staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta atas segala bantuan dan fasilitas yang telah diberikan.
7. Bapak dan Ibu, Simbah, Kakak dan Adik tercinta yang telah memberikan dukungan dan doa.
8. Mas Agung atas komputer dan motivasi yang diberikan..
9. Henni, Lia, Letty, Henny dan anak-anak 101 serta teman-temanku angkatan 96 atas segala nasehat dan dukungannya.

Akhirnya dengan segala kerendahan hati, penulis berharap saran dan kritik dari pembaca karena skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Harapan Penulis semoga skripsi ini dapat memberikan sumbangan bagi pemikiran di bidang Matematika pada khususnya dan berguna bagi pihak yang membutuhkannya.

Yogyakarta, Februari 2001

Penulis

(Theresia Sri Rahayu)

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks dapat diaproksimasi. Untuk mengaproksimasi nilai eigen dominan dari suatu matriks A_{nxn}, dapat digunakan metode pangkat. Jika A_{nxn} adalah suatu matriks yang dapat didiagonalisasi dan $\mathbf{x}_0$ adalah sebarang vektor tak nol dalam R^n, maka $\mathbf{x} = A^p \mathbf{x}_0$ merupakan aproksimasi dari vektor eigen dominan A dengan bilangan bulat positif yang cukup besar p sebagai pangkatnya, dan $\dfrac{<x, Ax>}{<x, x>}$ adalah aproksimasi terhadap nilai eigen dominan dari A.

Metode pangkat dapat diadaptasi untuk mengaproksimasi nilai eigen dan vektor eigen tak-dominan dari suatu matriks.

BAB I

PENDAHULUAN

1.Latar Belakang

Masalah nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik penting dalam Aljabar Linear. Secara Aljabar, dalam mencari nilai eigen suatu matriks bujur sangkar menggunakan pemecahan persamaan karakteristik. Selain dengan cara itu, nilai eigen suatu matriks bujur sangkar dapat ditentukan dengan cara numerik yaitu dengan metode pangkat, yang menghasilkan sebuah aproksimasi terhadap nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian. Nilai eigen dan vektor eigen ini disebut nilai eigen dan vektor eigen dominan. Tapi jika kita mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar kedua maka kita dapat menggunakan metode deflasi, dan jika kita mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil maka kita dapat menggunakan metode pangkat invers. Kedua metode ini, yaitu metode deflasi dan metode pangkat invers menghasilkan nilai eigen tak dominan dan vektor eigen yang bersesuaian.

Dalam skripsi ini penulis mencoba membahas nilai eigen dan vektor eigen dari matriks bujur sangkar berikut aproksimasi nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan dengan metode–metode di atas.

2. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apakah yang dimaksud dengan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujur sangkar serta bagaimana cara menentukannya?
2. Bagaimanakah mengaproksimasi nilai eigen dominan dengan menggunakan metode pangkat?
3. Bagaimanakah mengaproksimasi nilai eigen tak dominan dengan menggunakan metode deflasi dan metode pangkat invers?

3. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah memahami pengertian nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujur sangkar serta dapat menggunakan metode pangkat untuk mengaproksimasi nilai eigen dominan, dapat menggunakan metode deflasi dan metode pangkat invers untuk mengaproksimasi nilai eigen tak dominan.

4. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini adalah metode studi pustaka.

5. Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini penulis hanya akan membahas nilai eigen real dari suatu matriks bujur sangkar yang elemen-elemennya bilangan real dan skalar yang digunakan juga skalar real.

6. Manfaat Penulisan

Dengan adanya metode pangkat, deflasi dan pangkat invers kita dapat menggunakannya untuk mengaproksimasi nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks bujur sangkar yang bersesuaian sampai ke pembulatan tempat desimal.

BAB II

RUANG VEKTOR , NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

1. RUANG VEKTOR

1.1 Ruang Vektor Euclides

Sebelum kita mempelajari ruang vektor, kita akan berkenalan dulu dengan ruang Euclides berdimensi - n. Hal ini penting sebab banyak hal-hal mendasar dari ruang vektor berasal dari ruang Euclides berdimensi - n tersebut. Berikut ini didefinisikan terlebih dahulu tentang ruang vektor Euclides berdimensi - n.

Definisi 2.1

Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam $\mathbf{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut :

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ adalah sembarang vektor dalam $\mathbf{R}^n$ serta k adalah sembarang skalar , maka :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)^t$$

$$k\mathbf{u} = (k u_1, k u_2, \ldots, k u_n)^t$$

Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada $\mathbf{R}^n$ tersebut di atas bersifat tertutup , yaitu jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ dan k skalar , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ dan $k\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$

Definisi 2.2

Suatu vektor dalam $\mathbf{R}^n$ yang semua elemennya sama dengan nol disebut sebagai vektor nol , dengan lambang $\mathbf{0} = (0,0,0,\ldots,0)^t$. Andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ sembarang vektor dalam $\mathbf{R}^n$ maka vektor $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)^t$ disebut negatif atau invers terhadap operasi penjumlahan dari vektor u dan ditulis $-\mathbf{u}$.

Operasi pengurangan dalam $\mathbf{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)^t$$

Teorema 2.1

Andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$ adalah vektor-vektor pada $\mathbf{R}^n$ dan k serta l skalar maka :

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. Ada elemen $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ sedenikian hingga $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$, untuk setiap $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
4. Untuk setiap $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ terdapat $-\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ sedemikian hingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
6. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
7. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Bukti :

Andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$ adalah vektor-vektor pada R^n dan k serta l skalar maka :

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)^t$$

$$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)^t$$

$$= \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + ((v_1, v_2, \ldots, v_n)^t + (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t)$

$$= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n))^t$$

$$= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n)^t$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)^t + (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$$

$$= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + (0, 0, \ldots, 0)^t$

$$= (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0)^t$$

$$= (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$$

$$= \mathbf{u}$$

4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)^t$

$$= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \ldots, u_n - u_n)^t$$

$$= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})^t$$

$$= \mathbf{0}$$

5. $k(l\mathbf{u}) = k(l(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^t)$

$$= k(l\mathbf{u}_1, l\mathbf{u}_2, \ldots, l\mathbf{u}_n)^t$$

$$= (k(l\mathbf{u}_1), k(l\mathbf{u}_2), \ldots, k(l\mathbf{u}_n))^t$$

$$= ((kl)\mathbf{u}_1, (kl)\mathbf{u}_2, \ldots, (kl)\mathbf{u}_n)^t$$

$$= (kl)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^t$$

$$= (kl)\mathbf{u}$$

6. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^t + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)^t)$

$$= k(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n)^t$$

$$= (k(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1), k(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2), \ldots, k(\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n))^t$$

$$= (k\mathbf{u}_1 + k\mathbf{v}_1, k\mathbf{u}_2 + k\mathbf{v}_2, \ldots, k\mathbf{u}_n + k\mathbf{v}_n)^t$$

$$= (k\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2, \ldots, k\mathbf{u}_n)^t + (k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, \ldots, k\mathbf{v}_n)^t$$

$$= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

7. $(k+l)\mathbf{u} = (k+l)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^t$

$$= ((k+l)\mathbf{u}_1, (k+l)\mathbf{u}_2, \ldots, (k+l)\mathbf{u}_n)^t$$

$$= (k\mathbf{u}_1 + l\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2 + l\mathbf{u}_2, \ldots, k\mathbf{u}_n + l\mathbf{u}_n)^t$$

$$= ((k\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2, \ldots, k\mathbf{u}_n) + (l\mathbf{u}_1, l\mathbf{u}_2, \ldots, l\mathbf{u}_n))^t$$

$$= k(u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + l(u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$$
$$= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

8. $1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$

$$= (1u_1, 1u_2, \ldots, 1u_n)^t$$

$$= (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t \quad \square$$

Definisi 2.3

Himpunan semua matriks berordo n x 1 dengan elemen-elemen bilangan real disebut ruang Euclides berdimensi n dan ditulis sebagai $\mathbf{R}^n$.

Setiap elemen dari $\mathbf{R}^n$ kita sebut sebagai vektor. Vektor-vektor dalam $\mathbf{R}^n$ yang merupakan matriks berordo n x 1 dapat dituliskan sebagai transpose dari matriks berordo 1 x n, yaitu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$. Bilangan-bilangan real x_i disebut komponen ke -i dari vektor $\mathbf{x}$.

Definisi 2.4

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ sembarang vektor pada $\mathbf{R}^n$, maka hasil kali dalam Euclides $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

1.2 Ruang Vektor

Pada bagian ini kita akan mengabstraksikan konsep vektor dalam $\mathbf{R}^n$

Definisi 2.5

Andaikan V adalah suatu himpunan tidak kosong dan pada V didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar, yaitu aturan yang mengawankan setiap pasang elemen **u** dan **v** $\in$ V dan setiap skalar k, dengan tepat satu elemen **u+v** $\in$ V dan tepat satu elemen k**u** $\in$ V .Himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar itu disebut ruang vektor jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

Andaikan **u**, **v** , **z** $\in$ V dan k,l adalah skalar maka :

1. **u** + **v** = **v** + **u**
2. (**u** + **v**) + **z** = **u** + (**v** + **z**)
3. Ada elemen **0** $\in$ V sedemikian hingga **u** + **0** = **u**, untuk setiap **u** $\in$ V
4. Untuk setiap **u** $\in$ V terdapat –**u** $\in$ V sedemikian hingga **u** + (-**u**) = **0**
5. k (**u** + v) = k**u** + kv
6. (k + l) **u** = k**u** + l**u**
7. (kl) **u** = k (l**u**)
8. 1**u** = **u**

Ruang vektor yang didefinisikan di atas disebut ruang vektor real atas lapangan real, sebab skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan real. $\mathbf{R}^n$ merupakan salah satu contoh dari ruang vektor sebab aksioma-aksioma dari ruang vektor merupakan abstraksi dari sifat-sifat vektor pada R^n .

1.3 Subruang

Definisi 2.6

Subhimpunan S dari sebuah ruang vektor V, disebut subruang V jika S itu sendiri adalah ruang vektor terhadap penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada V.

Definisi 2.7

Andaikan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ adalah vektor–vektor dalam ruang vektor V dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar maka jumlahan dari $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n\, k_n$ disebut suatu kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Definisi 2.8

Himpunan vektor–vektor yaitu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in$ V dikatakan membangun V jika setiap anggota V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Definisi 2.9

Vektor–vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ dalam ruang vektor V dikatakan tidak bebas linear jika ada skalar–skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n\, k_n = \mathbf{0}$.

Definisi 2.10

Himpunan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ dalam ruang vektor V dikatakan bebas linear jika persamaan $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n\, k_n = \mathbf{0}$ hanya mempunyai satu penyelesaian yaitu $k_i = 0$, untuk semua i = 1,2,…,n.

1.4 Basis dan Dimensi

Dalam kehidupan sehari-hari kita dapat menemukan gambaran-gambaran tentang dimensi. Misalkan sebuah bidang sebagai benda berdimensi dua dan suatu ruangan sebagai benda berdimensi tiga. Berikut akan didefinisikan tentang dimensi. Karena dalam dimensi memerlukan definisi basis, maka kita definisikan dulu tentang basis.

Definisi 2.11

Himpunan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ dalam ruang vektor V disebut basis untuk V bila dan hanya bila :

1. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ bebas linear
2. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ membangun V.

Jika ruang vektor V mempunyai suatu basis yang terdiri dari n vektor maka V dikatakan mempunyai dimensi n.

Subruang { 0 } dari V dikatakan mempunyai dimensi nol. Ruang vektor V dikatakan berdimensi hingga jika ada himpunan berhingga vektor-vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ yang membentuk sebuah basis dari V. Jika himpunan vektor-vektor itu tidak ada, maka dikatakan V berdimensi tak hingga.

Definisi 2.12

Suatu sistem m persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah himpunan persamaan–persamaan yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

dengan a_{ij} dan b_i merupakan konstanta–konstanta real untuk i = 1,2,…,m dan j = 1,2,…,n serta a_{ij} tidak semuanya sama dengan nol.

Bilangan a_{ij} dinamakan koefisien dari sistem .

Sistem persamaan linear di atas dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

dan ditulis : $A\mathbf{x} = B$

Jika pada matriks A ditambahkan satu kolom lagi sehingga menjadi :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

maka matriks tersebut disebut matriks lengkap untuk sistem persamaan linear.

Teorema 2.2

Suatu sistem persamaan linear homogen dengan n persamaan dan m variabel mempunyai penyelesaian non trivial bila $m > n$.

Bukti :

Sistem persamaan linear homogen dengan n persamaan dan m variabel dapat dituliskan dalam bentuk matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dengan $A = (a_{ij})_{nm}$,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^t$ dan $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^t$.

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A mempunyai paling banyak n baris tak nol. Jadi paling banyak ada n variabel utama. Karena ada m variabel dan $m > n$ maka pasti ada variabel bebas. Tiap variabel bebas dapat diberi sebarang nilai konstanta real. Karena setiap pemberian nilai pada variabel bebas menghasilkan penyelesaian untuk sistem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka jelas sistem tersebut mempunyai penyelesaian non trivial.

$\square$

Teorema 2.3

Jika S = { $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,....,$\mathbf{u}_n$ } merupakan basis dari ruang vektor V, maka setiap himpunan vektor yang lebih dari n vektor di V tidak bebas linear.

Bukti :

Andaikan diketahui T = { $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,....,$\mathbf{v}_m$ } dengan m > n adalah sebarang vektor di V.

Untuk menunjukkan bahwa T tidak bebas linear yaitu kita harus menunjukkan ada bilangan x_1 , x_2 ,...., x_m yang tidak semuanya nol sehingga :

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + x_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \qquad \ldots 1)$$

Karena $\mathbf{u}_i$ dengan i = 1, 2, …, n merupakan basis , maka setiap vektor $\mathbf{v}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor $\mathbf{u}_i$, yaitu :

$$\mathbf{v}_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n$$

$$\mathbf{v}_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$\mathbf{v}_m = a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{nm}u_n$$

Persamaan ini kita substitusikan ke persamaan 1), dan diperoleh :

$$x_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n) + x_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n)$$

$$+ \ldots + x_m(a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{nm}u_n) = \mathbf{0}.$$

Karena $\mathbf{u}_i$ bebas linear, maka koefisien dari $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Sehingga sistem persamaan linear tersebut menjadi :

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_m = 0$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_m = 0$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0$$

Karena m > n, sistem persamaan linear homogen ini mempunyai jawab tak trivial .

Sehingga ada $x_1, x_2, \dots, x_m$ yang tidak semuanya sama dengan nol yang memenuhi persamaan 1). Jadi vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ tidak bebas linear.

□

Teorema 2.4

Jika S = { $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ } adalah sejumlah himpunan n vektor bebas linear pada sebuah ruang V yang berdimensi n, maka S adalah sebuah basis untuk V.

Bukti :

Diketahui S = { $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ } bebas linear. Menurut teorema 2.3 himpunan vektor yang terdiri lebih dari n vektor, tidak bebas linear. Berarti untuk sebarang vektor **a** di **V** , himpunan n + 1 vektor **a** , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ tidak bebas linear.

Sehingga ada bilangan $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol, sehingga $s_0\, \mathbf{a} + s_1\, \mathbf{u}_1 + s_2\, \mathbf{u}_2 + \ldots + s_n\, \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

Jika $s_0 = 0$, maka persamaan di atas menjadi $s_1\, \mathbf{u}_1 + s_2\, \mathbf{u}_2 + \ldots + s_n\, \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

Karena $\mathbf{u}_i$ bebas linear untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $s_1, s_2, \ldots, s_n = 0$. Jadi semua koefisien tersebut sama dengan nol . Hal ini bertentangan dengan asumsi kita bahwa bilangan tersebut tidak semuanya sama dengan nol, sehingga $s_0 \neq 0$. Jika persamaan tersebut kita bagi dengan s_0 menjadi:

$$\mathbf{a} = t_1\, \mathbf{u}_1 + t_2\, \mathbf{u}_2 + \ldots + t_n\, \mathbf{u}_n \quad \text{, dengan } t_i = -\frac{s_i}{s_0}.$$

Jadi vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ membangun V . Karena himpunan tersebut bebas linear dan membangun V, maka himpunan vektor-vektor tersebut merupakan basis dari V. $\square$

Teorema 2.5

Jika $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ dan $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ adalah dua basis untuk ruang V maka n = m.

Bukti :

Diketahui S dan T adalah basis untuk V, maka T pasti bebas linear.Karena S basis dan T bebas linear, maka menurut teorema 2 .3 haruslah $m \leq n$. Dan karena T basis dan S bebas linear maka menurut teorema 2.3 haruslah $n \leq m$. Karena $m \leq n$ dan $n \leq m$ maka $m = n$. $\square$

1.5 Ruang hasil kali dalam

Dalam ruang vektor Euclides (R^n) kita telah mendefinisikan hasil kali dalam Euclides. Sekarang kita akan mendefinisikan ruang hasil kali dalam pada ruang vektor real.

Definisi 2.13

Andaikan **u, v,** dan **w** adalah sembarang vektor dalam ruang vektor atas lapangan real V dan k adalah skalar maka hasil kali dalam pada ruang vektor real V adalah fungsi yang mengasosiasikan setiap pasangan vektor **u** dan **v** pada V dengan bilangan real

$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ sedemikian hingga :

1. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$ aksioma simetri
2. $< \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$ aksioma penambahan
3. $< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ aksioma kehomogenan
4. $< \mathbf{u}, \mathbf{u} > \geq 0$ dan $< \mathbf{u}, \mathbf{u} > = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ aksioma kepositifan

Sebuah ruang vektor real dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam real. Karena sebuah vektor di R^n dapat dituliskan dalam bentuk matriks, maka ruang hasil kali dalam dapat dituliskan sebagai $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$.

Teorema 2.6

Jika **u, v,** dan **w** adalah vektor - vektor pada ruang hasil kali dalam real dan k sebarang skalar, maka :

a. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{0} > = 0$

b. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

c. $< \mathbf{u}, k\mathbf{v} > = k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$

Bukti:

Andaikan **u**,**v**,dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam real dan k sebarang skalar ,maka :

a. (i) $< \mathbf{0}, \mathbf{v} > = < \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} >$

$= < \mathbf{0}, \mathbf{v} > + < \mathbf{0}, \mathbf{v} >$ aksioma penambahan

$= 2 < \mathbf{0}, \mathbf{v} >$

sehingga diperoleh $2 < \mathbf{0}, \mathbf{v} > - < \mathbf{0}, \mathbf{v} > = 0$

maka $< \mathbf{0}, \mathbf{v} > = 0$

(ii) $< \mathbf{v}, \mathbf{0} > = < \mathbf{v}, \mathbf{0} + \mathbf{0} >$

$= < \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} >$ aksioma simetri

$= < \mathbf{0}, \mathbf{v} > + < \mathbf{0}, \mathbf{v} >$ aksioma penambahan

$= < \mathbf{v}, \mathbf{0} > + < \mathbf{v}, \mathbf{0} >$ aksioma simetri

$= 2 < \mathbf{v}, \mathbf{0} >$

sehingga diperoleh $2 < \mathbf{v}, \mathbf{0} > - < \mathbf{v}, \mathbf{0} > = 0$

maka $< \mathbf{v}, \mathbf{0} > = 0$

b. $< \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w} > = < \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{u} >$ aksioma simetri

$= < \mathbf{v}, \mathbf{u} > + < \mathbf{w}, \mathbf{u} >$ aksioma penambahan

$= < \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$ aksioma simetri

c. $< \mathbf{u}, k\mathbf{v} > = < k\mathbf{v}, \mathbf{u} >$ aksioma simetri

$= k < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$ aksioma kehomogenan

$= k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ aksioma simetri $\square$

Definisi 2.14

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka norma (panjang) vektor **u** dinyatakan dengan $\|u\|$ dan didefinisikan sebagai $\|u\| = \sqrt{< u,u >}$.

Definisi 2.15

Andaikan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah vektor–vektor pada ruang hasil kali dalam V.

Jika $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j > = 0$, untuk $i \neq j$ maka $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ disebut himpunan orthogonal.

Definisi 2.16

Himpunan orthogonal yang anggota–anggotanya mempunyai norma 1 disebut himpunan orthonormal.

II. NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Sebelum kita membahas nilai eigen dan vektor eigen kita akan mengingat kembali pengertian determinan dan invers dari suatu matriks bujur sangkar dengan pengertian-pengertian yang mendasarinya.

2.1 Determinan dan Invers

Definisi 2.17

Diketahui himpunan bilangan A = { 1, 2, …, n }. Sebuah permutasi dari himpunan A tersebut adalah urutan dari n buah elemen himpunan A tanpa ada pengulangan dan banyaknya permutasi yang bisa kita bentuk ada n !.

Sehingga permutasi dari A adalah fungsi P dari A ke A yang bersifat satu-satu.

Permutasi P mempunyai inversi jika P (i) > P (j) untuk i < j, atau inversi terjadi jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dan dilambangkan dengan s(P).

Definisi 2.18

Jika A matriks bujur sangkar n x n, maka determinan A dilambangkan dengan $|A|$.

$|A| = \sum_{P} (-1)^{s(P)} a_{1i_1} a_{2i_1} \ldots a_{ni_n}$, dengan penjumlahan dilakukan untuk semua permutasi $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$. Jadi determinan dari suatu matriks nxn adalah jumlah dari semua kemungkinan perkalian elemen-elemen matriks dari kolom dan baris yang berbeda.

Definisi 2.19

Suatu matriks A_{nxn} disebut singular jika dan hanya jika $|A| = 0$.

Jika $|A| \neq 0$ maka A disebut matriks non singular.

Definisi 2.20

Matriks A_{nxn} mempunyai invers, jika ada matriks B_{nxn} sehingga $AB = BA = I$.

Matriks B_{nxn} disebut invers matriks A_{nxn}.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada bagian ini kita akan membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujur sangkar. Persoalan nilai eigen merupakan masalah matriks kedua yang sering dijumpai setelah pemecahan sistem persamaan linear. Pembahasan pada bagian ini meliputi definisi dan cara menentukan nilai eigen suatu matriks bujursangkar.

Definisi 2.21

Andaikan A adalah matriks n x n , maka vektor tak nol **x** di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari **x** , yaitu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, untuk suatu skalar λ yang kemudian disebut nilai eigen dari A dan **x** yang kemudian disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Contoh 2.2

Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 11 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$,yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$,

sebab $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{x}$.

Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks bujur sangkar kita membutuhkan definisi dan teorema sebagai berikut .

Definisi 2.22

Operasi–operasi yang dilakukan pada baris–baris lengkap yaitu :

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tak nol
2. Menukar tempat dua baris
3. Mengganti suatu baris dengan hasil penjumlahan baris tersebut dengan kelipatan baris lain.

Ketiga operasi ini, dinamakan operasi baris elementer.

Definisi 2.23

Suatu matriks bujur sangkar A berordo n dinamakan matriks elementer , jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas I_n dengan melakukan operasi baris elementer.

Terdapat hubungan antara matriks elementer dan operasi baris elementer . Jika kita melakukan suatu operasi baris elementer pada matriks bujur sangkar A berordo n x m, maka hasilnya yaitu matriks A_1 akan sama dengan matriks yang kita peroleh dengan mengalikan A dengan suatu matriks elementer E yang diperoleh dari I_n dengan melakukan operasi baris elementer yang sama dengan yang dilakukan pada A yaitu EA = A_1 .

Ada tiga jenis matriks elementer yaitu :

1. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan mengalikan baris ke- i dengan konstanta c yang tidak nol, dilambangkan dengan E_1 .
2. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan menukar baris ke- i dengan baris ke – j, dilambangkan dengan E_2.

3. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan menganti baris ke- i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kali baris ke – j, dilambangkan dengan E_3.

Teorema 2.7

Setiap matriks elementer merupakan matriks non singular.

Bukti :

1. Jika E_1 matriks elementer jenis pertama, maka kita dapat memperoleh kembali matriks I dan E_1 dengan mengalikan baris ke-i dengan $\frac{1}{c}(c \neq 0)$. Andaikan E_p matriks yang dihasilkan dari matriks I dengan mengalikan baris ke- i dengan $\frac{1}{c}(c \neq 0)$. Kita dapat memperoleh I kembali E_p dengan mengalikan baris ke- i dengan $\frac{1}{c}(c \neq 0)$. Maka diperoleh $E_p E_1 = I$ dan $E_1 E_p = I$. Jadi E_p merupakan invers dari E_1.
2. Jika E_2 matriks elementer jenis kedua, maka kita dapat memperoloh I kembali dari E_2 dengan menukarkan kembali baris ke- i dengan baris ke- j . Jadi $E_2 E_2 = I$. Ini berarti bahwa E_2 merupakan invers dari dirinya sendiri.
3. Jika E_3 matriks elementer jenis ketiga, maka kita dapat memperoleh kembali dari E_3 dengan menganti baris ke- i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan - c kali baris ke- j . Andaikan E_q matriks yang diperoleh dari I dengan mengganti baris ke- i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan – c kali baris ke- j . Kita dapat memperoleh I kembali

dari E_q dengan mengganti baris ke- i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kal;I baris ke- j . Maka

$E_q E_3 = I$ dan $E_3 E_q = I$. Jadi E_q invers dari E_3. $\square$

Definisi 2.24

Dua matriks dikatakan equivalen baris , jika matriks yang pertama dapat diperoleh dari matriks lain dengan melakukan sejumlah berhingga operasi elementer.

Jadi jika A equivalen baris dengan matriks B, maka A dapat direduksi menjadi B dengan melakukan sejumlah berhingga operasi baris elementer pada A. Hal ini dapat dilaku kan dengan mengalikan matriks-matriks elementer yang sesuai dari sebelah kiri. Dengan demikian jika A equivalen baris dengan B, maka terdapat matriks-matriks elementer E_1 , E_2 , ..., E_k sedemikian $E_k \, E_{k-1} \ldots E_1 \, A = B$.

Definisi 2.25

Matriks E disebut matriks eselon jika memenuhi sifat :

1. Setiap baris yang hanya terdiri dari bilangan nol terletak sesudah baris yang memuat elemen tak nol.
2. Pada setiap baris dari matriks E yang mempunyai elemen tak nol, elemen tak nol yang pertama harus terletak di kolom sebelah kanan elemen tak nol dari baris sebelumnya.

Definisi 2. 26

Elemen tak nol pertama dari suatu baris disebut elemen utama atau elemen pivot baris.

Definisi 2.27

Matriks eselon baris tereduksi adalah matriks eselon yang mempunyai sifat :

1. Setiap baris yang hanya terdiri dari elemen nol terletak di bawah
2. Elemen pivot dalam suatu baris terletak di sebelah kanan dari elemen pivot sebelumnya
3. Setiap elemen pivotnya bernilai satu
4. Setiap elemen pivot merupakan satu-satunya elemen tak nol pada kolom tersebut.

Teorema 2.8

Jika A matriks n x n maka pernyataan pernyataan berikut equivalen :

a. A non singular

b. $A\mathbf{x} = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial

c. A equivalen baris dengan I_n

Bukti :

1. ($a \Rightarrow b$)

   Andaikan A non singular dan A^{-1} invers dari matriks A (Matriks A berordo n x n mempunyai invers jika A matriks non singular)

Andaikan $\mathbf{x}_0$ penyelesaian dari A $\mathbf{x}$ = 0 berarti A $\mathbf{x}_0$ = 0

Sehingga $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\,0$

$$A^{-1}A\mathbf{x}_0 = A^{-1}\,0$$

$$\mathbf{I}\,\mathbf{x}_0 = 0$$

$$\mathbf{x}_0 = 0$$

Jadi A $\mathbf{x}$ = 0 hanya mempunyai penyelesaian trivial.

2. (b $\Rightarrow$ c)

Andaikan bentuk umum sistem persamaan linear $A\,\mathbf{x} = 0$, sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \;.\qquad .\qquad .\qquad . \\ \;.\qquad .\qquad .\qquad . \\ \;.\qquad .\qquad .\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Andaikan sistem persamaan linear tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.

Matriks lengkapnya yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

Karena sistem hanya mempunyai penyelesaian trivial , maka bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkapnya tersebut yang bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$\mathbf{x}_1 = 0$

$\mathbf{x}_2 = 0$

.

.

.

$\mathbf{x}_n = 0$

Matriks eselon baris tereduksi yang bersesuaian dengan sistem persamaan tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots 2)$$

Jadi matriks pada persamaan 2) tersebut merupakan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap.

Jika kita menyisihkan kolom terakhir dari matriks lengkap tersebut dari matriks pada persamaan 2) tersebut maka kita dapat menyimpulkan bahwa A dapat di reduksi menjadi $\mathbf{I}_n$ dengan sejumlah operasi baris elementer. Jadi A equivalen baris dengan $\mathbf{I}_n$.

3. (c $\Rightarrow$ a)

Andaikan A equivalen baris dengan $\mathbf{I}_n$ maka A dapat direduksi menjadi $\mathbf{I}_n$ dengan sejumlah operasi baris elementer, sehingga terdapat matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sedemikian sehingga $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 \; A = \mathbf{I}_n$

Karena matriks–matriks elementer adalah non singular (menurut teorema 2.7) maka :

$$A = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1}\ldots(E_k)^{-1}\,\mathbf{I}_n$$

$$= E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_k^{-1} \qquad \ldots 3)$$

Persamaan 3) menyatakan hasil kali matriks–matriks non singular, sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa A non singular $\square$

Teorema 2.9

Bilangan real λ merupakan nilai eigen dari matriks A_{nxn} jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan karakteristik $|\lambda I - A| = 0$

Bukti :

Diketahui matriks A_{nxn}

λ adalah nilai eigen dari matriks A (menurut definisi 2.21)

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^n)(A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x})$

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^n)(A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x})$

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^n)(A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{0})$

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^n)(\lambda\mathbf{I}\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0})$

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^n)((\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0})$

$\Leftrightarrow$ Persamaan $(\lambda\mathbf{I} - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai pemecahan tak trivial (Menurut teorema 2.8)

$\Leftrightarrow$ $(\lambda\mathbf{I} - A)$ adalah matriks singular

$\Leftrightarrow$ $|\lambda I - A| = 0$ (menurut definisi 2.19). $\square$

Contoh 2.3

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut :

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 8 & 6 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda + 1) - (-18) = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

Jadi nilai–nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 5$.

Nilai eigen dari suatu matriks n x n adalah akar–akar dari persamaan karakteristiknya . Jika A adalah matriks n x n maka A mempunyai paling banyak n nilai eigen yang berbeda .

Kita telah membahas bagaimana menentukan nilai eigen matriks bujur sangkar, selanjutnya kita akan membahas bagaimana menentukan vektor eigen dari suatu matriks bujur sangkar . Suatu vektor tak nol **x** dinamakan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, jika memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Secara equivalen vektor eigen **x** adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan $(\lambda \mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $(\lambda \mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ merupakan subruang dari R^n yang disebut ruang pemecahan .

Andaikan W adalah himpunan penyelesaian dari sistem $(\lambda \mathbf{I} - \mathrm{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ambil sebarang $w_1, w_2 \in W$, maka $(\lambda \mathbf{I} - A)\, w_1 = \mathbf{0}$ dan $(\lambda \mathbf{I} - A)\, w_2 = \mathbf{0}$.

Sehingga $(\lambda \mathbf{I} - A)(w_1 + w_2) = (\lambda \mathbf{I} - A)\, w_1 +$ dan $(\lambda \mathbf{I} - A)\, w_2$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

$$= \mathbf{0}$$

Dan untuk sebarang skalar k, $(\lambda \mathbf{I} - A)\, k w_1 = \mathbf{0} = k(\lambda \mathbf{I} - A)\, w_1 = k . \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Jadi untuk sebarang $w_1, w_2 \in W$, maka $w_1 + w_2 \in W$ dan $k w_1 \in W$.

Dengan demikian terbukti bahwa W adalah subruang dari R^n.

Ruang pemecahan ini dinamakan juga ruang eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Contoh 2.4

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 5$

Vektor eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut:

1. Andaikan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$,

   maka $\mathbf{x}$ adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan $(\lambda \mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Matriks lengkap dari sistem di atas diperoleh sebagai berikut :

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 2 - \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right] \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right] \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Jadi matriks lengkap dari sistem persamaan di atas adalah $\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, yang bersesuaian dengan sistem persamaan linear $x_1 - x_2 = 0$ atau $x_1 = x_2$. Jika $x_2 = s$, s sebarang konstanta real maka $x_1 = s$. Jadi $\begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ dengan s sebarang konstanta real adalah penyelesaian sistem persamaan $(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Sehingga vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 2 adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$, dengan s sebarang konstanta real dan $s \neq 0$.

Vektor $\mathbf{x}$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Andaikan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 5$, maka $\mathbf{x}$ adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matriks lengkap dari sistem di atas diperoleh sebagai berikut : $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 5 - \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right]\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right]\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Jadi matriks lengkap dari sistem persamaan di atas adalah $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap ini adalah $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,yang bersesuaian dengan sistem persamaan linear $x_1 - 2x_2 = 0$ atau $x_1 = 2x_2$. Jika $x_2 = s$, s sebarang konstanta real maka $x_1 = 2s$. Jadi $\begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ dengan s sebarang konstanta real adalah penyelesaian sistem persamaan $(5\mathrm{I} - A)\,\mathbf{x} = 0$. Sehingga vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 5 adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$, dengan s sebarang konstanta real dan dan $s \neq 0$.

Vektor $\mathbf{x}$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Diagonalisasi

Andaikan A matriks bujur sangkar berordo n. Pada bagian ini kita akan membahas cara menentukan matriks non singular X, sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$, di mana D matriks diagonal.

Kita mulai dengan definisi berikut.

Definisi 2.28

Matriks bujur sangkar D = (d_{ij}) disebut matriks diagonal jika merupakan matriks segitiga atas dan matriks matriks segitiga bawah yaitu d_{ij} = 0 untuk semua i >j dan untuk semua j > i.

Definisi 2.29

Suatu matriks bujur sangkar A yang berordo n dikatakan dapat didiagonalisasikan , jika terdapat matriks non singular X sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$, dengan D adalah matriks diagonal. Matriks X dikatakan mendiagonalisasikan matriks A.

Teorema 2.10

Andaikan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah vektor–vektor dalam R^n dengan $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t$ untuk i = 1,2,…,n. Andaikan $X = (x_{ij})_{nxn}$ adalah matriks yang dibentuk dengan x_i sebagai kolom-kolomnya.

Himpunan vektor–vektor { $x_1, x_2, ..., x_n$ } adalah tak bebas linear bila dan hanya bila X singular.

Bukti :

Andaikan $k_1, k_2, ..., k_n$ adalah skalar–skalar sedemikian hingga

$k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n = 0.$

Persamaan di atas equivalen dengan sistem persamaan berikut :

$$
\begin{array}{l}
k_1 x_{11} + k_2 x_{12} + ... + k_n x_{1n} = 0 \\
k_1 x_{21} + k_2 x_{22} + ... + k_n x_{2n} = 0 \\
. \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \\
k_1 x_{n1} + k_2 x_{n2} + ... + k_n x_{nn} = 0
\end{array}
$$

Andaikan k $=(k_1, k_2, ..., k_n)'$, maka sistem persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks, yaitu Xk = 0 . Menurut teorema 2. 8, persamaan Xk = 0 hanya mempunyai penyelesaian trivial bila dan hanya bila X adalah matriks non singular. Pernyataan ini equivalen dengan persamaan Xk = 0 mempunyai penyelesaian non trivial bila dan hanya bila X singular.

Berarti ada k $= (k_1, k_2, ..., k_n)'$ dengan tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga Xk = 0 bila dan hanya bila *X* singular.

Karena persamaan Xk =0 equivalen dengan persamaan $k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n =$ 0, maka keduanya mempunyai himpunan penyelesaian yang sama. Jadi terdapat skalar–skalar $k_1, k_2, ..., k_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga $k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n = 0$, bila dan hanya bila X singular.

Dengan demikian $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah tak bebas linear bila dan hanya bila X singular. $\square$

Dengan teorema 2.10 ini berarti jika $|X|=0$, maka himpunan vektor–vektor yang diselidiki adalah tak bebas linear , sedang jika $|X| \neq 0$, maka himpunan vektor–vektornya adalah bebas linear.

Berikut adalah sebuah teorema yang buktinya mengungkapkan cara mendiagonalisasikan suatu matriks.

Teorema 2.11

Andaikan A matriks bujur sangkar berordo n . Matriks A dapat didiagonalisasikan bila dan hanya bila A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear .

Bukti :

1. ($\Rightarrow$)Andaikan A dapat didiagonalkan . Maka terdapat matriks non singular X sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$ atau $AX = XD$, dengan D matriks

diagonal.

Andaikan $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$

Maka $XD = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_{11}\lambda_1 & x_{12}\lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n}\lambda_n \\ x_{21}\lambda_1 & x_{22}\lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n}\lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}\lambda_1 & x_{n2}\lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

Andaikan $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t$ dengan i = 1,2,…,n adalah vektor–vektor kolom dari matriks X, maka vektor–vektor kolom dari matriks XD adalah $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$. Sedangkan vektor–vektor kolom dari matriks AX adalah $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$.

Karena $AX = XD$, maka $Ax_i = \lambda_i x_i$ untuk setiap i = 1,2,…,n.

X matriks non singular sehingga $|X| \neq 0$.

Jadi untuk setiap i = 1,2,…,n , x_i adalah vektor tak nol sehingga x_i adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i.

Karena X non singular maka menurut teorema 2.6 himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah bebas linear.

2. $(\Leftarrow)$

Andaikan A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, yaitu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Andaikan $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t$, untuk setiap i = 1,2,…,n dan

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka kolom–kolom dari hasil kali AX adalah $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$.

Karena $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \ldots, Ax_n = \lambda_n x_n$, maka :

$$AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & . & . & . & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & . & . & . & \lambda_n x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & . & . & . & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$= XD$, dengan D matriks diagonal yang elemen–elemennya pada diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Karena himpunan vektor–vektor kolom dari matriks X bebas linear, maka menurut teorema 2.10 X adalah non singular. Sehingga menurut definisi 2.29 X mendiagonalisasi matriks A. Jadi A dapat didiagonalisasikan. $\square$

Dari pembuktian ini terlihat bahwa vektor-vektor kolom dari matriks X merupakan vektor-vektor eigen dari matriks A.

Definisi 2. 30

Sebuah matriks non singular P_{nxn} dikatakan ortogonal jika mempunyai sifat

$P^{-1} = P^t$.

Definisi 2.31

Matriks A_{nxn} dikatakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat suatu matriks P yang ortogonal sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, dengan D matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Definisi 2.32

Matriks A_{nxn} dikatakan simetri jika $A = A^t$

Teorema 2.12

Andaikan A_{nxn} matriks ortogonal maka vektor-vektor kolom dari matriks A membentuk himpunan ortonormal dalam R^n dengan hasil kali dalam Euclides.

Bukti :

Diketahui A_{nxn} ortogonal

Menurut definisi 2.30 maka $A^t = A^{-1}$. Sehingga $A^t A = A^{-1} A = I$

Matriks I dapat dituliskan sebagai $[\partial_{ij}]$, dengan $[\partial_{ij}] = \begin{cases} 0, & jika\ i \neq j \\ 1, & jika\ i = j \end{cases}$

i,j = 1,2,...,n.

Hasil kali matriks $A^t A$ berbentuk matriks n x n , dengan elemen-elemen pada baris ke i dari matriks A^t merupakan elemen-elemen pada kolom ke i dari matriks A dan elemen-elemen pada kolom ke j dari matriks A merupakan elemen-elemen kolom ke j dari matriks A, sehingga andaikan v_i adalah vektor-vektor kolom dari matriks A maka $< v_i, v_j > = [\partial_{ij}]$.

Jadi $< v_i, v_j > = \begin{cases} 0, & jika\ i \neq j \\ 1, & jika\ i = j \end{cases}$.

Sehingga menurut definisi 2.16 himpunan vektor-vektor

kolom dari matriks A membentuk himpunan ortogonal dan menurut definisi 2.17 himpunan ortogonal tersebut membentuk himpunan ortonormal.

Jadi vektor-vektor kolom dari matriks A membentuk himpunan ortonormal dalam R^n dengan hasil kali dalam Euclides.$\square$

Teorema 2.13

Matriks A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Menurut definisi 2.29, maka terdapat suatu matriks P yang ortogonal sedemikian hingga $P^{-1}AP = P^t AP = D$, dengan D matriks diagonal. Dari penjelasan bukti teorema 2.10 ($\Rightarrow$) terlihat bahwa vektor-vektor kolom dari matriks P adalah vektor-vektor eigen dari matriks A.Sehingga menurut teorema 2.12, vektor-vektor kolom matriks P membentuk himpunan ortonormal dalam R^n. Jadi A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

($\Leftarrow$) Andaikan A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal yaitu $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Seperti yang diperlihatkan dalam bukti teorema 2.10

$(\Leftarrow)$, maka matriks P dengan vektor-vektor eigen ini sebagai kolom-kolomnya akan mendigonalisasi matriks A. Karena vektor-vektor eigen ini ortonormal, maka P ortogonal sehingga akan mendigonalisasi A secara ortogonal. $\square$

Definisi 2.33

Basis ortogonal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ untuk sebarang subruang V adalah basis yang terdiri dari vektor yang saling ortogonal, yaitu basis yang memenuhi $< v_i, v_j > = 0$ untuk $i \neq j$. Jika basis tersebut memenuhi $< v_i, v_j > = 1$, untuk i=j disebut basis ortonormal i dan j =1,2,...,n.

Teorema 2.14

Jika S = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan ortogonal vektor taknol dalam ruang hasil kali dalam, maka S bebas linear.

Bukti :

Diketahui S = $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ adalah himpunan ortogonal vektor taknol dalam ruang hasil kali dalam. Misalkan $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0$ *)

Untuk membuktikan S =$\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ bebas linear, maka kita harus membuktikan $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Untuk setiap v_i dalam S, i = 1,2,...,n maka dari persamaan *) diperoleh :

$$< k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \ , v_i > = < 0 \ , v_i >$$

$$< k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \ , v_i > = 0$$

$$k_1 < v_1, v_i > + k_2 < v_2, v_i > + \ldots + k_n < v_n, v_i > = 0 \ \text{**)}$$

aksioma kehomogenan

Karena $< v_i , v_j > = 0$ jika $i \neq j$, maka persamaan **) menjadi

$k_i < v_i , v_i > = 0$.

Karena vektor-vektor S dianggap taknol, maka $< v_i , v_i > \neq 0$ menurut aksioma kepositifan untuk hasil kali dalam, maka $k_i = 0$. Karena $i = 1, 2, \ldots, n$ maka $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Jadi S bebas Linear.

$\square$

Teorema 2.15

Setiap ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga taknol mempunyai sebuah basis ortonormal.

Bukti :

Misalkan V adalah sebarang ruang hasil kali dalam berdimensi n taknol, dan misalkan $S = \{ u_1 , u_2 , \ldots , u_n \}$ adalah sebarang basis untuk V. Urutan langkah-langkah berikut akan menghasilkan basis ortonormal $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$ untuk V.

Langkah 1. Misalkan $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Vektor v_1 mempunyai norma 1.

Langkah 2. Untuk memperoleh vektor v_2 yang normanya 1 yang ortogonal terhadap v_1, kita hitung komponen u_2 yang ortogonal terhadap ruang w_1, yang dibangun oleh v_1 dan kemudian normalisasikan komponen u_2 tersebut (gambar2.1) yaitu :

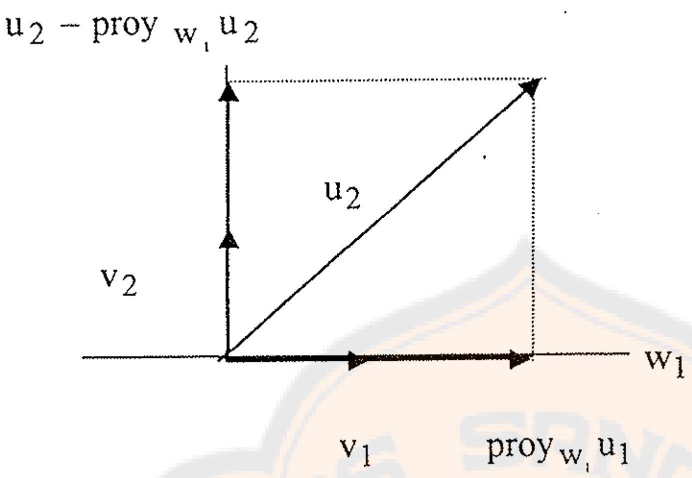
$$v_2 = \frac{u_2 - proy_{w_1} u_2}{\|u_2 - proy_{w_1} u_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

Langkah 3. Untuk memperoleh vektor v_3 yang normanya 1 yang ortogonal terhadap v_1 dan v_2, kita hitung komponen u_3 yang ortogonal terhadap ruang w_2, yang dibangun oleh v_1 dan v_2, kemudian normalisasikan komponen u_3 tersebut (gambar 2.2) yaitu:

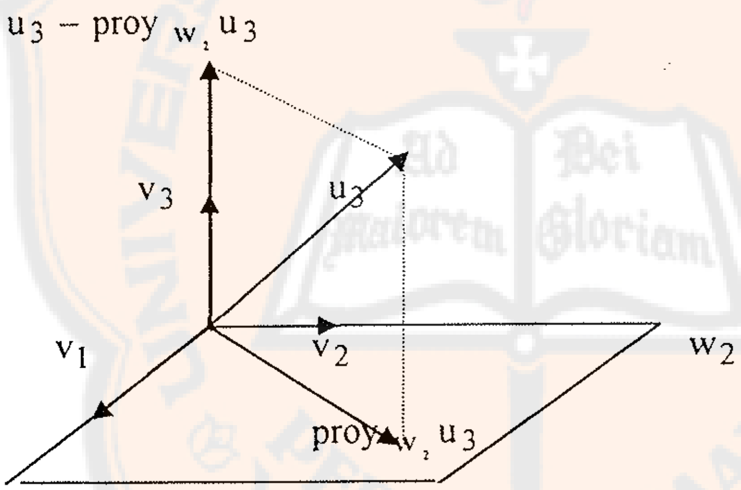
$$v_3 = \frac{u_3 - proy_{w_1} u_3}{\|u_3 - proy_{w_1} u_3\|} = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}$$

Dengan meneruskannya cara ini kita mendapatkan himpunan ortonormal dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Karena V berdimensi n, maka menurut teorema 2.14 dan setiap himpunan ortonormal bebas linear, maka himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ akan merupakan basis ortonormal untuk V.

Pembentukan langkah demi langkah ini disebut Proses gram Schmidt $\square$



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Teorema 2.16

Matriks A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika A simetri.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Andaikan A_{nxn} adalah matriks yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Andaikan P adalah matriks ortogonal yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Menurut definisi 2.29 maka $P^{-1}AP = D$, dengan D matriks diagonal.

$$P^{-1}AP = D$$

$$PP^{-1}AP = PD$$

$$IAP = PD$$

$$APP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$AI = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Karena P ortogonal maka A = PDP^t.

$$A^t = (PDP^t)^t$$

$$A^t = PDP^t$$

Karena A = PDP^t maka $A = A^t$

Jadi menurut definisi 2.32, maka A adalah matriks simetri.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika A matriks simetri maka A dapat didiagonalisasi secara ortogonal dengan induksi matematika.

Jelas, bahwa matriks semetri berordo 1 dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Untuk n ≥ 2, kita asumsikan bahwa untuk setiap matriks simetri berordo n-1 dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Sekarang kita akan membuktikan bahwa matriks simetri A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Andaikan v_1 merupakan vektor eigen yang berkaitan dengan λ dari matriks A dan kita misalkan $x_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$, maka $\|x_1\| = 1$.

Kemudian dengan algoritma Gram Schmidt kita dapat mencari vektor-vektor $x_2, x_3, \dots, x_n$ sehingga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ merupakan himpunan ortonormal.

Bentuk matriks Q = $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{bmatrix}$ yaitu matriks yang kolom ke i nya adalah vektor x_i. Matriks Q adalah matriks ortogonal, karena $Q^t Q = I_n$.

Sekarang kita hitung AQ $= \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & . & . & . & Ax_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda x_1 & Ax_2 & . & . & . & Ax_n \end{bmatrix},$$

karena $Ax_1 = \lambda x_1$. Kemudian kita hitung matriks B $= Q^t A Q$

$$B = \begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x_1 & Ax_2 & . & . & . & Ax_n \end{bmatrix}$$

Karena vektor $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ortonormal, maka kolom pertama dari matriks B adalah $(\lambda, 0.0, \ldots, 0)^t$ atau

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & * & * & . & . & * \\ 0 & * & * & . & . & * \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & * & * & . & . & * \end{bmatrix}$$, dengan * elemen yang munhgkin taknol.

Karena B = $Q^t A Q$, maka $B^t = (Q^t A Q)^t = Q^t A^t Q = Q^t A Q$ = B.

Karena B simetri maka baris pertama dari matriks B sama dengan kolom pertama dari matriks B.

Sehingga bentuk matriks B menjadi :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & * & * & . & . & * \\ 0 & * & * & . & . & * \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & * & * & . & . & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & C & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$, dengan C adalah

matriks simetri berordo n -1.

Sekarang kita asumsikan ada matriks ortogonal R dan matriks diagonal

D_1, sehingga $R^tCR = D_1$. Kita bentuk S = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & R & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$ yang

vektor-vektor kolomnya merupakan himpunan ortonormal. Sehingga

$$S^tBS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & R^t & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & C & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & R & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & . & 0 \\ 0 & & & \\ . & & & \\ . & R^tCR & & \\ . & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & D_1 & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = D,$$ dengan D matriks diagonal berordo n.

Karena B = Q^tAQ maka D $= S^t(Q^tAQ)S = (S^tQ^t)A(QS) = (QS)^tA(QS)$. Andaikan QS = P, maka matriks P adalah ortogonal karena Q dan S matriks-matriks ortogonal sehingga D = $P^t A P$ .Jadi matriks P adalah matriks yang mendiagonalisasi matriks A secara ortogonal. $\square$

Teorema 2.17

Andaikan A_{nxn} adalah matriks simatri maka A mempunyai n buah vektor eigen yang ortonormal.

Bukti :

Diketahui A adalah matriks simetri.Menurut teorema 2.16, maka A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.Karena A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal maka menurut teorema 2.13, A mempunyai n buah vektor eigen yang ortonormal. $\square$

BAB III

APROKSIMASI NILAI EIGEN DOMINAN : METODE PANGKAT

Pada bagian di depan kita telah membahas bahwa nilai eigen suatu matriks bujur sangkar dapat diselesaikan dengan pemecahan persamaan karakteristiknya. Untuk mencari nilai eigen suatu matriks bujursangkar yang berukuran besar terdapat metode penyelesaian yang tidak langsung. Metode ini adalah metode pangkat yang mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian. Metode pangkat tidak menghasilkan nilai yang sebenarnya tetapi menghasilkan beberapa nilai hampiran yang besarnya kesalahan dapat kita kontrol. Berikut akan dibahas tentang definisi nilai eigen dominan dan vektor eigen yang bersesuaian serta suatu teorema tentang aproksimasi terhadap vektor eigen dominan dari suatu matriks bujursangkar.

Definisi 3.1

Sebuah nilai eigen dari suatu matriks bujur sangkar A dinamakan dominan (dominant eigen value) jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari nilai eigen yang lainnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan vektor eigen dominan (dominant eigen vector) A.

Contoh 3.1

Diketahui matriks bujur sangkar $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Nilai-nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda + 5 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 5)(\lambda - 6) = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda + 5)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 6 \ , \ \lambda_2 = -5 \ , \ \lambda_3 = 4$$

Jadi $\lambda_1 = 6$ adalah nilai eigen dominan dari matriks A , karena $|6| > |-5|$, $|6| > |4|$.

Teorema 3.1

Andaikan A adalah matriks bujur sangkar yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan. Jika x_0 adalah sebarang vektor taknol dalam R^n maka $A^p x_0$ dengan eksponen p yang besar merupakan aproksimasi terhadap vektor eigen dominan A.

Bukti :

Andaikan A adalah matriks n x n yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan.

Menurut teorema 2.11 A mempunyai n vektor eigen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dan andaikan $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Karena vektor-vektor eigen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear maka menurut teorema 2.4 vektor- vektor eigen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ membentuk basis untuk R^n. Berarti vektor-vektor eigen membangun R^n. Jadi untuk setiap $x_0 \in R^n$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear , yaitu :

$$x_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$$

$$A x_0 = A(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n) \qquad \text{(kedua ruas dikalikan A)}$$

$$= A k_1 v_1 + A k_2 v_2 + \ldots + A k_n v_n$$

$$= k_1 A v_1 + k_2 A v_2 + \ldots + k_n A v_n$$

$$= k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + k_n \lambda_n v_n \qquad \text{(definisi nilai eigen)}$$

$$A(A x_0) = A(k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + k_n \lambda_n v_n) \qquad \text{(kedua ruas dikalikan A)}$$

$$= A k_1 \lambda_1 v_1 + A k_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + A k_n \lambda_n v_n$$

$$= k_1 A \lambda_1 v_1 + k_2 A \lambda_2 v_2 + \ldots + k_n A \lambda_n v_n$$

$$= k_1 \lambda_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + k_n \lambda_n \lambda_n v_n \qquad \text{(definisi nilai eigen)}$$

$$= k_1 \lambda_1^2 v_1 + k_2 \lambda_2^2 v_2 + \ldots + k_n \lambda_n^2 v_n$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$$A^p x_0 = k_1(\lambda_1^p v_1) + k_2(\lambda_2^p v_2) + \ldots + k_n(\lambda_n^p v_n)$$

(dikalikan sebanyak p oleh A)

$$= \lambda_1^p(k_1 v_1) + \lambda_2^p(k_2 v_2) + \ldots + \lambda_n^p(k_n v_n)$$

$$= \lambda_1^p(k_1 v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^p k_2 v_2 + \ldots + (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^p k_n v_n) \qquad (3.1)$$

Karena $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ maka $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|, \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|$ semuanya mempunyai nilai mutlak yang lebih kecil dari satu . Sehingga jika p semakin besar maka $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^p, (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^p, \ldots, (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^p$ secara terus menerus mendekati nol . Berarti dari persamaan 3.1 kita mendapatkan suatu aproksimasi yaitu :

$$A^p x_0 \approx \lambda_1^p k_1 v_1$$

$A^p x_0 \approx \lambda_1^p k_1 v_1$ merupakan suatu aproksimasi. Jika $k_1 \neq 0$ maka $\lambda_1^p k_1 v_1$ adalah kelipatan skalar taknol dari vektor eigen dominan v_1 . Berarti $\lambda_1^p k_1 v_1$ adalah vektor eigen dominan. Jadi $A^p x_0$ merupakan aproksimasi dari vektor eigen dominan yang semakin baik jika p semakin besar . $\square$

Contoh 3.2

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut :

$|(\lambda I - A)| = 0$

$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0$

$\left| \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right| = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 3) - 4 = 0$

$(\lambda^2 - 6\lambda + 9) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$

Nilai eigen domin an dari matriks A adalah $\lambda_1 = 5$ karena $|5| > |1|$.

Ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan $\lambda_1 = 5$ adalah ruang pemecahan dari sistem persamaan berikut :

$(5I - A)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita mendapatkan $x_1 = 2t$ dan $x_2 = t$, dengan t sebarang konstanta real. Jadi vektor–vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$ adalah vektor–vektor taknol yang berbentuk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$. (3.2)

Sekarang kita akan mengaproksimasi vektor eigen dominan A dengan mengambil sebarang vektor taknol .

Kita akan memulainya dengan mengambil sebarang vektor taknol $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai aproksimasi awal terhadap vektor eigen dominan . Dengan pengalian $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ oleh A secara berulang–ulang menghasilkan aproksimasi sebagai berikut :

$$A x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1,75 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 x_0 = A(A x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 19 \end{bmatrix} = 19 \begin{bmatrix} 1,9473 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 x_0 = A(A^3 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 187 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 937 \\ 469 \end{bmatrix} = 469 \begin{bmatrix} 1{,}9978 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 x_0 = A(A^4 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 937 \\ 469 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4687 \\ 2344 \end{bmatrix} = 2344 \begin{bmatrix} 1{,}9995 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 x_0 = A(A^5 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4687 \\ 2344 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23437 \\ 11719 \end{bmatrix} = 11719 \begin{bmatrix} 1{,}9991 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^7 x_0 = A(A^6 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23437 \\ 11719 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117187 \\ 58594 \end{bmatrix} = 58594 \begin{bmatrix} 1{,}9999 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 x_0 = A(A^7 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 117187 \\ 58594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 585937 \\ 292969 \end{bmatrix} = 292969 \begin{bmatrix} 1{,}9999 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasil pengalian x_0 dengan A semakin mendekati kelipatan skalar dari $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dengan memisalkan t = 1 pada persamaan (3.2) , $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dominan A. Hasil–hasil perhitungan di atas menghasilkan aproksimasi yang semakin baik terhadap vektor eigen dominan A karena kelipatan skalar dari vektor eigen dominan adalah juga vektor eigen dominan.

Jika aproksimasi terhadap vektor eigen dominan telah diketahui maka kita bisa mengaproksimasi nilai eigen dominan.

Berikut akan diperlihatkan bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan jika aproksimasi terhadap vektor eigen dominan telah diketahui.

Misalkan λ adalah nilai eigen A dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian .

Jika $< \, , >$ menyatakan hasil kali dalam Euclides, maka

$$\frac{<x, Ax>}{<x,x>} = \frac{<x, \lambda x>}{<x,x>} = \lambda \frac{<x,x>}{<x,x>} = \lambda .$$

Jika $\tilde{x}$ adalah aproksimasi terhadap vektor eigen dominan, maka nilai eigen dominan

λ_1, dapat diaproksimasikan oleh : $\lambda_1 \approx \dfrac{<\tilde{x}, A\tilde{x}>}{<\tilde{x},\tilde{x}>}$ (3.3)

Persamaan (3.3) dinamakan kuosien Rayleigh.

Contoh 3.3

Dari contoh 3.2 kita mendapatkan

$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 585937 \\ 292969 \end{bmatrix}$ sebagai aproksimasi terhadap vektor eigen.

Jika nilai eigen dominan $\lambda_1 = 5$, dan

$$A\,\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 585937 \\ 292969 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2929687 \\ 1464844 \end{bmatrix}.$$

Maka menurut persamaan (3.3) kita memperoleh :

$$\lambda_1 \approx \frac{<\tilde{x}, A\tilde{x}>}{<\tilde{x},\tilde{x}>}$$

$$\approx \frac{(585937)(2929687) + (292969)(1464844)}{(585937)(585937) + (292969)(292969)}$$

$$\approx \frac{1{,}76612 \,.10^{12} + 4{,}2915388 \,.10^{11}}{3{,}4332216 \,.10^{11} + 8{,}5830834 \,.10^{10}}$$

$$\approx \frac{2{,}1457658 \cdot 10^{12}}{4{,}2915299 \cdot 10^{11}}$$

$$\approx 5{,}000002167$$

$\lambda_1 \approx 5{,}000002167$ merupakan aproksimasi yang baik terhadap nilai eigen dominan $\lambda_1 = 5$.

Contoh 3.2 dan contoh 3.3 merupakan contoh yang melukiskan suatu teknik yang mengaproksimasi nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dominan .

Teknik yang dilukiskan ini disebut metode pangkat (power method) atau metode pengulangan. Metode pangkat ini sering menghasilkan vektor-vektor yang mempunyai komponen–komponen besar yang malah merumitkan seperti terlihat pada contoh 3.2 . Untuk mengatasi hal itu maka vektor eigen aproksimasi tersebut diskalakan ke bawah pada masing–masing langkah sehingga komponen–komponennya terletak di antara +1 dan -1 . Hal ini dapat dicapai dengan cara mengalikan vektor eigen aproksimasi dengan kebalikan komponen yang mempunyai nilai mutlak terbesar.

Contoh 3.4

Dalam contoh 3.3 , aproksimasi awal terhadap vektor eigen dominan adalah

$$A x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Komponen dengan nilai mutlak terbesar adalah 7.

Jadi vektor eigen yang diskalakan ke bawah adalah

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0{,}57142857\end{bmatrix}$$

Untuk melaksanakan prosedur di atas kita perlu mengetahui langkah–langkah dalam metode pangkat dengan metode penskalaan ke bawah .

Berikut iktisar langkah–langkah dalam metode pangkat dengan penskalaan :

Andaikan A matriks bujur sangkar yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan.

1. Langkah 0. Pilihlah vektor taknol x_0 .
2. Langkah 1. Hitunglah A x_0 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi pertama terhadap vektor eigen dominan.

   Sebut vektor eigen tersebut x_1 .
3. Langkah 2 . Hitunglah A x_1 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi kedua , sebut x_2 .
4. Langkah 3 . Hitunglah A x_2 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi ketiga , sebut x_3 .

. . . .

. . . .

. . . .

Urutan $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots.$ yang kita dapatkan merupakan aproksimasi yang semakin bertambah baik terhadap vektor eigen dominan .

Contoh 3.5

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Untuk mengaproksimasi vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan kita menggunakan metode pangkat dengan penskalaan ke bawah seperti ditunjukkan dalam langkah-langkah tersebut di atas.

1.Langkah 0

Kita pilih sebarang vektor taknol sebagai aproksimasi awal $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.Langkah 1

Kita mengalikan x_0 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_1.

$$A\,x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari $A\,x_0$ adalah 7

$$x_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5714 \end{bmatrix}$$

3.Langkah 2

Kita mengalikan x_1 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_2.

$$A x_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,2857 \\ 2,7143 \end{bmatrix}$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari A x_1 adalah 5,2857

$$x_2 = \frac{1}{5,2857} \begin{bmatrix} 5,2857 \\ 2,7143 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5135 \end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan pertama dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_1, Ax_1 >}{< x_1, x_1 >}$$

$$\approx \frac{(1)(5,2857) + (0,5714)(2,7143)}{(1)(1) + (0,5714)(0,5714)}$$

$$\approx \frac{5,2857 + 1,5510}{1 + 0,3265}$$

$$\approx \frac{6,8367}{1,3265}$$

$$\approx 5,1538$$

4.Langkah 3

Kita mengalikan x_2 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_3.

$$A\,x_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}0541 \\ 2{,}5405 \end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlah terbesar dari $A\,x_2$ adalah 5,0541.

$$x_3 = \frac{1}{5{,}0541} \begin{bmatrix} 5{,}0541 \\ 2{,}5405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5027 \end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan kedua dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_2, Ax_2 >}{< x_2, x_2 >}$$

$$\approx \frac{(1)(5{,}0541) + (0{,}5135)(2{,}5405)}{(1)(1) + (0{,}5135)(0{,}5135)}$$

$$\approx \frac{5{,}0541 + 1{,}3046}{1 + 0{,}2637}$$

$$\approx \frac{6{,}3587}{1{,}2637}$$

$$\approx 5{,}0318$$

5.Langkah 4

Kita mengalikan x_3 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_4.

$$A x_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5027 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}0107 \\ 2{,}5080 \end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari $A\,x_3$ adalah 5,0107.

$$x_4 = \frac{1}{5,0107}\begin{bmatrix}5,0107\\2,5080\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0,5005\end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan ketiga dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_3, Ax_3 \rangle}{\langle x_3, x_3 \rangle}$$

$$\approx \frac{(1)(5,0107) + (0,5027)(2,5080)}{(1)(1) + (0,5027)(0,5027)}$$

$$\approx \frac{5,0107 + 1,2607}{1 + 0,2527}$$

$$\approx \frac{6,2514}{1,2527}$$

$$\approx 5,0064$$

6.Langkah 5

Kita mengalikan x_4 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_5.

$$A\,x_4 = \begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0,5005\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5,0021\\2,5016\end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari A x_4 adalah 5,0021.

$$x_5 = \frac{1}{5,0021}\begin{bmatrix}5,0021\\2,5016\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0,5001\end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan keempat dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_4, Ax_4 >}{< x_4, x_4 >}$$

$$\approx \frac{(1)(5{,}0021) + (0{,}5005)(2{,}5016)}{(1)(1) + (0{,}5005)(0{,}5005)}$$

$$\approx \frac{5{,}0021 + 1{,}2521}{1 + 0{,}2505}$$

$$\approx \frac{6{,}2542}{1{,}2505}$$

$$\approx 5{,}0013$$

7.Langkah 6

Kita mengalikan x_5 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_6.

$$A\,x_5 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}0004 \\ 2{,}5003 \end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari A x_5 adalah 5,0004.

$$x_6 = \frac{1}{5{,}0004}\begin{bmatrix} 5{,}0004 \\ 2{,}5003 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5002 \end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan kelima dari nilai eigen dominan adalah:

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_5, Ax_5 >}{< x_5, x_5 >}$$

$$\approx \frac{(1)(5{,}0004) + (0{,}5001)(2{,}5003)}{(1)(1) + (0{,}5001)(0{,}5001)}$$

$$\approx \frac{5,0001 + 1,2504}{1 + 0,2501}$$

$$\approx \frac{6,2509}{1,2501}$$

$$\approx 5,0003$$

8.Langkah 7

Kita mengalikan x_6 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_7.

$$A\,x_6 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,0001 \\ 2,5001 \end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari $A\,x_6$ adalah 5,0001.

$$x_7 = \frac{1}{5,0001} \begin{bmatrix} 5,0001 \\ 2,5001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5000 \end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan keenam dari nilai eigen dominan adalah:

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_6 , Ax_6 >}{< x_6 , x_6 >}$$

$$\approx \frac{(1)(5,0001) + (0,5000)(2,5001)}{(1)(1) + (0,5000)(0,5000)}$$

$$\approx \frac{5,0001 + 1,2500}{1 + 0,2500}$$

$$\approx \frac{6,2501}{1,2500}$$

$$\approx 5,0001$$

9.Langkah 8

Kita mengalikan x_7 dengan A dan menskalakannya ke bawah untuk mendapatkan x_8.

$$A x_7 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,0000 \\ 2,5000 \end{bmatrix}.$$

Komponen nilai mutlak terbesar dari A x_7 adalah 5,0000.

$$x_8 = \frac{1}{5,0000} \begin{bmatrix} 5,0000 \\ 2,5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5000 \end{bmatrix}.$$

Dengan persamaan (3.3) perkiraan ketujuh dari nilai eigen dominan adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \frac{< x_7, Ax_7 >}{< x_7, x_7 >} \\ &\approx \frac{(1)(5,0000) + (0,5000)(2,5000)}{(1)(1) + (0,5000)(0,5000)} \\ &\approx \frac{5,0000 + 1,2500}{1 + 0,2500} \\ &\approx \frac{6,2500}{1,2500} \\ &\approx 5,0000 \end{aligned}$$

Jika meneruskan langkah ini, maka kita akan menghasilkan seurutan aproksimasi terhadap vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan, seperti ditunjukkan oleh tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1

Langkah i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i = aproksimasi terhadap vektor eigen yang diskalakan ke bawah	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5714\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5135\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5027\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5005\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,50002\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,5000\end{bmatrix}$
Ax_i	$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,2857\\2,7143\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0541\\2,5405\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0107\\2,5080\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0021\\2,5016\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0004\\2,5003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0001\\2,5001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5,0000\\2,5000\end{bmatrix}$
Aproksimasi terhadap λ_1	-	5,1538	5,0318	5,0064	5,0013	5,0003	5,0001	5,0000

Dalam penggunaan metode pangkat tersebut tidak ada aturan yang rumit dan cepat untuk pemecahan suatu masalah. Hal ini seperti dilukiskan dalam menentukan berapa langkah yang kita gunakan dengan metode pangkat tersebut.

Untuk mengatasi persoalan ini, ada suatu cara yang dapat digunakan untuk mengontrol berapa besarnya kesalahan terhadap aproksimasi tersebut.

Berikut ini dibahas metode tersebut.

Definisi 3.2

Jika $\tilde{\lambda}$ menyatakan aproksimasi terhadap kuantitas λ maka galat relatif dalam aproksiomasi tersebut didefinisikan sebagai : $E = \left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda}\right|$

Sedangkan galat persentase dalam aproksimasi tersebut didefinisikan sebagai:

$$\left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda}\right| x\, 100 \quad \%$$

Contoh 3.6

Dalam contoh 3.2 diketahui matriks A mempunyai nilai eigen dominan

$\lambda = 5$. Dan dalam contoh 3.5 disebutkan $\tilde{\lambda} = 5{,}00001$ sebuah aproksimasi terhadap λ.

Galat relatif dalam aproksimasi tersebut adalah :

$$E = \left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda}\right| = \left|\frac{5 - 5{,}00001}{5}\right| = \left|\frac{-0{,}00001}{5}\right| = 0{,}000002$$

Galat persentase dalam aproksimasi tersebut adalah :

E x 100% = 0,000002 x 100% = 0,0002%

Jadi galat relatif dan galat persentase dalam aproksimasi tersebut berturut-turut adalah 0,000002 dan 0,0002%.

Penghentian dalam penggunaan metode pangkat untuk mengaproksimasi nilai eigen dan vektor eigen dominan tidak ada batasnya. Untuk mengatasi hal tersebut, kita perlu menetapkan dahulu galat relatif E yang dapat diterima / ditolerir pada nilai eigen tersebut. Jika galat relatifnya lebih kecil dari E maka perhitungan kita hentikan. Berikut suatu gagasan untuk menghentikan perhitungan tersebut.

Definisi 3.3

Jika $\tilde{\lambda}$ (i) menyatakan aproksimasi terhadap nilai eigen dominan λ_1 pada langkah ke- i , maka perhitungan harus dihentikan apabila kondisi berikut telah dipenuhi :

$$\left|\frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}(i)}{\lambda_1}\right| < E$$

Dengan adanya gagasan ini kita bisa menghentikan perhitungan aproksimasi terhadap nilai eigen. Tetapi, gagasan ini tidak mungkin kita laksanakan karena nilai eigen dominan λ_1 tidak diketahui. Untuk memecahkan persoalan ini ada suatu cara yaitu memperkirakan λ_1 dengan $\tilde{\lambda}$ (i) dan menghentikan perhitungan pada langkah ke-i. Cara tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.4

Jika $\left|\dfrac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)}\right|$ menyatakan galat relatif yang diperkirakan maka perhitungan dihentikan pada langkah ke-i, dengan kondisi sebagai berikut: $\left|\dfrac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)}\right| < E$. Jika $\left|\dfrac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)}\right|$ dikalikan 100 % maka hal ini disebut galat persentase yang diperkirakan.

Contoh 3.7

Dari tabel 3.1 kita akan menentukan banyaknya langkah dari galat persentase yang diperkirakan dalam nilai eigen dominan tersebut yang lebih kecil dari 0,02 %.Andaikan $\tilde{\lambda}$ (i) menyatakan aproksimasi terhadap nilai eigen dominan pada langkah ke-i.

Dari tabel 3.1 kita memperoleh:

$\tilde{\lambda}(1) = 5{,}1538$

$\tilde{\lambda}(2) = 5{,}0318$

$\tilde{\lambda}(3) = 5{,}0064$

$\tilde{\lambda}(4) = 5{,}0013$

$\tilde{\lambda}(5) = 5{,}0003$

Galat relatif yang diperkirakan setelah i langkah adalah sebagai berikut :

1. i =2

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(2) - \tilde{\lambda}(1)}{\tilde{\lambda}(2)}\right| = \left|\frac{5{,}0318 - 5{,}1538}{5{,}0318}\right| = \left|\frac{-0{,}1220}{5{,}0318}\right| = 0{,}02425.$$

Galat persentase yang diperkirakan setelah dua langkah adalah 2,425%.

2. i = 3

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(3) - \tilde{\lambda}(2)}{\tilde{\lambda}(3)}\right| = \left|\frac{5{,}0064 - 5{,}0318}{5{,}0064}\right| = \left|\frac{-0{,}0254}{5{,}0064}\right| = 0{,}00507$$

Galat persentase yang diperkirakan setelah tiga langkah adalah 0,507%.

3. i = 4

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(4)-\lambda\tilde{(3)}}{\tilde{\lambda}(4)}\right| = \left|\frac{5{,}0013 - 5{,}0064}{5{,}0013}\right| = \left|\frac{-0{,}0051}{5{,}0013}\right| = 0{,}00102.$$

Galat persentase yang diperkirakan setelah empat langkah adalah 0,102%.

4. i = 5

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(5)-\lambda\tilde{(4)}}{\tilde{\lambda}(5)}\right| = \left|\frac{5{,}0003 - 5{,}0013}{5{,}0003}\right| = \left|\frac{-0{,}0010}{5{,}0003}\right| = 0{,}00020$$

Galat persentase yang diperkirakan setelah lima langkah adalah 0,02%.

5. i = 6

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(6)-\lambda\tilde{(5)}}{\tilde{\lambda}(6)}\right| = \left|\frac{5{,}00005 - 5{,}00026}{5{,}00005}\right| = \left|\frac{-0{,}00024}{5{,}00005}\right| = 0{,}000041.$$

Galat persentase yang diperkirakan setelah lima langkah adalah 0,00041%.

Galat persentase yang diperkirakan setelah 6 langkah adalah 0,00041% yaitu pada akhir langkah keenam.

Tabel 3.2 berikut, memperlihatkan galat persentase yang diperkirakan kurang dari 0,02 %.

Tabel 3.2

i = nomor langkah	2	3	4	5	6
$\tilde{\lambda}_{(i)}$	5,0318	5,0064	5,0013	5,0003	5,0001
Galat relatif yang Diperkirakan setelah i langkah	0,0243	0,0051	0,0010	0,0002	0,00004
Galat persentase yang diperkirakan setelah i langkah	2,4254 %	0,5073 %	0,1022 %	0,0205 %	0,0041 %

BAB IV

APROKSIMASI NILAI EIGEN TAK DOMINAN : DEFLASI DAN PANGKAT INVERS

Pada bab sebelumnya kita telah membahas bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan dan vektor eigen yang bersesuaian dengan metode pangkat. Metode pangkat ini dapat diterapkan untuk mengaproksimasi nilai eigen dan vektor eigen tak dominan jika kita ingin mencari nilai eigen yang lainnya.

Untuk membahas hal tersebut, kita membutuhkan sebuah teorema berikut.

Teorema 4.1

Misalkan A adalah matriks n x n yang simetri dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jika v_1 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 dan $\|v_1\| = 1$ maka :

a. Matriks $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ mempunyai nilai-nilai eigen $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

b. Jika **v** adalah vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan nilai eigen tak nol dalam himpunan $\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ maka v adalah juga vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen ini.

Bukti :

Andaikan A adalah matriks n x n yang simetri dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Menurut teorema 2.16 sehingga A dapat didiagonalisasi secara ortogonal dan menurut teorema 2.13 maka terdapat sebuah himpunan ortonormal dari vektor eigen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ secara berurutan.

a. Diketahui $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$

Untuk membuktikan bagian (a) dari teorema 4.1 kita harus menunjukan $Bv_1 = 0$ dan $Bv_i = \lambda_i v_i$ untuk i = 2,...,n.

(i) Akan dibuktikan bahwa $Bv_1 = 0$

Bukti :

$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ (diketahui)

$Bv_1 = (A - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_1$ (kedua ruas dikalikan dengan v_1)

$Bv_1 = A v_1 - \lambda_1 v_1 v_1^t v_1$

$Bv_1 = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 v_1^t v_1$ (definisi nilai eigen)

$Bv_1 = \lambda_1 v_1 (1 - v_1^t v_1)$

$Bv_1 = \lambda_1 v_1 (1 - \langle v_1, v_1 \rangle)$ (bentuk lain dari hasil kali dalam)

$Bv_1 = \lambda_1 v_1 (1-1)$ (definisi himpunan ortonormal)

$Bv_1 = \lambda_1 v_1 . 0$

$Bv_1 = 0$

Jadi nilai eigen yang bersesuaian dengan v_1 yaitu $\lambda_1 = 0$.

(ii) Akan dibuktikan bahwa B $v_i = \lambda_i v_i$, untuk i = 2,3,...,n

Bukti :

$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$

$B v_i = (A - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_i$ (dikalikan dengan v_i ,i = 2,3,...,n)

$B v_i = A v_i - \lambda_1 v_1 v_1^t v_i$

$B v_i = \lambda_i v_i - \lambda_1 v_1 v_1^t v_i$ (definisi nilai eigen)

$B v_i = \lambda_i v_i - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_i)$

$B v_i = \lambda_i v_i - \lambda_1 v_1 < v_1 , v_i >$

(bentuk lain dari hasil kali dalam)

$B v_i = \lambda_i v_i - \lambda_1 v_1 . 0$ (definisi himpunan ortogonal)

$B v_i = \lambda_i v_i - 0$

$B v_i = \lambda_i v_i$,i = 2,3,...,n

Jadi $0, \lambda_2 ,..., \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks B .

(b) Untuk membuktikan bagian ini kita membuktikan dulu matriks B simetri ($B^t = B$)

Bukti :

$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$

$B^t = (A - \lambda_1 v_1 v_1^t)^t$

$B^t = A^t - (\lambda_1 v_1 v_1^t)^t$

$B^t = A^t - (\lambda_1 (v_1 v_1^t))^t$

$B^t = A^t - \lambda_1{}^t (v_1 v_1^t)^t$

$B^t = A^t - \lambda_1{}^t \; v_1 v_1^t$ (λ adalah skalar)

$B^t = A - \lambda_1{}^t \; v_1 v_1^t$ (diketahui A simetri maka $A = A^t$)

$B^t = B$ ($B = A - \lambda_1{}^t \; v_1 v_1^t$)

Karena $B^t = B$ maka B matriks simetri

Menurut bagian (a) $v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah vektor eigen B yang bersesuaian dengan nilai eigen λ taknol dalam himpunan $\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$.

Andaikan **v** adalah vektor eigen matriks B, dan λ_k adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen tersebut untuk k = 1,2,…, n, maka :

$B\mathbf{v} = \lambda_k \mathbf{v}$ (definisi nilai eigen)

$$(A - \lambda_1 v_1 v_1^t)\, v = \lambda_k v$$

$$A v - \lambda_1 v_1 v_1^t\, v = \lambda_k v$$

$$A v - \lambda_1 v_1 \,.\, 0 = \lambda_k v \qquad \text{(definisi himpunan orthogonal)}$$

$$A v - 0 = \lambda_k v$$

$$A v = \lambda_k v$$

Jadi **v** adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen ini . $\square$

Contoh 4.1

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Nilai-nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut:

$$|(\lambda I - A)| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 4)(\lambda - 7) - 9(\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)((\lambda - 4)(\lambda - 4) - 9) = 0$$

$$(\lambda - 7)((\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 9) = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda - 7)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$$

Ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 7$ adalah ruang pemecahan dari sistem: $[7I - A]\,\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_1 = -t, x_2 = t$, dan $x_3 = s$, dengan t, s sebarang konstanta real.

Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 7$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika v adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 7$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

maka dengan menormalisasikan **v** diperoleh v_1 sebagai berikut :

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{\|v\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1^{\,t} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

Vektor eigen tersebut normanya satu, dimana vektor eigen tersebut bersesuaian dengan $\lambda_1 = 7$.

Menurut teorema 4.1, maka matriks B diperoleh sebagai berikut :

$$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari matriks B yaitu λ dengan :

$$|\lambda I - B| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)(\lambda - 7) - \tfrac{1}{4}(\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda-7)\left((\lambda-\tfrac{1}{2})(\lambda-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{4}\right) = 0$$

$$(\lambda-7)\left(\lambda^2-\lambda+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\right) = 0$$

$$(\lambda-7)\left(\lambda^2-\lambda\right) = 0$$

$$(\lambda-7)(\lambda-1)\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

Jadi nilai-nilai eigen dari matriks B yaitu $\lambda = 0, 7, 1$.

1. Ruang eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 7$, adalah ruang pemecahan dari sistem :

   $$(7\,I - B)\,\mathbf{x} = 0$$

   $$\begin{vmatrix} 7-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{x} = 0$$

   $$\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Diperoleh $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$, t sebarang konstanta real. Sehingga vektor-vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk :

   $$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$, t sebarang konstanta real.

Jadi vektor-vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $x = t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Seperti yang diperkirakan oleh bagian (b) dari teorema 4.1, maka vektor-vektor yang berbentuk $x = \begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}$ tersebut juga merupakan vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$, karena :

$$A\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -3 & 0\\-3 & 4 & 0\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\7t\end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}$$

2. Ruang eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$ adalah ruang pemecahan dari sistem :

$(1I - B)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\-\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 0$, t sebarang konstanta real.

Sehingga vektor-vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk :

$x = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$. Seperti yang diperkirakan oleh bagian (b) teorema 4.1 , vektor-vektor tersebut adalah juga vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$.

Karena $A\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ 7t \\ 0 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$.

4.1 Mengaproksimasi Nilai Eigen Tak Dominan: Metode Deflasi

Teorema 4.1 memungkinkan kita untuk menentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen tak dominan dari matriks bujur sangkar n x n yang simetri. Sehingga nilai-nilai eigen dari matriks A dianggap dapat diurutkan sesuai dengan ukuran nilai-nilai mutlaknya sebagai berikut :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \qquad (4.1)$$

Jika nilai-nilai eigen dan vektor eigen dominan dari matriks A telah didapatkan dengan metode pangkat maka dengan menormalisasikan vektor eigen dominan tersebut , diperoleh vektor eigen dominan v_1 yang mempunyai norma satu. Menurut eorema 4.1 nilai-nilai eigen dari matriks B $= A - \lambda_1 v_1 v_1^t$, akan sama dengan

$0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, maka nilai-nilai eigen pada persamaan 4.1 dapat diurutkan sesuai dengan nilai-nilai mutlaknya sebagai berikut :

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

Jadi λ_2 adalah nilai eigen dominan dari matriks B. Sekarang kita dapat mengaproksimasi nilai eigen λ_2 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan metode pangkat. Metode untuk mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar kedua ini dinamakan metode deflasi.

Contoh berikut melukiskan hal ini .

Contoh 4.1.1

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Nilai-nilai eigen dari matriks A yaitu :

$$|(\lambda I - A)| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 2)((\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ diperoleh sebagai berikut :

$(3\,I - A)\,\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = t$, dengan t dan s sebarang konstanta real.

Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk : $x = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Misal $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ maka :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Dengan menormalisasikan v diperoleh :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$v^t = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Menurut teorema 4.1, maka matriks B yaitu :

$$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3/2 & 0 & 3/2\\0 & 0 & 0\\3/2 & 0 & 3/2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 2 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

Matriks B seharusnya mempunyai nilai eigen $\lambda = 0,2,1$ (menurut teorema 4.1).

Nilai-nilai eigen dari matriks B adalah pemecahan persamaan karakteristik :

$$|\lambda I - B| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda - 1/2 & 0 & 1/2\\0 & \lambda - 2 & 0\\1/2 & 0 & \lambda - 1/2\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 2) - \frac{1}{4}(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 2)((\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Nilai-nilai eigen dari matriks B dengan pemecahan persamaan karakteristiknya sesuai dengan apa yang diperkirakan oleh teorema 4.1.

Ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah ruang pemecahan dari sistem :

$$(2\,\mathrm{I} - \mathrm{B})\,\mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = t$, t dan s sebarang konstanta real.

Sehingga vektor-vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk : $x = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Seperti yang diperkirakan oleh bagian (b) teorema 4.1, vektor-vektor tersebut adalah juga vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$.

Sekarang kita akan menggunakan metode pangkat dengan penskalaan untuk mengaproksimasi vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan dari matriks A

0. Kita pilih sebarang vektor tak nol $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. Kita mengalikan x_0 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6667 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Kita mengalikan x_1 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A x_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0,6667 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,3334 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 1,3334 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4445 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_1, Ax_1 >}{< x_1, x_1 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,6667)(1,3334) + (1)(3)}{1^2 + 0,6667^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,8889 + 3}{1 + 0,4445 + 1}$$

$$= \frac{6,8889}{2,4445}$$

$$= 2,8181$$

3. Kita mengalikan x_2 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4445 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,889 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,889 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2963 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_2, Ax_2 >}{< x_2, x_2 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,4445)(0,889) + (1)(3)}{1^2 + 0,4445^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,3952 + 3}{1 + 0,1976 + 1}$$

$$= \frac{6,3953}{2,1976}$$

$$= 2,9101$$

4. Kita mengalikan x_3 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2963 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5926 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_4 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5926 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1975 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_3, Ax_3 >}{< x_3, x_3 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,2963)(0,5926) + (1)(3)}{1^2 + 0,2963^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,1756 + 3}{1 + 0,0878 + 1}$$

$$= \frac{6,1756}{2,0878}$$

$$= 2,9579.$$

5. Kita mengalikan x_4 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$Ax_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1975 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,395 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_5 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0,395 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1316 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_4, Ax_4 >}{< x_4, x_4 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,1975)(0,395) + (1)(3)}{1^2 + 0,1975^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,078 + 3}{1 + 0,039 + 1}$$

$$= \frac{6,078}{2,039}$$

$$= 2,9809.$$

6. Kita mengalikan x_5 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A\ x_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1316 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,2632 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0,2632 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0877 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_5, Ax_5 >}{< x_5, x_5 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,1316)(0,2632) + (1)(3)}{1^2 + 0,1316^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,0346 + 3}{1 + 0,0173 + 1}$$

$$= \frac{6,0346}{2,0173}$$

$$= 2,9914.$$

7. Kita mengalikan x_6 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A\,x_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0877 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,1754 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_7 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,1754 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0584 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_6, Ax_6 >}{< x_6, x_6 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,0877)(0,1754) + (1)(3)}{1^2 + 0,0877^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,0154 + 3}{1 + 0,0077 + 1}$$

$$= \frac{6,0154}{2,0077}$$

$$= 2,9962.$$

8. Kita mengalikan x_7 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A\,x_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}0584 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}1168 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_8 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}1168 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}0389 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_7, Ax_7 >}{< x_7, x_7 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0{,}0584)(0{,}1168) + (1)(3)}{1^2 + 0{,}0584^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0{,}0068 + 3}{1 + 0{,}0032 + 1}$$

$$= \frac{6{,}0068}{2{,}0032}$$

$$= 2{,}9989.$$

9. Kita mengalikan x_8 dengan A dan menskalakannya ke bawah

$$A\,x_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}0389 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}0778 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_9 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}0778 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}0259 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_8, Ax_8 >}{< x_8, x_8 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,0389)(0,0778) + (1)(3)}{1^2 + 0,0389^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,0030 + 3}{1 + 0,0015 + 1}$$

$$= \frac{6,0030}{2,0015}$$

$$= 2,9993.$$

10. Kita mengalikan x_9 dengan A dan menskalakannya ke bawah.

$$A x_9 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0259 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,0518 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_{10} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,0518 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0172 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_9, Ax_9 >}{< x_9, x_9 >}$$

$$= \frac{(1.)(3) + (0,0259)(0,0518) + (1)(3)}{1^2 + 0,0259^2 + 1^2}$$

$$= \frac{3 + 0,0024 + 3}{1 + 0,0007 + 1}$$

$$= \frac{6,0024}{2,0007}$$

$$= 2,9999.$$

Galat relatif dalam aproksimasi tersebut yaitu:

$$\left|\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\lambda}\right| = \left|\frac{3 - 2{,}9999}{3}\right| = \frac{0{,}0001}{3} = 0{,}000033 \quad .$$

Galat persentase: 0,000033 x 100 % = 0,0033 %.

Vektor eigen dominan dari matriks A tersebut yaitu $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, di mana vektor ini dapat dinormalisasi sehingga menjadi vektor eigen dominan dengan norma 1.

Sehingga menurut teorema 4.1 nilai-nilai eigen dari matriks $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ yaitu 0,2,1. Jika nilai-nilai eigen dari matriks B diurutkan sesuai dengan nilai mutlaknya menjadi $|2| \geq |1| \geq 0$. Jadi $\lambda_2 = 2$ adalah nilai eigen dominan dari matriks B. Oleh karena itu kita bisa menerapkan metode pangkat terhadap matriks B untuk mengaproksimasi nilai eigen λ_2 dan vektor eigen yang bersesuaian.

Contoh 4.1.2

Dari contoh 4.1.1 kita memperoleh matriks $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Nilai eigen dominan dari matriks B yaitu $\lambda_2 = 2$.

Ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan $\lambda_2 = 2$ adalah ruang pemecahan dari sistem : $(2\,I - B)\,\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = t$, dengan t dan s sebarang konstanta real.

Jadi vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk :

$$x = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sekarang kita akan memperkirakan vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan dari matriks B dengan menggunakan teorema 3.1 (metode pangkat dengan penskalaan) sebagai berikut :

0. Kita pilih sebarang vektor taknol yaitu $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai aproksimasi awal terhadap vektor eigen dominan dari matriks B.

1. Kita mengalikan x_0 dengan B dan menskalakannya ke bawah.

$$B\ x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Kita mengalikan x_1 dengan B dan menskalakannya ke bawah.

$$B\ x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{< x_1, Bx_1 >}{< x_1, x_1 >}$$

$$= \frac{(0)(0) + (1)(2) + (0)(0)}{0^2 + 1^2 + 0^2}$$

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2{,}0000.$$

2. Kita mengalikan x_2 dengan B dan menskalakannya ke bawah.

$$\mathrm{B}\,x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{< x_2, Bx_2 >}{< x_2, x_2 >}$$

$$= \frac{(0)(0)+(1)(2)+(0)(0)}{0^2+1^2+0^2}$$

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2{,}0000.$$

Nilai-nilai eigen dapat ditabelkan sebagai berikut :

TABEL 4.1

Langkah i	0	1	2
x_i = aproksimasi terhadap vektor eigen yang diskalakan ke bawah	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Bx_i	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
Aproksimasi terhadap λ_1	-	2,0000	2,0000

Galat relatif dalam aproksimasi tersebut yaitu sebagai berikut :

$\lambda_2 = 2 \qquad \tilde{\lambda} = 2{,}0000$

$$\left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda}\right| = \left|\frac{2{,}0000 - 2{,}0000}{2{,}0000}\right| = \frac{0}{2{,}0000} = 0$$

Galat persentase dari aproksimasi tersebut yaitu :

Galat relatif x 100 % = 0x 100 % = 0 %.

4.2 Mengaproksimasi Nilai Eigen Tak Dominan : Metode Pangkat Invers

Pada bagian di depan, kita telah membahas metode pangkat untuk mengaproksimasi nilai eigen dominan dan metode deflasi untuk mengaproksimasi nilai eigen tak dominan.

Sekarang kita akan metode pangkat invers untuk mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil, bila matriks tersebut dapat dibalik.

Teorema 4.2.1

Andaikan A adalah matriks n x n yang dapat dibalik.

a. λ^{-1} adalah nilai eigen dari A^{-1} jika dan hanya jika λ adalah nilai eigen dari matriks A.

b. x adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika x adalah vektor eigen A^{-1}

Bukti :

Diketahui A adalah matriks n x n yang dapat dibalik

Misalkan A^{-1} adalah invers dari matriks A.

a. ($\Rightarrow$) Andaikan λ^{-1} adalah nilai eigen dari A^{-1}

$A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$

$A^{-1}\mathbf{x} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2}\mathbf{x}$

$\lambda^2 A^{-1}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

$\lambda\ \lambda A^{-1}\mathbf{x} = A\,\mathbf{x}$ (definisi nilai eigen)

$\lambda\, I\,\mathbf{x} = A\,\mathbf{x}$

$I\,\lambda\,\mathbf{x} = I\,A\,\mathbf{x}$

$I\,\lambda\,\mathbf{x} = A^{-1}A\,A\,\mathbf{x}$

$A\,I\,\lambda\,\mathbf{x} = A\,A^{-1}A\,A\,\mathbf{x}$

$A\,\lambda\,\mathbf{x} = I\,A\,A\,\mathbf{x}$

$A\,\lambda\,\mathbf{x} = A\,A\,\mathbf{x}$

$A\,\lambda\,\mathbf{x} = \lambda\,\lambda\,\mathbf{x}$

$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

Jadi λ adalah nilai eigen dari matriks A.

($\Leftarrow$) Andaikan λ adalah nilai eigen dari A

$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

$\lambda\,\mathbf{x} = \mathrm{A}\,\mathbf{x}$ (equivalen)

$\mathrm{A}\lambda\,\mathbf{x} = \mathrm{A}\,\mathrm{A}\,\mathbf{x}$

$A^{-1}\,\mathrm{A}\lambda\,\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{A}\,\mathbf{x}$

$A^{-1}\,\lambda\,\lambda\,\mathbf{x} = \mathrm{I}\,\mathrm{A}\,\mathbf{x}$

$A^{-1}\,\lambda^2\,\mathbf{x} = \mathrm{A}\,\mathbf{x}$

$A^{-1}\,\mathbf{x} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2}\mathbf{x}$

$A^{-1}\,\mathbf{x} = \lambda^{-1}\,\mathbf{x}$

Jadi λ^{-1} adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan A^{-1}. □

b. $(\Rightarrow)$

Diketahui **x** adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka **x** adalah juga vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ^{-1} (akibat dari teorema 4.2.1(a $(\Leftarrow)$).

$(\Leftarrow)$

Diketahui **x** adalah vektor eigen A^{-1} yang bersesuaian dengan nilai eigen λ^{-1}, maka **x** adalah juga vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ (akibat dari teorema 4.2.1(a$(\Rightarrow)$).

Nilai eigen dari matriks A dapat diurutkan sesuai dengan nilai mutlaknya yaitu :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \qquad (4.2.1)$$

Dari persamaan (4.2.1) maka $\frac{1}{\lambda_x}$ merupakan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} yang dapat diaproksimasi dengan metode pangkat.

Nilai eigen dari matriks A^{-1} dengan nilai mutlak terkecil dapat digunakan secara timbal balik untuk mencari nilai eigen dominan matriks A.

Contoh 4.2.1

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix}$

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah sebarang vektor taknol.

Nilai-nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut :

$|(\lambda I - A)| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda + 3)\lambda - 4 = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = -4$ dan $\lambda_2 = 1$

Nilai mutlak terkecil dari nilai eigen tersebut yaitu 1.

Sedangkan nilai-nilai eigen dari matriks A^{-1} diperoleh sebagai berikut :

$$|(\lambda I - A^{-1})| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -0,5 \\ -0,5 & \lambda - 0,75 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 0,75) - 0,25 = 0$$

$$\lambda^2 - 0,75\lambda - 0,25 = 0$$

$$(\lambda + 0,25)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -0,25 \text{ dan } \lambda_2 = 1$$

Nilai mutlak terkecil dari matriks A^{-1} yaitu $\lambda_1 = \ 0,25$.

Dari hal ini kita memperoleh suatu hubungan yang timbal balik antara nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil dari matriks A^{-1} dengan nilai eigen dominan dari matriks A, yaitu nilai mutlak terkecil dari matriks A^{-1} yaitu $\lambda_1 = \ 0,25$.

Sehingga $\frac{1}{\lambda_1} = \ 4$ merupakan nilai eigen dominan dari matriks A.

Sekarang kita akan mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil dari matriks A dan vektor eigen yang bersesuaian, jika vektor awal diketahui

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kita menerapkan langkah-langkah pada metode pangkat dengan penskalaan untuk mengaprksimasi nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai mutlak terkecil.

0. Kita pilih sebarang vektor taknol $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Kita mengalikan x_0 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1}\ x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{1{,}25} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Kita mengalikan x_1 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1}\ x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}95 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{0{,}95} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5263 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_1, A^{-1} x_1 >}{< x_1, x_1 >}$$

$$= \frac{(0{,}4)(0{,}5) + (1)(0{,}95)}{(0{,}4)(0{,}4) + (1)(1)}$$

$$= \frac{0{,}2 + 0{,}95}{0{,}16 + 1}$$

$$= \frac{1{,}15}{1{,}16}$$

$$= 0{,}9913$$

3. Kita mengalikan x_2 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1}x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5263 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0132 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{1,0132} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0132 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4935 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_2, A^{-1}x_2 >}{< x_2, x_2 >}$$

$$= \frac{(0,5263)(0,5) + (1)(1,0132)}{(0,5263)(0,5263) + (1)(1)}$$

$$= \frac{0,2632 + 1,0136}{0,2770 + 1}$$

$$= \frac{1,2767}{1,2770}$$

$$= 0,9998$$

4. Kita mengalikan x_3 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1}x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4935 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,9968 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{0,9968} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,9968 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5016 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_3, A^{-1}x_3 >}{< x_3, x_3 >}$$

$$= \frac{(0,4935)(0,5) + (1)(0,9968)}{(0,4935)(0,4935) + (1)(1)}$$

$$= \frac{0,2468 + 0,9968}{0,2435 + 1}$$

$$= \frac{1,2435}{1,2435}$$

$$= 0,9999$$

5. Kita mengalikan x_4 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1}\,x_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5016 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0004 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = \frac{1}{1,0004} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4996 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_4 , A^{-1} x_4 >}{< x_4 , x_4 >}$$

$$= \frac{(0,5016)(0,5) + (1)(1,0008)}{(0,5016)(0,5016) + (1)(1)}$$

$$= \frac{0,2508 + 1,0008}{0,2516 + 1}$$

$$= \frac{1,251629}{1,251631}$$

$$= 0,9999$$

$$= \frac{1,251629}{1,251631}$$

$$= 0,9999$$

6. Kita mengalikan x_5 dengan A^{-1} dan menskalakannya ke bawah.

$$A^{-1} \quad x_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4996 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}9998 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = \frac{1}{0{,}9998} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}9998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_5, A^{-1} x_5 >}{< x_5, x_5 >}$$

$$= \frac{(0{,}4996)(0{,}5) + (1)(0{,}9980)}{(0{,}4996)(0{,}4996) + (1)(1)}$$

$$= \frac{0{,}2498 + 0{,}9998}{0{,}2496 + 1}$$

$$= \frac{1{,}2496}{1{,}2496}$$

$$= 1$$

Setelah enam pengulangan dengan metode pangkat invers, aproksimasi terhadap λ_2 dan vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$\lambda_2 \approx 1 \qquad x \approx \begin{bmatrix} 0{,}5001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai abstrak dari aproksimasi tersebut adalah :

$$\lambda_2 = 1 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai perkiraan tersebut, dapat kita tabelkan sebagai berikut :

Tabel 4.2.1

Langkah i	0	1	2	3
x_i = aproksimasi terhadap vektor eigen yang diskalakan ke bawah	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,4\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5263\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,4935\\1\end{bmatrix}$
$A^{-1}\ x_i$	$\begin{bmatrix}0,5\\1,25\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5\\0,95\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5\\1,0132\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5\\0,9968\end{bmatrix}$
Aproksimasi terhadap λ_2	-	0,9913	0,9998	0,9999

Langkah i	4	5	6
x_i = aproksimasi terhadap vektor eigen yang diskalakan ke bawah	$\begin{bmatrix}0,5016\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,4996\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5001\\1\end{bmatrix}$
$A^{-1}\ x_i$	$\begin{bmatrix}0,5\\1,0004\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5\\0,9998\end{bmatrix}$	-
Aproksimasi terhadap λ_2	0,9999	1	-

BAB V

KESIMPULAN

Pada bagian ini kita akan menyimpulkan hal-hal yang penting dari penulisan skripsi tentang aproksimasi terhadap nilai eigen dominan dan tak dominan.

Pemecahan sistem persamaan linear merupakan masalah matriks pertama, sedangkan masalah nilai eigen merupakan masalah matriks yang kedua.

Masalah pemecahan nilai eigen dapat diselesaikan dengan penyelesaian persamaan karakteristiknya yaitu $|(\lambda I - A)| = 0$ dan $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = 0$ merupakan ruang pemecahan dari ruang eigen. Selain melalui penyelesaian persamaan karakteristiknya ada suatu metode lain yang bisa menghampiri nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian yaitu metode pangkat.

Untuk mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar pertama dapat digunakan metode pangkat. Andaikan A matriks bujursangkar yang simetri dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, v_1 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 dan $\|v_1\| = 1$, maka $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ mempunyai nilai-nilai eigen 0, $\lambda_2, \ldots \lambda_n$. Untuk mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar kedua dapat digunakan metode deflasi. Aproksimasi dengan nilai terbesar kedua merupakan aproksimasi nilai eigen tak dominan.

Andaikan A adalah matriks yang dapat dibalik maka untuk mengaproksimasi nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil dapat digunakan metode pangkat invers.

Aproksimasi dengan nilai mutlak terkecil merupakan aproksimasi terhadap nilai eigen tak dominan. Jadi untuk mengaproksimasi nilai eigen dominan dapat digunakan metode pangkat dan untuk mengaproksimasi nilai eigen tak dominan dapat digunakan metode deflasi dan metode pangkat invers.

Metode-metode tersebut mempunyai kelebihan dan kelemahan.

Kelebihan dari metode-metode tersebut yaitu :

1. Kita dapat mengaproksimasi nilai eigen sampai dengan mendekati nilai eigen yang dimaksud.
2. Kita dapat mengaproksimasi vektor eigen dengan menggunakan sebarang vektor tak nol.

Sedangkan kelemahan dari metode-metode tersebut yaitu : tidak adanya suatu batasan langkah kapan kita harus berhenti untuk mengaproksimasi nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. . 1988. *Aljabar Linear Elementer.* Terj. Oleh Pantur Silaban, Ph. D dan Drs. I. Nyoman Susila, M. Sc. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Budi, Wono S. . 1995. *Aljabar Linear.* Jakarta : P T Gramedia Pustaka Ilmu.

Cullen, Charles G. .1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya.* Jakarta : P T Gramedia Pustaka Ilmu.

Hadley, G. . 1983. *Aljabar Linear.* Terj. Oleh Drs. Naipospos dan Dra. Noeniek Soemartoyo. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Hager, William W. . 1988. *Applied Numerical Linear Algebra.* London Prentice-Hall International, Inc.

Jacob, Bill. . 1991. *Linear Algebra.* London Prentice-Hall International, Inc.

Moore, Hal G. . 1991. *A First Course In Linear Algebra.* Harper Collins Pubrishers.

Scheid, Francis, Ph. D. .1988. *Analisis Numerik.* Terj. Oleh Pantur Silaban, Ph. D. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Suryadi, H. S. . 1991. *Pengantar Aljabar Linear dan Geometri Analitik.* Jakarta : Penerbit Gunadharma.