

# DIAGRAM VORONOI

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan  
Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh :

**Domesia Novi Handayani**

NIM : 971414009

NIRM : 970051120501120008



PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS SANATA DHARMA  
YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

DIAGRAM VORONOI

Oleh :

Domesia Novi Handayani

NIM : 971414009

NIRM : 970051120501120008

Telah disetujui oleh :

Pembimbing



Drs. B. Susanta

tanggal 10-1-2002

SKRIPSI

DIAGRAM VORONOI

Dipersiapkan dan ditulis oleh

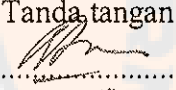


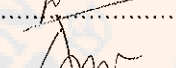

Domesia Novi Handayani

NIM : 971414009

NIRM : 970051120501120008

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji  
pada tanggal 16 Januari 2002  
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

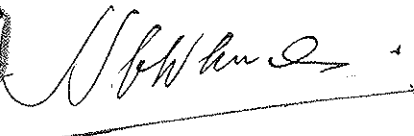
	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T	
Anggota	: 1. Drs. B. Susanta	
	: 2. Dr. St. Suwarsono	
	: 3. Andy Rudhito, S.Pd	

Yogyakarta, 16 Januari 2002

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Sanata Dharma



Dekan

  
Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

## PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

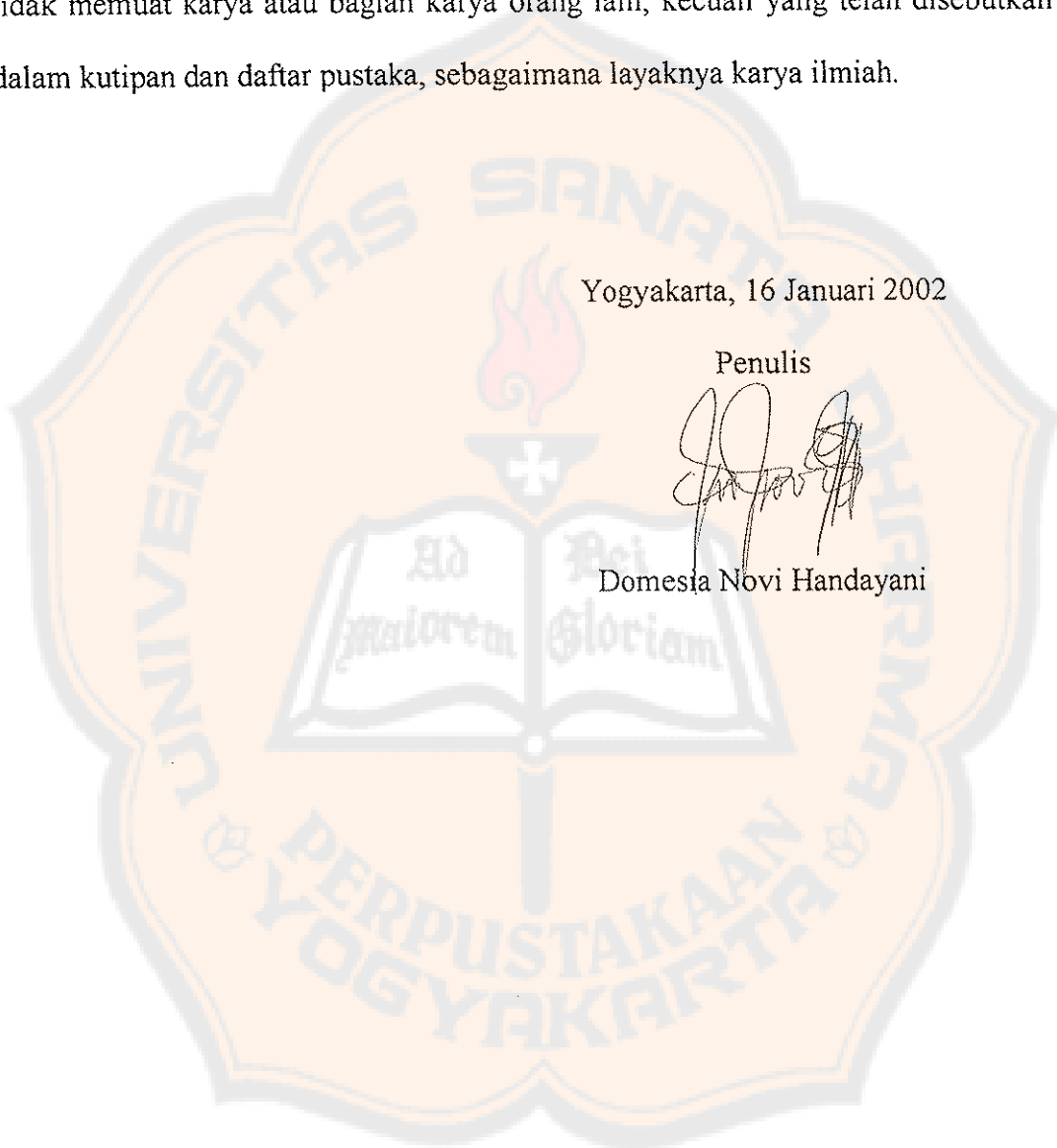
Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 16 Januari 2002

Penulis



Domesia Novi Handayani



## ABSTRAK

Diagram Voronoi digunakan untuk memberi nama suatu pengubinan yang dibentuk pada suatu bidang yang dilakukan dengan cara meletakkan beberapa titik pada bidang, yang kemudian disebut sebagai titik pembangkit dari pengubinan tersebut, dan membagi bidang-bidang tersebut menjadi daerah-daerah dengan cara mencari garis konflik antara dua titik pembangkit yang berdekatan.

Untuk membangun suatu diagram Voronoi sederhana digunakan konsep jarak Euclides dan garis konflik yang dimaksud diatas berupa garis sumbu antar dua titik pembangkit yang berdekatan. Sedangkan pada diagram Voronoi berbobot, karena memperhatikan bobot dari setiap titik pembangkit dan konsep jarak yang digunakan adalah konsep jarak berbobot, maka bentuk garis konfliknya tergantung dari jenis bobotnya.

Ada dua jenis diagram Voronoi berbobot yang dibahas di sini, yaitu diagram Voronoi berbobot multiplikatif dan diagram Voronoi berbobot aditif. Pada diagram Voronoi berbobot multiplikatif, digunakan konsep jarak multiplikatif, dan garis konfliknya berupa lingkaran Apollonius. Pada diagram Voronoi berbobot aditif, konsep jarak yang digunakan adalah konsep jarak aditif dan garis konfliknya berupa satu cabang kurva hiperbola.

Diagram Voronoi mempunyai terapan dalam berbagai bidang. Salah satu terapan yang diangkat dalam tulisan ini adalah terapan diagram Voronoi sederhana untuk menyajikan irisan kerucut : parabola, elips dan hiperbola.

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Allah, karena atas rencana-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “ Diagram Voronoi “ ini. Skripsi ini penulis susun dengan maksud untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan banyak penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak penulis dapat mengatasi semuanya dengan baik. Untuk itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas segala dorongan, perhatian, kasih, serta dukungan, baik secara moral, material maupun spiritual, kepada :

1. Drs. B. Susanta selaku dosen pembimbing yang dengan tekun dan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T selaku dosen pembimbing akademik dan kepala program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan saran dalam perencanaan studi selama penulis menembuh kuliah di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
3. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma.
4. Staf Sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma yang dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.

## PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

5. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan kerjasamanya selama ini.
6. Orangtuaku yang tercinta, yang selalu memberi kesempatan dan kepercayaan kepada penulis.
7. Rekan-rekan Liebe atas segala bantuan dan kerjasamanya.
8. Rekan-rekan mahasiswa yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma, khususnya rekan-rekan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma angkatan '97 dan rekan-rekan UKM Kerohanian Universitas Sanata Dharma serta rekan-rekan eks staf redaksi Buletin Pembelajaran Matematika Idea.
9. Sahabat-sahabatku : Felix Rianto T, Dyah Maria PR Dewanto, JF da Silva Sarmiento,SJ dan N. Yanuarko Setiawan atas segala dukungan dan doa.
10. Semua pihak-pihak lain yang dalam kesempatan ini belum dapat penulis sebutkan.

Semoga segala bantuan, dorongan, perhatian, kasih, serta dukungan yang telah penulis terima akan mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan YME.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritikan yang membangun dari para pembaca.

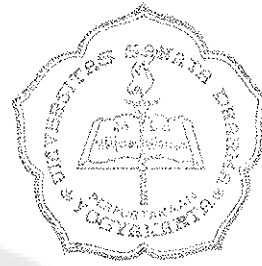
Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, 16 Januari 2002

Penulis

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

## DAFTAR ISI



	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Alasan Pemilihan Topik	1
B. Latar Belakang Topik	2
C. Ruang Lingkup Penulisan	3
D. Materi Prasyarat	4
E. Metode penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
A. Jarak Euclides	5
B. Kekonveksan	5
1. Garis	5
2. Setengah Bidang	6
3. Himpunan Konveks	7
4. Selubung Konveks	10
C. Lingkaran Apollonius	11



# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III	DIAGRAM VORONOI DAN PENYETIGAAN DELAUNAY	14
	A. Diagram Voronoi Sederhana	14
	B. Penyetigaan Delaunay	30
	C. Terapan Diagram Voronoi Pada Bidang Matematika yang Lain	35
BAB IV	DIAGRAM VORONOI BERBOBOT	42
	A. Diagram Voronoi Berbobot Multiplikatif	44
	B. Diagram Voronoi Berbobot Aditif	50
BAB V	PENYAJIAN BEBERAPA BENTUK IRISAN KERUCUT DENGAN MENGGUNAKAN DIAGRAM VORONOI	54
	A. Parabola	56
	B. Elips	60
	C. Hiperbola	65
BAB VI	PENUTUP	71
	A. Kesimpulan	71
	B. Saran	72
	DAFTAR PUSTAKA	74

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### A. Alasan Pemilihan Topik

Diagram Voronoi merupakan salah satu topik matematika yang mempunyai terapan cukup luas di berbagai bidang. Walaupun demikian, sayangnya istilah diagram Voronoi ini sendiri kurang terdengar, karena bidang-bidang yang menggunakan diagram Voronoi sering menggunakan istilah lain dalam menyebut diagram yang ‘menyerupai’ diagram Voronoi.

Untuk memahami konsep diagram Voronoi sebenarnya tidak diperlukan konsep dasar yang rumit. Oleh sebab itu sayang sekali, jika dalam masyarakat matematika sendiri, banyak yang tidak mengenal diagram Voronoi, karena dalam bidang matematika, diagram Voronoi juga dapat diterapkan, antara lain untuk menyajikan kurva irisan kerucut.

Oleh sebab itu, penulis mengangkat topik ini menjadi tugas akhir, karena penulis bertujuan untuk :

1. memperkenalkan diagram Voronoi kepada lebih luas pembaca, khususnya mahasiswa rumpun MIPA Universitas Sanata Dharma;
2. memberikan gambaran kepada pembaca mengenai beberapa terapan dari diagram Voronoi tersebut dalam beberapa bidang;
3. menunjukkan bahwa diagram Voronoi dapat dipakai sebagai alat bantu untuk menyajikan pelajaran irisan kerucut di sekolah menengah.

## B. Latar Belakang Topik

Konsep mengenai diagram Voronoi pertama kali muncul pada tahun 1644. Saat itu Descartes menggunakan suatu diagram yang menyerupai diagram Voronoi untuk memperlihatkan posisi benda-benda dalam tata surya. Diagram Voronoi pertama kali dipelajari oleh seorang matematikawan Jerman bernama G.L. Dirichlet pada tahun 1850. Dia mempelajari permasalahan dalam dua dan tiga dimensi.

Walau konsep ini pertama kali dipelajari oleh Dirichlet, konsep ini lebih dikenal dengan nama diagram Voronoi daripada pengubinan Dirichlet (*Dirichlet tessellation*), sebab pada tahun 1908, M.G. Voronoi, seorang matematikawan Jerman yang lain, mempelajari konsep ini lebih lanjut dan mendefinisikannya untuk kasus dimensi -  $m$  yang lebih umum.

Setelah konsep ini didefinisikan oleh Voronoi, konsep ini berkembang secara luas dalam berbagai bidang seperti meteorologi, yang dikembangkan oleh Thiessen pada tahun 1911 dan dikenal dengan nama poligon Thiessen, dan dalam kristalografi yang dikembangkan oleh Nigli pada tahun 1927, serta diperkenalkan suatu istilah baru : "Wirkungsbereich" (daerah pengaruh) yang merujuk pada diagram Voronoi. Pada tahun 1934, B.N. Delaunay memperkenalkan dual dari konsep ini dan dikenal dengan nama penyetingaan Delaunay (Delaunay Triangulation). Sampai sekarang konsep ini terus berkembang dalam berbagai bidang secara luas, seperti matematika, ilmu komputer, biologi, kartografi, dan lain-lain.

## C. Ruang Lingkup Penulisan

Dalam pembahasan mengenai diagram Voronoi ini, penulis menggunakan konsep-konsep dasar geometri bidang. Sehingga, pembahasan dalam skripsi ini hanyalah mengenai diagram Voronoi dalam bidang dimensi dua.

Dalam Bab II nanti, penulis akan menguraikan beberapa prasyarat yang nantinya akan digunakan untuk memahami konsep diagram Voronoi secara keseluruhan.

Pada Bab III, penulis mulai membahas diagram Voronoi sederhana, yaitu diagram Voronoi yang bobot titik-titik pembangkitnya dianggap sama (identik), mulai dari definisi, beberapa sifat yang berlaku dalam diagram Voronoi, sampai beberapa contoh penggunaan diagram Voronoi dalam ilmu lain.

Bab III di atas dilanjutkan dengan Bab IV yang berisi tentang diagram Voronoi berbobot, yang merupakan salah satu generalisasi dari diagram Voronoi sederhana. Diagram Voronoi berbobot ini penulis ambil dengan pertimbangan bahwa sebenarnya bentuk diagram Voronoi tidak seideal diagram Voronoi sederhana, karena dalam diagram Voronoi berbobot ini diperhatikan bobot dari tiap titik pembangkit Voronoi.

Bab V berisi cara menyajikan irisan kerucut dengan menggunakan pendekatan diagram Voronoi. Bab V ini sengaja penulis pisahkan dari Bab III, karena penulis ingin menonjolkan aspek pembelajaran matematika dari diagram Voronoi, yaitu kaitan diagram Voronoi dengan pelajaran irisan kerucut di sekolah menengah.

Bab terakhir, yaitu Bab VI, berisi kesimpulan dan saran.

#### **D. Materi Prasyarat**

Beberapa materi yang harus diketahui dalam mempelajari diagram

Voronoi ini adalah :

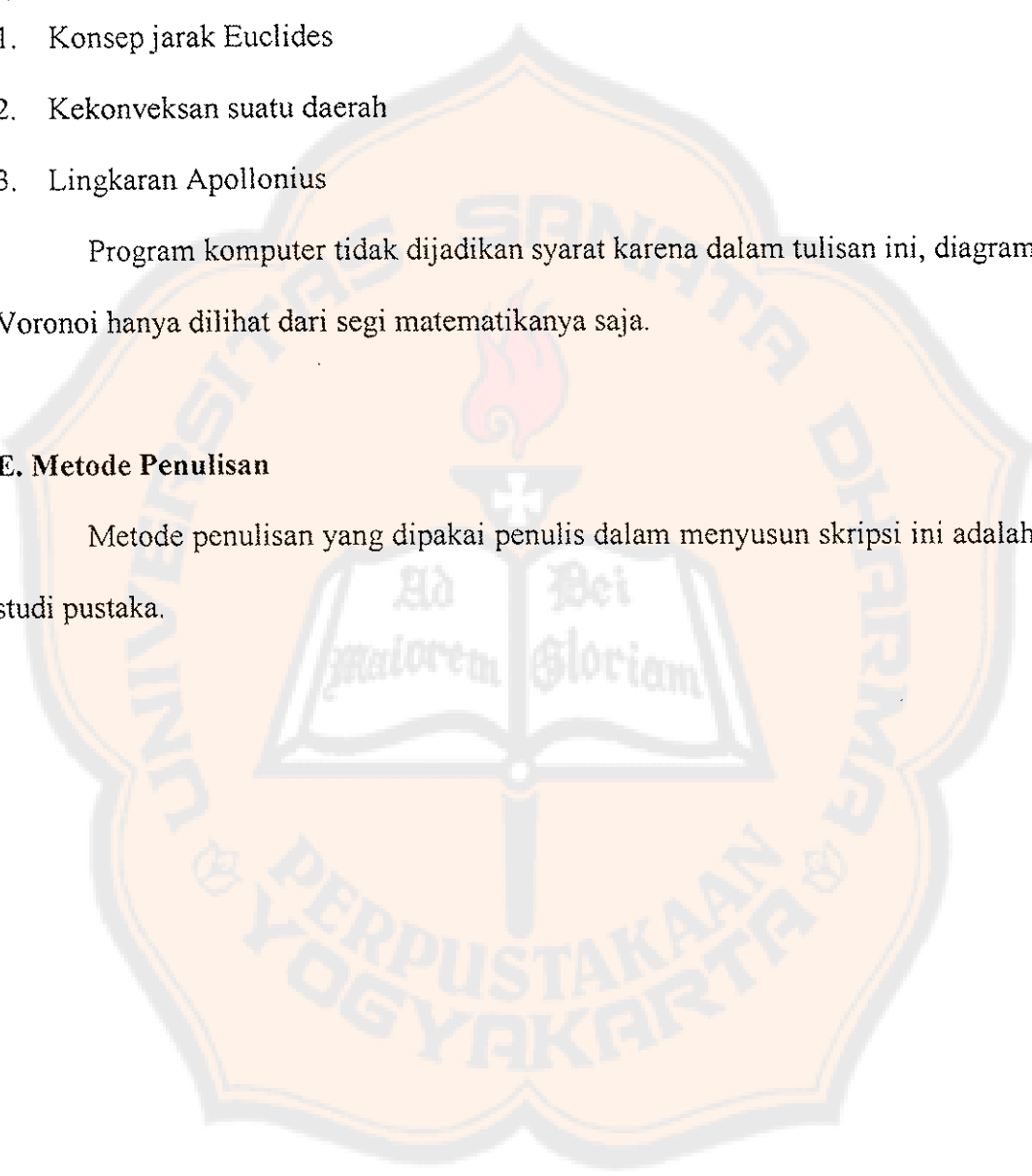
1. Konsep jarak Euclides
2. Kekonveksan suatu daerah
3. Lingkaran Apollonius

Program komputer tidak dijadikan syarat karena dalam tulisan ini, diagram

Voronoi hanya dilihat dari segi matematikanya saja.

#### **E. Metode Penulisan**

Metode penulisan yang dipakai penulis dalam menyusun skripsi ini adalah studi pustaka.



BAB II

LANDASAN TEORI

A. Jarak Euclides

Diketahui dua titik  $P_1$  dan  $P_2$  dalam bidang Cartesius, dengan vektor posisi  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  dan  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ . Jarak Euclides dari titik  $P_1$  ke  $P_2$  diberikan oleh :

$$d(P_1, P_2) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{1/2} \quad (2.1)$$

Diberikan himpunan titik  $P = \{ P_1, P_2, \dots, P_n \}$ ,  $2 \leq n < \infty$ . Jika  $P$  adalah sembarang titik dalam bidang Euclides dengan vektor posisi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , dan  $P_i$  adalah titik terdekat dari  $P$ , maka dapat dirumuskan :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \text{ untuk } i \neq j, j \in I_n = \{ 1, 2, \dots, n \} \quad (2.2)$$

Sebagai kesepakatan kita selanjutnya, suatu vektor posisi dapat disebut sebagai suatu titik.

B. Kekonveksan

1. Garis

Dengan  $\lambda$  sebagai parameter, sembarang garis yang melalui titik  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  ( $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ) didefinisikan sebagai himpunan titik :

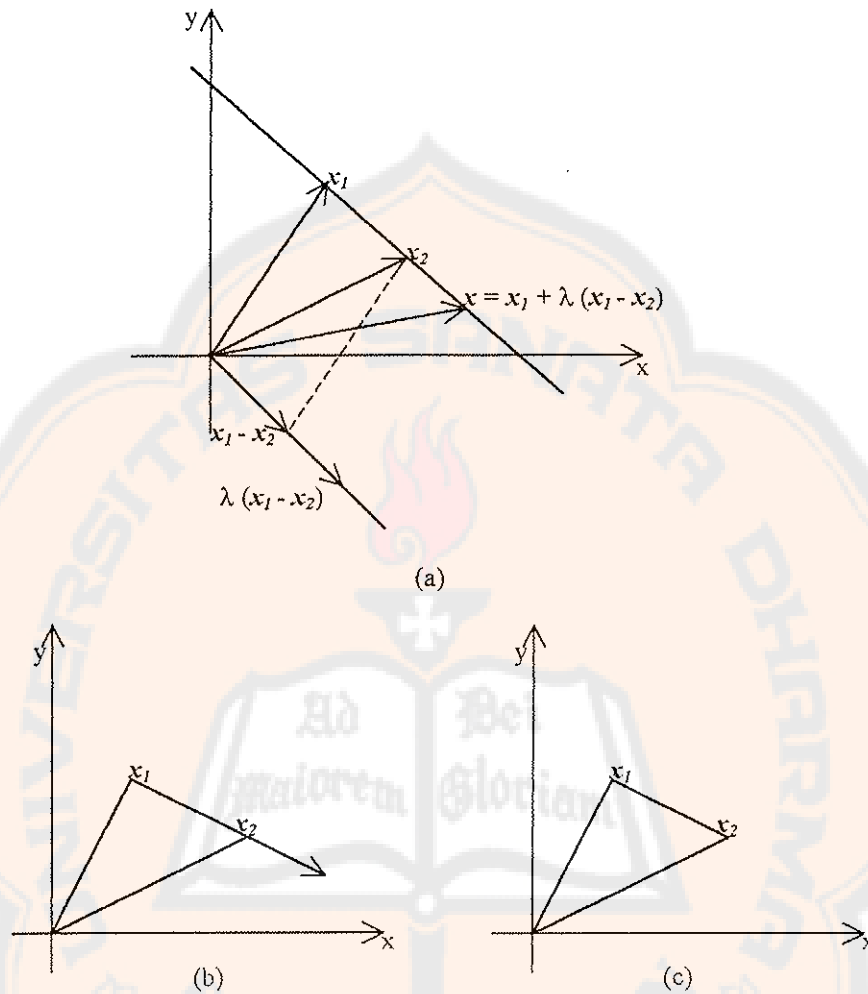
$$\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \lambda \in \mathbb{R} \} \quad (2.3)$$

Perhatikan bahwa  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$  jika  $\lambda = 0$  dan  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$  jika  $\lambda = 1$ , sehingga setengah garis yang berasal dari  $\mathbf{x}_1$  menuju ke  $\mathbf{x}_2$  didefinisikan sebagai

$$\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \lambda \geq 0 \} \quad (2.4)$$

dan segmen garis  $\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2$  didefinisikan sebagai

$$\{x \mid x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1, 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (2.5)$$



Gb. 2.1 (a) Garis yang melalui  $x_1$  dan  $x_2$ ; (b) setengah garis yang berasal dari  $x_1$  menuju  $x_2$ ; (c) segmen garis  $x_1x_2$

## 2. Setengah Bidang

Dalam  $\mathbb{R}^2$ ,  $c_1x_1 + c_2x_2 = z$  menyatakan persamaan suatu garis lurus. Jika kita tuliskan  $c = (c_1, c_2)$  dan  $x = (x_1, x_2)$ , maka garis tersebut dapat ditulis sebagai perkalian skalar

$$c \cdot x = z \quad (2.6)$$

Suatu garis dalam bidang membagi bidang menjadi dua bagian yang masing-masing bagian disebut sebagai setengah bidang.

**Definisi 2.1 (setengah bidang)**

Suatu setengah bidang yang dihasilkan oleh garis  $c.x = z$  didefinisikan sebagai himpunan  $\{x \mid c.x \leq z\}$  dan  $\{x \mid c.x \geq z\}$

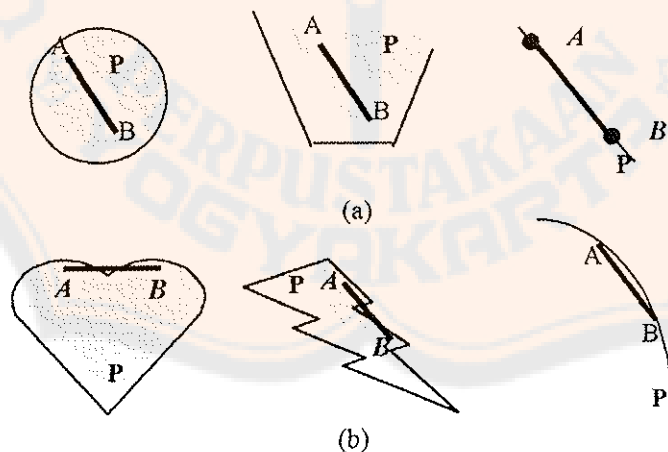
**3. Himpunan Konveks**

**Definisi 2.2 (himpunan konveks)**

Suatu himpunan titik  $P$  disebut konveks bila

$$(\forall x_1, x_2 \in P) (0 \leq \lambda \leq 1, x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 \in P) \quad (2.7)$$

atau dengan kata lain, suatu himpunan titik  $P$  disebut konveks bila untuk setiap pasang titik  $A, B$  dalam  $P$  maka segmen garis  $AB$  selalu berada dalam  $P$ .



Gb. 2.2 (a) himpunan konveks; (b) himpunan tak konveks



**Teorema 2.1 (kekonveksan setengah bidang)**

Setengah bidang H adalah suatu himpunan konveks.

**Bukti.**

H konveks  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in H) (0 \leq \lambda \leq 1, x = \lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1 \in H)$ .

Ambil sembarang  $x_1, x_2$  dalam setengah bidang  $H_1$  ( $H_1 : \{x \mid cx \leq z\}$ ), maka  $cx_1 \leq z$  dan  $cx_2 \leq z$ .

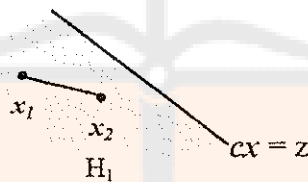
Untuk  $0 \leq \lambda \leq 1$ , jika  $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1$  adalah segmen garis  $x_1x_2$ , maka :

$$cx = \lambda cx_2 + (1 - \lambda) cx_1 \leq \lambda z + (1 - \lambda) z = z$$

Ternyata dipenuhi bahwa  $cx \leq z$ .

Sehingga  $(\forall x_1, x_2 \in H) (0 \leq \lambda \leq 1, x = \lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1 \in H)$ . Jadi  $H_1$  konveks !

Bukti analog untuk  $H_2 : \{x \mid cx \geq z\}$



Gb. 2.3 Ilustrasi Teorema 2.1

**Teorema 2.2 (kekonveksan irisan dua himpunan konveks)**

Irisan dua himpunan konveks selalu konveks.

**Bukti.**

Diketahui dua himpunan konveks  $X_1$  dan  $X_2$ .

Jika  $x_1, x_2 \in X_3 = X_1 \cap X_2$ , maka  $x_1, x_2 \in X_1$  dan  $x_1, x_2 \in X_2$ , sehingga :

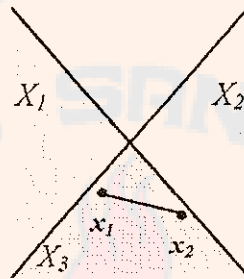
$$\lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1 \in X_1 \quad \text{untuk } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 \in X_2 \quad \text{untuk } 0 \leq \lambda \leq 1$$

maka :

$$\text{untuk } 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 \in X_1 \cap X_2 = X_3.$$

Jadi  $X_3$  konveks.



Gb. 2.4 Ilustrasi Teorema 2.2

**Definisi 2.3 (kombinasi konveks)**

Suatu kombinasi konveks dari himpunan  $n$  titik  $x_1, x_2, \dots, x_n$  didefinisikan sebagai :

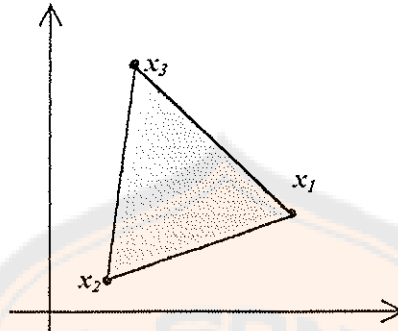
$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2.11)$$

dan

$$D = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.12)$$

adalah semua kemungkinan kombinasi konveks dari himpunan  $n$  titik  $x_1, x_2, \dots, x_n$

**Contoh 2.1**



Gb. 2.5 Himpunan kombinasi konveks dari  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$

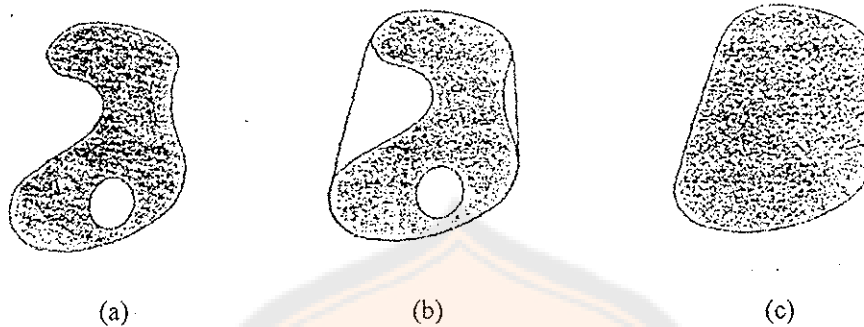
**4. Selubung Konveks**

**Definisi 2.4 (selubung konveks)**

Selubung konveks (*convex hull*) dari himpunan titik  $P$  adalah irisan dari semua himpunan konveks yang mengandung  $P$ .

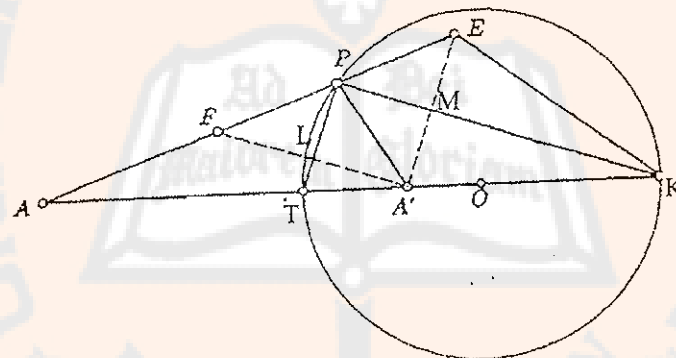
**Contoh 2.3**

Andaikan kita mempunyai suatu bentuk geometri seperti pada gambar 2.6 (a). Kemudian kita pasang karet gelang pada sisi luarnya, sehingga kita akan mendapat bentuk 2.6 (b), lalu kita penuh bagian yang dalamnya dengan titik-titik, seperti pada gambar 2.6 (c). Bentuk inilah yang kemudian disebut dengan selubung konveks dan karet gelang itu adalah batas dari selubung konveks tersebut. Selubung konveks dari himpunan titik  $P$  dilambangkan dengan  $CH(P)$ .



Gb. 2.6 (a) Suatu himpunan  $P$  yang tidak konveks; (b) batas dari selubung konveks; (c) selubung konveks dari  $P$

### C. Lingkaran Apollonius



Gb. 2.7 Lingkaran Apollonius

Diketahui dua titik  $A$  dan  $A'$ .  $P$  adalah sebuah titik yang jaraknya terhadap  $A$  dan  $A'$  mempunyai perbandingan  $1 : \mu$ . ( $AP : A'P = 1 : \mu$ )

Garis bagi  $\angle APA'$  memotong  $\overline{AA'}$  di  $T$  dan garis bagi  $\angle A'PE$  memotong  $\overline{AA'}$  di  $K$ . Pada  $\overline{AP}$  diletakkan dua titik  $E$  dan  $F$  sedemikian hingga  $\overline{EA'} \parallel \overline{PT}$  dan  $\overline{FA'} \parallel \overline{PK}$ . Titik  $L$  adalah perpotongan  $\overline{FA'}$  dengan  $\overline{PT}$ , dan titik  $M$  adalah perpotongan  $\overline{EA'}$  dengan  $\overline{PK}$ .

Perhatikan bahwa :

$$m \angle FPL = m \angle A'PL \quad (\text{sebab } \overline{PT} \text{ adalah garis bagi } \angle APA')$$

$$m \angle EPM = m \angle A'PM \quad (\text{sebab } \overline{PT} \text{ adalah garis bagi } \angle APA')$$

$$m \angle LPA' = m \angle PA'M \quad (\text{sudut dalam berseberangan})$$

$$m \angle MPA = m \angle PA'T \quad (\text{sudut dalam berseberangan})$$

$$m \angle EPM = m \angle PFL \quad (\text{sudut sehadap})$$

$$m \angle FPL = m \angle PEM \quad (\text{sudut sehadap})$$

Karena itu,

$$m \angle FPL + m \angle LPA' + m \angle A'PM + m \angle MPE = 180^\circ$$

sehingga

$$m \angle LPA' + m \angle A'PM = 90^\circ \quad (2.13)$$

Perhatikan juga bahwa :

$$\triangle FPL \cong \triangle A'PL \quad (\text{sudut sudut sisi})$$

$$\triangle EPM \cong \triangle A'PM \quad (\text{sudut sudut sisi})$$

sehingga

$$FP = PA'$$

$$EP = PA'$$

Oleh karena itu,

$$\frac{AT}{TA'} = \frac{AP}{EP} = \frac{AP}{A'P} \quad \text{dan} \quad \frac{AK}{A'K} = \frac{AP}{FP} = \frac{AP}{A'P} \quad (2.14)$$

Dari 2.14, dapat disimpulkan bahwa titik T dan K membagi segmen garis AA' di dalam dan di luar dengan rasio  $1 : \mu$ , dan lokasinya tidak tergantung pada

posisi titik P. Dari 2.13,  $m \angle TPK = 90^\circ$ , maka P berada pada suatu lingkaran dengan diameter TK. Lingkaran semacam ini kemudian disebut sebagai lingkaran Apollonius.



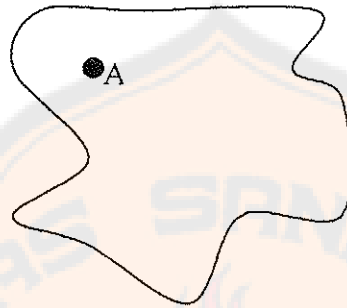
## BAB III

### DIAGRAM VORONOI DAN PENYETIGAAN DELAUNAY

#### A. Diagram Voronoi Sederhana

Berangkat dari suatu masalah mengenai pembagian daerah yang berkaitan dengan perbedaan jarak terhadap kedudukan dua tempat, kita dapat melahirkan suatu konsep yang sederhana tetapi menarik. Apabila dalam suatu wilayah terdapat dua buah rumah sakit yang mempunyai fasilitas yang sama, kita sebut rumah sakit A dan rumah sakit B, dengan mengasumsikan bahwa setiap orang ingin mendatangi rumah sakit terdekat, maka kita dapat menentukan orang-orang pada wilayah sebelah mana yang akan dilayani oleh rumah sakit A dan orang-orang pada wilayah mana yang akan dilayani oleh rumah sakit B. Begitu juga apabila terdapat empat pasar yang sama kelengkapannya dalam suatu wilayah, dua kantor pos yang memiliki daya tarik yang sama dalam suatu wilayah, lima sekolah dasar yang sama mutunya dalam suatu wilayah, dengan tetap berpegang pada asumsi bahwa setiap orang ingin menempuh jarak yang terpendek, maka kita selalu dapat memperkirakan pembagian wilayah layanan / pengaruh dari pasar-pasar, kantor pos-kantor pos, dan sekolah dasar-sekolah dasar tersebut. Keidentikan objek (fasilitas rumah sakit, kelengkapan pasar, daya tarik kantor pos, mutu sekolah dasar) atau sering disebut sebagai kesamaan bobot objek, merupakan syarat perlu untuk pembagian wilayah jenis ini. Untuk jelasnya, dapat ditampilkan dalam gambaran berikut ini.

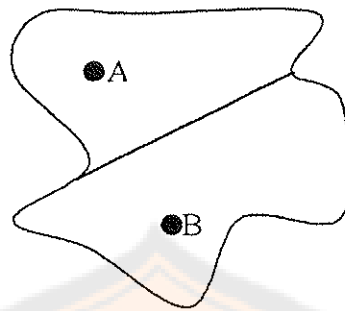
Andaikata di suatu kota hanya mempunyai sebuah pasar, maka semua orang pada wilayah itu akan berdatangan menuju pasar tersebut, sejauh apapun jarak dari tempat tinggalnya sampai pasar itu.



Gb. 3.1 Pembagian suatu wilayah dengan satu pasar

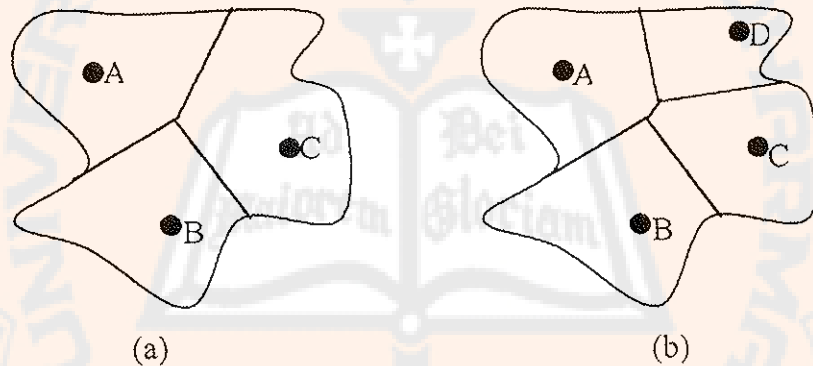
Akan tetapi, apabila ada dua pasar (A dan B) yang memiliki bobot yang sama di kota itu, maka kota itu akan terbagi menjadi dua daerah : satu daerah di mana orang-orang pada daerah itu cenderung memilih untuk menuju ke pasar A dibanding ke pasar B karena jaraknya lebih dekat dan satu daerah lain di mana orang – orang pada daerah itu cenderung untuk memilih pasar B karena jarak yang harus ditempuh lebih pendek dibanding ke pasar A. Orang-orang yang berada di perbatasan dari kedua daerah tersebut mempunyai pilihan untuk menuju ke pasar A maupun ke pasar B karena jarak yang harus ditempuhnya sama. ( Sebagai penyederhanaan masalah, jarak tempuh yang dimaksud di sini adalah jarak Euclides)





Gb. 3.2 Pembagian daerah di kota dengan dua pasar

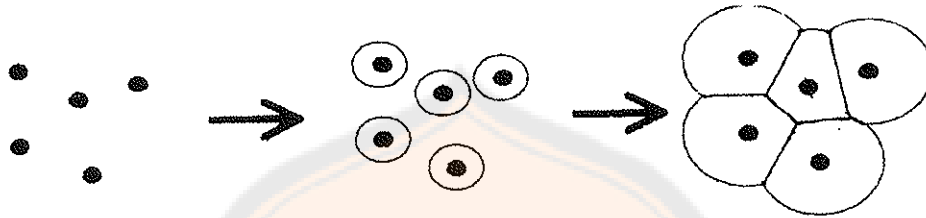
Begitu juga jika daerah itu mempunyai tiga dan empat pasar. Maka pembagian daerah akan tampak seperti pada gambar 3.3 (a) dan (b).



Gb. 3.3 Pembagian daerah di kota dengan  
(a) tiga pasar dan (b) empat pasar

Selain pembagian daerah seperti pada uraian di atas, perhatikan juga contoh pola pertumbuhan berikut ini. Pada proses pembentukan kristal, kita dapat memperkirakan pola dari kristal. Inti-inti kristal yang sama dan sebidang menarik unsur-unsur di sekelilingnya dalam waktu yang bersamaan. Setiap unsur akan menempel pada inti yang terdekat. Mula-mula kecil, kemudian membesar

sehingga akan saling bersinggungan. Unsur-unsur yang bersinggungan membentuk suatu pola kristal tertentu.



Gb. 3.4 Proses pembentukan kristal dilihat dari penampangnya

Apabila digambarkan dalam  $R^2$ , daerah perbatasan pada kasus pembagian daerah dan bidang yang saling bersinggungan pada kasus pola pertumbuhan akan tampak sebagai suatu garis, dan kita sebut dengan garis konflik. Garis konflik ini merupakan sumbu dari dua titik yang mewakili objek yang mengapitnya.

Perhatikan bahwa pembagian daerah dan pola perkembangan memiliki proses yang berbeda, akan tetapi keduanya memberikan suatu bentuk yang serupa, yang kemudian disebut dengan diagram Voronoi.

Dalam kasus-kasus ini, pada intinya diagram Voronoi ini terbentuk dari pemasangan orang-orang pada suatu wilayah dengan pasar, sekolah, rumah sakit dan kantor pos atau pemasangan unsur kristal dengan inti kristal.

Karena syarat perlu bahwa objek-objek yang kita bicarakan adalah berbobot sama, maka diagram Voronoi dapat dibentuk dengan cara sederhana, yaitu dengan mencari garis sumbu antar titik yang mewakili objek yang berdekatan. Diagram Voronoi yang demikian disebut diagram Voronoi sederhana.

Dari uraian tersebut, secara intuitif, kita dapat mendefinisikan diagram Voronoi sederhana sebagai berikut.

***Definisi 3.1 (diagram Voronoi sederhana dalam bidang).***

Diberikan suatu himpunan dari dua atau lebih tetapi berhingga titik berbeda dalam bidang Euclides, namakan himpunan titik pembangkit. Kita pasangkan setiap titik dalam bidang tersebut dengan titik pembangkit terdekat. Hasilnya adalah suatu pengubinan dari bidang menjadi suatu himpunan daerah yang timbul dari titik yang dipasangkan dengan titik pembangkit. Pengubinan ini dinamakan diagram Voronoi sederhana (*planar ordinary Voronoi diagram*) dalam bidang yang dibangkitkan oleh himpunan titik, dan daerah yang dibentuk oleh masing-masing titik pembangkit disebut dengan poligon Voronoi (*ordinary Voronoi polygon*).

Dari contoh rumah sakit, pasar, kantor pos dan sekolah dasar di atas, yang berfungsi sebagai titik-titik pembangkit adalah rumah sakit-rumah sakit, pasar-pasar, kantor pos-kantor pos dan sekolah dasar-sekolah dasar. Sedangkan yang berfungsi sebagai bidang Euclides adalah wilayah di mana rumah sakit-rumah sakit, pasar-pasar, kantor pos-kantor pos dan sekolah dasar-sekolah dasar itu berada.

Untuk penyebutan lebih lanjut, kita akan mengatakan diagram Voronoi sederhana dalam bidang sebagai diagram Voronoi saja dan poligon Voronoi sederhana sebagai poligon Voronoi saja. Dan apabila dalam pembahasan

selanjutnya dikatakan dua atau lebih titik, maka yang dimaksud adalah titik yang berbeda (*distinct*).

Secara matematis, Definisi 3.1 dapat dituliskan sebagai berikut.

**Definisi 3.2 (diagram Voronoi sederhana dalam bidang)**

Jika diberikan suatu himpunan titik  $P = \{ P_1, P_2, \dots, P_n \}$ ,  $2 \leq n < \infty$  dan  $x_i \neq x_j$  untuk  $i \neq j, i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$ , daerah yang diberikan oleh

$$V(P_i) = \{ x \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, i \neq j, j \in I_n \} \quad (3.1)$$

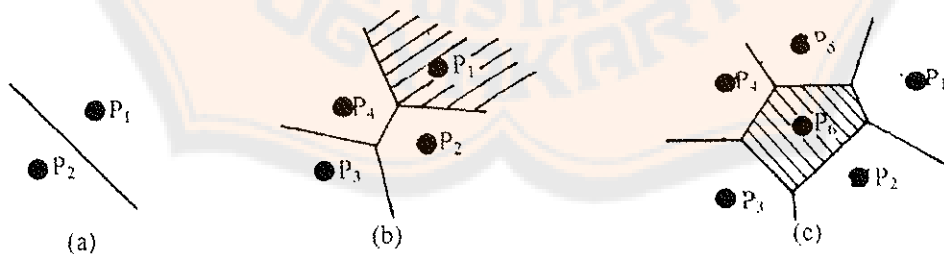
kita namakan poligon Voronoi sederhana yang terkait dengan  $P_i$ , dan himpunan yang diberikan oleh

$$V(P) = \{V(P_1), \dots, V(P_n)\} \quad (3.2)$$

adalah diagram Voronoi sederhana yang dibangkitkan oleh  $P$ .

Titik  $P_i$  dari  $V(P_i)$  disebut titik pembangkit dari poligon Voronoi ke- $i$

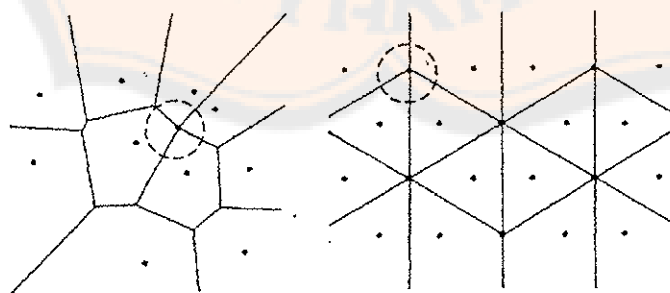
Himpunan titik  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  adalah himpunan titik pembangkit dari diagram Voronoi.



Gb. 3.5 Suatu diagram Voronoi sederhana

Gambar 3.5 (a) adalah diagram Voronoi yang dibangun dari dua titik pembangkit  $P_1$  dan  $P_2$ , sedangkan (b) adalah diagram Voronoi yang dibangun dari empat titik pembangkit  $P_1, P_2, P_3$  dan  $P_4$  dan daerah yang diarsir merupakan poligon yang dibangkitkan oleh  $P_1$ ; (c) dibangun dari enam titik pembangkit  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  dan  $P_6$  dan daerah yang diarsir merupakan poligon Voronoi yang dibangkitkan oleh  $P_6$ . Contoh poligon Voronoi yang dibangkitkan oleh  $P_1$  pada gambar 3.5 (b) merupakan poligon tidak terbatas; sedangkan contoh poligon yang dibangkitkan oleh  $P_6$  pada 3.5 (c) merupakan poligon yang terbatas.

Dalam poligon-poligon Voronoi yang titik-titik pembangkitnya berdekatan berlaku  $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset, i \neq j$ . Jika  $V(P_i) \cap V(P_j)$  lebih dari satu titik maka  $V(P_i)$  dan  $V(P_j)$  disebut berdekatan, dalam hal ini jika  $V(P_i) \cap V(P_j) = e_{ij}$ , maka  $e_{ij}$  disebut rusuk Voronoi (*Voronoi edges*) dari  $V(P_i)$  dan  $V(P_j)$ , dan dapat berupa segmen garis, setengah garis atau garis tak terbatas. Himpunan semua rusuk  $V(P_i)$  disebut tepi atau batas  $V(P_i)$ . Titik sekutu dari tiga atau lebih rusuk disebut titik sudut Voronoi (*Voronoi vertices*). Pada suatu diagram Voronoi apabila terdapat titik sudut Voronoi yang merupakan sekutu dari empat atau lebih rusuk Voronoi maka diagram Voronoi tersebut disebut dengan diagram Voronoi merosot.



Gb. 3.6 Diagram Voronoi yang merosot

Untuk suatu diagram Voronoi yang dibangkitkan oleh suatu himpunan titik  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} (2 \leq n < \infty)$ , maka rusuk-rusuk Voronoi mempunyai sifat : (sifat tidak dibuktikan)

- a) Rusuk-rusuk Voronoi adalah garis-garis lurus tak terbatas jika dan hanya jika titik-titik dalam  $P$  kolinear.
- b) Rusuk Voronoi  $e_{ij}$  adalah suatu setengah garis jika dan hanya jika titik-titik dalam  $P$  non kolinear dan  $P_i$  dan  $P_j$  adalah titik-titik pembangkit yang berurutan dari batas  $CH(P)$ .
- c) Andaikata  $P_i$  dan  $P_j$  memberikan suatu rusuk  $e_{ij}$ , maka rusuk ini merupakan segmen garis jika dan hanya jika titik-titik dalam  $P$  non kolinear dan paling sedikit satu dari  $P_i$  dan  $P_j$  berada dalam interior  $CH(P)$ .

Apabila  $P_i$  dan  $P_j$  adalah dua titik pembangkit ( $P_i \neq P_j$ ), maka suatu garis yang memotong tegak lurus segmen garis  $P_iP_j$  di titik tengahnya disebut sebagai garis sumbu antara  $P_i$  dan  $P_j$  (*bisector between  $p_i$  dan  $p_j$* ) dan dilambangkan dengan  $b(P_i, P_j)$ . Karena jarak kedua titik terhadap titik-titik di garis sumbu adalah sama, maka berlaku

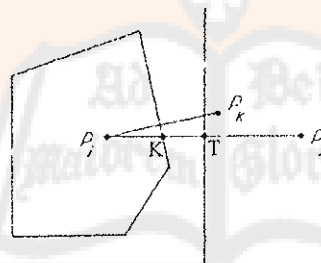
$$b(P_i, P_j) = \{x \mid \|x - x_i\| = \|x - x_j\|\}, j \neq i \quad (3.3)$$

**Teorema 3.1**

Titik pembangkit terdekat dengan  $P_i$  membangkitkan sebuah rusuk Voronoi  $V(P_i)$ .

*Bukti.*

Kita ambil  $P_j$  sebagai titik pembangkit terdekat dengan  $P_i$  dan misalnya bahwa garis sumbu  $b(P_i, P_j)$  bukan merupakan rusuk Voronoi. Jika  $T$  adalah titik tengah dari  $\overline{P_i P_j}$ , maka  $T \in b(P_i, P_j)$  (lihat gambar 3.7). Jika  $b(P_i, P_j)$  bukan merupakan rusuk Voronoi,  $T$  berada di luar  $V(P_i)$ . Jadi  $\overline{TP_j}$  memotong suatu rusuk Voronoi, katakan  $e_{ik}$ , dari  $V(P_i)$ , dan sebut titik perpotongan ini sebagai  $K$ . Jika  $d(P_i, P_k)/2 \leq d(P_i, K) < d(P_i, T) = d(P_i, P_j)/2$ , kita dapatkan  $d(P_i, P_k) < d(P_i, P_j)$ . Keadaan ini berlawanan dengan ketentuan bahwa  $P_j$  adalah titik terdekat dari  $P_i$ . Jadi,  $b(P_i, P_j)$  merupakan rusuk Voronoi.



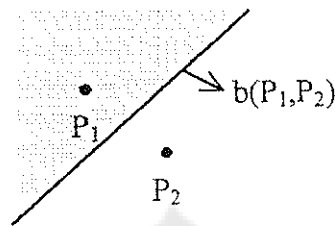
Gb. 3.7 Ilustrasi dari teorema 3.1

**Definisi 3.3 (daerah dominan dari  $P_i$  atas  $P_j$ )**

Jika diberikan dua titik pembangkit  $P_i$  dan  $P_j \in \mathbb{R}^2$ ,  $P_i \neq P_j$  untuk  $i \neq j$ ,  $i, j \in I_n$ , maka daerah dominan  $P_i$  atas  $P_j$  kita definisikan sebagai

$$H(P_i, P_j) = \left\{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, j \neq i \right\} \quad (3.4)$$

Daerah dominan ini berupa setengah bidang, dengan batas garis konflik dari  $P_i$  dan  $P_j$ .



Gb. 3.8 Daerah Dominan P<sub>1</sub> atas P<sub>2</sub>

**Definisi 3.4** (diagram Voronoi sederhana didefinisikan dengan setengah bidang)

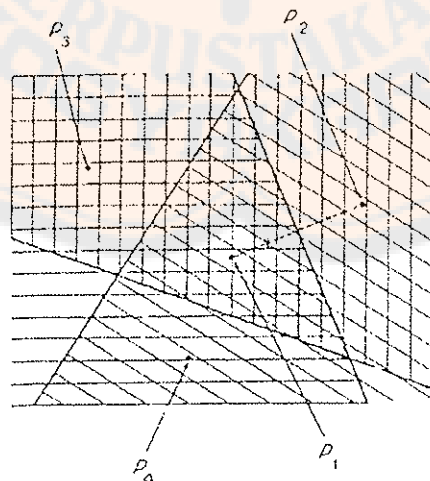
Jika diberikan suatu himpunan titik  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $2 \leq n < \infty$  dan  $x_i \neq x_j$  untuk  $i \neq j$ ,  $i \in I_n$ , kita namakan daerah yang diberikan oleh

$$V(P_i) = \bigcap_{j \in I_n / \{i\}} H(P_i, P_j) \tag{3.5}$$

adalah poligon Voronoi (sederhana) yang terkait dengan  $P_i$  dan himpunan yang diberikan oleh :

$$V(P) = \{V(P_1), \dots, V(P_n)\} \tag{3.6}$$

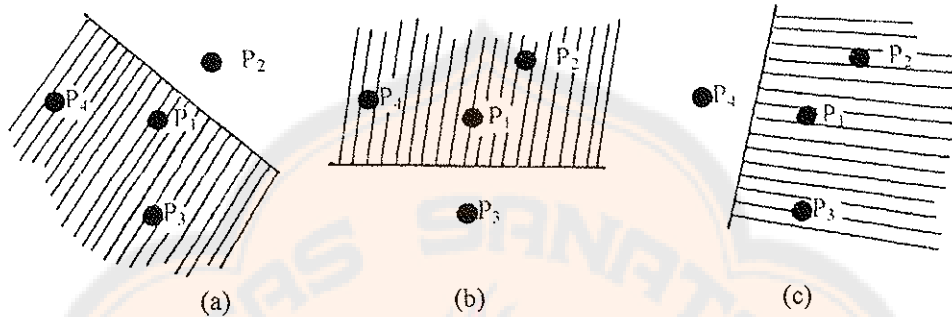
adalah diagram voronoi sederhana yang dibangkitkan oleh  $P$ .



Gb. 3.9 Poligon Voronoi yang terbentuk dari setengah bidang



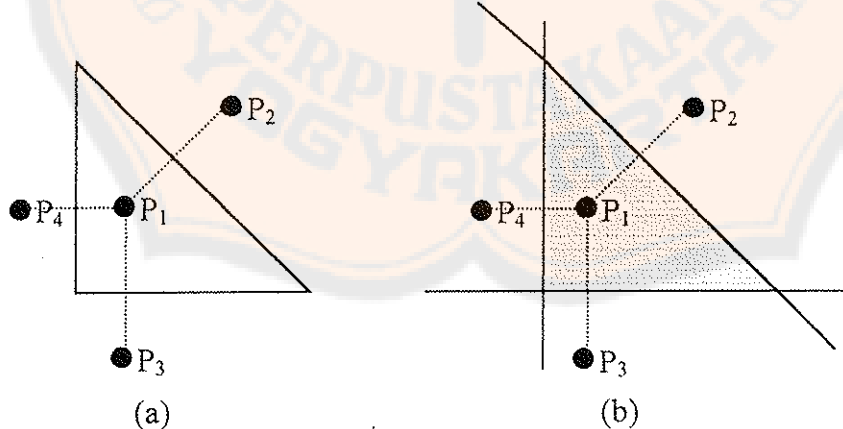
Daerah segitiga yang tersisir tiga kali pada gambar 3.9 menunjukkan poligon  $V(P_1)$ . Poligon ini terdiri dari tiga daerah dominan, yaitu daerah dominan  $P_1$  terhadap  $P_2$ , daerah dominan  $P_1$  terhadap  $P_3$  dan daerah dominan  $P_1$  terhadap  $P_4$



Gb. 3.10 Daerah-daerah dominan penyusun poligon Voronoi pada gambar 3.9

Ketiga daerah dominan itu saling beririsan dan membentuk poligon Voronoi dengan pusat  $P_1$ . Kesetaraan dari Definisi 3.2 dan Definisi 3.4 tampak nyata, sebab  $\|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|$  jika dan hanya jika  $x \in \bigcap_{j \in I_n / \{i\}} H(P_i, P_j)$ . Untuk

jelasnya, perhatikan gambar 3.11 berikut ini :



Gb. 3.11 Suatu poligon Voronoi yang terbentuk melalui  
(a) Definisi 3.2 dan (b) Definisi 3.4

Daerah yang diarsir adalah daerah yang sama-sama memenuhi

$$\|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \text{ dan juga memenuhi } x \in \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(P_i, P_j)$$



***Teorema 3.2 (kekonveksan poligon Voronoi).***

Suatu poligon Voronoi merupakan poligon tidak kosong yang konveks.

***Bukti***

Menurut Definisi 3.4, poligon Voronoi merupakan irisan dari sejumlah terbatas setengah bidang. Pada Teorema 2.1 sudah dibuktikan bahwa suatu setengah bidang adalah suatu himpunan konveks dan sudah dibuktikan pula pada Teorema 2.2 bahwa irisan dari himpunan-himpunan konveks adalah himpunan konveks. Dengan demikian, maka suatu poligon Voronoi adalah himpunan konveks. Menurut Definisi 3.2, setiap poligon Voronoi  $V(P_i)$  terkait dengan titik pembangkit  $P_i$ . Karena itu, untuk setiap poligon Voronoi, paling sedikit memiliki satu anggota, yaitu titik pembangkit yang berkaitan dengan poligon tersebut. Dengan demikian  $V(P_i)$  merupakan poligon tidak kosong yang konveks.

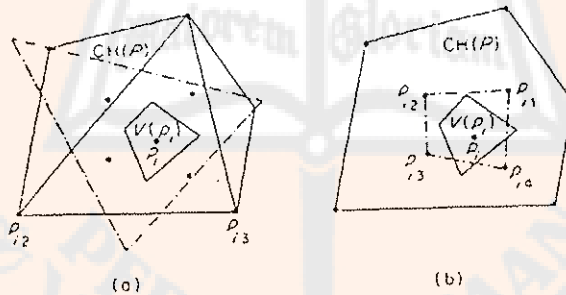
***Teorema 3.3 (keterbatasan suatu poligon Voronoi)***

Untuk suatu diagram Voronoi yang dibangkitkan oleh suatu himpunan titik  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} (2 \leq n < \infty)$  dalam  $R^2$ , suatu poligon Voronoi  $V(P_i)$  adalah terbatas bila dan hanya bila  $P_i \in CH(P)$ . Dengan kata lain,  $V(P_i)$  adalah terbatas  $\Leftrightarrow P_i$  adalah titik interior dari selubung konveks dari semua titik pembangkit.

**Bukti**

$\Leftarrow$  : Diketahui  $P_i$  adalah titik interior dari selubung konveks dari  $P$ . Maka ada titik-titik pembangkit  $P_{i1}$ ,  $P_{i2}$ , dan  $P_{i3}$  di sekitar  $P_i$ , sedemikian poligon Voronoi  $V(P_i)$  adalah suatu subset dari daerah segitiga, yang dibentuk dari sumbu segmen garis  $\overline{P_i P_{i1}}$ ,  $\overline{P_i P_{i2}}$  dan  $\overline{P_i P_{i3}}$ . Daerah segitiga ini terbatas, dengan demikian  $V(P_i)$  terbatas.

$\Rightarrow$  : Diketahui  $V(P_i)$  terbatas dan titik-titik pembangkit dari poligon Voronoi yang berdekatan dengan  $V(P_i)$  adalah  $P_{i1}$ ,  $P_{i2}$ , ...,  $P_{im}$  ( $m \leq n$ ) maka  $P_i$  ada di dalam selubung konveks dari titik-titik pembangkit  $P_{i1}$ ,  $P_{i2}$ , ...,  $P_{im}$ , dan dengan demikian  $P_i$  berada di dalam selubung konveks  $CH(P)$  dari semua titik pembangkit.

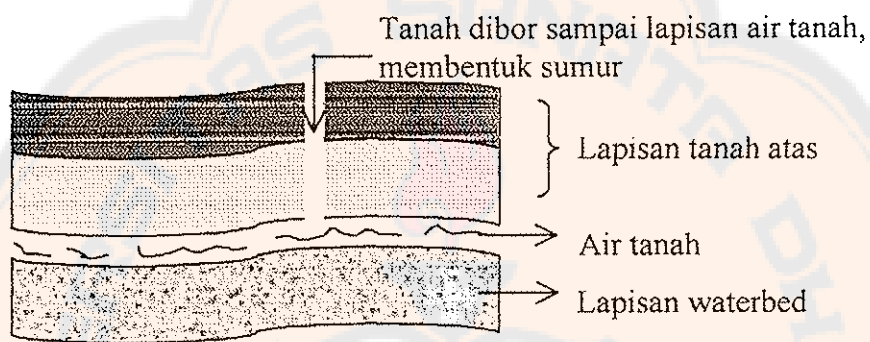


Gb. 3.12 Ilustrasi dari Teorema 3.3

Apabila asumsi non kelinearan tidak kita pergunakan, perhatikan bahwa semua titik pembangkit berada dalam  $CH(P)$  yang sudah merosot menjadi segmen garis, sedemikian hingga semua poligon Voronoi menjadi tak terbatas.

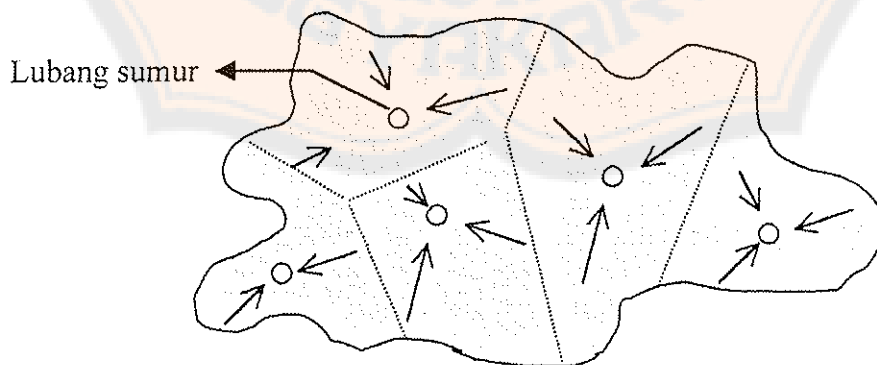
*Contoh 3.1 (poligon Thiessen)*

Pada masa dahulu, poligon Thiessen ini digunakan untuk mengetahui debit air tanah di suatu daerah. Cara kerjanya adalah sebagai berikut. Salah satu lapisan tanah di bumi ini ada yang disebut sebagai waterbed, yaitu suatu lapisan yang tidak dapat ditembus oleh air. Di atas lapisan waterbed inilah air tanah berada.



Gb. 3.13. Susunan lapisan tanah

Dengan asumsi bahwa air tanah di setiap permukaan berada pada kedalaman yang sama, di suatu wilayah, tanah dibor di beberapa tempat, lalu di sedot.

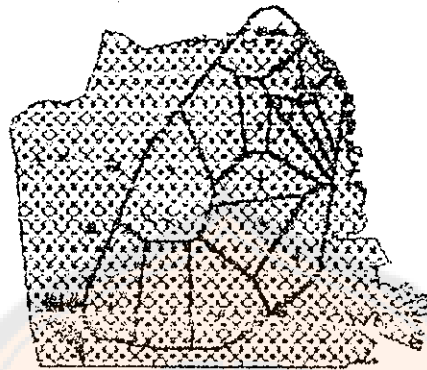


Gb. 3.14 Poligon Thiessen

Air tanah akan tersedot ke lubang sumur yang terdekat. Ada suatu tempat di mana air tanah itu tersedot ke lebih dari satu lubang, karena jarak yang sama. Daerah itu adalah garis konflik. Apabila garis konflik-garis konflik itu ditandai, maka kita akan mendapatkan suatu diagram Voronoi sederhana dengan masing-masing poligon Voronoinya. Akan tetapi saat itu poligon ini disebut sebagai poligon Thiessen. Penerapan dari poligon Thiessen ini bermacam-macam, sesuai dengan kebutuhan. Misalkan, setelah diketahui debit air tanah di beberapa tempat dalam suatu wilayah, maka dapat ditentukan lokasi pembangunan sumur yang paling menguntungkan ditinjau dari persediaan (suplai) air tanah. Atau dapat juga digunakan untuk menentukan letak sumur resapan, agar tidak mencemari air tanah yang akan digunakan untuk kebutuhan sehari-hari.

### *Contoh 3.2 (peta layanan hantar Mc Donald di San Fransisco)*

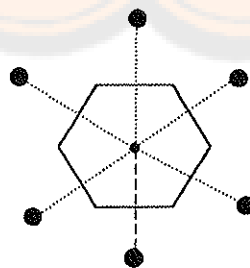
Di San Fransisco, A.S, pihak manajemen restoran cepat saji Mc Donald menggunakan diagram Voronoi sederhana untuk menentukan daerah layanan hantar. Di kota itu, terdapat 16 cabang restoran cepat saji McDonald. Setiap restoran dianggap menjadi titik-titik pembangkit Voronoi, kemudian dibentuklah diagram Voronoi pada kota tersebut. Apabila seorang pelanggan menelepon untuk layanan hantar, maka operator akan mengecek, alamat pelanggan tersebut berada pada poligon Voronoi yang mana. Kemudian dia akan menghubungi restoran yang berada pada poligon tersebut.



Gb 3.15 Peta layanan hantar McDonald's di San Fransisco

**Contoh 3.3 (Antropologi/ Arkeologi (1))**

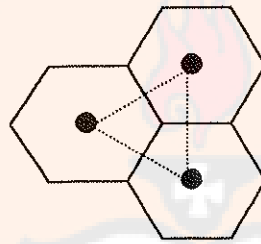
Diagram Voronoi dapat digunakan untuk mengidentifikasi pembagian wilayah dengan berdasar pengaruh suku-suku yang berbeda jaman neolitik, pusat kebudayaan dan benteng batas wilayah. Pada suatu penggalian, andai ditemukan suatu bekas wilayah dengan pusat kebudayaanya dan batas wilayahnya. Dengan mengandaikan wilayah tersebut sebagai suatu poligon Voronoi dengan pusat kebudayaan sebagai titik pembangkit Voronoi, dan batas wilayah sebagai rusuk Voronoi, kita dapat merekonstruksi /memperkirakan letak pusat kebudayaan yang sejenis dengan pusat kebudayaan yang sudah ditemukan dari wilayah yang berbatasan dengannya.



Gb. 3.16 Masalah rekonstruksi dalam diagram Voronoi

**Contoh 3.4 (Antropologi/ Arkeologi (2))**

Dalam suatu penggalian, misalkan ditemukan bekas-bekas wilayah tanpa diketahui pusat kebudayaanya dan hanya diketahui batas-batas wilayahnya. Dengan memisalkan wilayah tersebut sebagai poligon-poligon Voronoi dan batas-batas wilayah sebagai rusuk-rusuk Voronoi, maka dengan menggunakan prinsip dari diagram Voronoi, kita dapat memperkirakan letak pusat kebudayaan yang sejenis.



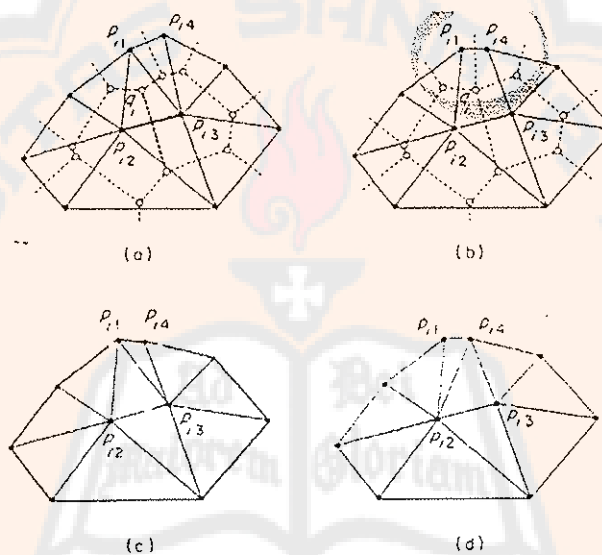
Gb. 3.17 Masalah rekonstruksi dalam diagram Voronoi

**B. Penyetigaan Delaunay**

Dalam penyetigaan Delaunay diperlukan dua pengandaian pokok, yaitu banyak titik pembangkit lebih atau sama dengan tiga tetapi berhingga dan titik-titik pembangkit tidak kolinear. Alasan diperlukannya kedua pengandaian ini dapat kita pahami setelah kita amati proses pembentukan penyetigaan Delaunay berikut.

Pertama, kita ambil suatu rusuk dalam poligon Voronoi. Rusuk ini terbentuk dari dua poligon yang berdekatan. Lalu, kita hubungkan titik pembangkit kedua poligon ini dengan suatu segmen garis. Kita lakukan hal ini

terhadap semua rusuk Voronoi dalam diagram Voronoi tersebut. Ada dua macam pengubinan yang akan terbentuk, yaitu (a) hanya terdiri dari segitiga-segitiga, dan (b) mengandung segi- $n$ ,  $n > 3$ . Kejadian (a) disebut dengan penyetigaan Delaunay, sedangkan kejadian (b) disebut dengan prapenyetigaan Delaunay (*Delaunay pretriangulation*). Prapenyetigaan Delaunay ini terjadi pada diagram Voronoi yang merosot



Gb. 3.18 Diagram Voronoi (garis putus-putus) dan penyetigaan Delaunay (a) Suatu penyetigaan Delaunay; (b) Suatu prapenyetigaan Delaunay; (c) Suatu penyetigaan Delaunay dari (b); (d) Bentuk lain penyetigaan Delaunay dari (b)

Suatu prapenyetigaan Delaunay dapat dibentuk menjadi suatu penyetigaan Delaunay dengan cara membagi poligon yang tidak berbentuk segitiga tadi menjadi berbentuk segitiga, dengan menghubungkan dua titik pembangkit, tanpa memotong segmen garis penghubung antar dua titik pembangkit yang sudah terbentuk. Penyetigaan Delaunay seperti ini tidak tunggal. Perhatikan gambar 3.18



(c) dan (d). segmen garis yang digunakan untuk membentuk poligon menjadi berbentuk segitiga berbeda, tetapi keduanya benar dan dapat diterima, dan keduanya kemudian disebut penyetigaan Delaunay juga. (Dengan catatan bahwa pengubinan yang terbentuk bukan lagi pengubinan dari diagram Voronoi).

Suatu penyetigaan Delaunay paling sedikit terdiri dari tiga atau lebih titik pembangkit tetapi terbatas. Jika titik-titik pembangkit tersebut kolinear, maka prosedur di atas tidak akan membentuk suatu segitiga, tetapi akan membentuk suatu segmen garis. Inilah alasan pentingnya diperlukan dua pengandaian tersebut.

Selain dengan cara di atas, penyetigaan Delaunay juga dapat dibentuk dengan cara lain, yaitu dengan memandang titik sudut Voronoi. Prosedurnya adalah sebagai berikut ini.

Kita temukan suatu diagram Voronoi yang dibangkitkan oleh himpunan titik  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  ( $3 \leq n < \infty$ ) yang memenuhi asumsi nonkekolinearan. Kita pilih salah satu titik sudut Voronoi  $Q_i$  dengan  $V(P_{i_k}), \dots, V(P_{i_m})$  ( $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq m \leq n$ ) adalah poligon-poligon Voronoi yang bersama-sama mempunyai  $Q_i$  sebagai salah satu titik sudut Voronoi. Lalu, kita buat suatu poligon baru dengan cara saling menghubungkan titik-titik pembangkit dari setiap poligon Voronoi tersebut di atas, dengan titik sudut  $Q_i$  sebagai pusat poligon yang baru terbentuk tersebut. Apabila poligon tersebut bukan suatu segitiga, maka poligon tersebut kita partisi menjadi segitiga-segitiga dengan cara yang sama seperti di atas.

Sebetulnya, kedua cara ini sama, akan tetapi untuk membawa pendefinisiannya ke bentuk matematis, cara kedua ini yang akan dipakai.

**Definisi 3.5 (penyetigaan Delaunay)**

Jika  $V(P)$  adalah suatu diagram Voronoi yang dibangkitkan oleh suatu himpunan titik  $P = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^2$  ( $3 \leq n < \infty$ ) yang memenuhi asumsi nonkelinearan. Himpunan  $Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  ( $m < n$ ) adalah himpunan titik sudut Voronoi dalam  $V(P)$ ;  $x_{i1}, \dots, x_{iki}$  adalah vektor lokasi dari titik pembangkit yang poligon-poligon Voronoinya bersama-sama mempunyai titik sudut  $Q_i$ . Kita definisikan himpunan

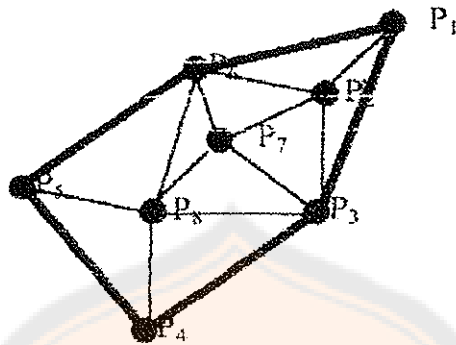
$$T_i = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{x}_{ij}, \text{ dimana } \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in I_3 \right\} \quad (3.7)$$

dan

$$D = \{T_1, \dots, T_n\}$$

Himpunan  $D$  kita sebut sebagai penyetigaan Delaunay dari  $CH(P)$  (*Delaunay triangulation of CH (P) spanning P*) dan segitiga-segitiga dalam  $D$  kita sebut sebagai segitiga Delaunay (*Delaunay triangles*).

Dalam Definisi 3.6, segitiga-segitiga Delaunay didefinisikan sebagai suatu himpunan tertutup dengan batas berupa segmen garis. Segmen garis ini kita sebut rusuk-rusuk Delaunay (*Delaunay edges*). Apabila rusuk Delaunay ini merupakan batas dari dua segitiga Delaunay, maka rusuk ini disebut rusuk dalam (*internal Delaunay edge*, segmen garis yang tipis dalam gambar 3.19), sedangkan rusuk Delaunay yang merupakan batas dari satu segitiga Delaunay saja disebut dengan rusuk luar (*external Delaunay edge*, segmen garis yang tebal dalam gambar 3.19).



Gb. 3.19 Rusuk dalam dan rusuk luar penyetingaan Delaunay

Rusuk Delaunay selalu terbatas. Titik ujung dari rusuk Delaunay ini kita sebut sebagai titik sudut Delaunay (*Delaunay vertices*), dan juga merupakan titik pembangkit dari diagram Voronoi.

Jika  $D(P_i, P_j)$  adalah jarak terpendek dari rute yang menghubungkan  $P_i$  dan  $P_j$  yang tersusun dari rusuk-rusuk Delaunay dalam  $D(P)$ , di mana panjang setiap rusuk Delaunay adalah jarak Euclides antara dua titik ujung rusuk, dan panjang dari rute yang dimaksud adalah jumlahan dari panjang rusuk tersebut, maka

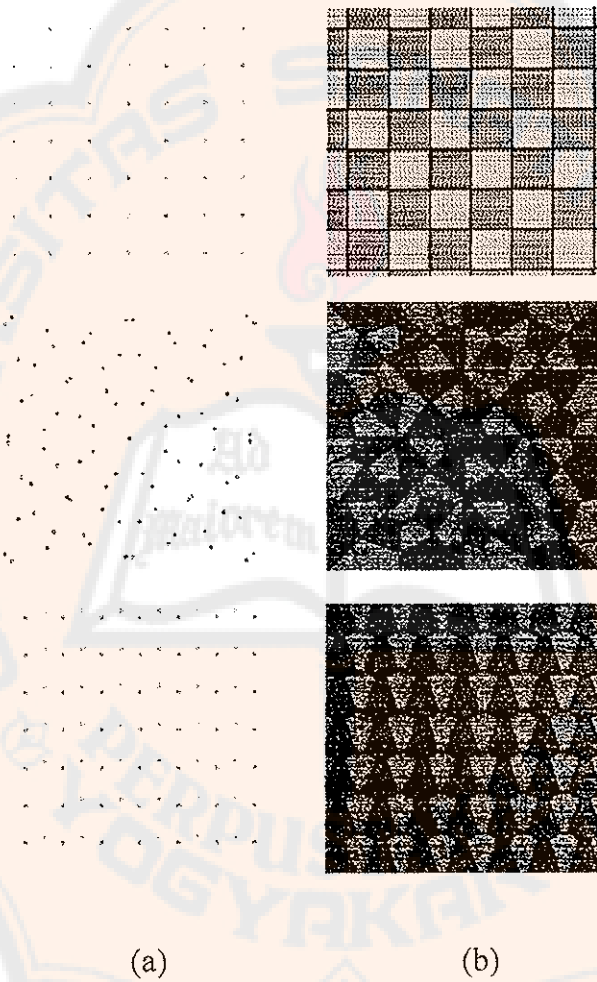
$$D(P_i, P_j) \leq c \cdot d(P_i, P_j) \quad (3.8)$$

dengan  $d(P_i, P_j)$  adalah jarak Euclides antara  $P_i$  dan  $P_j$  dan  $c \approx 2,45$  (diperoleh dari suatu penelitian yang dilakukan oleh Keil dan Gutwin (1989)). Penyetingaan Delaunay banyak dimanfaatkan untuk menggambarkan keadaan geografis suatu daerah dan juga sering digunakan untuk menggambarkan bentuk penyebaran penduduk.

**C. Terapan Diagram Voronoi Pada Bidang Matematika yang Lain**

**1. Diagram Voronoi dan Pengubinan**

Dengan menggunakan prinsip-prinsip pembentukan poligon Voronoi yang teratur, banyak bentuk (ornamen) menarik yang dapat kita bangun.

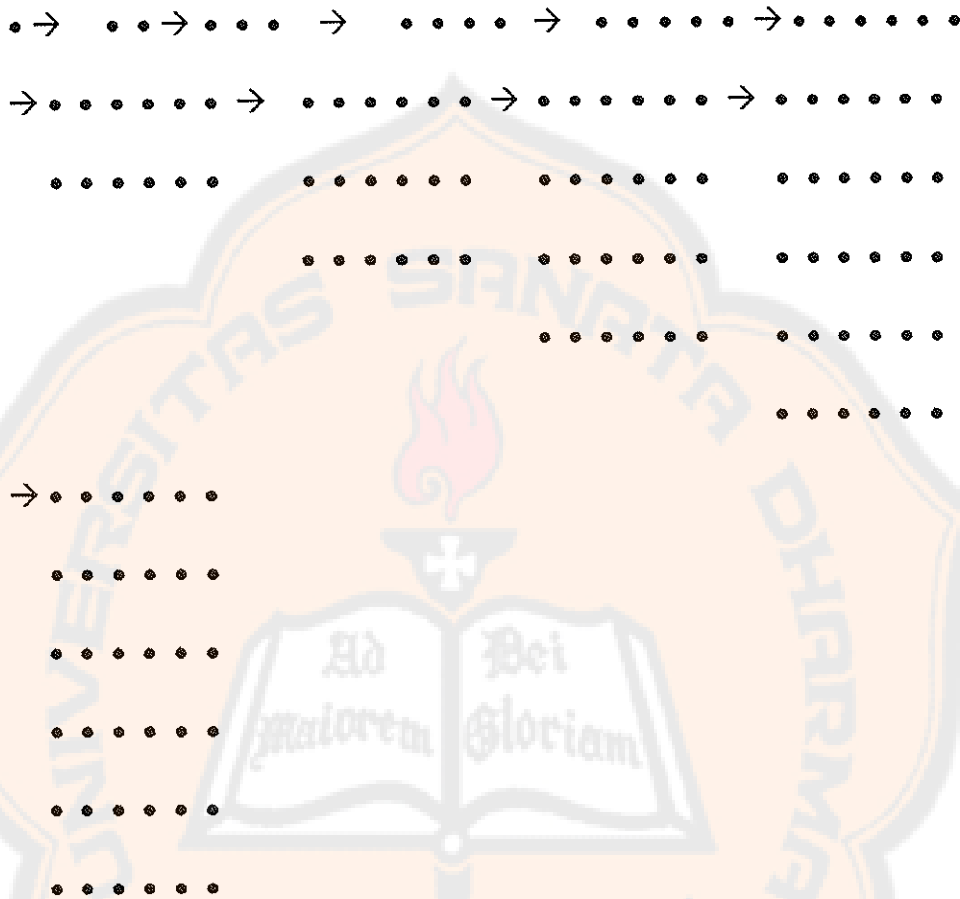


Gb. 3.20 (a) Susunan titik pembangkit; (b) Diagram Voronoi yang terbentuk membentuk suatu ornamen yang indah

Untuk mendapatkan diagram Voronoi yang indah ini, susunan titik-titik pembangkitnya tidak sembarang. Susunan titik pembangkit ini diatur sedemikian rupa menurut aturan tertentu. Misalkan saja dari gambar 3.20 yang pertama. Susunan titik pembangkitnya bisa diperoleh dari proses berikut.

1. Letakkan satu titik dalam bidang.
2. Translasikan titik tersebut dengan arah horisontal sejauh  $c$  ke kanan
3. Translasikan titik yang baru dengan arah horisontal lagi sejauh  $c$  ke kanan.
4. Ulangi langkah tiga sebanyak  $n$  kali yang dikehendaki (gambar 3.20 dilakukan sampai enam kali).
5. Deretan titik-titik pembangkit yang kita peroleh dari langkah di atas kemudian kita translasikan sejauh  $c$  dengan arah vertikal ke bawah.
6. Deretan titik yang baru kita translasikan dengan arah vertikal sejauh  $c$  ke bawah.
7. Kita ulangi langkah enam sampai  $n$  kali yang kita kehendaki ( pada gambar tersebut, dilakukan sampai 6 kali)

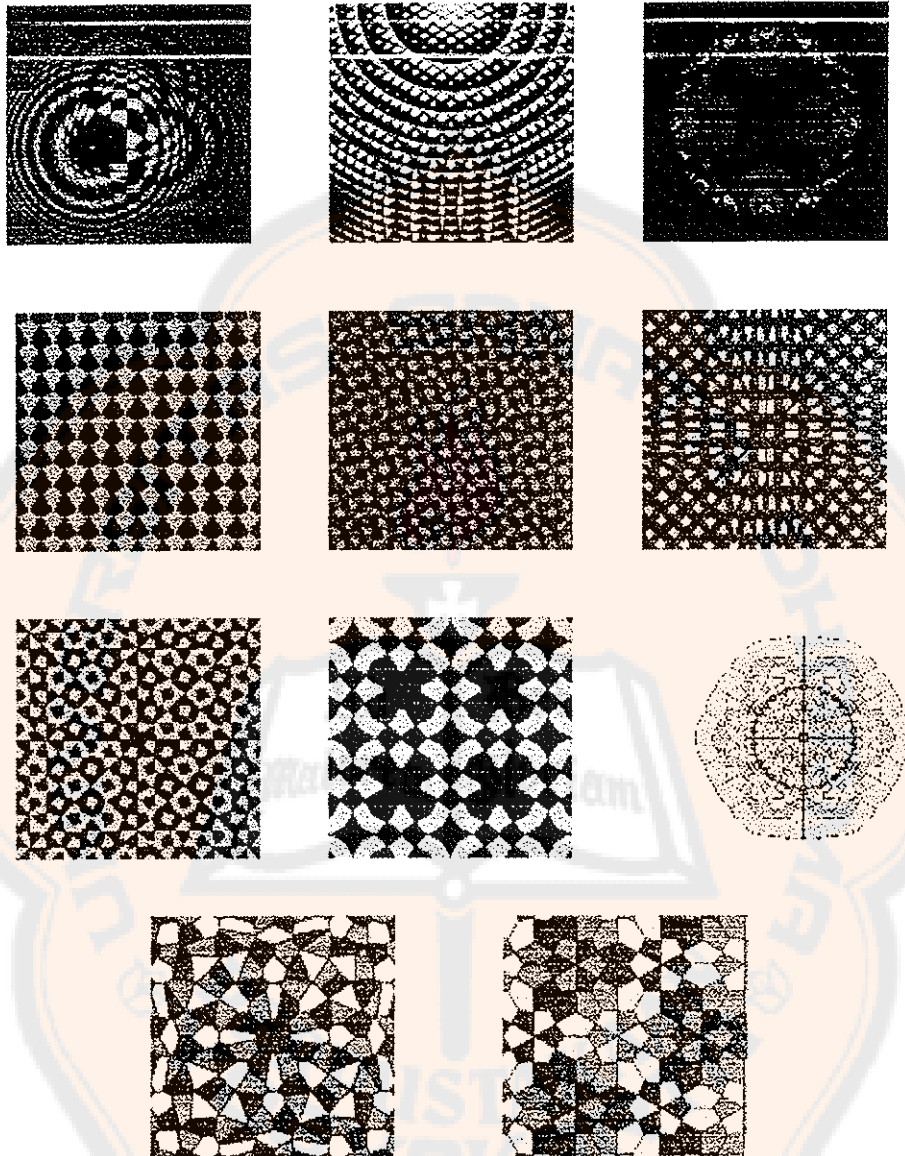
Apabila digambarkan, proses tersebut adalah sebagai berikut :



Gb. 3.21 Proses pembentukan susunan titik pembangkit diagram Voronoi gambar 3.20 atas

Demikian juga untuk susunan titik pembangkit gambar 3.20 tengah dan bawah, proses pembentukan polanya juga mengikuti aturan tertentu. Aturan itu biasa disebut sebagai grup transformasi. Akan tetapi hal ini tidak akan kita bahas lebih lanjut.

Bentuk-bentuk diagram Voronoi yang menarik lainnya :



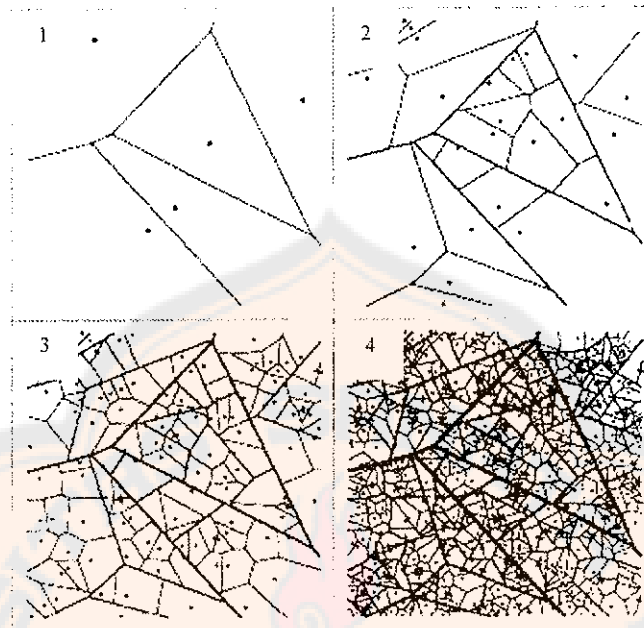
Gb. 3. 22 Ornamen-ornamen yang terbentuk dari diagram Voronoi

## 2. Diagram Voronoi dan Fraktal

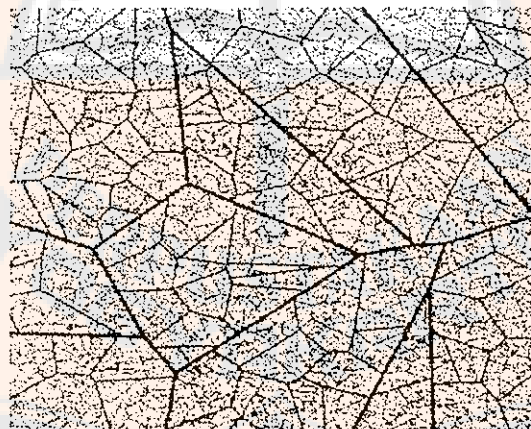
Fraktal berasal dari kata *fractus* yang berarti pecah. Pada dasarnya fraktal berarti memecah suatu bentuk menjadi bentuk yang tampak tak teratur, menurut pola tertentu. Fraktal dibentuk oleh fungsi rekursif yang berupa transformasi similaritas atau afinitas yang berkontraksi menimbulkan pemetaan secara konvergen menuju suatu titik tetap. Pembentuk titik tetap ini disebut sebagai atraktor.

Untuk membangun suatu fraktal dari diagram Voronoi, pertama-tama kita bangun suatu diagram Voronoi dengan beberapa titik. Kemudian kita letakkan titik-titik pembangkit sesuai dengan pola titik-titik pembangkit yang diberikan pertama kali pada tiap-tiap poligon Voronoi yang sudah terbentuk sebelumnya dengan transformasi afinitas. Proses ini kita ulang terus menerus. Dalam hal ini yang berfungsi sebagai atraktor dari fraktal tersebut adalah titik-titik pembangkit mula-mula. Berikut ini adalah ilustrasi dari proses tersebut.

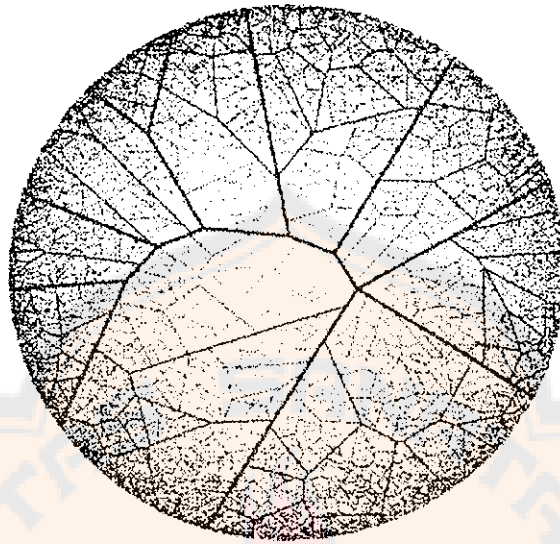




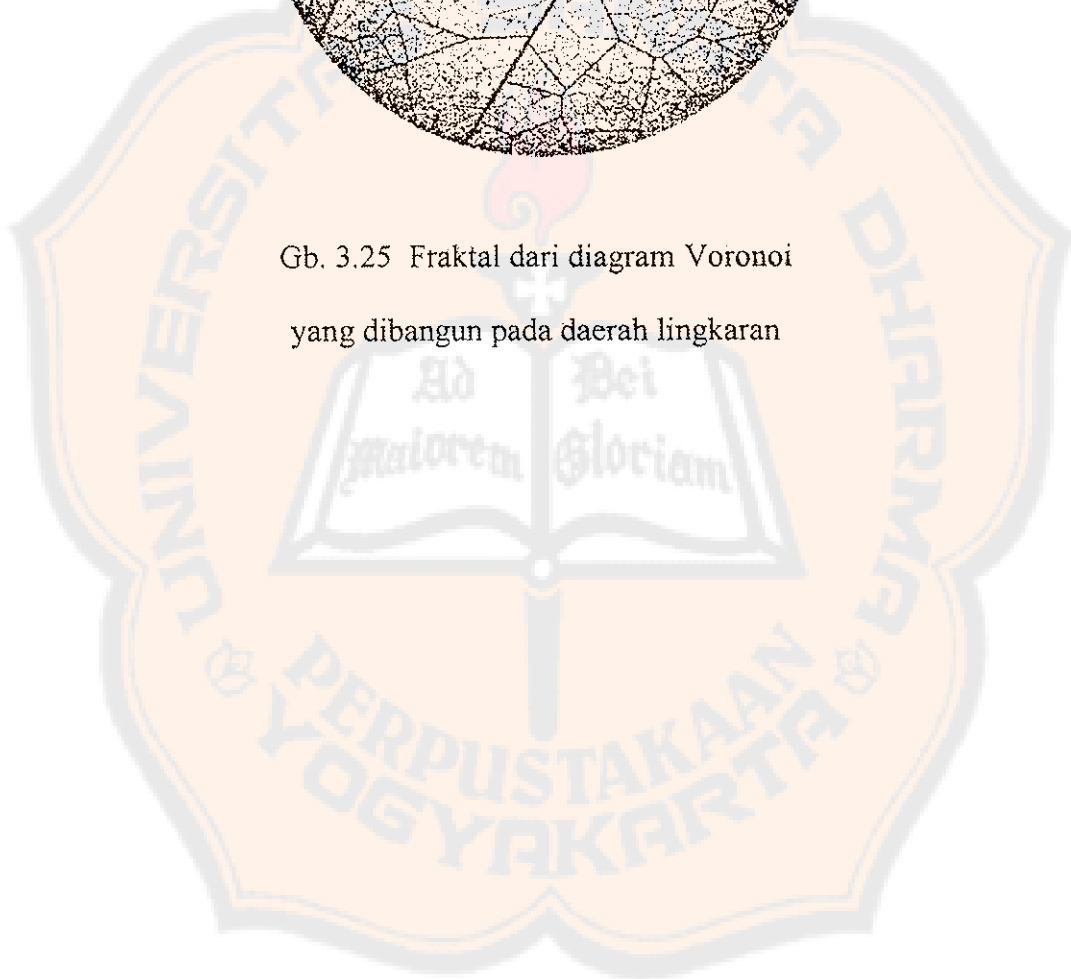
Gb. 3.23 Proses pembentukan fraktal dari diagram Voronoi



Gb. 3. 24 Fraktal dari diagram Voronoi



Gb. 3.25 Fraktal dari diagram Voronoi  
yang dibangun pada daerah lingkaran



## BAB IV

### DIAGRAM VORONOI BERBOBOT

Dalam pembahasan pada bab sebelumnya kita selalu mengandaikan bahwa objek-objek yang diwakili oleh titik-titik pembangkit dalam  $P$  selalu memiliki 'bobot' yang sama (bobot di sini dapat diartikan sebagai nilai, mutu, keunggulan, fasilitas, kemampuan dan lain sebagainya). Padahal dalam kenyataannya, hal seperti ini sangat jarang dijumpai.

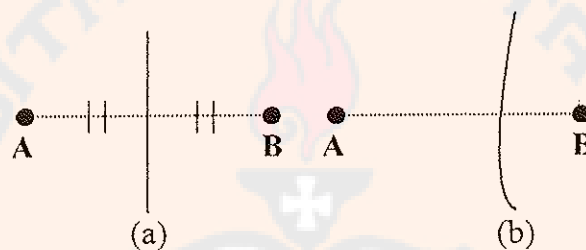
#### *Contoh 4.1*

Pada suatu kecamatan "X" terdapat empat sekolah dasar, sebut saja SD "A", SD "B", SD "C" dan SD "D". Ternyata setelah diadakan penilaian antar sekolah dasar tersebut diperoleh hasil bahwa SD "A" lebih unggul dibanding dengan SD "B" tetapi tidak lebih unggul dibanding dengan SD "C", sedangkan SD "D" menduduki peringkat paling bawah dibanding ketiga sekolah dasar lainnya.

Pada Bab III, peringkat mutu sekolah dasar ini dianggap sama, sehingga pembagian wilayah dapat dilakukan dengan cara sederhana, yaitu dengan cara mencari garis sumbu antara dua titik pembangkit yang berdampingan, sehingga akan terbentuk diagram Voronoi sederhana.

Dalam Bab IV ini kita akan mempelajari salah satu perluasan dari diagram Voronoi sederhana tersebut, yaitu diagram Voronoi berbobot (*weighted Voronoi diagram*). Model pembagian wilayah yang akan terbentuk nantinya lebih

mendekati kenyataan, karena mempertimbangkan mutu sekolah. Sekolah dasar dengan mutu yang lebih baik tentu lebih banyak diminati daripada sekolah dasar dengan mutu yang kurang baik. Mutu yang baik akan menimbulkan daya tarik yang lebih besar, dengan demikian tentu saja sekolah dengan mutu yang lebih baik akan memiliki daerah pengaruh yang lebih luas dibanding dengan sekolah yang kurang baik, sehingga pembagian wilayah berdasarkan garis sumbu tidak dapat dilakukan.



Gb. 4.1. Perbandingan pembagian wilayah : (a) pembagian wilayah dengan mengandaikan bobot kedua titik adalah sama; (b) pembagian wilayah dengan A mempunyai bobot yang lebih besar dibanding B

Dalam diagram Voronoi berbobot ini nanti, titik-titik pembangkit dalam P akan kita beri bobot sesuai dengan objek yang diwakili. Oleh karena itu dari Contoh 4.1, titik pembangkit yang mewakili SD “C” kita beri bobot yang paling besar dan SD “D” kita beri bobot yang paling kecil. Bobot ini nanti akan dihitung dalam menentukan jarak/jangkauan wilayah, sehingga konsep jarak yang akan dipakai di sini bukanlah konsep jarak Euclides, tetapi akan dipakai konsep jarak berbobot (*weighted distance*).

Ada dua konsep jarak berbobot yang akan kita pakai di sini, yaitu (a) konsep jarak berbobot multiplikatif; dan (b) konsep jarak berbobot aditif. Konsep jarak berbobot multiplikatif dipakai pada kasus di mana titik pembangkit mempunyai perbedaan kemampuan (bobot) berkembang sedangkan konsep jarak berbobot aditif dipakai pada kasus di mana antar titik pembangkit berkembang tidak pada waktu yang sama. Pada umumnya, konsep jarak berbobot multiplikatif ini akan dipakai pada pembentukan diagram Voronoi berbobot yang menyangkut pembagian wilayah, sedangkan konsep jarak berbobot aditif akan dipakai pada pembentukan diagram Voronoi berbobot yang menyangkut pola pertumbuhan.

Berkaitan dengan konsep jarak yang akan dipakai dalam membentuk diagram Voronoi berbobot ini, maka ada dua macam diagram Voronoi yang akan kita pelajari di sini, yaitu (a) diagram Voronoi berbobot multiplikatif (*Multiplicatively Voronoi Weighted Diagram*), yang untuk selanjutnya kita sebut diagram Voronoi BM; dan (b) diagram Voronoi berbobot aditif (*Additively Voronoi Weighted Diagram*) yang untuk selanjutnya kita sebut sebagai diagram Voronoi BA.

#### 4.1. Diagram Voronoi Berbobot Multiplikatif

Sebelum kita masuk ke dalam pembahasan diagram Voronoi BM ini, kita definisikan terlebih dahulu konsep jarak yang akan dipakai.

**Definisi 4.1 (jarak berbobot multiplikatif)**

Diketahui suatu titik  $P_i$  dengan vektor posisi  $x_i$  dan bobot multiplikatif  $w_i$ , maka jarak berbobot multiplikatif sembarang titik  $P$  yang diwakili oleh vektor posisi  $x$  ke titik  $P_i$  tersebut dirumuskan dengan :

$$d_{BM}(P, P_i) = \frac{1}{w_i} \|x - x_i\|, \quad w_i > 0 \quad (4.1)$$

**Contoh 4.2**

Diketahui lokasi suatu pabrik berada pada pangkal koordinat  $O(0,0)$  dan biaya pengangkutan yang disediakan oleh pabrik itu untuk mendistribusikan produknya adalah 2 kali biaya pengangkutan biasa. Bandingkan jarak dari  $P$  ke ke titik  $P(3,4)$  dengan menggunakan konsep jarak Euclides dan konsep jarak berbobot multiplikatif !

*Jawab.*

Andaikan koordinat titik pangkal diwakili vektor posisi  $x$  dan titik koordinat pabrik tersebut diwakili oleh vektor posisi  $x_1$ , maka  $x = (0, 0)$  dan  $x_1 = (4, 3)$ . Jika  $w = 2$  menyatakan biaya yang disediakan oleh pabrik itu, maka jarak berbobot multiplikatifnya dapat kita hitung dengan persamaan (4.1) dan diperoleh :

$$d_{bm}(P, P_1) = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2} = \frac{5}{2} \text{ satuan panjang}$$

sedangkan dari persamaan (2.1), didapat jarak Euclidesnya adalah :

$$d(P, P_1) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ satuan panjang}$$

Konsep jarak berbobot multiplikatif digunakan pada pabrik yang memiliki biaya pengangkutan sekian kali biaya pengangkutan biasa. Pada pabrik dengan biaya pengangkutan biasa digunakan konsep jarak Euclides. Dengan demikian, dengan biaya yang dua kali lipat lebih besar, pabrik tersebut dapat mendistribusikan pabriknya dua kali lebih jauh pula dibanding dengan biaya biasa.

Daerah dominan  $P_i$  atas  $P_j$  dengan jarak berbobot multiplikatif (*dominance region with the MW-distance*) kita tulis sebagai

$$H_{bm}(P_i, P_j) = \left\{ x \left| \frac{1}{w_i} \|x - x_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x - x_j\| \right. \right\}, i \neq j \quad (4.2)$$

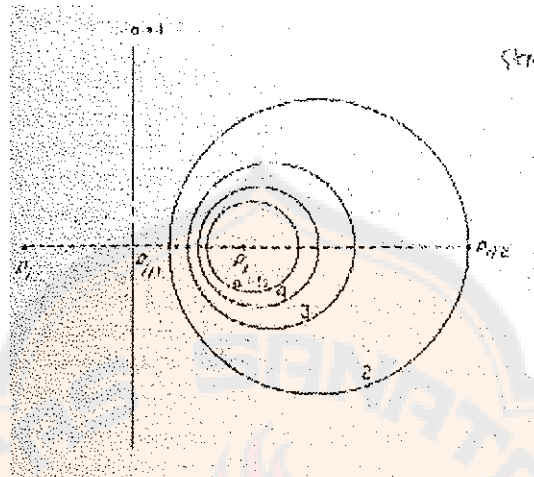
Sedangkan persamaan garis konflik dirumuskan sebagai :

$$b(P_i, P_j) = \left\{ x \left\| x - \frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} x_j + \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} x_i \right\| = \frac{w_i w_j}{w_i^2 - w_j^2} \|x_j - x_i\| \right\} \quad (4.3)$$

$w_i \neq w_j, \quad i \neq j$

Garis konflik ini merupakan tempat kedudukan titik-titik P yang berjarak tetap dari suatu titik tertentu, yaitu  $w_i^2 x_j / (w_i^2 - w_j^2) - w_j^2 x_i / (w_i^2 - w_j^2)$ , sehingga garis konflik ini berupa suatu lingkaran. Karena perbandingan jarak  $P_i$  ke P dan jarak  $P_j$  ke P adalah tetap, yaitu sebesar  $\alpha = w_i/w_j$  (dari 4.2), lingkaran tersebut berupa lingkaran Apollonius. Dalam kasus khusus apabila  $\alpha = 1$  ( $w_i = w_j$ ), maka garis konflik berupa garis lurus atau dapat dianggap sebagai lingkaran dengan jari-jari tak hingga.

Contoh 4.3



Gb. 4.2 Garis konflik untuk jarak berbobot multiplikatif dengan beberapa perbandingan  $\alpha = w_i/w_j = 1, 2, 3, 4, 5$

Dengan demikian kita dapat mendefinisikan diagram Voronoi BM sebagai berikut.

**Definisi 4.2 (diagram Voronoi berbobot multiplikatif)**

Apabila kita mempunyai himpunan titik pembangkit  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  ( $2 \leq n < \infty$ ) dan bobot yang sudah ditentukan untuk masing-masing titik pembangkit sesuai dengan objek yang diwakili kita tulis sebagai himpunan parameter  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ , maka persamaan

$$V_{bm}(P_i) = \bigcap_j^n H_{bm}(P_i, P_j) \quad (4.4)$$

kita sebut sebagai poligon Voronoi berbobot multiplikatif (*multiplicatively weighted Voronoi polygon*) terkait oleh  $P_i$ , dan



$$V_{bm}(P) = \{V_{bm}(P_1), \dots, V_{bm}(P_n)\} \quad (4.5)$$

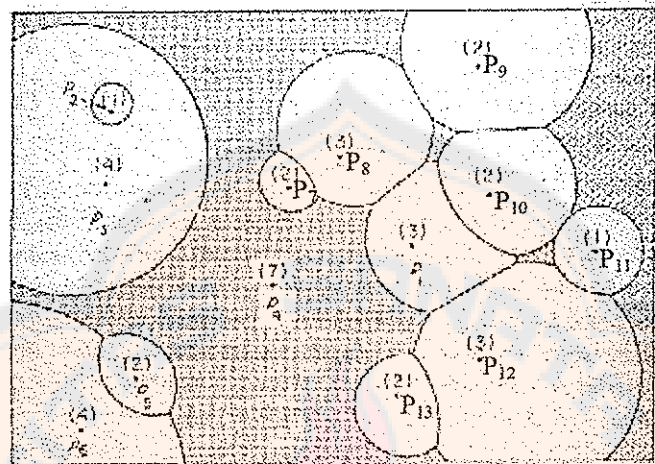
kita sebut sebagai diagram Voronoi berbobot multiplikatif (*multiplicatively weighted Voronoi diagram*) yang dibangkitkan oleh  $P$ .

**Contoh 4.4**

Dalam suatu kota terdapat 13 perusahaan pembuat roti. Tiap-tiap perusahaan berusaha mendistribusikan dagangannya seluas mungkin. Namun tentu saja ongkos pendistribusian masing-masing perusahaan berbeda, yaitu :

No	Nama Perusahaan	Biaya Distribusi Barang	Titik Pembangkit yang Mewakili
1.	Bakeri A	3	$P_1$
2.	Bakeri B	1	$P_2$
3.	Bakeri C	4	$P_3$
4.	Bakeri D	7	$P_4$
5.	Bakeri E	2	$P_5$
6.	Bakeri F	1	$P_6$
7.	Bakeri G	2	$P_7$
8.	Bakeri H	3	$P_8$
9.	Bakeri I	2	$P_9$
10.	Bakeri J	2	$P_{10}$
11.	Bakeri K	1	$P_{11}$
12.	Bakeri L	3	$P_{12}$
13.	Bakeri M	2	$P_{13}$

Dengan menggunakan diagram Voronoi BM, kita dapat menggambarkan areal pendistribusian roti tersebut sebagai berikut.



Gb. 4.3 Diagram Voronoi berbobot multiplikatif ( bilangan dalam kurung mewakili bobot titik pembangkit)

Poligon berbobot multiplikatif ini tidak selalu konveks (lihat  $V(P_1)$ ), atau bahkan dapat “berlubang”. Perhatikan bahwa  $V(P_2)$  berada pada  $V(P_3)$ . Poligon  $V(P_4)$ , yang digambar dengan daerah yang berbayang, tidak terhubung. Suatu poligon Voronoi BM konveks apabila poligon Voronoi yang berdekatan memiliki bobot yang lebih besar dari bobot titik pembangkit yang bersangkutan.



#### 4.2. Diagram Voronoi Berbobot aditif

##### *Definisi 4.3 (jarak berbobot aditif)*

Diketahui suatu titik  $P_i$  dengan vektor posisi  $x_i$  dan bobot aditif  $w_i$ , maka jarak berbobot aditif sembarang titik  $P$  yang diwakili oleh vektor posisi  $x$  ke titik  $P_i$  tersebut dirumuskan dengan :

$$d_{ba}(P, P_i) = \|x - x_i\| - w_i, \quad w_i > 0 \quad (4.6)$$

##### *Contoh 4.5*

Diketahui suatu inti atom berada pada koordinat  $P_1(0,0)$ . Pada waktu tertentu pertumbuhannya akan diamati. Pada saat pengamatan, inti atom tersebut ternyata sudah tumbuh dengan jari-jari 4 satuan panjang. Hitunglah jarak berbobot aditifnya ke titik pangkal koordinat!

*Jawab.*

Koordinat titik pangkal diwakili vektor posisi  $x_1 = (0, 0)$  dan titik koordinat inti atom diwakili oleh vektor posisi  $x_2 = (8, 6)$ . Jika  $w = 4$  menyatakan berapa jauh inti atom tersebut lebih dulu tumbuh, maka dengan persamaan (4.6) diperoleh:

$$d_{ba}(P, P_2) = \sqrt{8^2 + 6^2} - 4 = 6 \text{ satuan panjang}$$

sedangkan dengan menggunakan persamaan (2.1), jarak Euclidesnya 10 satuan panjang.

Jarak berbobot aditif ini digunakan untuk menghitung pertumbuhan inti atom yang sudah dulu tumbuh. Sedangkan jarak Euclides digunakan untuk menghitung inti atom yang belum tumbuh pada saat pengamatan.

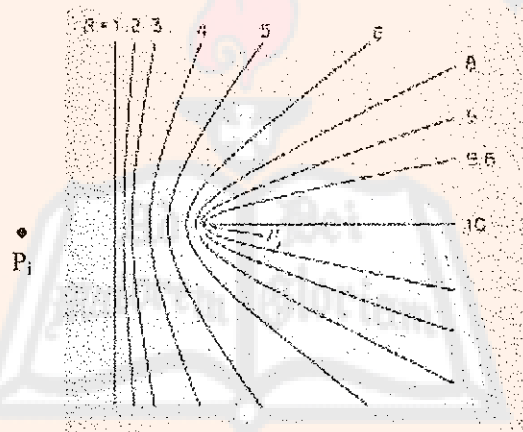
Daerah dominan  $P_i$  atas  $P_j$  dengan jarak berbobot aditif (*dominance region with the AW-distance*) kita tulis sebagai

$$H_{ba}(P_i, P_j) = \{ \mathbf{x} \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \| - w_i \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_j \| - w_j \} \quad i \neq j \quad (4.7)$$

Sedangkan persamaan garis konflik dirumuskan sebagai :

$$b(P_i, P_j) = \{ \mathbf{x} \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \| - \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_j \| = w_i - w_j \} \quad i \neq j \quad (4.8)$$

**Contoh 4.6**



Gb. 4.4 Garis bagi untuk jarak berbobot aditif dengan nilai parameter  $\alpha = 10$  dan  $\beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Secara umum garis bagi ini merupakan tempat kedudukan titik-titik P yang selisih jarak P terhadap  $P_i$  dan P terhadap  $P_j$  adalah tetap, atau dengan kata lain tempat kedudukan ini adalah suatu cabang kurva hiperbola. Kasus khusus, apabila  $\beta = 0$ , maka garis baginya berupa garis lurus.

Dengan demikian kita dapat mendefinisikan diagram Voronoi BA sebagai berikut.

**Definisi 4.4 (diagram Voronoi berbobot aditif)**

Apabila kita mempunyai himpunan titik pembangkit  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  ( $2 \leq n < \infty$ ) dan bobot yang sudah ditentukan untuk masing-masing titik pembangkit sesuai dengan objek yang diwakili kita tulis sebagai himpunan parameter  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ , maka persamaan

$$V_{ba}(P_i) = \bigcap_i^n H_{ba}(P_i, P_j) \tag{4.9}$$

kita sebut sebagai poligon Voronoi berbobot aditif (*additively weighted Voronoi polygon*) yang terkait oleh  $P_i$ , dan

$$V_{ba}(P) = \{V_{ba}(P_1), \dots, V_{ba}(P_n)\} \tag{4.10}$$

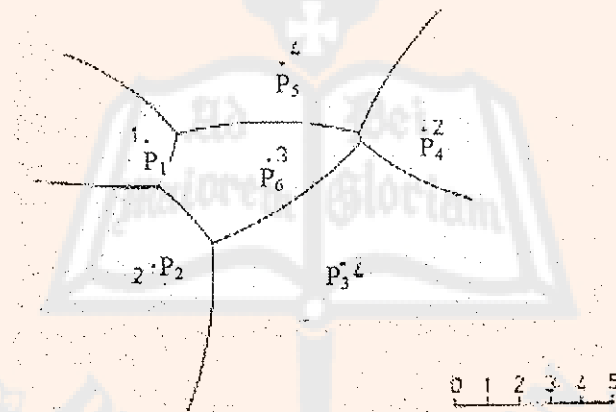
kita sebut sebagai diagram Voronoi berbobot aditif (*additively weighted Voronoi diagram*) yang dibangkitkan oleh  $P$ .

**Contoh 4.7**

Dalam suatu propinsi, waktu awal berkembang masing-masing kota berbeda, sehingga pada saat pengamatan jarak perkembangan kota tersebut berbeda-beda, yaitu :

No	Nama Kota	Jarak Perkembangan Kota Saat Pengukuran	Titik Pembangkit yang Mewakili
1.	Kota A	1	$P_1$
2.	Kota B	2	$P_2$
3.	Kota C	4	$P_3$
4.	Kota D	2	$P_4$
5.	Kota E	4	$P_5$
6.	Kota F	3	$P_6$

Dengan menggunakan diagram Voronoi AM, kita dapat menggambarkan areal perkembangan kota tersebut sebagai berikut.

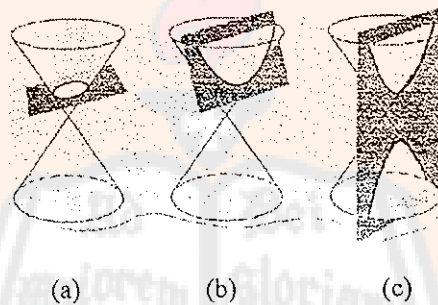


Gb. 4. 5. Diagram Voronoi berbobot aditif ( bilangan pada gambar menyatakan bobot titik pembangkit)

**BAB V**

**PENYAJIAN BEBERAPA BENTUK IRISAN KERUCUT  
DENGAN MENGGUNAKAN DIAGRAM VORONOI**

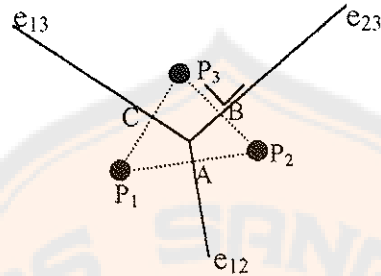
Irisan kerucut sudah dipelajari oleh Apollonius, seorang matematikawan Yunani, sejak sekitar tahun 200 SM, dan pada abad ketujuh belas dilengkapi oleh Descartes dan Pascal. Pada intinya, irisan kerucut merupakan kurva yang terbentuk akibat perpotongan bidang kerucut dengan suatu bidang rata.



Gb. 5.1. Irisan Kerucut : (a) elips; (b) parabola; (c) hiperbola

Dalam Bab III kita telah mempelajari diagram Voronoi sederhana dalam bidang. Dalam diagram Voronoi sederhana tersebut, jarak rusuk Voronoi terhadap dua titik pembangkit yang bersama-sama membentuknya adalah sama, sebab memang rusuk Voronoi dalam diagram Voronoi sederhana merupakan sumbu dari dua titik pembangkit yang berdekatan.

Contoh 5.1



Gb. 5.2. Diagram Voronoi dengan tiga titik pembangkit

Bila A adalah perpotongan  $\overline{P_1P_2}$  dengan  $e_{12}$ , B adalah perpotongan  $\overline{P_2P_3}$  dengan  $e_{23}$ , dan C adalah perpotongan  $\overline{P_1P_3}$  dengan  $e_{13}$ , sehingga :

$$d(P_1, A) = d(P_2, A)$$

$$d(P_2, B) = d(P_3, B)$$

$$d(P_1, C) = d(P_3, C)$$

dan

$$\overline{P_1P_2} \perp e_{12}$$

$$\overline{P_2P_3} \perp e_{23}$$

$$\overline{P_1P_3} \perp e_{13}$$



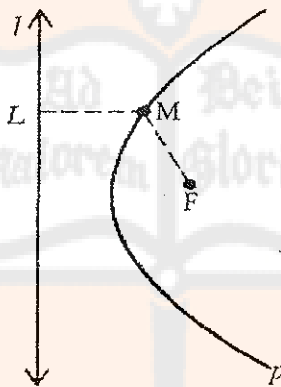
**A. PARABOLA**

Ketika kita mempelajari parabola dalam geometri bidang datar, kita telah mendefinisikan parabola sebagai berikut.

*Definisi 5.1 (parabola)*

Suatu parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik dan garis tertentu. Titik tertentu tersebut disebut fokus parabola dan garis tertentu disebut direktriks parabola.

*Contoh 5.2*



Gb. 5.3 Parabola  $p$  dengan direktriks  $l$  dan fokus  $F$

Jika titik  $L$  pada direktriks  $l$ , dan  $M$  merupakan perpotongan garis tegak lurus  $l$  di titik  $L$  dengan parabola  $p$ , maka :

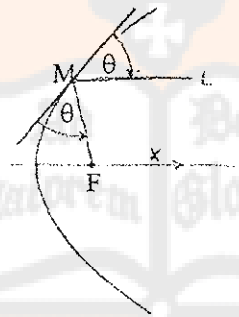
$$d(M,F) = d(M,L)$$

Suatu parabola dapat disajikan dengan menggunakan prinsip diagram Voronoi. Untuk itu terlebih dulu kita ingat sifat refleksi pada parabola.

***Teorema 5.1 (refleksi pada parabola)***

Sinar yang datang dari fokus akan dipantulkan oleh parabola sejajar dengan sumbu parabola, sehingga sudut yang terbentuk dari sinar datang dengan parabola (sudut datang) sama dengan sudut yang dibentuk parabola dengan sinar pantul tersebut (sudut pantul).

Pembuktian teorema ini dapat kita lihat pada Wexler, halaman 229, 1961.



Gb. 5.4 Ilustrasi teorema 5.1

Telah kita pelajari pula dalam geometri bidang datar bahwa arah suatu kurva ditentukan oleh garis singgung di titik singgung yang bersangkutan, sehingga pengukuran besar sudut datang dan sudut pantul juga diwakili oleh garis singgung kurva dan sinar yang bersangkutan.

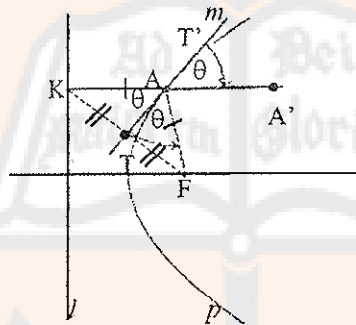
**Teorema 5.2 (hubungan parabola dan rusuk Voronoi)**

Bila  $K$  dan  $F$  adalah titik pembangkit Voronoi dengan  $K$  terletak pada direktriks suatu parabola dan  $F$  sebagai fokus parabola tersebut, maka rusuk Voronoi yang dibangkitkan oleh  $K$  dan  $F$  merupakan garis singgung parabola tersebut.

**Bukti**

Diketahui parabola  $p$  dengan fokus  $F$  dan direktriks  $l$ . Titik  $K$  dan  $F$  adalah titik-titik pembangkit Voronoi, dengan  $K$  terletak pada direktriks  $l$ .

Akan dibuktikan bahwa rusuk Voronoi  $m$  yang dibangkitkan oleh  $K$  dan  $F$  merupakan garis singgung parabola.



Gb. 5.5 Ilustrasi dari teorema 5.2

Titik  $T$  adalah titik tengah  $\overline{KF}$ . Kita buat suatu garis tegak lurus  $l'$  di titik  $K$  dan memotong parabola  $p$  di titik  $A$ . ( $\overline{KA}$  sejajar sumbu parabola  $p$ ).

Karena  $A$  pada  $p$ , maka :

$$d(K,A) = d(A,F) \tag{5.1}$$

sehingga  $A$  juga pada  $m$ .

Karena :

$$\overline{KA} \cong \overline{FA}$$

$$\overline{AT} \cong \overline{AT}$$

$$\overline{FT} \cong \overline{KT}$$

maka :

$$\Delta KAT \cong \Delta FAT$$

sehingga :

$$m \angle KAT = m \angle FAT \quad (5.2)$$

Bila  $T'$  pada perpanjangan  $\overline{TA}$  ( $T'$  pada  $m$ ) dan  $A'$  pada perpanjangan  $\overline{KA}$ ,

maka :

$$m \angle A'AT = m \angle FAT \quad (5.3)$$

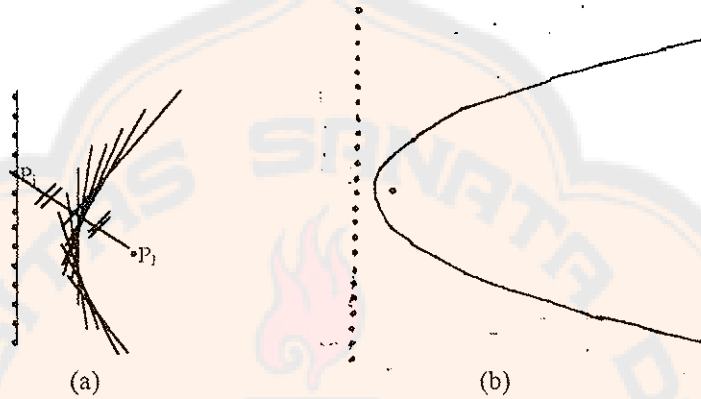
( $\angle KAT$  bertolak belakang dengan  $\angle FAT$ )

Hal ini sesuai dengan teorema 5.1, sehingga rusuk Voronoi  $m$  merupakan garis singgung parabola  $p$ , dengan  $A$  sebagai titik singgungnya.

### ***Penyajian Parabola Menggunakan Diagram Voronoi***

Diketahui  $n$  titik pembangkit, dengan  $n-1$  titik pembangkit kolinear terletak pada garis  $l$ . Satu titik pembangkit di luar  $l$  kita namakan  $P_1$ . Kita ambil sembarang titik pembangkit pada  $l$  dan misal kita namakan  $P_i$  ( $i \neq 1$ ). Kita bangun rusuk Voronoi-rusuk Voronoi yang dibangkitkan oleh sembarang  $P_i$  pada  $l$  dengan  $P_1$ , sehingga akan kita dapatkan kumpulan rusuk Voronoi.

Pada Teorema 5.2, telah dibuktikan bahwa rusuk Voronoi yang demikian merupakan garis singgung parabola dengan fokus  $P_1$  dan direktriks  $l$ , sehingga kumpulan rusuk Voronoi tersebut tak lain adalah kumpulan garis singgung parabola dengan fokus  $P_1$  dan direktriks  $l$ .



Gb. 5.6. (a) Kumpulan rusuk Voronoi;

(b) Penghampiran parabola untuk  $n$  titik berhingga

Bila  $n \rightarrow \infty$ , maka kita akan mendapatkan tak hingga banyak kumpulan garis singgung parabola tersebut. Dari sini, kita akan memperoleh selubung (*envelope*) yang membentuk parabola dengan fokus di  $P_1$  dan direktriks  $l$ .

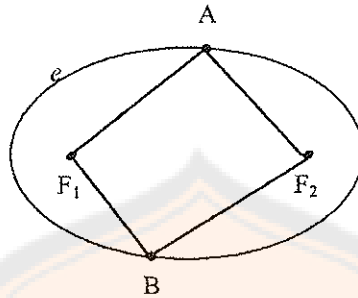
## B. ELIPS

### *Definisi 5.2 (elips)*

Suatu elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak terhadap dua titik tertentu tetap. Dua titik tertentu disebut sebagai fokus elips.

Sebagai kesepakatan kita, karena disebut sebagai dua titik, maka fokus elips selalu tidak berhimpit.

*Contoh 5.3*



Gb. 5.8 Elips  $e$  dengan fokus  $F_1$  dan  $F_2$

Jika titik A dan B pada elips maka :

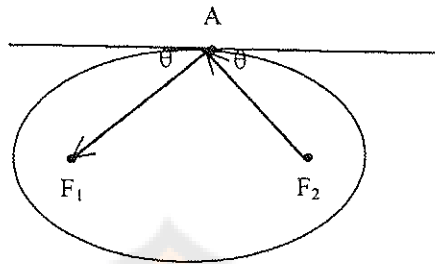
$$d(F_1, A) + d(F_2, A) = d(F_1, B) + d(F_2, B) = \text{konstan}$$

Sama halnya dengan parabola, maka elips juga dapat disajikan dengan menggunakan prinsip diagram Voronoi. Untuk itu juga perlu diingat sifat refleksi pada elips berikut ini.

***Teorema 5.3 (refleksi pada elips)***

Sinar yang datang dari salah satu fokus elips akan dipantulkan oleh elips menuju ke fokus yang lain pada elips tersebut, sedemikian hingga sudut yang terbentuk dari sinar yang datang dari suatu fokus elips dengan elips (sudut datang) sama dengan sudut yang dibentuk oleh elips dengan sinar pantul ke fokus yang lain (sudut pantul).

Pembuktian dapat dibaca pada Wexler, halaman 230. 1961.



Gb. 5.8 Ilustrasi dari teorema 5.3

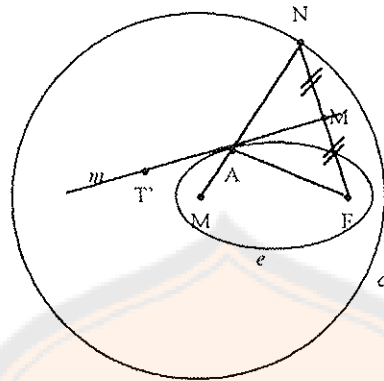
***Teorema 5.4 (hubungan antara rusuk Voronoi dengan garis singgung elips)***

Apabila diketahui suatu elips  $e$  dengan fokus  $M$  dan  $F$  dan jumlah jarak konstan elips tersebut sebesar  $R$ , dan diketahui pula suatu lingkaran  $c$  berpusat di  $M$  berjari-jari  $R$  ( $R > d(M,F)$ ) seperti pada gambar 5.9. Bila  $N$  adalah sembarang titik pada  $c$  dan  $F$  dan  $N$  adalah titik pembangkit Voronoi, maka rusuk Voronoi  $m$  yang dibangkitkan oleh  $F$  dan  $N$  merupakan garis singgung elips  $e$ .

***Bukti.***

Diketahui elips  $e$  dengan fokus  $M$  dan  $F$  dengan jumlah jarak konstan elips tersebut sebesar  $R$ , lingkaran  $c$  dengan pusat di  $M$  dan berjari-jari  $R$ ,  $N$  sembarang titik pada  $c$ , serta  $F$  dan  $N$  merupakan titik pembangkit Voronoi.

Akan dibuktikan bahwa rusuk Voronoi  $m$  yang dibangkitkan oleh  $F$  dan  $N$  merupakan garis singgung elips  $e$ .



Gb. 5.9 Ilustrasi dari teorema 5.4

Titik T adalah titik tengah  $\overline{NF}$ . Kita bentuk segmen garis MN memotong  $e$  di A.

Karena A pada  $e$ , maka :

$$d(M,A) + d(A,F) = R \quad (5.4)$$

Selain itu,

$$d(M,A) + d(A,N) = R \quad (5.5)$$

maka :

$$d(A,F) = d(A,N) \quad (5.6)$$

sehingga A juga terletak pada  $m$ .

Karena :

$$\overline{NA} \cong \overline{FA}$$

$$\overline{AT} \cong \overline{AT}$$

$$\overline{NT} \cong \overline{FT}$$

maka :

$$\Delta NAT \cong \Delta FAT$$



sehingga :

$$m \angle NAT = m \angle FAT \quad (5.7)$$

Bila  $T'$  pada perpanjangan  $\overline{TA}$  ( $T'$  pada  $m$ ), maka :

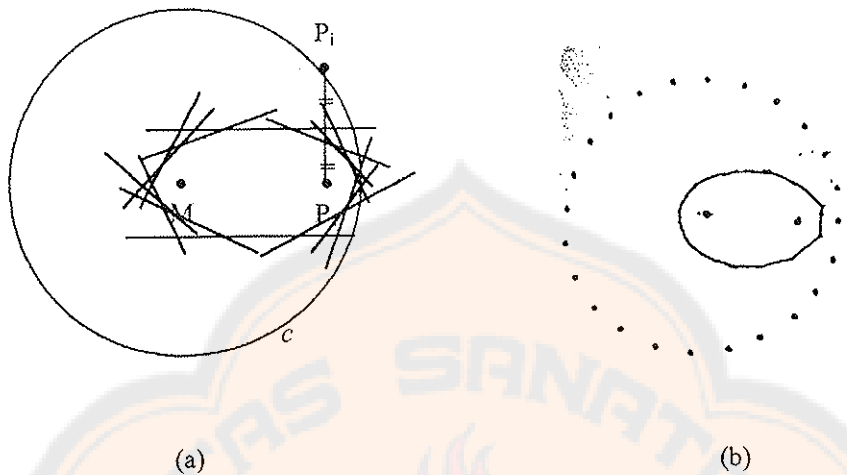
$$m \angle MAT' = m \angle FAT \quad (5.8)$$

( $\angle MAT'$  bertolak belakang dengan  $\angle NAT$ )

Sesuai dengan teorema 5.3, bila  $\angle FAT$  adalah sudut datang dan  $\angle MAT'$  adalah sudut pantul, maka  $m$  merupakan garis singgung elips  $e$ , dengan  $A$  sebagai titik singgungnya.

#### ***Penyajian Elips dengan Menggunakan Diagram Voronoi***

Diketahui  $n$  titik pembangkit dengan  $n - 1$  titik pembangkit berada pada lingkaran  $c$  dengan pusat di  $M$  dan jari-jari  $R$ . Satu titik pembangkit berada dalam interior  $c$  kita namakan  $P_1$ . Kita bangun rusuk-rusuk Voronoi antara sembarang titik  $P_i$  pada  $c$  dengan  $P_1$  sehingga akan kita dapatkan kumpulan rusuk Voronoi (lihat gambar 5.10). Dari teorema 5.3, telah dibuktikan bahwa rusuk Voronoi yang demikian merupakan garis singgung elips dengan fokus  $M$  dan  $P_1$  dengan jumlah jarak  $R$ . Sehingga kumpulan rusuk Voronoi tersebut merupakan kumpulan garis singgung elips dengan fokus  $M$  dan  $P_1$  dengan jumlah jarak  $R$ .



(a) Kumpulan rusuk Voronoi  
 (b) Penghampiran elips untuk  $n$  berhingga

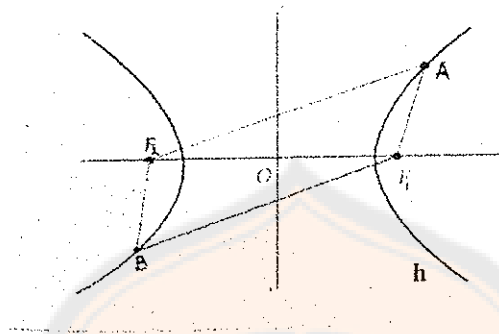
Bila  $n \rightarrow \infty$ , maka kita akan mendapatkan tak hingga banyak kumpulan garis singgung elips tersebut. Dari sini, kita akan memperoleh selubung yang membentuk elips dengan fokus  $M$  dan  $P_1$  dengan jumlah jarak  $R$ .

### C. HIPERBOLA

#### *Definisi 5.3 (hiperbola)*

Suatu hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap. Dua titik tertentu itu disebut sebagai fokus hiperbola.

*Contoh 5.4*



Gb. 5.13 Hiperbola *h*

Jika titik A dan B pada hiperbola, maka :

$$d(F_2, A) - d(F_1, A) = d(F_1, B) - d(F_2, B) = \text{konstan}$$

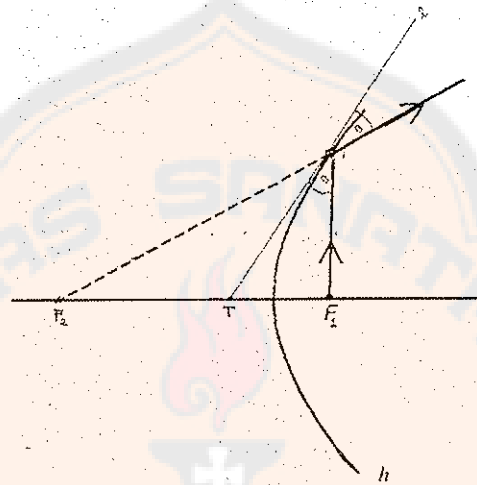
Sama halnya dengan parabola dan elips, maka hiperbola juga dapat disajikan dengan menggunakan diagram Voronoi, akan tetapi hiperbola yang tersaji hanya satu cabang saja. Karena itu dalam pembicaraan selanjutnya, kita akan menyoroti satu cabang saja. Untuk memudahkan penyebutan lebih lanjut, fokus pada cabang hiperbola yang kita soroti kita sebut sebagai fokus utama dan fokus yang satunya kita sebut sebagai fokus pembantu.

***Teorema 5.5 (refleksi pada hiperbola)***

Sinar yang datang dari fokus utama hiperbola akan dipantulkan oleh hiperbola tersebut, dengan sinar pantul seolah-olah berasal dari fokus pembantu, sedemikian hingga sudut yang dibentuk oleh sinar yang datang dari fokus utama

dengan hiperbola (sudut datang) akan sama dengan sudut yang dibentuk dari sinar pantul dengan hiperbola (sudut pantul).

Pembuktian teorema ini juga sudah dipelajari pada kuliah geometri bidang datar.

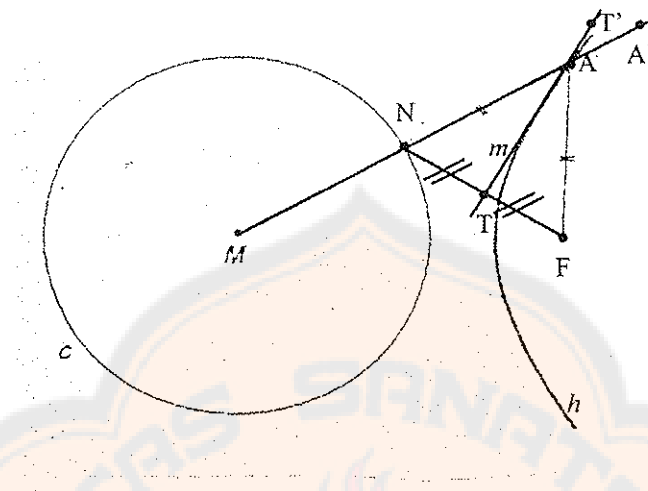


Gb. 5.14 Ilustrasi dari teorema 5.5

***Teorema 5.6 (hubungan antara rusuk Voronoi dengan garis singgung hiperbola)***

Diketahui suatu hiperbola  $h$  dengan fokus utama  $F$  dan fokus pembantu  $M$  serta selisih jarak konstan dari hiperbola tersebut sebesar  $R$ , dan diketahui pula suatu lingkaran  $c$  dengan pusat  $M$  dan berjari-jari  $R$  ( $R < d(M,F)$ ). Bila  $N$  adalah sembarang titik pada  $c$ , dan  $F$  dan  $N$  adalah titik pembangkit Voronoi, maka rusuk Voronoi  $m$  yang dibangkitkan oleh  $F$  dan  $N$  merupakan garis singgung hiperbola tersebut.

**Bukti.**



Gb. 5.13 Ilustrasi dari Teorema 5.6

Diketahui : hiperbola  $h$  dengan fokus utama  $F$  dan fokus pembantu  $M$  serta selisih jarak konstan hiperbola tersebut sebesar  $R$ , lingkaran  $c$  dengan pusat  $M$  dan jari-jari  $R$ ,  $N$  sembarang titik pada  $c$ , serta  $F$  dan  $N$  adalah titik pembangkit Voronoi

Akan dibuktikan bahwa rusuk Voronoi yang dibangkitkan oleh  $F$  dan  $N$  merupakan garis singgung hiperbola tersebut.

Titik  $T$  adalah titik tengah  $\overline{NF}$ . Kita hubungkan titik  $M$  dan  $N$  hingga memotong  $h$  di titik  $A$ . Karena  $A$  pada  $h$ , maka :

$$d(M,A) - d(A,F) = R \quad (5.9)$$

sementara itu,

$$d(M,A) - d(A,N) = R \quad (5.10)$$

maka :

$$d(A,F) = d(A,N) \quad (5.11)$$

sehingga  $A$  juga pada  $m$ .

Karena :

$$\overline{NA} \cong \overline{FA}$$

$$\overline{AT} \cong \overline{AT}$$

$$\overline{NT} \cong \overline{FT}$$

maka :

$$\Delta NAT \cong \Delta FAT$$

sehingga :

$$m \angle NAT = m \angle FAT \quad (5.12)$$

Bila  $T'$  pada perpanjangan  $\overline{TA}$  ( $T'$  pada  $m$ ), dan  $A'$  terletak pada perpanjangan  $\overline{MA}$  maka :

$$m \angle A'AT' = m \angle FAT \quad (5.13)$$

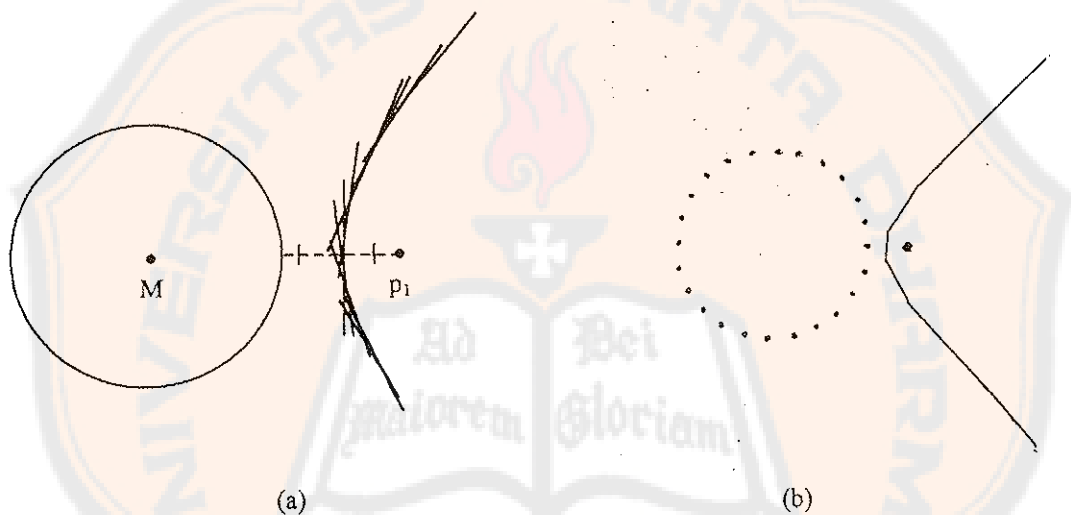
( $\angle A'AT'$  bertolak belakang dengan  $\angle NAT$ )

Sesuai dengan teorema 5.5, bila  $\angle FAT$  adalah sudut datang dan  $\angle A'AT'$  adalah sudut pantul, maka  $m$  merupakan garis singgung hiperbola  $h$ , dengan  $A$  sebagai titik singgungnya.

### ***Penyajian Hiperbola Menggunakan diagram Voronoi***

Diketahui  $n$  titik pembangkit dengan  $n-1$  titik pembangkit berada pada lingkaran  $c$  dengan pusat  $M$  dan jari-jari  $R$ . Satu titik pembangkit berada pada eksterior  $c$  kita namakan  $P_1$ . Ambil sembarang titik pembangkit pada  $c$ , dan misal kita namakan  $P_i (i \neq j)$ . Kita bangun rusuk-rusuk Voronoi antara sembarang titik  $P_i$

pada  $c$  dengan  $P_1$ , sehingga akan kita dapatkan kumpulan rusuk Voronoi (lihat gambar 5.14). Dari Teorema 5.6, telah dibuktikan bahwa rusuk Voronoi yang demikian merupakan garis singgung hiperbola dengan fokus pembantu  $M$  dan fokus utama  $P_1$  dengan selisih jarak sebesar  $R$ . Sehingga kumpulan rusuk Voronoi merupakan kumpulan garis singgung hiperbola dengan fokus utama  $P_1$  dan fokus pembantu  $M$  dengan selisih jarak sebesar  $R$ .



Gb. 5. 14 (a) Kumpulan rusuk Voronoi

(b) Penghampiran hiperbola untuk  $n$  berhingga

Bila  $n \rightarrow \infty$ , maka kita akan mendapatkan tak hingga banyak kumpulan garis singgung hiperbola tersebut. Dari sini, kita akan memperoleh selubung yang membentuk hiperbola dengan fokus utama  $P_1$  dan fokus pembantu  $M$  dengan selisih jarak sebesar  $R$ .

## BAB VI

### PENUTUP

#### A. KESIMPULAN

Andaikan dalam suatu bidang berdimensi dua terdapat beberapa titik tertentu, maka pengubinan yang terbentuk dengan cara mencari garis sumbu antar dua titik yang berdekatan pada bidang tersebut menjadi himpunan daerah yang dipasangkan dengan titik-titik itu dinamakan sebagai diagram Voronoi sederhana. Daerah-daerah yang dimaksud disebut sebagai poligon Voronoi dan titik-titiknya disebut sebagai titik pembangkit.

Pada diagram Voronoi sederhana ini, bobot titik-titik pembangkitnya dianggap sama. Akan tetapi lain halnya pada diagram Voronoi berbobot. Dalam diagram Voronoi berbobot diperhatikan bobot dari tiap-tiap titik pembangkit, sehingga dalam membentuk diagram Voronoi berbobot tidak bisa dilakukan dengan cara yang sama seperti pada diagram Voronoi biasa. Konsep jarak yang dipakai dalam diagram Voronoi berbobot adalah konsep jarak berbobot, sehingga garis konfliknya bukan merupakan garis sumbu.

Pada diagram Voronoi berbobot multiplikatif, garis konfliknya berupa lingkaran Apollonius, sedangkan pada diagram Voronoi berbobot aditif, garis konfliknya berupa hiperbola.

Diagram Voronoi mempunyai terapan-terapan yang cukup banyak, baik itu di bidang matematika maupun di bidang non matematika.



Dalam pelajaran geometri di sekolah menengah, diagram Voronoi sederhana dapat digunakan untuk mengajarkan penyajian irisan kerucut. Irisan kerucut yang dapat disajikan dengan diagram Voronoi sederhana dalam skripsi ini adalah elips, parabola dan hiperbola.

## B. SARAN

Dengan menggunakan bantuan komputer, diagram Voronoi dapat dibentuk secara lebih bagus dan cermat daripada menggunakan penggambaran manual. Dengan menggunakan program komputer pula, diagram Voronoi dapat digunakan untuk membentuk ornamen-ornamen yang indah dan penerapan praktis yang lebih luas.

Sebenarnya masih banyak aspek lain dari diagram Voronoi yang tidak diangkat dalam skripsi ini karena keterbatasan penulis. Misalnya, dalam pembahasan diagram Voronoi berbobot, masih ada diagram Voronoi berbobot lain di samping yang disajikan oleh penulis, yaitu diagram Voronoi berbobot gabungan dan diagram Voronoi kuasa. Juga dalam pembahasan diagram Voronoi sederhana, penulis tidak mengangkat subtopik yang berhubungan dengan lingkaran kosong (*empty circle*).

Selain itu ada banyak perluasan diagram Voronoi sederhana ini, selain diagram Voronoi berbobot, antara lain diagram Voronoi untuk kurva (himpunan pembangkitnya adalah himpunan kurva), diagram Voronoi untuk daerah (himpunan pembangkitnya adalah himpunan daerah), diagram Voronoi pada

silinder, kerucut, permukaan polihedra, dan lain sebagainya, yang walaupun sangat menarik, namun tidak dapat penulis angkat dalam skripsi ini.

Topik-topik tersebut sangat mungkin untuk dapat diteruskan dan diangkat oleh mahasiswa lain sebagai topik skripsi yang sangat menarik.



DAFTAR PUSTAKA

- Application. <http://www.voronoi.com/application.htm>
- Application of Voronoi Diagrams. <http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/gina/scot.Drysdale.html#dna>
- Hadley, G. (1961). *Linear Algebra*. Massachusetts, USA : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Introduction to Voronoi Diagrams. <http://dimacs.rutgers.edu/dre/96/classroom/voronoi/intro.html>
- Jeurnink, Gerard. *Geometry in Realistic Mathematics*. Netherlands : Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente.
- Okabe, Atsyuki. *Spatial Tesellation : Concept and Application of Voronoi Diagrams*. John Wiley and Sons.
- Singer, David A. (1998). *Geometry : Plane and Fancy*. New York : Springer.
- Wexler, Charles. (1961). *Analytics Geometry : A Vector Approach*. Massachusetts, USA : Addison-Wesley Publishing Company.

