PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

MODUL NOETHER

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

YUNIT HERMINAWATI
NIM : 971414006
NIRM : 970051120501120005

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA dan ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN dan ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2002

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

MODUL NOETHER

oleh
Yunit Herminawati

NIM : 971414006

NIRM : 970051120501120005

Telah Disetujui Oleh :

Pembimbing

Dra. Maria Agustiani,M.Si.

Tanggal , 16-8-2002

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

MODUL NOETHER

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Yunit Herminawati

NIM : 971414006

NIRM : 970051120501120005

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal , 9 Agustus 2002

Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	Drs. A. Atmadi, M.Si	....
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, MT	....
Anggota	:	Dr.Y. Marpaung	....
Anggota	:	Dra. Maria Agustiani, M.Si	....
Anggota	:	MV.Any Herawati, S.Si, M.Si	....

Yogyakarta, 14 Agustus 2002

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

" Percayalah kepada Tuhan dengan segenap hatimu, janganlah bersandar pada pengetahuanmu semata. Akuilah Dia dalam segala lakumu, maka Tuhan akan membuat jalanmu lurus ". (Ams 3 : 5 – 6) "

Tulisan ini Kupersembahkan untuk Tarekat Suster-Suster Santo Fransiskus dari Tapa Denda dan Cinta Kasih Kristiani & Komunitas " Maria Tak Bernoda " Yogyakarta.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan ini saya nyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan daftar pustaka, sebagaimana layaknya sebuah karya ilmiah.

Yogyakarta, Juli 2002

Penulis

Yunit Herminawati

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRAK

Himpunan tak kosong M disebut modul kiri atas ring R dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $f : R \times M \longrightarrow M$ dimana $f(r,m) = rm \in M$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. $(M,+)$ grup komutatif
2. $\forall r,s \in R, \forall m,n \in M$ berlaku :

   $(r+s)m = rm + rs$

   $r(m+n) = rm + rn$

   $(rs)m = r(sm)$

   $1m = m$

Suatu modul M atas ring R dikatakan memenuhi *syarat rantai naik* bila $M_1, M_2, \ldots$ submodul dari modul kiri M atas ring R dengan elemen satuan sedemikian sehingga $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ dan $(\exists n \in Z^+) M_i = M_n, \forall i \geq n$.

Selanjutnya jika terdapat suatu barisan eksak $\{0\} \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$ dimana L memenuhi syarat rantai naik maka K dan M pasti memenuhi syarat rantai naik.

Suatu modul yang memenuhi syarat rantai naik (*Ascending Chain Condition*) disebut *Modul Noether*.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan yang Maha Kasih dan Maha Baik, atas rahmat dan berkatNya yang berlimpah sehingga skripsi yang berjudul Modul Noether dapat terselesaikan.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada :

1. Dra. Maria Agustiani, M.Si selaku pembimbing skripsi yang dengan penuh kesabaran, keuletan dan ketekunan membimbing dalam penyusunan skripsi ini.
2. Drs.A.Atmadi, M.Si selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma.
3. Drs. Th. Sugiarto, MT selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma yang selalu memberikan dorongan dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu Dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
5. Tarekat OSF Semarang, yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk studi di Universitas Sanata Dharma, terima kasih atas segala dukungan dan fasilitas yang boleh penulis terima selama studi dan menyelesaikan skripsi ini.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

6. Bpk. Nardjo, Bpk. Sugeng beserta Bapak, Ibu karyawan/wati Universitas Sanata Dharma yang telah membantu penulis selama studi dan menyelesaikan skripsi ini.
7. Rekan-rekan mahasiswa prodi matematika semuanya, yang telah memberi dukungan semangat demi terselesainya skripsi ini.
8. Saudara, sahabat dan kenalanku khususnya Sr.M.Leonarda OSF, Sr.M.Laurentia OSF, Sr.M.Laurentine dan para Suster serta Br.Markus FIC, mas Yuli, Ferry dan Yati, yang telah berpartisipasi baik sebagai penasehat, pendorong, penterjemah, pengetikan maupun pengeditan dalam penyusunan skripsi ini.
9. Seluruh armada bis kota khususnya jalur 2 dan angkutan desa jalur 21 yang setia mengantar saya sampai di kampus.

Penulis menyadari kekurangan dan keterbatasan dalam penyusunan skripsi ini, maka saran dan kritik yang membangun akan diterima dengan hati terbuka.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, Juli 2002

Salam dan hormat

Penulis

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI

Halaman

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Modul atas ring R merupakan perluasan dari ruang vektor atas suatu field. Pada ruang vektor daerah operator adalah field, pada modul sebagai daerah operator adalah ring.

Himpunan tak kosong M disebut *modul kiri atas ring* R dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $\varphi : R \times M \to M$ dimana $\varphi(r, m) = r\,m \in M$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. $(M, +)$ grup komutatif
2. $\forall r, s \in R, \forall m, n \in M$ berlaku :

   $(r + s)\,m = r\,m + s\,m$

   $r\,(m + n) = r\,m + r\,n$

   $(rs)\,m = r\,(sm)$

   $1\,m = m$

Jika pada definisi di atas operasi perkalian skalar didefinisikan oleh $\theta : M \times R \to M$ dengan $\theta(m,r) = mr \in M$, maka M disebut *modul kanan atas ring R*.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Seperti dalam teori grup, teori ring, dalam teori modul juga dikenal submodul. Pada pembahasan teori modul akan dibahas tentang submodul dan sifat-sifat yang berkaitan dengan submodul.

Jika himpunan bagian yang tak kosong dari suatu modul juga merupakan modul terhadap operasi yang sama seperti dalam modul tersebut maka disebut submodul.

Bila M_1 , M_2 , ... submodul dari modul kiri M atas ring R dengan elemen satuan sedemikian sehingga $M_1 \subset M_2 \subset$ .... dan $(\exists n \in Z^+)\ M_i = M_n$, $\forall i \geq n$ maka modul M atas R dikatakan memenuhi *syarat rantai naik.*

Selanjutnya modul yang memenuhi *syarat rantai naik (Ascending Chain Condition)* disebut **Modul Noether**.

1.2 Perumusan Masalah

Adapun masalah-masalah yang akan diungkapkan dalam tulisan ini adalah sebagai berikut :

1. Apakah yang dimaksud dengan modul dan contoh-contoh yang masuk menjadi modul tersebut ?
2. Apakah yang dimaksud dengan modul Noether ?
3. Teorema-teorema apa saja yang berkaitan dengan modul Noether ?

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya akan membahas tentang modul kiri saja, karena sifat yang berlaku dalam modul kiri juga berlaku dalam modul kanan juga.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian Modul Noether, mengetahui sifat-sifat dan teorema yang berlaku dalam Modul Noether. Untuk memperdalam pengetahuan tentang aljabar yang penulis peroleh dalam perkuliahan.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam menyusun skripsi ini adalah dengan studi pustaka yaitu dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan judul tulisan ini.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini, akan dibahas pengertian modul. Pada subbab pertama akan dibahas definisi modul dan submodul serta teorema-teorema dan contoh-contohnya, yang merupakan pengembangan dari pengertian submodul.

Pada subbab kedua akan dibahas penjumlahan langsung, dilanjutkan subbab berikutnya mengenai modul terbangkit hingga, kemudian subbab ke-empat akan dibahas modul faktor.

2.1. Modul dan Submodul

Definisi 2.1.1

Himpunan tak kosong M disebut *modul kiri atas ring* R dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $\varphi : R \times M \rightarrow M$ dimana $\varphi(r, m) = r\,m \in M$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. (M, +) grup komutatif
2. $\forall r, s \in R, \forall m, n \in M$ berlaku :

   $(r + s)\,m = r\,m + s\,m$

   $r\,(m + n) = r\,m + r\,n$

   $(rs)\,m = r\,(sm)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$1m = m$

Jika pada definisi di atas, operasi perkalian skalar didefinisikan $\varphi : M \times R \rightarrow M$ dimana $\varphi(m,r) = mr \in M$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$, maka M disebut *modul kanan atas ring R*.

Contoh :

1. Jika $\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ maka $\mathbb{C}$ merupakan modul atas $\mathbb{R}$.

Bukti :

Seperti kita ketahui bahwa $\mathbb{C}$ merupakan grup terhadap penjumlahan bilangan kompleks dan merupakan *grup Abel*. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{C}$ memenuhi syarat modul.

Ambil $x = a + bi \in \mathbb{C}$ dan $y = c + di \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$

a) $r(x+y) = rx + ry$, maka akan dibuktikan

$r(x+y) = r((a+bi)+(c+di))$, dapat ditulis sebagai berikut :

$= r((a+c)+(b+d)i)$

$= r(a+c) + r(b+d)i$

$= ra + rc + rbi + rdi$

$= (ra + rbi) + (rc + rdi)$

$= r(a+bi) + r(c+di)$

$= rx + ry$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

b) Akan ditunjukkan :

$(r+s)(a+bi) = r(a+bi) + s(a+bi)$

$(r+s)(a+bi) = (r+s)a + (r+s)bi$

$= ra + sa + rbi + sbi$

$= r(a+bi) + s(a+bi)$

c) Akan ditunjukkan :

$r(s(a+bi)) = (rs)(a+bi)$

$r(s(a+bi) = rsa + rsbi$

$= (rs + 0i)(a+bi)$

$= rs(a+bi)$

d) $1(a+bi) = a+bi$

Karena syarat modul dipenuhi, jadi $\mathbb{C}$ merupakan modul. ■

2. $(\mathbb{Z}, +, \bullet), (\mathbb{Q}, +, \bullet), (\mathbb{R}, +, \bullet), (\mathbb{C}, +, \bullet)$ adalah ring dengan elemen satuan, maka $M = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$, ring $\mathbb{Q}$, ring $\mathbb{R}$, ring $\mathbb{C}$.

3. Jika $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ maka S modul kiri atas $\mathbb{R}$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa S adalah *grup aditif*.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

a) Ambil matriks A dan matriks B berordo 2×2 yaitu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \mathbb{R}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b+(-d) & a+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix}$$

Karena $a + c$, $b + d$, $-b - d \in \mathbb{R}$, maka $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} \in S$

Jadi $A + B \in S$.

b) Ambil matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$, $a, b, c, d,$ $e, f \in \mathbb{R}$

$$(A + B) + C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b+(-d) & a+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -b+(-d)+(-f) & a+c+e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -b-d-f & a+c+e \end{pmatrix}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ -d+(-f) & c+e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -b+(-d)+(-f) & a+c+e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -b-d-f & a+c+e \end{pmatrix}$$

Jadi $(A + B) + C = A + (B + C)$ bersifat assosiatif.

c) Ambil matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, a,b $\in \mathbb{R}$

Misal B adalah matriks identitasnya, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

Maka $B + A = A + B = A$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & d+b \\ -d+(-b) & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Menurut kesamaan matriks diperoleh :

a + c = a , d + b = b , –d + (–b) = –b , setelah dihitung persamaan tersebut diperoleh c = 0 , d = 0 , –d = 0. Jadi matriks identitasnya adalah $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Misal $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$A^{-1} + A = A + A^{-1} = B$$

$$A^{-1} + A = B$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c+a & d+b \\ e+(-b) & f+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari kesamaan matriks didapat $c + a = 0$, $d + b = 0$, $e + (-b) = 0$, $f + a = 0$, setelah persamaan itu dihitung akan diperoleh $c = -a$, $d = -b$, $e = b$ dan $f = -a$

Jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$

e) Ambil matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \mathbb{R}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b+(-d) & a+c \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+a & d+b \\ -d+(-b) & c+a \end{pmatrix}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b+(-d) & a+c \end{pmatrix}$$

Karena penjumlahan matriks bersifat komutatif, maka (S, +) merupakan *grup komutatif.*

Selanjutnya akan ditunjukkan S *memenuhi syarat modul.*

Ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \mathbb{R}$ dan $r \in \mathbb{R}$

i) $r(A+B) = rA + rB$

$$r(A+B) = r\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\left[\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b+(-d) & a+c \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} r(a+c) & r(b+d) \\ r(-b+(-d)) & r(a+c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ra+rc & rb+rd \\ r(-b)+r(-d) & ra+rc \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} ra & rb \\ r(-b) & ra \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rc & rd \\ r(-d) & rc \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= rA + rB$$

ii) $$(r+s)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+s)a & (r+s)b \\ (r+s)-b & (r+s)a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ra+sa & rb+sb \\ -rb+(-sb) & ra+sa \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ra+sa & rb+sb \\ r(-b)+s(-b) & r+sa \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= rA + sA$$

iii) $$r\left[s\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right] = (rs)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$r\left[s\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right] = r\begin{pmatrix} sa & sb \\ s(-b) & sa \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} rsa & rsb \\ rs(-b) & rsa \end{pmatrix}$$

$$= rs\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

iv) $$1\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a & 1b \\ 1(-b) & 1a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Karena syarat modul kiri dipenuhi, maka *S merupakan modul kiri atas* $\mathbb{R}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

4. Jika G grup abel, maka G merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$ dengan operasi perkalian skalar didefinisikan :

$na = (n-1)a + a$, jika $n > 0$

$na = 0$, jika $n = 0$

Jika n negatif , maka $n = -p$, dengan $p > 0$ dan

$na = (-p)a = p(-a)$, dimana $n \in \mathbb{Z}$ dan $a \in G$

Selanjutnya yang dimaksud modul atas ring R adalah *modul kiri atas ring* R dengan elemen satuan

Teorema 2.1.2

Jika M modul atas ring R, maka $\forall r \in R$, $\forall a \in M$ berlaku :

1. $0_R . a = 0_M$
2. $r . 0_M = 0_M$
3. $(-r) . a = -(r a) = r(-a)$

Bukti :

1. $0_R . a = (0_R + 0_R)a$, (0_R elemen identitas ring R)

$0_R . a = 0_R . a + 0_R . a$, (aksioma modul)

$(0_R . a) + -(0_R . a) = (0_R a + 0_R a) + (-0_R a)$, ($0_R a \in M$ punya invers $-(0_R a) \in$ M)

$0_M = 0_R a + (0_R a + (-0_R a))$, (asosiatif pada M)

$0_M + 0_M = 0_R a + 0_M$, (0_M elemen identitas pada M, definisi invers)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$0_M \quad = 0_R a$, (kanselasi kanan)

2. $r.\, 0_M = r\,(0_M + 0_M) = r\, 0_M + r\, 0_M$, (0_M elemen identitas pada M)

$r\, 0_M + (-(r\, 0_M)) = (r\, 0_M + r\, 0_M) + (-r\, 0_M)$, ($r\, 0_M \in M$ punya invers $-0_M \in M$)

$0_M = r\, 0_M + (r\, 0_M + (-(r\, 0_M)))$, (asosiatif pada M)

$0_M + 0_M = r\, 0_M + 0_M$, (0_M elemen identitas pada M, definisi invers)

$0_M = r\, 0_M$, (kanselasi kanan)

3. $(r + (-r))a = 0_R\, a = 0_M$, (definisi invers,aksioma modul)

$(r + (-r))a = r\, a + (-r)a$, (aksioma modul)

di sisi lain $r\, a + (-(r\, a)) = 0_M$, $r\, a \in M$

Jadi $(-r)a = (-r\, a)$. ■

Definisi 2.1.3

Jika M modul atas ring R dan N himpunan bagian tak kosong dari M, maka N disebut submodul dari M bila N merupakan modul terhadap operasi yang sama dengan operasi dalam M.

Teorema 2.1.4

Jika M modul atas ring R dan N himpunan bagian tak kosong dari M, maka N submodul dari M bila dan hanya bila :

i) $N \neq \emptyset$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ii) $(\forall a_1, a_2 \in N)\ a_1 - a_2 \in N$

iii) $(\forall r \in R)\ (\forall a \in N)\ r\,a \in N$

Bukti :

($\Rightarrow$) Karena N submodul dari M, maka menurut definisi, N juga merupakan modul. Oleh karena N modul maka ada elemen identitas $0 \in N$. Ini berarti $N \neq \emptyset$, karena N subgrup aditif maka $a_1 - a_2 \in N$, $\forall a_1$, $a_2 \in N$ dan karena N submodul maka (iii) dipenuhi.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan N *subgrup aditif*

Karena i) dan ii) dipenuhi maka N subgrup aditif dari M. Oleh karena M Abel dan $N \subseteq M$ maka N subgrup Abel.

Karena $(\forall r \in R)\ (\forall a \in N)\ r\,a \in N$ dipenuhi, maka

$(r + s)\,a = ra + sa$

$r\,(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2$

$r\,(a_1\,a_2) = (r\,a_1)\,a_2$

$1_R \cdot a = a$

Jadi terbukti bahwa N submodul dari M. ■

Teorema 2.1.5

Jika M_1 dan M_2 masing-masing adalah submodul dari M atas R, maka $M_1 \cap M_2$ suatu submodul dari M pula.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Diketahui M_1 dan M_2 submodul dari M. Akan dibuktikan $M_1 \cap M_2$ submodul dari M.

Perhatikan bahwa :

1. M_1 , M_2 submodul dari M maka $0_M \in M_1$ dan $0_M \in M_2$,maka $0_M \in M_1 \cap M_2$. Jadi $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$.
2. Ambil sebarang $x,y \in M_1 \cap M_2$, sehingga $x,y \in M_1$ dan $x,y \in M_2$, karena M_1, M_2 submodul maka $x-y \in M_1$ dan $x-y \in M_2$ sehingga $x-y \in M_1 \cap M_2$
3. Ambil $r \in R$ dan $x \in M_1 \cap M_2$, maka $x \in M_1$ dan $x \in M_2$. Padahal M_1, M_2 submodul maka $rx \in M_1$ dan $rx \in M_2$ sehingga diperoleh $rx \in M_1 \cap M_2$

Jadi $M_1 \cap M_2$ merupakan submodul dari M . ■

Teorema 2.1.6

Jika M_i submodul dari modul M atas R ,$\forall i \geq 1$, dengan $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$, maka $\bigcup_{i\geq 1} M_i$ submodul dari M.

Bukti :

Diketahui M_i submodul dari M, $\forall i \geq 1$ sedemikian sehingga $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$, karena M_i merupakan submodul dari M, maka $0_M \in M_i$, $\forall i \geq 1$.

Sehingga $0_M \in \bigcup_{i\geq 1} M_i$, maka $\bigcup_{i\geq 1} M_i \neq \varnothing$

Ambil sebarang $x, y \in \bigcup_{i\geq 1} M_i$, maka diperoleh dua kemungkinan yaitu :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

i) $(\exists r)\, x, y \in M_r$ *maka* $x - y \in M_r$ *sehingga* $x - y \in \bigcup_{i \geq 1} M_i$

ii) $(\exists r, s)\, x \in M_r$ *dan* $y \in M_s$. Karena $x \in M_r$ *dan* $y \in M_s$, untuk suatu $r,s \geq 1$, maka akan diperoleh :

Jika $r < s$ maka $M_r \subset M_s$. Akibatnya $x \in M_s$ dan $y \in M_s$ maka $x - y \in M_s$. Jadi $x - y \in \bigcup_{i \geq 1} M_i$.

Untuk $r > s$, karena $M_s \subset M_r$ dan $y \in M_s$ maka $y \in M_r$, sehingga $x \in M_r$ dan $y \in M_r$, maka $x - y \in M_r$. Jadi $x - y \in \bigcup_{i \geq 1} M_i$

Ambil $r \in R$ dan $x \in \bigcup_{i \geq 1} M_i$ maka $(\exists k)\, x \in M_k$, karena $x \in M_k$ dan M_k submodul maka $r.x \in M_k$. Dengan demikian $r.x \in \bigcup_{i \geq 1} M_i$

Jadi $\bigcup_{i \geq 1} M_i$ merupakan submodul dari M. ■

Contoh :

1. Perhatikan bahwa $\{0\}$ dan M merupakan submodul dari modul M, sehingga setiap modul sekurang-kurangnya mempunyai dua submodul dari modul M atas ring R.
2. Jika V ruang vektor, maka subruang dari ruang vektor V merupakan submodul dari modul V atas field F.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2.2 Jumlahan langsung

Teorema 2.2.1

Jika S_i submodul dari modul M atas R maka $S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \{s_1 + s_2 + \cdots + s_n \mid s_i \in S_i, \forall i\}$ merupakan sub*modul dari M atas R*.

Bukti :

Misalkan $T = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

Akan dibuktikan bahwa :

1. $T \neq \varnothing$
2. $x, y \in T$ maka $x - y \in T$
3. $r \in \mathbb{R}$, $x \in T$ maka $rx \in T$

1. Perhatikan bahwa $0_M \in M$ dan dapat ditulis $0_M = 0_M + 0_M + \cdots + 0_M \in S_1 + S_2 + \cdots + S_n$, dengan $0_M \in S_i, \forall i$, sehingga $0_M \in T$.

   Jadi T $\neq \varnothing$

2. Ambil x, y $\in T$ maka $x = s_1 + s_2 + \cdots + s_n, s_i \in S_i, \forall i$ dan

   $y = t_1 + t_2 + \cdots + t_n, t_i \in S_i, \forall i$

   Sehingga $x - y = s_1 - t_1 + s_2 - t_2 + \cdots + s_n - t_n$.

   Oleh karena $s_i - t_i \in S_i$, untuk setiap i ,

   maka $x - y \in S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

3. Ambil $r \in R, x \in T$, maka $x = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, $s_i \in S_i, \forall i$

   Sehingga $rx = r(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)$

   $= rs_1 + rs_2 + \cdots + rs_n$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Oleh karena $rs_i \in S_i$, $\forall i$, maka $rx \in S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

Dari 1 , 2 dan 3 terbukti bahwa *T adalah submodul dari M atas R* . ■

Definisi 2.2.2

Diberikan modul M atas ring R dan S_1, S_2 …, S_n adalah submodul-submodul dari M. Modul M disebut *jumlahan langsung* dari S_1, S_2 …, S_n jika setiap $m \in M$ dapat dinyatakan sebagai $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ dengan $s_i \in S_i$ dan jika $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dengan $a_i \in S_i$, maka $a_i = s_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Jika M adalah jumlahan langsung dari S_1, S_2 …, S_n maka ditulis

$M = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$.

Teorema 2.2.3

Misal M *modul* atas ring R dan S_i submodul dari M, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$ bila dan hanya bila :

1. $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.
2. $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$, untuk $i = 1,2,\ldots,n$

Bukti :

($\Rightarrow$) Diberikan M modul atas ring R yang merupakan jumlahan langsung dari submodul-submodul S_1, S_2, …, S_n. Akan dibuktikan berlaku sifat 1) dan 2).

i) Ambil sebarang $m \in M$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena M jumlahan langsung dari $S_1, S_2, \ldots, S_n$ maka terdapat dengan tunggal $s_i \in S_i$, sehingga $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ maka $m \in S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Jadi $M \subseteq S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

ii) Ambil sebarang $m \in S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Maka ada $s_i \in S_i$ sehingga $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$.

Karena S_i merupakan submodul dari M, maka $S_i \subseteq M$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena (M,+) grup aditif , maka $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n \in M$. Jadi $m \in M$.

Maka $S_1 + S_2 + \ldots + S_n \subseteq M$.

Dari i) dan ii) terbukti $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Ambil sebarang $m \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $m \in S_i$ dan $m \in \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$.

Karena $m \in S_i$,maka $m = s_i = 0 + \ldots + 0 + s_i + 0 + \ldots + 0$, untuk $s_i \in S_i$

Karena $m \in \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$, maka $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_{i-1} + 0 + s_{i+1} + \ldots + s_n$, untuk $s_j \in S_j$.

Karena M jumlahan langsung dari $S_1, S_2, \ldots, S_n$ maka diperoleh $s_i = 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga $m = 0$.

Terbukti $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

($\Leftarrow$) Diberikan M modul atas ring R dan $S_1, S_2, \ldots, S_n$ submodul-submodul dari M yang memenuhi :

1. $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.
2. $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Akan dibuktikan M jumlahan langsung dari submodul-submodul $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Ambil sebarang $m \in M$.

Karena $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ maka $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ dengan $s_i \in S_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ andaikan $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, dengan $a_i \in S_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Maka $0 = (s_1 - a_1) + (s_2 - a_2) + \ldots + (s_n - a_n)$.

Diperoleh $-(s_i - a_i) = (s_1 - a_1) + (s_2 - a_2) + (s_{i-1} - a_{i-1}) + (s_{i+1} - a_{i+1}) + \ldots + (s_n - a_n)$ sehingga $-(s_i - a_i) \in S_i$ dan $-(s_i - a_i) \in \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$, untuk i = 1,2,3,…,n.

Maka $-(s_i - a_i) \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

Karena $s_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $-(s_i - a_i) = 0$.

Jadi $s_i = a_i$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$.

Terbukti M jumlahan langsung dari submodul-submodul $S_1, S_2, \ldots, S_n$. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2.3 Modul yang Dihasilkan Secara Berhingga

Teorema 2.3.1

Diberikan modul M atas ring R. Jika A submodul dari modul M, maka himpunan semua kombinasi linear dari koefisien di R dengan elemen-elemen A, yang dinotasikan dengan $\langle A \rangle = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \mid r_i \in R,\ a_i \in A,\ n \geq 1\}$ merupakan submodul dari M.

Bukti :

1) Perhatikan bahwa $0_M \in M$ dan dapat ditulis sebagai

$0_M = 0_M a_1 + 0_M a_2 + \cdots + 0_M a_n$,dimana $0_M \in M$ dan $a_i \in A \subseteq M$

sehingga $0_M = 0_M + \cdots + 0_M$

Maka $0_M \in \langle A \rangle$. Jadi $\langle A \rangle \neq \varnothing$

2) Ambil $x,y \in \langle A \rangle$

Maka $x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$, dengan $r_i \in R$ dan $a_i \in A \subseteq M$ dan $y = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_m a_m$, dengan $s_i \in$ R dan $a_i \in A \subseteq M$

Sehingga untuk $n > m$

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i - \sum_{i=1}^{m} s_i a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} r_i a_i + \sum_{i=m+1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{m} (-s_i) a_i + \sum_{i=m+1}^{n} 0 a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (r_i - s_i) a_i + \sum_{i=m+1}^{n} (r_i + 0) a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (r_i - s_i) a_i + \sum_{i=m+1}^{n} r_i a_i$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

karena $r_1, r_2, \ldots r_n, -s_1, -s_2, \ldots, -s_m \in R$ dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A \subseteq M$ maka $x - y \in \langle A \rangle$

Untuk $n = m$ dan $n < m$ dapat dikerjakan secara analog.

Dari 1) dan 2) terbukti bahwa $\langle A \rangle$ subgrup dari M.

Selanjutnya dibuktikan bahwa $\langle A \rangle$ merupakan submodul dari M.

Jika $r \in R$ dan ambil $x \in \langle A \rangle$, maka $x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots + r_n a_n$ sehingga $r\,x = r\,(r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots + r_n a_n)$. Karena $r \in R$, $a_i \in \langle A \rangle$, maka $r\,a_1 \in A$, $r\,a_2 \in A$, $r\,a_n \in A$, sehingga dipeoleh $r\,a_i \in A$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Jadi $r\,x \in A \subseteq M$.

Terbukti $\langle A \rangle$ merupakan submodul dari M. ∎

Akibat teorema 2.3.1

Jika $A = \{a\}$ maka $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ juga merupakan submodul.

Teorema 2.3.2

Jika M adalah modul atas ring R dan $A \subseteq M$, maka $\langle A \rangle$ submodul terkecil yang memuat A.

Bukti :

$\langle A \rangle$ submodul dari M yang memuat A dan N submodul dari M yang memuat A

Dibuktikan $\langle A \rangle \subseteq N$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Ambil sebarang $x \in <A>$ maka $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n$, dengan $r_i \in R$ dan $a_i \in A, \forall i$. Karena A submodul maka $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n \in A$

Padahal $A \subseteq N$ maka $x \in N$, sehingga $< A > \subseteq N$

Jadi $<A> \subseteq N$.■

Himpunan A dikatakan membangkitkan M jika $M = <A>$, yang berarti setiap $m \in M$ dapat ditulis dalam bentuk $m = r_1\, a_1 + r_2\, a_2 + \ldots + r_n\, a_n$, dimana $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ dan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Jika A berhingga, maka $<A>$ disebut submodul yang *dihasilkan secara berhingga*. Suatu modul M dikatakan dihasilkan secara berhingga jika M memuat himpunan berhingga yang menghasilkan M.

2.4 Modul Faktor

Definisi 2.4.1

Jika N subgrup dari (G,o) maka N disebut *subgrup normal* dari G bila dan hanya bila untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $g \circ n \circ g^{-1} \in N$

Jika M adalah modul atas ring R maka (M, +) grup komutatif dan jika N submodul dari M maka (N, +) subgrup dari M. Akibatnya N subgrup normal dari M,sehingga dapat dibentuk $M / N = \{m + N / m \in M\}$ dimana

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

elemen-elemen di M/N berupa koset-koset. Sehingga teorema-teorema yang berkaitan dengan koset pada subgrup aditif juga berlaku pada modul.

Teorema tersebut diantaranya adalah :

Jika N subgrup dari grup (M, +) dan $a,b \in M$ maka keempat pernyataan berikut ekuivalen :

1. $p - q \in N$
2. $p \in q + N$
3. $p = q + N$, untuk suatu $n \in N$
4. $p + N = q + N$

Teorema 2.4.2

Jika M modul atas ring R dan N submodul dari M maka $M/N = \{m + N / m \in M\}$ merupakan modul atas ring R terhadap operasi yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$

$$r(x + N) = rx + N$$

untuk setiap $x + N$, y + $N \in M/N$ dan $r \in R$.

Bukti :

Pertama-tama akan ditunjukkan operasi pada M/N terdefinisi dengan baik.

Ambil sebarang $p+N, q+N, s+N, t+N \in M/N$ dengan $p+N = q+N, s+N = t+N$.

Ditunjukkan $(p+N)+(s+N)=(q+N)+(t+N)$. Karena $p + N = q + N$ dan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$s+N=t+N$, maka $p-q\in N$ dan $s-t\in N$, sehingga $(p-q)+(s-t)\in N$,

maka $(p+s)-(q+t)\in N$.

Jadi $(p+s)+N=(q+t)+N$.

Ambil sebarang $x+N, y+N\in M/N$ dengan $x+N=y+N$ maka $x=y+n_1$ dan $r_1,r_2\in R$ dengan $r_1=r_2$.

Akan ditunjukkan $r_1(x+N)=r_2(y+N)$ yaitu $r_1x+N=r_2y+N$

Karena $x=y+n_1$ maka $r_1x=r_1y+r_1n_1$. Padahal $r_1=r_2$ maka $r_1x=r_2y+r_2n_1$. Karena N submodul maka $r_2n_1\in N$, misalkan $r_2n_1=n_2$.

Didapat $r_1x=r_2y+n_2$

Jadi $r_1x+N=r_2y+N$

Kemudian akan ditunjukkan M/N grup aditif terhadap operasi jumlahan. Operasi (+)pada M/N adalah asosiatif karena untuk $p+N, q+N, s+N\in M/N$

$$
\begin{aligned}
(p+N)+[(q+N)+(s+N)] &= (p+N)+[(q+s)+N] \\
&= p+(q+s)+N \\
&= (p+q)+s+N \\
&= [(p+q)+N]+(s+N) \\
&= [(p+N)+(q+N)]+(s+N)
\end{aligned}
$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Elemen $0 + N \in M / N$ adalah elemen identitas, karena untuk $p + N \in M / N$,

$(0 + N) + (p + N) = (0 + p) + N = p + N$ dan $(p + N) + (0 + N) =$

$(p + 0) + N = p + N$

Elemen $-p + N \in M / N$ adalah invers untuk $p + N \in M / N$, karena

$(p + N) + (-p + N) = (p - p) + N = 0 + N$ dan $(-p + N) + (p + N) =$

$(-p + p) + N = 0 + N$

Operasi (+) pada M / N adalah komutatif , karena untuk $p + N, q + N \in M / N$,

$$
\begin{aligned}
(p + N) + (q + N) &= (p + q) + N \\
&= (q + p) + N \text{ , karena M komutatif} \\
&= (q + N) + (p + N)
\end{aligned}
$$

Jadi M / N grup aditif terhadap operasi jumlahan.

Selanjutnya ditunjukkan pula aksioma-aksioma modul berlaku pada M / N .

Jika $r, u \in R$, $p + N$, $q + N \in M / N$ maka :

a) $r((p + N) + (q + N)) = r((p + q) + N) = r(p + q) + N =$ $(rp + rq) + N = (rp + N) + (rq + N) = r(p + N) + r(q + N)$.

b) $(r + u)(p + N) = ((r + u)p) + N = (rp + up) + N = (rp + N)$ $+ (up + N) = r(p + N) + u(p + N)$

c) $(ru)(p + N) = (ru)p + N = r(up) + N = r(u(p + N))$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

a) $1(p+N)=1p+N=p+N$. ■

Jadi M/N merupakan modul.

Definisi 2.4.3

Jika M modul atas ring R dan N submodul dari M maka $M/N=\{m+N|m\in M\}$ merupakan modul dan disebut *modul faktor* .

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III

HOMOMORFISMA MODUL

Dalam bab III dibahas mengenai suatu fungsi dimana fungsi ini disebut homomorfisma. Oleh karena itu akan dibahas pula hal-hal yang berkaitan dengan homomorfisma yaitu monomorfisma adalah homomorfisma yang injektif, epimorfisma adalah homomorfisma yang surjektif dan isomorfisma adalah homomorfisma yang bijektif. Homorfisma modul dan barisan eksak akan dibahas pada bab ini pula.

3.1 Homomorfisma Modul

Definisi 3.1.1

Diberikan M dan N modul kiri atas ring R, maka fungsi $\theta : M \to N$ disebut *homomorfisma modul*, bila untuk setiap $p,q \in M$ dan $r \in R$ dipenuhi :

$$\theta(p+q) = \theta(p) + \theta(q)$$

$$\theta(rp) = r\theta(p)$$

Himpunan semua homomorfisma dari M ke N dilambangkan dengan $Hom(M,N)$.

Definisi 3.1.2

Jika $\theta : M \to N$ adalah homomorfisma modul, maka :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

1) Jika θ merupakan fungsi injektif yaitu $(\forall x,y \in M)\ \theta(x) = \theta(y) \rightarrow x = y$, maka θ disebut *monomorfisma*.

2) Jika θ merupakan fungsi surjektif yaitu $(\forall x \in N)\ (\exists y \in M).\ x = \theta(y)$, maka θ disebut *epimorfisma*

3) Jika θ injektif & surjektif maka disebut *isomorfisma*.

Jika $\theta : M \rightarrow N$ adalah suatu isomorfisma, maka M dan N disebut isomorfik dan ditulis $M \approx N$.

Contoh :

1. Jika Z ring himpunan bilangan bulat yang merupakan modul atas dirinya sendiri dan $\theta : Z \rightarrow Z$ dengan $\theta(p) = 5p$, untuk setiap $p \in Z$, maka θ merupakan homomorfisma karena :

   $\theta(p + q) = 5(p + q) = 5p + 5q = \theta(p) + \theta(q)$

   $\theta(rp) = 5\,rp = r\,(5p) = r\theta(p)$, untuk setiap $r \in Z$.

2. Jika $\theta : \mathbb{C} \rightarrow S$ didefinisikan $\theta(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dengan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks modul atas ring $\mathbb{R}$ dan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$ modul M atas ring $\mathbb{R}$, maka θ merupakan homomorfisma.

   Bukti :

   Pemetaan $\theta : \mathbb{C} \rightarrow S$ didefinisikan oleh

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\theta(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, untuk setiap $a,b \in \mathbb{C}$

Akan ditunjukkan bahwa $\theta : \mathbb{C} \to S$ suatu homomorfisma.

Ambil sebarang $x,y \in \mathbb{C}$ dengan $x = a + bi$ dan $y = c + di$

Maka $\theta(x+y) = \theta((a+bi)+(c+di))$

$= \theta((a+c)+(b+d)i)$ definisi " + " di $\mathbb{C}$

$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ definisi " θ "

$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ definisi " + " matriks

$= \theta(x) + \theta(y)$

$\theta(rx) = r\,\theta(x)$

$\theta(r(a+bi)) = \theta(ra+rbi)$

$= \begin{pmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{pmatrix}$

$= r\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$= r\,\theta(a+bi)$

$= r\,\theta(x).$

Jadi $\theta : \mathbb{C} \to S$ suatu homomorfisma. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Teorema 3.1.3

Diberikan $\theta : M \rightarrow N$ homomorfisma modul maka :

1. $\theta(0_M) = 0_N$

2. $\theta(-m) = -\theta(m)$, untuk setiap $m \in M$

Bukti :

1. Perhatikan bahwa 0_M adalah elemen nol dalam M, maka $0_M + 0_M = 0_M$

   Karena θ fungsi maka $\theta(0_M + 0_M) = \theta(0_M)$

   $\theta(0_M) + \theta(0_M) = \theta(0_M)$

   $-\theta(0_M) + \theta(0_M) + \theta(0_M) = -\theta(0_M) + \theta(0_M)$

   $0_N + \theta(0_M) = 0_N$

   $\theta(0_M) = 0_N$

   Terbukti $\theta(0_M) = 0_N$

2. Untuk setiap $m \in M$ berlaku $m + (-m) = (-m) + m = 0_M$

   Sehingga $\theta(m + (-m)) = \theta((-m) + m) = \theta(0_M)$

   $\theta(m + \theta(-m) = \theta(-m) + \theta(m) = 0_N$

   Jadi $\theta(-m)$ invers dari $\theta(m)$

   Padahal invers dari suatu elemen adalah tunggal sehingga $-\theta(m) = \theta(-m)$.

Definisi 3.1.4

Jika $\theta : M \rightarrow N$ homomorfisma modul, maka kernel dari θ adalah himpunan $p \in$ M sedemikian sehingga θ(p) = 0_N dan ditulis *ker* θ = { $p \in$ M | θ

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$(p) = 0_N$ }, sedangkan *image* θ didefinisikan $Im(\theta) = \{ q \in N \mid (\exists p \in M) . q = \theta(p)\}$.

Teorema 3.1.5

Jika M dan N modul atas ring R dan $\theta : M \to N$ merupakan homomorfisma modul maka : a) *kernel* θ submodul dari M

b) $Im(\theta)$ submodul dari N

Bukti :

Diketahui $\theta : M \to N$ homomorfisma

1. Akan ditunjukkan bahwa *ker* θ merupakan submodul dari M

   i) Karena ada $0_M \in M$ dan $f(0_M) = 0_N$, maka $0_M \in ker\ \theta$.

   Jadi *ker* $\theta \neq \varnothing$

   ii) Ambil $p,q \in \ker\theta$ maka $\theta(p) = 0_N$ dan $\theta(q) = 0_N$

   Dibuktikan $p - q \in ker\ \theta$ yaitu harus dibuktikan $\theta(p - q) = 0_N$

$$\theta(p - q) = \theta(p) - \theta(q)$$
$$= 0_N - 0_N$$
$$= 0_N$$

   Jadi $p - q \in \ker\theta$

   iii) Ambil $r \in R$ dan $p \in ker\ \theta$ maka $\theta(p) = 0_N$

$$\theta(rp) = r\theta(p) = r.0_N = 0_N$$

   Jadi $rp \in ker\ \theta$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari i) , ii) dan iii) terbukti $ker\ \theta$ submodul dari M.

2) Akan dibuktikan bahwa $Im\ (\theta)$ submodul dari N

i) Karena ada $0_N \in N$ dan $0_M \in M$ sehingga $0_N = \theta(0_M)$

Maka $0_N = Im\ (\theta)$. Jadi $Im\ (\theta) \neq \varnothing$

ii) Ambil $x,y \in Im\ (\theta)$ maka terdapat $p,q \in M$ sedemikian sehingga

$x = \theta(p)$ dan $y = \theta(q)$

Akan dibuktikan $x - y = \theta(p) - \theta(q) = \theta(p - q)$

Karena $p - q \in M$ maka $x - y \in Im\ (\theta)$

iii) Ambil $r \in R$ dan $x \in Im\ (\theta)$ maka terdapat $p \in M$ sedemikian sehingga $x = \theta(p)$ ditunjukkan bahwa $r\,x \in Im\ (\theta)$

$r\,x = r\theta(p) = \theta(rp)$

karena $r \in R$ dan $p \in M$ maka $r\,p \in$ M sehingga $r\,x \in Im\ (\theta)$

Dari i), ii) dan iii) terbukti bahwa $Im\ (\theta)$ submodul dari N. ■

Teorema 3.1.6

Jika M dan N modul atas ring R dan $\theta : M \rightarrow N$ homomorfisma modul maka θ monomorfisma bila dan hanya bila $ker\ \theta = \{0_M\}$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diketahui θ monomorfisma

Dibuktikan $ker\ \theta = \{0_M\}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Ambil sebarang $x \in ker\ \theta$ maka $\theta(x) = 0_N$.

Karena $\theta(0_M) = 0_N$, maka $\theta(x) = \theta(0_M)$

Padahal θ injektif maka $x = 0_M$

Jadi $ker\ \theta = \{0_M\}$

($\Leftarrow$) Diketahui $ker\ \theta = \{0_M\}$.

Dibuktikan θ monomorfisma yaitu homomorfisma yang injektif.

Ambil sebarang $x, y \in M$ dengan $\theta(x) = \theta(y)$.

Maka $\theta(x) - \theta(y) = \theta(x - y) = 0_N$

Sehingga $x - y \in ker\ \theta$

Karena ker $\theta = \{0_M\}$ maka $x - y = 0_M$

Jadi $x = y$

Terbukti bahwa θ monomorfisma. ■

Teorema 3.1.7

Jika M, N modul atas R dan $f : M \longrightarrow N$ homomorfisma, sedangkan T submodul dari N maka $f^{-1}(T)$ submodul dari M.

Bukti :

Akan dibuktikan :

a) $f^{-1}(T) \neq \varnothing$

b) $x, y \in f^{-1}(T) \rightarrow x - y \in f^{-1}(T)$

c) $r \in R$, $x \in f^{-1}(T) \rightarrow rx \in f^{-1}(T)$

Diberikan $f^{-1}(T) = \{x \in M \mid f(x) \in T\}$, sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

a) Karena f homomorfisma modul maka $f(0_M) = 0_N$ dan karena T submodul dari N maka $0_N \in T$. Akibatnya $f(0_M) \in T$ yaitu $0_M \in f^{-1}(T)$. Jadi $f^{-1}(T) \neq \varnothing$

b) Ambil sebarang $x, y \in f^{-1}(T)$ maka $f(x) \in T$ dan $f(y) \in T$.

Dibuktikan $x - y \in f^{-1}(T)$ yaitu ditunjukkan bahwa $f(x-y) \in T$.

Perhatikan bahwa :

$f(x-y) = f(x) - f(y)$ karena T submodul, maka $f(x) - f(y) \in T$

Jadi $f(x-y) \in T$ yaitu $x - y \in f^{-1}(T)$

c) Ambil $r \in R$ dan $x \in f^{-1}(T)$.

Maka $f(x) \in T$.

Akan dibuktikan $f(rx) \in T$

$f(rx) = r.f(x)$, karena $r \in R$ dan $f(x) \in T$ maka $r.f(x) \in$ T,

sehingga $rx \in f^{-1}(T)$

Jadi $f^{-1}(T)$ submodul dari M. ■

Teorema 3.1.8

Jika A submodul dari B maka $f : B \longrightarrow B/A$ dengan $f(x) = x + A$ adalah homomorfisma modul yang surjektif.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Akan dibuktikan f homomorfisma modul yang surjektif.

Ditunjukkan f terdefinisi dengan baik.

Ambil $x_1, x_2 \in B$ dengan $x_1 = x_2$, maka $x_1 + A = x_2 + A$ sehingga $f(x_1) = f(x_2)$

Selanjutnya ambil $x, y \in A, r \in R$ maka $f(x+y) = (x+y) + A$

$$= (x+A) + (y+A)$$

$$= f(x) + f(y) \qquad 1)$$

Dan $f(rx) = rx + A$

$$= r(x+A)$$

$$= r.f(x) \qquad 2)$$

Ambil sebarang $y \in B/A$ maka $y = x + A$ untuk suatu $x \in B$, sehingga $(\exists x \in B) f(x) = x + A = y$

Jadi f surjektif 3)

Dari 1), 2) dan 3) terbukti bahwa f homomorfisma modul yang surjektif.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

3.2 Barisan Eksak

Definisi 3.2.1

Jika $M_1, M_2, \ldots, M_n$ adalah modul-modul atas ring R dan $f_i : M_i \to M_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, adalah homomorfisma modul maka $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ disebut barisan homomorfisma modul.

Barisan homomorfisma modul disebut *eksak* jika $Im\ (f_i) = ker\ (f_{i+1})$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Teorema 3.2.2

1. Jika $\{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} S$ barisan eksak maka $f : M \to S$ monomorfisma.
2. Jika $M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{t} \{0\}$ barisan eksak maka $f : M \to S$ epimorfisma.
3. Barisan $\{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{t} \{0\}$ eksak bila dan hanya bila $f : M \to S$ isomorfisma.

Bukti :

1. Diketahui : $\{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} S$ barisan eksak,

   sehingga $Im\ (g) = ker\ (f)$ (1)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Akan dibuktikan $f : M \rightarrow S$ monomorfisma yaitu dengan dibuktikan bahwa $ker\ (f) = \{0_M\}$.

Perhatikan bahwa g : $\{0\} \xrightarrow{g} M$, adalah homomorfisma, maka $Im\ (g) = \{0_M\}$ (2)

Dari persamaan (1) & (2) diperoleh $ker\ (f) = \{0_M\}$.

Jadi f monomorfisma.

2. Karena $M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{l} \{0\}$ barisan eksak, maka $Im\ (f) = ker\ (l)$ (1)

Akan dibuktikan $f : M \rightarrow S$ epimorfisma yaitu homomorfisma yang surjektif .

Perhatikan $l : S \rightarrow \{0\}$ homomorfisma, maka $ker\ (l) = S$ (2)

Dari persamaan (1) & (2) diperoleh bahwa $Im\ (f) = S$

Jadi f epimorfisma.

3. (⇒) Diketahui $\{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{l} \{0\}$ eksak. Menurut teorema 3.2.2.1 f monomorfisma dan 3.2.2.2 f epimorfisma.

   Jadi f isomorfisma.

(⇐) Diketahui $f : M \rightarrow S$ isomorfisma, maka f monomorfisma dan epimorfisma.

   Dibuktikan $\{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} S \xrightarrow{l} \{0\}$ eksak yaitu jika :

   a) $Im\ (g) = ker\ (f)$

   b) $Im\ (f) = ker\ (l)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dan karena f monomorfisma maka $ker\ (f) = \{ 0_M \}$ (1)

Diketahui juga f epimorfisma maka $Im\ (f) = S$ (2)

Perhatikan :

Homomorfisma : $\{0\} \xrightarrow{g} M$ maka $Im(g) = \{0_M\}$ (3)

Dari persamaan (1) & (3) maka diperoleh $ker\ (f) = Im\ (g)$ (4)

Perhatikan pula homomorfisma $l : S \xrightarrow{l} \{0\}$ maka,

$ker\ (l) = S$ (5)

Dari persamaan (2) & (5) maka diperoleh

$Im\ (f) = ker\ (l) = S$

Jadi barisan di atas merupakan barisan eksak. ■

Definisi 3.2.3

Jika $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow L$ dan $h : M \longrightarrow L$ homomorfisma modul maka diagram berikut ini :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & L \end{tikzcd}$$

disebut *komutatif* jika $g \circ f = h$

Teorema 3.2.4

Diberikan diagram komutatif dari modul-modul dan homomorfisma-homomorfisma dimana barisan-barisannya eksak yaitu sebagai berikut :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' \\ \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h''} \\ S' & \xrightarrow[g']{} & S & \xrightarrow[g]{} & S'' \end{array}$$

1. Jika h', h'' dan g monomorfisma maka h monomorfisma
2. Jika h', h'' dan f epimorfisma maka h epimorfisma
3. Jika h', h'' isomorfisma dan g monomorfisma dan f epimorfisma maka h isomorfisma.

Bukti :

1. Ambil $x \in ker\ (h)$ maka $h\ (x) = 0_s$ (1)

   Karena diagram di atas komutatif , maka $g \circ h = h'' \circ f$, yaitu $(g \circ h)(x) = (h'' \circ f)(x)$, $\forall x \in$ M.

   $\Leftrightarrow$ $g(\ h(x)) = h''(f(x))$ (Definisi komposisi fungsi)

   $\Leftrightarrow$ $g(\ 0_s\ ) = h''(f(x))$ (persamaan 1)

   $\Leftrightarrow$ $0_{s''} = h''(f(x))$ (g homomorfisma modul)

   Jadi $f(x) \in ker\ (\ h''\ )$ (2)

   Diketahui h'' monomorfisma maka $Ker\ (h'') = \{0_{M''}\}$ (3)

   Dari persamaan 2) & 3) diperoleh

   $f(x) = 0_{M''}$ akibatnya $x \in ker\ (f)$

   Padahal $M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M''$ barisan eksak maka $Im\ (f') = ker\ f$

   Maka $x \in Im\ (f')$, sehingga ada $x' \in M'$ sedemikian sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$f'(x') = x$ (4)

Karena diagram di atas komutatif, maka

$h \circ f' = g' \circ h'$ (5)

Dari persamaan (1), (4) & (5) maka $0_s = h(x) = h(f'(x'))$

$= (h \circ f')(x')$

$= (g' \circ h')(x')$

$= g'(h'(x'))$

Karena $x \in ker(h)$ maka $h(x) = 0_s$

Sehingga $g'(h'(x')) = 0_s$

Jadi $h'(x') \in ker(g')$

Karena g' monomorfisma maka $ker(g') = \{0_s'\}$

Sehingga $h'(x') = 0_s'$

Maka $x' \in ker(h')$

Karena h' monomorfisma maka $ker(h') = \{0_{M'}\}$

Jadi $x' = 0_{M'}$ (6)

Dari persamaan (4) & (6) diperoleh

$x = f'(x') = f'(0_{M'}) = 0_M$

Terbukti $ker\ h = \{0_M\}$.

Jadi h monomorfisma.

1. Ambil $x \in S$ maka $g(x) \in S''$

Diketahui f dan h'' epimorfisma sehingga $h'' \circ f : M \to S''$ epimorfisma .

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jadi $(\exists y \in M)(h'' \circ f)(y) = g(x)$ (1)

Diketahui pula diagram di atas komutatif yaitu

$h'' \circ f = g \circ h$ (2)

Dari persamaan (1) & (2) diperoleh

$g(x) = (h'' \circ f)(y) = (g \circ h)(y) = g(h(y))$.

Maka $g(x) - g(h(y)) = 0_{s''}$

Karena g homomorfisma maka $g(x - h(y)) = 0_{s''}$

Jadi $x - h(y) \in ker(g)$

Diketahui $S' \xrightarrow{g'} S \xrightarrow{g} S''$ barisan eksak sehingga $Im(g') = ker(g)$.

Akibatnya $x - h(y) \in Im(g')$,

berarti ada $u \in S'$ sedemikian sehingga

$g'(u) = x - h(y) \in S$ (3)

Karena h' epimorfisma maka ada $u' \in M'$ sedemikian sehingga

$h'(u') = u$ (4)

Dari persamaan (3) & (4) diperoleh

$g'(h'(u')) = x - h(y) \in S$

Maka $(g' \circ h')(u') = x - h(y) \in S$ (5)

Karena diagram di atas komutatif maka

$h \circ f' = g' \circ h'$ (6)

Dari persamaan (5) & (6) diperoleh $(h \circ f')(u') = x - h(y) \in S$

Maka $h(f'(u')) = x - h(y) \in S$

$h(f(u')) + h(y) = x \in S$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena h homomorfisma maka $h(f'(u') - y) = x \in S$

Jadi ada $(f'(u')) + y \in M$, sehingga $x = h(f(u') + y)$

Jadi h epimorfisma.

2. Diketahui h', h'' isomorfisma dan g' monomorfisma, maka h', h'' dan g' monomorfisma dan menurut Teorema 3.2.3.1 : h monomorfisma. Karena h', h'' isomorfisma maka menurut Teorema 3.2.3.2 : h epimorfisma.

   Jadi karena h monomorfisma dan epimorfisma, maka h isomorfisma. ∎

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB IV

MODUL NOETHER

Dalam bab IV ini, akan dibahas mengenai modul Noether yang meliputi definisi dan teorema yang mendukung.

Pada bagian akhir bab V ini disimpulkan bagaimana hubungan antara modul Noether dengan konsep-konsep yang telah dipelajari sebelumnya.

4.1 Syarat Rantai Naik

Definisi 4.1.1

Modul M dikatakan memenuhi ***syarat rantai naik*** (*Ascending Chain Condition*) pada submodul-submodul $M_1, M_2, \ldots$ dari modul M jika setiap rantai $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, ada bilangan bulat positip n, sehingga $M_n = M_i$, $\forall i \geq n$.

Jika suatu modul M atas ring R memenuhi syarat rantai naik, dalam pembahasan selanjutnya dikatakan memenuhi ***syarat rantai naik*** .

Definisi 4.1.2

Suatu modul M atas ring R disebut ***memenuhi syarat maksimal*** pada submodul-submodul dari M, jika dalam setiap himpunan tak kosong δ dari submodul-submodul dari M terdapat suatu submodul yang merupakan elemen maksimal, yaitu misal $S \in \delta$ sehingga jika $T \in \delta$ maka $T \subset S$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 4.1.3

Andaikan M adalah himpunan tak kosong dari submodul-submodul dari himpunan bilangan bulat Z.

Misalkan $S_1 \in M$, maka terdapat bilangan bulat positip a sehingga $S_1 = < a >$.

Jika S_1 bukan elemen maksimal, maka terdapat submodul $S_2 = < b >$ sehingga $S_1 \subset S_2$.

Dengan demikian $b \neq a$ dan b membagi habis a.

Jika S_2 bukan elemen maksimal, maka terdapat submodul $S_3 = < c >$ sehingga $S_2 \subset S_3$ maka $c \neq b$ dan $c \neq a$ dan c membagi habis a dan b.

Jika S_3 bukan elemen maksimal, proses diulang.

Karena Z merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka a mempunyai sebanyak berhingga pembagi yang berbeda.

Hal ini mengakibatkan bahwa proses akan berhenti setelah sejumlah berhingga langkah, sehingga akan ada bilangan bulat positip n sehingga M_n merupakan elemen maksimal. Maka Z memenuhi *syarat maksimal* .

Definisi 4.1.4

Suatu modul M atas ring R yang memenuhi ***syarat rantai naik*** disebut ***modul Noether.***

Teorema 4.1.5

Suatu modul M atas ring R memenuhi syarat rantai naik pada submodul jika dan hanya jika M memenuhi ***syarat maksimal*** pada submodul.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

($\Leftarrow$) Diketahui : M memenuhi syarat maksimal.

Dibuktikan : M memenuhi *syarat rantai naik.*

Misalkan : $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset M_{n+2} \subset \ldots$ merupakan rantai naik submodul dari modul M.

Karena M memenuhi syarat maksimal maka dapat dibentuk himpunan , $\wp = \{ M_i \mid M_i$ submodul dari $M, i \geq 1 \}$.

Misalkan M_n elemen maksimal.

Perhatikan bahwa $M_i \subset M_{i+1}, \forall i$

Karena M_n elemen maksimal maka akibatnya $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$

Jadi M memenuhi syarat rantai naik.

($\Rightarrow$) Diketahui : M memenuhi *syarat rantai naik.*

Dibuktikan : M memenuhi elemen maksimal.

Misalkan S : himpunan submodul-submodul M, yang merupakan himpunan tak kosong, maka ada $B_1 \in S$.

Andaikan S tidak memenuhi syarat maksimal, $B \in S$, ada $B' \in S$ sehingga $B \subset B'$.

Untuk setiap B pilih sebuah B' sehingga $B \subset B'$

Selanjutnya didefinisikan fungsi :

$f : S \rightarrow S$ dan $f(B) = B'$ dan $\theta : N \rightarrow S$, dimana $N = \{1,2,3,\ldots\}$

dengan :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\theta(1) \quad = B_1$,

$\theta(\ n+1\ ) = f(\theta(n)) = \theta(n)'$, jika $(\theta(n)) = B_n$, $B_n \in S$, maka terdapat barisan B_1, B_2, B_3, ... sedemikian sehingga $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \cdots$ terjadi kontradiksi dengan yang diketahui bahwa M memenuhi *syarat rantai naik.*

Jadi M memenuhi *syarat maksimal.* ■

Teorema 4.1.6

Modul M atas ring R memenuhi *syarat rantai naik* pada submodul jika dan hanya jika setiap submodul dari M yang dihasilkan secara berhingga.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui : Modul M memenuhi *syarat rantai naik.*

Dibuktikan : Setiap submodul dari M yang dihasilkan secara berhingga .

Misalkan A submodul dari M.

S = himpunan semua submodul dari A yang dihasilkan secara berhingga .

Karena $0_M \in$ A maka $\{0_M\} \in S$ sehingga $S \neq \varnothing$.

Karena M memenuhi *syarat rantai naik* maka menurut **teorema 4.1.5**, M memenuhi *syarat maksimal.*

Misalkan elemen maksimalnya dari S adalah B, maka B yang dihasilkan secara berhingga yaitu :

$B = < b_1, b_2, \ldots, b_n >$, $b_i \in A$

Untuk setiap $a \in A$ dapat dibentuk $C_a = < a, b_1, b_2, \cdots, b_n >$. Karena C_a yang dihasilkan secara berhingga , maka $C_a \in S$ dan $B \subseteq C_a$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena B maksimal maka $C_a = B$, untuk setiap $a \in A$ dan $A \subseteq B$.

Oleh karena $B \in S$ maka $B \subseteq A$.

Jadi $A = B$.

($\Leftarrow$) Diketahui : Modul M terbangkit hingga.

Dibuktikan : M memenuhi *syarat rantai naik*.

Misalkan diberikan rantai naik : $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$, maka

$\bigcup_{i\geq 1} M_i$ merupakan submodul dari M.

$\bigcup_{i\geq 1} M_i$ yang dihasilkan secara berhingga , misalkan $\bigcup_{i\geq 1} M_i = < m_1, m_2, \ldots,$

$m_k >$, karena $\forall m_i \in M_j$ untuk suatu j maka ada n sedemikian sehingga $m_i \in$

M_n, dimana $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Akibatnya $\bigcup_{i\geq 1} M_i \subset M_n$, sehingga $M_i = M_n$, untuk setiap $i \geq n$.

Karena $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ dan ada n , sehingga $M_i = M_n$, untuk setiap $i \geq n$.

Jadi M memenuhi *syarat rantai naik*. ■

Teorema 4.1.7

Jika $\{0\} \xrightarrow{h_1} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h_2} \{0\}$ adalah barisan eksak dari modul M atas ring R maka B memenuhi syarat rantai naik pada submodul M bila dan hanya bila A dan C memenuhi syarat rantai naik pada submodul M.

Bukti :

($\Rightarrow$) Jika $\{0\} \xrightarrow{h_1} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h_2} \{0\}$ barisan eksak, dan B memenuhi syarat rantai naik.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Misal $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah submodul-submodul dari modul B dengan $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ adalah rantai submodul-submodul dari modul B. Karena B memenuhi syarat rantai naik maka $\exists n \in Z^+$ sedemikian sehingga $B_i = B_n, \forall i \geq n$.

Perhatikan $\{0\} \xrightarrow{h_1} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h_2} \{0\}$, maka $\ker(f) = \mathrm{Im}(h_1)$.

$\mathrm{Im}(h_1) = \{0_A\} = \ker(f)$ sehingga f monomorfisma.

Begitu pula $\mathrm{Im}(g) = \ker(h_2) = C$ maka g adalah epimorfisma.

Diketahui B memenuhi syarat rantai naik.

Perhatikan $f : A \longrightarrow B$ merupakan homomorfisma modul maka $f(A)$ submodul dari B, sehingga $f(A)$ memenuhi syarat rantai naik.

Karena $A \approx f(A)$ dan $f(A)$ memenuhi syarat rantai naik maka A memenuhi syarat rantai naik.

Akan dibuktikan C memenuhi syarat rantai naik.

Misal $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$ dan $g^{-1}(C_1) \subset g^{-1}(C_2) \subset g^{-3}(C_3) \subset \ldots$ adalah submodul dari B. Karena B memenuhi syarat rantai naik maka

$(\exists n) g^{-1}(C_i) = g^{-1}(C_n), \forall i \geq n$ 1)

Demikian pula karena g epimorfisma maka $g(g^{-1}(C_i)) = C_i$ 2)

Sehingga dari 1) dan 2) diperoleh $C_i = C_n, \forall i \geq n$.

Maka C memenuhi syarat naik.

Jadi A dan C memenuhi syarat naik.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

($\Leftarrow$) Misal $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$, adalah rantai submodul-submodul dari modul B .

Perhatikan bahwa :

$g(S_1) \subset g(S_2) \subset g(S_3) \subset \ldots$ merupakan rantai naik dari submodul dari C dan C memenuhi syarat rantai naik, maka $(\exists p \in Z^+)\, g(S_1) \subset g(S_2) \subset \cdots \subset g(S_p) = g(S_{p+1})$ (1)

Demikian juga ,

$f^{-1}(S_1) \subset f^{-1}(S_2) \subset f^{-1}(S_3) \subset \ldots$ merupakan rantai naik dari submodul dari A dan A memenuhi syarat rantai naik maka ,

$(\exists n \in Z^+).\, f^{-1}(S_1) \subset f^{-1}(S_2) \subset f^{-1}(S_3) \subset \ldots f^{-1}(S_n) = f^{-1}(S_{n+1})$ (2)

Dari (1) dan (2) maka ada $m \in Z^+$ sehingga $g(S_m) = g(S_k)$ dan $f^{-1}(S_m) = f^{-1}(S_k),\ \forall k \geq m.$

Akan dibuktikan bahwa $(\forall k \geq m)\ S_m = S_k$, yaitu harus dibuktikan bahwa $S_m \subseteq S_k$ dan $S_k \subseteq S_m$.

Dari yang diketahui $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$, maka jelas $S_m \subseteq S_k$, $\forall k \geq m.$

Tinggal ditunjukkan bahwa $S_k \subseteq S_m$

Ambil $b \in S_k$, maka $g(b) \in g(S_k) = g(S_m)$

Karena $g(b) \in g(S_m)$ *maka* $(\exists b' \in S_m).\ g(b) = g(b')$

Perhatikan bahwa :

$g(b) = g(b')$

$g(b) - g(b') = g(b') - g(b')$

$g(b) - g(b') = 0_C$

$g(b - b') = 0_C$, maka $b - b^{-1} \in ker(g)$ (1)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Diketahui $\{0\} \xrightarrow{h_1} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h_2} \{0\}$ barisan eksak, maka $ker(g)$ = $Im(f)$ (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $b - b' \in Im(f)$.

Ini berarti $(\exists a \in A).\ b - b' = f(a)$

Karena $a \in A$ maka $a \in f^{-1}(S_k) = f^{-1}(S_m)$. Didapat $f(a) \in S_m$

$b - b^{-1} = f(a)$

$b = b' + f(a')$.

Karena $b', f(a') \in S_m$, maka $b \in S_m$

Jadi $b \in S_k$ maka $b \in S_m$ yaitu $S_k = S_m$

Terbukti $(\exists m \in Z^+).\ S_k = S_m,\ \forall k \geq m$. ■

Teorema 4.1.8

Jika A adalah submodul dari modul B, maka B memenuhi syarat rantai naik jika dan hanya jika A dan B/A memenuhi syarat rantai naik.

Bukti :

Akan ditunjukkan $\{0\} \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} B \xrightarrow{f_3} B/A \xrightarrow{f_4} \{0\}$ barisan eksak.

Didefinisikan $f_2(x) = x$ maka $f(x+y) = x + y = f(x) + f(y)$ a)

$$f(rx) = rx = rf(x) \qquad \text{b)}$$

Dari a) dan b) diperoleh f_2 homomorfisma modul.

Didefinisikan pula $f_3 : B \longrightarrow B/A$ dengan $f(x) = x + A$ menurut teorema 2.4.3 f_3 homomorfisma modul yang surjektif.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena f_1 homomorfisma dari $\{0\}$ ke A maka $f_1(0) = 0_A$, sehingga $\mathrm{Im}(f_1) = \{0\}$.

Oleh karena $f_2(x) = x, \forall x \in A$ dan $\mathrm{Im}(f_2) = A$ maka $\ker(f_2) = \{0\}$.

Perhatikan: $f_3 : B \longrightarrow B/A$ maka $\ker(f_3) = \{x \in B \mid f_3(x) = A\}$

$$= \{x \in B \mid x + A = A\}$$

$$= \{x \in B \mid x \in A\}$$

$$= A$$

dan $\mathrm{Im}(f_3) = B/A$

Didapat $\mathrm{Im}(f_2) = \ker(f_3)$

Selanjutnya perhatikan $f_3 : B/A \longrightarrow \{0\}$ maka $\ker(f_4) = B/A$.

Jadi $\mathrm{Im}(f_3) = \ker(f_4)$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathrm{Im}(f_1) = \ker(f_2)$, $\mathrm{Im}(f_2) = \ker(f_3)$ dan $\mathrm{Im}(f_3) = \ker(f_4)$.

Maka menurut definisi barisan di atas adalah *eksak*.■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Himpunan tak kosong M disebut modul kiri atas ring R dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua opersi, yaitu operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $\theta : R \times M \to M$ dimana $\theta(rm) = rm \in M$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$, sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

   a) $(M, +)$ grup komutatif

   b) $\forall$r,s $\in R$, $\forall$m,n $\in M$ berlaku :

   $(r + s)\, m = r\, m + s\, m$

   $r(m + n) = r\, m + r\, n$

   $r(m\, n) = (r\, m)\, n$

   $1.m = m$

2. Jika M modul atas ring R dan N himpunan bagian tak kosong dari M, maka N disebut submodul dari M dan N merupakan modul terhadap operasi yang sama dengan operasi dalam M.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

3. Suatu modul M atas ring R memenuhi *syarat rantai naik* pada submodul, jika dan hanya jika M memenuhi *syarat maksimal* pada submodul.

4. Suatu modul M atas ring R yang memenuhi syarat rantai naik disebut modul Noether.

5. Modul M disebut memenuhi rantai bersyarat naik pada submodul $M_1, M_2, M_3, \ldots$ dari modul M dengan $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$, ada bilangan bulat positip n, sedemikian sehingga $M_n = M_{n+1}$, untuk $n = 1,2,3,\ldots$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR PUSTAKA

1. Anderson, F.W. and Fuller, K.R.1974. Graduate Texts in Mathematics. New York : Spinger-Verlag.
2. Dummit, D.S. and Foote,R.M.1991.Abstract Algebra New Jersey : Prentice Hall.
3. Hartley, B and Hawkes, T.O Rings, Modules and Linear Algebra.New York.Tokyo. Melbourne Madras.
4. Herstein,1975. Topics in Algebra.New York : And John Wilay an Sons.
5. Hungerford,T.W.1974. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag.
6. Ribenboim, P.1969. Ring and modul. New York : Interscience Publisher
7. Saunders Maclane, Garrett Birkhoff, Algebra ,The Macmillan Company 1967, Copy right 1965, Collier-Macmillan Limited. London.