BUJURSANGKAR LATIN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Dewi Bantarti

NIM : 971414010
NIRM : 970051120501120009

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2004

BUJURSANGKAR LATIN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Dewi Bantarti

NIM : 971414010

NIRM : 970051120501120009

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2004

SKRIPSI

BUJURSANGKAR LATIN

Oleh:

Dewi Bantarti

NIM : 971414010

NIRM : 970051120501120009

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.

tanggal 29 Januari 2004

SKRIPSI

BUJURSANGKAR LATIN

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Dewi Bantarti
NIM : 971414010
NIRM : 970051120501120009

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 13 Februari 2004 dan dinyatakan memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Wanty Widjaja, S.Pd., M.Ed.	....

Yogyakarta, 13 Februari 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

Skripsi ini ku persembahkan untukmu
yang telah menemaniku
mendengarkanku
membantuku
menghiburku
membimbingku
mendorongku
menghargaiku
mencintaiku
menyayangiku
mengasihiku
menerimaku apa adanya
dan memberiku sebuah kesempatan untuk itu semua

" Terima Kasih "

hanya ini yang dapat ku ucapkan
untuk semua yang telah engkau berikan kepada ku

Pernyataan Keaslian Karya

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 29 Januari 2004

Penulis

Dewi Bantarti

ABSTRAK

Dewi Bantarti (2004), *Bujursangkar Latin*, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Bujursangkar Latin $n \times n$ dapat dibentuk dari persegi panjang Latin $p \times n$, dengan $p < n$ (persegi panjang Latin $n \times q$, dengan $q < n$), dengan cara menambah baris (kolom) berikutnya yang diperoleh dengan mendapatkan sistem perwakilan-beda dari keluarga ζ yang bersangkutan.

Bujursangkar Latin $n \times n$ dapat dibentuk dari persegi panjang Latin $p \times q$, dengan $p < n$ dan $q < n$, jika bilangan kejadian $L(i) \geq p + q - n$. Baris (kolom) tambahan harus memuat anggota himpunan $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ dan } L(i) = p + q - n\}$.

Bujursangkar Latin mempunyai dua sifat yaitu ortogonal dan saling ortogonal. Bujursangkar Latin yang ortogonal dapat digunakan untuk membuat bujursangkar ajaib. Bujursangkar Latin yang ortogonal dan saling ortogonal dapat digunakan untuk merancang suatu percobaan.

ABSTRACT

Dewi Bantarti (2004), *Latin Square*, Department of Mathematics and Science Education, Faculty of Teachers Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

A $n \times n$ Latin square can be formed from a $p \times n$ Latin rectangle with $p < n$ (a $n \times q$ Latin rectangle with $q < n$), by adding the next row (column), that can be obtained by getting system of distinct representatives from the connecting ζ family.

A $n \times n$ Latin square can be formed from a $p \times q$ Latin rectangle with $p < n$ and $q < n$, if $L(i) \geq p + q - n$. The new row (column) must contain $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq n$ and $L(i) = p + q - n\}$.

Latin square has two characters namely orthogonal and mutually orthogonal. The orthogonal Latin square can be used to make a magic square, while orthogonal and mutually orthogonal Latin squares can be used to design experiment.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan, karena atas rahmatNya penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul Bujursangkar Latin ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Banyak hambatan dan rintangan yang dialami penulis selama proses penyusunan skripsi ini. Namun dengan keterlibatan berbagai pihak, penulis dapat mengatasi hambatan dan rintangan itu.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas bimbingan, petunjuk, dukungan dan saran, kepada :

1. M. Andy Rudhito, S.Pd. M.Si. selaku dosen pembimbing, yang dengan sabar membimbing dalam penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T. selaku dosen pembimbing akademik dan ketua program studi pendidikan matematika, yang telah memberikan saran dalam perencanaan studi, selama penulis menempuh kuliah di program studi pendidikan matematika.
3. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama perkuliahan di Universitas Sanata Dharma.
4. Semua staf sekretariat JP. MIPA yang telah membantu dalam menyelesaikan masalah administrasi yang penulis perlukan selama ini.

5. Semua staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma, atas segala bantuan dan kerjasamanya selama ini.
6. Rekan-rekan mahasiswa, khususnya mahasiswa pendidikan matematika angkatan '97, terima kasih atas persahabatanya.
7. Agnes H., D. Novi H., A. Yuni S., V. Suryanti dan T.M. Adi W, terima kasih atas bantuannya selama ini.
8. Kedua orang tua yang telah membiayai semua kebutuhan selama kuliah.
9. Semua pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari skripsi ini masih banyak kelemahan dan kekurangannya. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, 29 Januari 2004

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG DAN ARTINYA

Lambang	Arti
$=$	sama dengan
$<$	lebih kecil
$\leq$	lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	lebih besar atau sama dengan
$\in$	anggota
$\notin$	bukan anggota
$\cup$	gabungan
$\cap$	irisan
$\subseteq$	himpunan bagian
$\perp$	ortogonal
$\blacksquare$	akhir dari bukti
$A, B, C, \ldots$	matriks
$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$	himpunan
e_i, f_i, y_i	SPB dari keluarga himpunan (himpunan bagian dari keluarga himpunan)
"$k_{ij}l_{ij}$"	pasangan dari k_{ij} dan l_{ij}
$L(i)$	bilangan kejadian dari elemen i
$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots$	elemen baris ke-i kolom ke-j
$\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{T}_i$	himpunan bagian

S_{i_k}	himpunan bagian S_i yang terpilih
$\zeta, \Im$	keluarga himpunan
$\zeta', \Im'$	himpunan bagian dari keluarga himpunan
$\|\ldots\|$	jumlah anggota dari …

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, untuk mendapatkan sesuatu yang baik atau hasil yang paling baik, sering dilakukan suatu perbandingan dengan percobaan-percobaan. Misalnya seorang petani ingin menanami tanahnya, yang tidak diketahui tingkat kesuburannya, dengan tanaman jagung. Ternyata ada tiga jenis jagung. Petani tidak tahu jagung jenis mana yang cocok ditanam, sehingga hasil produksinya paling baik. Untuk itu petani harus melakukan percobaan terhadap ketiga jenis jagung tersebut. Hasil percobaan dapat dibandingkan sehingga diketahui jagung jenis mana yang hasil produksinya paling baik.

Muncul masalah baru yaitu pupuk dan insektisida jenis mana yang harus digunakan sehingga tanaman jagung tumbuh dengan subur dan hasil produksinya paling baik. Misalkan ada tiga jenis pupuk dan tiga jenis insektisida. Petani dapat menyelesaikan masalah ini dengan melakukan percobaan setiap jenis jagung menggunakan setiap jenis pupuk dan menggunakan setiap jenis insektisida. Semua kombinasi yang mungkin terjadi ada $3 \times 3 \times 3 = 27$. Percobaan ini akan semakin besar jika jumlah unsur atau jumlah jenis lebih dari tiga. Hal ini akan menimbulkan kesulitan dalam melakukan percobaan. Dengan mengambil banyaknya jenis dalam setiap unsur sama, maka masalah ini dapat diatasi dengan menggunakan bujursangkar Latin. Dalam bujursangkar Latin setiap perlakuan muncul sekali dalam setiap baris dan setiap kolom.

Untuk mengetahui lebih lanjut mengenai bujursangkar Latin maka dalam skripsi ini akan dibahas mengenai pengertian, pembentukan, sifat-sifat dan penerapan dari bujursangkar Latin. Ada beberapa pendekatan konsep untuk membentuk bujursangkar Latin yaitu konsep sistem perwakilan-beda, konsep field dalam aljabar abstrak dan konsep proyeksi bidang berhingga dalam geometri .

B. Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, muncul permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini, yaitu:

1. Bagaimana membentuk bujursangkar Latin dengan menggunakan konsep sistem perwakilan-beda beserta sifat-sifat yang terkait?
2. Bagaimana sifat-sifat bujursangkar Latin?
3. Bagaimana penerapan bujursangkar Latin dalam kehidupan sehari-hari?

C. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini bujursangkar Latin dibahas hanya berdasarkan konsep sistem perwakilan-beda.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Dapat membentuk bujursangkar Latin dengan menggunakan konsep sistem perwakilan-beda beserta sifat-sifat yang terkait.
2. Mengetahui dan memahami sifat-sifat bujursangkar Latin.

3. Mengetahui penerapan bujursangkar Latin sehingga dapat menyelesaikan masalah yang relevan dalam kehidupan sehari-hari.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diperoleh setelah mempelajari skripsi ini yaitu mengetahui dan memahami pengertian, pembentukan, sifat-sifat, dan penerapan bujursangkar Latin. Skripsi ini dapat digunakan sebagai bahan acuan bagi semua pihak yang memerlukan dan dapat menambah referensi kepustakaan.

F. Sistematika Pembahasan

Dalam Bab I akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika pembahasan dan metode penulisan skripsi ini.

Konsep dasar yang diperlukan untuk mempelajari bujursangkar Latin adalah sistem perwakilan-beda. Sistem perwakilan-beda ini akan dibahas dalam Bab II.

Bab III terdiri dari dua subbab. Dalam subbab pertama akan dibahas mengenai bujursangkar Latin, yang meliputi pengertian dan pembentukan bujursangkar Latin dengan menggunakan konsep sistem perwakilan-beda yang telah dibahas dalam Bab II. Dalam subbab kedua akan dibahas mengenai sifat-sifat bujursangkar Latin yaitu ortogonal dan saling ortogonal.

Bujursangkar Latin dapat digunakan untuk membentuk bujursangkar ajaib dan untuk merancang suatu percobaan dalam bidang pertanian, farmasi dan industri mobil. Penerapan bujursangkar Latin ini akan dibahas dalam Bab IV.

Kesimpulan yang dapat diambil setelah mempelajari bujursangkar Latin ini dan saran diberikan dalam bab V.

G. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan penulis untuk menyusun skripsi ini adalah metode studi pustaka. Penulis mempelajari buku-buku yang relevan, kemudian menjabarkan dan menyusunnya kembali menjadi karya tulis. Sumber pustaka yang digunakan sebagai bahan referensi tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

SISTEM PERWAKILAN-BEDA

Sistem perwakilan-beda (*system of distinct representatives*) yang akan dibahas dalam Bab II ini berhubungan erat dengan masalah pernikahan (*marriage problem*) dalam teori graf. Masalah pernikahan itu dijelaskan di bawah ini.

Dalam suatu daerah ada sejumlah wanita dan pria yang belum menikah. Semua wanita yang belum menikah itu ingin menikah. Dalam pernikahan tidak diijinkan adanya poligami. Berarti dua wanita yang berbeda tidak boleh menikah dengan pria yang sama. Bila tidak ada syarat dari wanita-wanita itu, maka semua wanita dapat menikah jika ada pria yang belum menikah dengan jumlah paling sedikit sama dengan jumlah wanita yang ingin menikah.

Dalam kenyataannya, setiap wanita itu mempunyai syarat untuk menikah. Misalnya tingkat keakraban. Setiap wanita dapat tidak akrab dengan beberapa pria, sehingga pilihan masing-masing wanita dapat berkurang. Misalkan ada empat wanita w_1, w_2, w_3 dan w_4 serta ada lima pria p_1, p_2, p_3, p_4 dan p_5 yang belum menikah. Hubungan keakraban setiap wanita dengan pria-pria itu dapat dilihat dalam tabel 2.1 dan 2.2.

Wanita	Pria
w_1	p_1 p_4 p_5
w_2	p_1
w_3	p_2 p_3 p_4
w_4	p_2 p_4

Tabel 2.1. Tabel Keakraban

Wanita	Pria
w_1	p_1
w_2	p_1 p_2
w_3	p_2 p_3
w_4	p_2 p_3

Tabel 2.2. Tabel Keakraban

Tabel 2.1 mengatakan bahwa wanita w_1 akrab dengan tiga pria p_1, p_4 dan p_5, sehingga pilihan wanita w_1 ada tiga. Wanita w_2 hanya akrab dengan satu pria p_1 saja, sehingga pilihan wanita w_2 ada satu.

Tabel 2.2 mengatakan bahwa wanita w_1 hanya akrab dengan satu pria p_1 saja, sehingga pilihan wanita w_1 ada satu. Wanita w_2 akrab dengan dua pria p_1 dan p_2, sehingga pilihan wanita w_2 ada dua.

Masalah pernikahan yaitu dapatkah dipilih empat pria yang berbeda dan akrab dengan keempat wanita tersebut? Masalah pernikahan dengan tabel keakraban 2.1 dapat diselesaikan, karena dapat dipilih empat pria yang berbeda dan akrab untuk keempat wanita itu. Misalnya dipilih p_5 untuk w_1, p_1 untuk w_2, p_2 untuk w_3 dan p_4 untuk w_4. Masalah pernikahan dengan tabel keakraban 2.2 tidak dapat diselesaikan, karena tidak dapat dipilih empat pria yang berbeda dan akrab untuk keempat wanita itu.

Dari gambaran di atas, dapat disimpulkan bahwa bila ada syarat dari wanita-wanita itu maka jumlah pria yang lebih besar dari jumlah wanita, tidak menjamin bahwa masalah pernikahan dapat diselesaikan.

Berikut ini adalah penyajian gambaran di atas dalam model matematika. Andaikan i, m dan n adalah bilangan asli, $\boldsymbol{W}$ adalah himpunan m wanita yang belum menikah, $\boldsymbol{P}$ adalah himpunan n pria yang belum menikah dan $\boldsymbol{P}_i$ adalah himpunan pria yang akrab dengan wanita w_i, $1 \leq i \leq m$. Dari masalah pernikahan dengan tabel keakraban 2.1 di atas diketahui $\boldsymbol{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\boldsymbol{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, $\boldsymbol{P}_1 = \{p_1, p_4, p_5\}$, $\boldsymbol{P}_2 = \{p_1\}$, $\boldsymbol{P}_3 = \{p_2, p_3, p_4\}$ dan $\boldsymbol{P}_4 = \{p_2, p_4\}$. Penyelesaian masalah pernikahan diperoleh dengan memilih satu pria dari setiap $\boldsymbol{P}_i$, $1 \le i \le 4$ dan untuk setiap $i \ne j$, pria pilihan dari $\boldsymbol{P}_i$ berbeda dengan pria pilihan dari $\boldsymbol{P}_j$. Misalkan p_5, p_1, p_2 dan p_4 terpilih mewakili masing-masing himpunan $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, dan $\boldsymbol{P}_4$ untuk menikah dengan w_1, w_2, w_3 dan w_4.

Penyelesaian masalah seperti di atas dikenal dengan nama sistem perwakilan-beda. Berikut ini akan dibahas mengenai sistem perwakilan-beda.

Definisi 2.1 (Sistem Perwakilan-Beda)

Andaikan i, j dan m adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S}$ adalah himpunan berhingga dan bukan himpunan kosong, $\boldsymbol{S}_i$ adalah himpunan bagian dari $\boldsymbol{S}$, $1 \le i \le m$, serta $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_m\}$ adalah suatu keluarga himpunan bagian dari $\boldsymbol{S}$. Himpunan $\boldsymbol{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ disebut ***sistem perwakilan-beda*** *(SPB) dari ζ, jika setiap $e_i \in \boldsymbol{S}_i$ dan untuk setiap $i \ne j$, $e_i \ne e_j$.*

Himpunan $\boldsymbol{S}$ di atas dapat ditulis sebagai berikut $\boldsymbol{S} = \{-_1, -_2, \ldots, -_n\}$, n adalah bilangan asli. Untuk mempermudah pembahasan selanjutnya, maka $\boldsymbol{S}$ dilihat dari indeksnya sehingga $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Contoh 2.1

a. Diberikan $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{S}_1 = \{1, 4\}$, $\boldsymbol{S}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{S}_3 = \{3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{S}_4 = \{1, 2, 3, 5\}$, $\boldsymbol{S}_5 = \{5\}$ dan $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_5\}$. Himpunan $\boldsymbol{E} = \{4, 2, 3, 1, 5\}$ merupakan SPB dari ζ karena $4 \in \boldsymbol{S}_1$, $2 \in \boldsymbol{S}_2$, $3 \in \boldsymbol{S}_3$, $1 \in \boldsymbol{S}_4$ dan $5 \in \boldsymbol{S}_5$ serta semua wakil berbeda.

b. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 4\}$, $S_3 = \{1, 2, 5\}$, $S_4 = S_5 = \{3, 4, 5, 6\}$ dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Himpunan $E = \{1, 2, 5, 3, 4\}$ merupakan SPB dari ζ karena $1 \in S_1$, $2 \in S_2$, $5 \in S_3$, $3 \in S_4$ dan $4 \in S_5$ serta semua wakil berbeda.

Contoh 2.1 di atas memperlihatkan bahwa ζ mempunyai SPB. Tetapi tidak semua ζ mempunyai SPB, seperti yang akan diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 2.2

a. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{4\}$, $S_4 = \{1, 4\}$ dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. SPB dari ζ tidak ada, karena tidak mungkin dipilih tiga anggota berbeda untuk mewakili tiga himpunan S_1, S_3 dan S_4, yang hanya mempunyai dua anggota berbeda yaitu 1 dan 4.

b. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$, $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$ dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. SPB dari ζ tidak ada, karena tidak mungkin dipilih empat anggota berbeda untuk mewakili empat himpunan S_1, S_2, S_3 dan S_4, yang hanya mempunyai tiga anggota berbeda yaitu 1, 2 dan 3.

c. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_1 = S_2 = S_3 = \{ 1, 2 \}$, $S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = \{3, 4, 5, 6\}$ dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$. SPB dari ζ tidak ada, karena tidak mungkin dipilih tujuh anggota berbeda untuk mewakili tujuh himpunan S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 dan S_7, yang hanya mempunyai enam anggota berbeda yaitu 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Karena tidak semua ζ mempunyai SPB maka berikut ini akan dibahas teorema yang menjamin bahwa suatu keluarga himpunan akan mempunyai SPB.

Teorema 2.1

Andaikan i, k, m dan n adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong,* $\boldsymbol{S}_i$ *adalah himpunan bagian dari* $\boldsymbol{S}$, $1 \leq i_K \leq m$, *dan* $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_m\}$ *adalah suatu keluarga himpunan bagian dari* $\boldsymbol{S}$. *Keluarga himpunan* ζ *akan mempunyai SPB jika hanya jika*

(1)

untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, m$ *dan untuk setiap pilihan bilangan* i_k, $1 \leq i_k \leq m$ *dipenuhi ketidaksamaan* $\left|\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}\right| \geq k$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Akan ditunjukkan jika $\boldsymbol{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ adalah SPB dari ζ maka akan dipenuhi $\left|\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}\right| \geq k$. Andaikan $\boldsymbol{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ adalah SPB dari ζ dan bilangan asli k memenuhi $1 \leq k \leq m$. Jika diambil k himpunan dari ζ, yaitu $\boldsymbol{S}_{i_1}, \boldsymbol{S}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{S}_{i_k}$, maka $\boldsymbol{E}$ adalah himpunan yang tediri dari k bilangan yang merupakan himpunan bagian dari $\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}$. Jadi gabungan himpunan $\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}$ paling sedikit mempunyai k anggota yang berbeda. Dengan kata lain $\left|\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}\right| \geq k$.

$(\Leftarrow)$

Akan ditunjukkan bila syarat (1) dipenuhi maka keluarga himpunan ζ mempunyai SPB. Pembuktian menggunakan induksi matematika.

Untuk $m = 1$, berarti hanya ada satu himpunan saja. Misalkan himpunan itu S_1. Syarat (1) mengatakan $|S_1| \geq 1$. Berarti S_1 mempunyai paling sedikit satu anggota yaitu e_1. Jadi ζ mempunyai SPB.

Untuk $m > 1$, akan ditunjukkan setiap keluarga bagian dengan jumlah kurang dari m dan memenuhi syarat (1) maka mempunyai SPB. Andaikan $\zeta = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ memenuhi syarat (1) maka:

Kasus-1

Untuk $1 \leq k \leq m\text{-}1$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq m$, telah dipenuhi $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \geq k+1$. Karena ζ memenuhi syarat (1), maka S_m bukan himpunan kosong. Pilih sembarang $e_m \in S_m$. Pandang

$$\zeta_1' = \{(S_1\text{-}\{e_m\}) \cup (S_2\text{-}\{e_m\}) \cup \ldots \cup (S_{m\text{-}1}\text{-}\{e_m\})\}$$

Untuk $1 \leq k \leq m\text{-}1$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq m\text{-}1$ akan diperoleh

$$\begin{aligned} &\left|(S_{i_1} - \{e_m\}) \cup (S_{i_2} - \{e_m\}) \cup \ldots \cup (S_{i_k} - \{e_m\})\right| \\ &= \left|(S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}) - \{e_m\}\right| \\ &\geq \left|(S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k})\right| \\ &\geq (k+1) - 1 \;\; = k \end{aligned}$$

Jadi $\zeta_1' = \{(S_1\text{-}\{e_m\}) \cup (S_2\text{-}\{e_m\}) \cup \ldots \cup (S_{m\text{-}1}\text{-}\{e_m\})\}$ memiliki SPB yaitu $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}\}$. Dengan demikian $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m\}$ adalah SPB dari

$\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_m\}$.

Kasus-2

Untuk suatu bilangan asli p, $1 \le p \le m$-1, dan untuk beberapa pilihan bilangan i_p, $1 \le i_p \le m$, dipenuhi $\left|\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_p}\right| = p$. Berarti ζ_2' mempunyai p himpunan yang hanya mengandung p anggota berbeda. Misalkan p himpunan itu $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_p$ sehingga $\zeta_2' = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_p\}$. Jadi untuk $1 \le p \le m-1$ diperoleh $\left|\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_p\right| = p$.

Diketahui $\zeta_2' \subseteq \zeta$ dan ζ memenuhi syarat (1). Jadi ζ_2' juga memenuhi syarat (1), sehingga ζ_2' mempunyai SPB yaitu $\boldsymbol{E} = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p\}$. Di atas diketahui ada p himpunan. Berarti masih ada m - p himpunan lainnya yaitu $\boldsymbol{S}_{p+1}$-$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{S}_{p+2}$ -$\boldsymbol{E}$, …, $\boldsymbol{S}_m$-$\boldsymbol{E}$. Pandang $\zeta_3' = \{\boldsymbol{S}_{p+1}\text{-}\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}_{p+2}\text{-}\boldsymbol{E}, \ldots, \boldsymbol{S}_m\text{-}\boldsymbol{E}\}$. Karena $p \ge 1$ maka m-$p \le m$-1. Akan ditunjukkan ζ_3' memenuhi syarat (1). Andaikan k memenuhi $1 \le k \le m$-p dan setiap pilihan bilangan j_k, p+1 $\le j_k \le m$. Maka akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\boldsymbol{S}_{j_1} - \boldsymbol{E}\right) \cup \left(\boldsymbol{S}_{j_2} - \boldsymbol{E}\right) \cup \ldots \cup \left(\boldsymbol{S}_{j_k} - \boldsymbol{E}\right)\right| \\
&= \left|\left(\boldsymbol{S}_{j_1} \cup \boldsymbol{S}_{j_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{j_k}\right) - \boldsymbol{E}\right| \\
&= \left|\boldsymbol{E} \cup \left(\boldsymbol{S}_{j_1} \cup \boldsymbol{S}_{j_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{j_k}\right) - \boldsymbol{E}\right| \\
&= \left|\left(\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_p\right) \cup \left(\boldsymbol{S}_{j_1} \cup \boldsymbol{S}_{j_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{j_k}\right) - \boldsymbol{E}\right| \\
&\ge (p + k) - p = k
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\zeta_3' = \{S_{p+1}\text{-}E, S_{p+2}\text{-}E, \ldots, S_m\text{-}E\}$ memenuhi syarat (1) dan mempunyai SPB yaitu $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_m\}$. Jadi $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_m\}$ adalah SPB dari keluarga himpunan $\zeta = \{S_1, S_2, \ldots, S_p, S_{p+1}, S_{p+2}, \ldots, S_m\}$. ■

Contoh 2.3

a. Andaikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{1, 5\}$, $S_3 = \{1, 2\}$, $S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Akan diperlihatkan apakah untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan setiap pilihan bilangan i_k, $1 \le i_k \le 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \ge k$.

Untuk $k = 1$ dan pilihan bilangan i_1 yaitu:

- 1 diperoleh $|S_1| = 2 \ge 1$
- 2 diperoleh $|S_2| = 2 \ge 1$
- 3 diperoleh $|S_3| = 2 \ge 1$
- 4 diperoleh $|S_4| = 5 \ge 1$

Untuk $k = 2$ dan pilihan bilangan i_2 yaitu:

- 1 dan 2 diperoleh $|S_1 \cup S_2| = 3 \ge 2$
- 1 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_3| = 3 \ge 2$
- 1 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_4| = 5 \ge 2$
- 2 dan 3 diperoleh $|S_2 \cup S_3| = 3 \ge 2$
- 2 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_4| = 5 \ge 2$
- 3 dan 4 diperoleh $|S_3 \cup S_4| = 5 \ge 2$

Untuk $k = 3$ dan pilihan bilangan i_3 yaitu:

- 1, 2 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 4 \geq 3$
- 1, 2 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_4| = 5 \geq 3$
- 1, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_3 \cup S_4| = 5 \geq 3$
- 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 5 \geq 3$

Untuk $k = 4$ dan pilihan bilangan i_4 yaitu:

- 1, 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 5 \geq 3$

Karena untuk setiap k = 1, 2, 3, 4 dan setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \geq k$, maka ζ mempunyai SPB. Misalkan SPB itu adalah {1, 5, 2, 3}.

b. Andaikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = S_3 = \{1, 4\}$, $S_4 = \{1, 3, 4, 5\}$, $S_5 = \{2, 4\}$ dan $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Keluarga himpunan ζ tidak mempunyai SPB, karena ada $k = 4$ dan pilihan bilangan i_4 yaitu 1, 2, 3 dan 5 sehingga syarat (1) tidak terpenuhi.

Keluarga himpunan ζ seperti pada Contoh 2.3.b tidak mempunyai SPB, tetapi belum tentu himpunan bagian dari ζ tidak mempunyai SPB. Berikut ini akan dibahas teorema yang menjamin suatu himpunan bagian dari keluarga himpunan akan mempunyai SPB.

Teorema 2.2

Andaikan i, k, m, n dan r adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong,* $\boldsymbol{S}_i$ *adalah himpunan bagian dari* $\boldsymbol{S}$, $1 \le i \le m$, $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_m\}$ *adalah suatu keluarga himpunan bagian dari* $\boldsymbol{S}$ *dan* $\zeta' = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_r\}$ *adalah suatu himpunan bagian dari* ζ. *Keluarga himpunan bagian* ζ' *akan mempunyai SPB jika hanya jika*

(2)

untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, m$ *dan untuk setiap pilihan bilangan* i_k, $1 \le i_k \le m$, *dipenuhi ketidaksamaan* $\left|\boldsymbol{S}_{i_1} \cup \boldsymbol{S}_{i_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_{i_k}\right| \ge k - (m - r)$.

Bukti :

Andaikan $\boldsymbol{F}$ adalah setiap himpunan dengan jumlah anggota $m - r$ dan semua anggota $\boldsymbol{F}$ bukan anggota $\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_m$.

Akan dibuktikan terlebih dahulu ζ' mempunyai SPB jika hanya jika $\{\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S}_2 \cup \boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{S}_m \cup \boldsymbol{F}\}$ mempunyai SPB. Andaikan ζ' mempunyai SPB. Misalkan $\zeta' = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_r\}$ dan SPB-nya adalah $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$. Jika $\boldsymbol{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{m-r}\}$ maka $\{e_1, e_2, \ldots, e_r, f_1, f_2, \ldots, f_{m-r}\}$ adalah SPB untuk himpunan $\{\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S}_2 \cup \boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{S}_m \cup \boldsymbol{F}\}$. Hal ini dikarenakan semua anggota $\boldsymbol{F}$ ada dalam keluarga himpunan dan tidak satu pun yang sama dengan $e_1, e_2, \ldots, e_r$.

Sebaliknya, andaikan $\{\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S}_2 \cup \boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{S}_m \cup \boldsymbol{F}\}$ mempunyai SPB yaitu $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Karena $\boldsymbol{F}$ hanya mempunyai m - r anggota, maka y_i anggota $\boldsymbol{F}$ paling banyak adalah m - r. Berarti ada r anggota y_i yang bukan merupakan anggota F. Misalkan r anggota itu adalah $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Karena $y_1, y_2, \ldots, y_r$ berbeda semua dan $y_1 \in S_1, y_2 \in S_2, \ldots, y_r \in S_r$ maka $y_1, y_2, \ldots, y_r$ membentuk SPB untuk $\zeta' = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$.

Berdasarkan Teorema 2.1, maka $\{S_1 \cup F, S_2 \cup F, \ldots, S_m \cup F\}$ mempunyai SPB jika hanya jika untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, m$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \le i_k \le m$, dipenuhi ketidaksamaan

$$\left|\left(S_{i_1} \cup F\right) \cup \left(S_{i_2} \cup F\right) \cup \ldots \cup \left(S_{i_k} \cup F\right)\right| + (m-r) \ge k$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\left(S_{i_1} \cup F\right) \cup \left(S_{i_2} \cup F\right) \cup \ldots \cup \left(S_{i_k} \cup F\right)\right| \ge k - (m-r)$$

Ini berarti $\{S_1 \cup F, S_2 \cup F, \ldots, S_m \cup F\}$ mempunyai SPB jika syarat (2) dipenuhi. Jadi teorema terbukti. ■

Contoh 2.4

Andaikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = S_3 = \{1, 4\}$, $S_4 = \{4\}$, $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dan

a. $|\zeta'| = 1$, $\zeta' \subseteq \zeta$

Diketahui bahwa $m = 4$ dan $r = 1$. Akan diperlihatkan apakah untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan setiap pilihan bilangan i_k, $1 \le i_k \le 4$ dipenuhi ketidaksamaan

$$\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \ge k - (m-r).$$

Untuk $k = 1$ dan untuk pilihan bilangan i_1 yaitu:

- 1 diperoleh $|S_1| = 2 \;\ge\; k - (m-r) = 1 - (4 - 1) = -2$
- 2 diperoleh $|S_2| = 2 \;\ge\; -2$

- 3 diperoleh $|S_3| = 2 \geq -2$
- 4 diperoleh $|S_4| = 1 \geq -2$

Untuk $k = 2$ dan untuk pilihan bilangan i_2 yaitu:

- 1 dan 2 diperoleh $|S_1 \cup S_2| = 3 \geq k - (m - r) = 2 - (4 - 1) = -1$
- 1 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_3| = 3 \geq -1$
- 1 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_4| = 3 \geq -1$
- 2 dan 3 diperoleh $|S_2 \cup S_3| = 2 \geq -1$
- 2 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_4| = 2 \geq -1$
- 3 dan 4 diperoleh $|S_3 \cup S_4| = 2 \geq -1$

Untuk $k = 3$ dan untuk pilihan bilangan i_3 yaitu:

- 1, 2 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 3 \geq k - (m - r) = 3 - (4 - 1) = 0$
- 1, 2 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_4| = 3 \geq 0$
- 1, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq 0$
- 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 2 \geq 0$

Untuk $k = 4$ dan untuk pilihan bilangan i_4 yaitu:

- 1, 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq k - (m - r) = 4 - (4 - 1) = 1$

Karena untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \geq k - (m - r)$, maka berdasarkan Teorema 2.2, ada ζ' dengan $|\zeta'| = 1$ yang mempunyai SPB. Misalkan $\zeta' = \{S_1\}$ maka SPB yang dimilikinya adalah $\{1\}$ atau $\{2\}$.

b. $|\zeta'| = 2,\ \zeta' \subseteq \zeta$

Diketahui bahwa $m = 4$ dan $r = 2$. Akan diperlihatkan apakah untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}\right| \geq k - (m - r)$.

Untuk $k = 1$ dan untuk pilihan bilangan i_1 yaitu:

- 1 diperoleh $|S_1| = 2 \geq k - (m - r) = 1 - (4 - 2) = -1$
- 2 diperoleh $|S_2| = 2 \geq -1$
- 3 diperoleh $|S_3| = 2 \geq -1$
- 4 diperoleh $|S_4| = 1 \geq -1$

Untuk $k = 2$ dan untuk pilihan bilangan i_2 yaitu:

- 1 dan 2 diperoleh $|S_1 \cup S_2| = 3 \geq k - (m - r) = 2 - (4 - 2) = 0$
- 1 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_3| = 3 \geq 0$
- 1 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_4| = 3 \geq 0$
- 2 dan 3 diperoleh $|S_2 \cup S_3| = 2 \geq 0$
- 2 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_4| = 2 \geq 0$
- 3 dan 4 diperoleh $|S_3 \cup S_4| = 2 \geq 0$

Untuk $k = 3$ dan untuk pilihan bilangan i_3 yaitu:

- 1, 2 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 3 \geq k - (m - r) = 3 - (4 - 2) = 1$
- 1, 2 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_4| = 3 \geq 1$
- 1, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq 1$
- 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 2 \geq 1$

Untuk $k = 4$ dan untuk pilihan bilangan i_4 yaitu:

- 1, 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq k - (m - r) = 4 - (4 - 2) = 2$

Karena untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}\right| \geq k - (m - r)$, maka berdasarkan Teorema 2.2, ada $\zeta^{'}$ dengan $\left|\zeta^{'}\right| = 2$ yang mempunyai SPB. Misalkan $\zeta^{'} = \{S_1, S_4\}$ maka SPB yang dimilikinya adalah {1, 4} atau {2, 4}.

c. $|\zeta^{'}| = 3,\ \zeta^{'} \subseteq \zeta$

Diketahui bahwa $m = 4$ dan $r = 3$. Akan diperlihatkan apakah untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}\right| \geq k - (m - r)$.

Untuk $k = 1$ dan untuk pilihan bilangan i_1 yaitu:

- 1 diperoleh $|S_1| = 2 \geq k - (m - r) = 1 - (4 - 3) = 0$
- 2 diperoleh $|S_2| = 2 \geq 0$
- 3 diperoleh $|S_3| = 2 \geq 0$
- 4 diperoleh $|S_4| = 1 \geq 0$

Untuk $k = 2$ dan untuk pilihan bilangan i_2 yaitu:

- 1 dan 2 diperoleh $|S_1 \cup S_2| = 3 \geq k - (m - r) = 2 - (4 - 3) = 1$
- 1 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_3| = 3 \geq 1$
- 1 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_4| = 3 \geq 1$
- 2 dan 3 diperoleh $|S_2 \cup S_3| = 2 \geq 1$

- 2 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_4| = 2 \geq 1$
- 3 dan 4 diperoleh $|S_3 \cup S_4| = 2 \geq 1$

Untuk $k = 3$ dan untuk pilihan bilangan i_k yaitu:

- 1, 2 dan 3 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 3 \geq k - (m - r) = 3 - (4 - 3) = 2$
- 1, 2 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_4| = 3 \geq 2$
- 1, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq 2$
- 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 2 \geq 2$

Untuk $k = 4$ dan untuk pilihan bilangan i_4 yaitu:

- 1, 2, 3 dan 4 diperoleh $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 3 \geq k - (m - r) = 4 - (4 - 3) = 2$

Karena untuk setiap $k = 1, 2, 3, 4$ dan untuk setiap pilihan bilangan i_k, $1 \leq i_k \leq 4$ dipenuhi ketidaksamaan $\left|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}\right| \geq k - (m - r)$, maka berdasarkan Teorema 2.2, ada ζ' dengan $|\zeta'| = 3$ yang mempunyai SPB. Misalkan $\zeta' = \{S_1, S_2, S_3\}$ maka SPB yang dimilikinya adalah {2, 1, 4}.

BAB III

BUJURSANGKAR LATIN

Dalam Bab III ini akan dibahas mengenai bujursangkar Latin dan sifat-sifat bujursangkar Latin.

A. Bujursangkar Latin

Dalam subbab ini, akan dibahas mengenai pengertian persegi panjang Latin dan bujursangkar Latin serta pembentukkan bujursangkar Latin dari persegi panjang Latin dengan menggunakan konsep SPB yang telah dibahas dalam Bab II.

Definisi 3.1

Andaikan i, j, n, p dan q adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong.* ***Persegi panjang Latin*** $p \times q$ *dengan* $p \leq n$ *dan* $q \leq n$*, adalah matriks* $M_{p \times q} = (m_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$ *dengan* $m_{ij} \in \boldsymbol{S}$ *dan setiap* m_{ij} *terjadi tepat satu kali dalam setiap baris dan setiap kolom. Jika* $p = q = n$ *maka persegi panjang Latin itu disebut* ***bujursangkar Latin.***

Contoh 3.1 (Persegi Panjang Latin)

a. Diberikan $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Matriks $A_{3\times5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ adalah persegi panjang Latin 3×5 dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$.

b. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Matriks $B_{5\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah persegi panjang Latin 5×2 dengan elemen dalam S.

c. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Matriks $C_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah persegi panjang Latin 3×2 dengan elemen dalam S.

Contoh 3.2 (Bujursangkar Latin)

a. Diberikan $S = \{1, 2\}$. Matriks $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah bujursangkar Latin 2×2 dengan elemen dalam S.

b. Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Matriks $B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah bujursangkar Latin 3×3 dengan elemen dalam S.

c. Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Matriks $D_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ adalah bujursangkar Latin 4×4 dengan elemen dalam S.

Bujursangkar Latin dapat dibentuk dari persegi panjang Latin, dengan menambah baris, kolom atau baris dan kolom berikutnya. Dengan kata lain, persegi panjang Latin dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin, seperti dalam contoh yang akan diberikan berikut ini.

Contoh 3.3

a. Diberikan persegi panjang Latin $A_{2\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Persegi panjang Latin $A_{2\times4}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 4×4 dengan menambah dua baris berikutnya. Salah satu bentuknya adalah $A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Diberikan persegi panjang Latin $B_{6\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Persegi panjang Latin $B_{6\times3}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 6×6 dengan menambah tiga kolom berikutnya.

Salah satu bentuknya adalah $B_{6\times6} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

c. Diberikan persegi panjang Latin $C_{2\times1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam

$S = \{1, 2, 3\}$. Persegi panjang Latin $C_{2\times 1}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 3×3 dengan menambah satu baris dan dua kolom berikutnya. Salah satu bentuknya adalah $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berikut ini akan dibahas teorema yang menjamin bahwa persegi panjang Latin $p \times n$ dengan $p < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$.

Teorema 3.1

Andaikan p dan n adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong. Persegi panjang Latin* $p \times n$ *dengan elemen dalam* $\boldsymbol{S}$ *dan* $p < n$ *dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin* $n \times n$.

Bukti :

Andaikan $L_{p\times n}$ adalah persegi panjang Latin $p \times n$ dengan $p < n$, $\boldsymbol{S}_i = \{$anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum digunakan dalam $L_{p\times n}$ kolom ke-$i\}$ untuk $1 \le i \le n$, dan $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_n\}$ adalah suatu keluarga himpunan bagian dari $\boldsymbol{S}$. Penambahan baris baru pada $L_{p\times n}$ agar menjadi persegi panjang Latin $L_{(p+1)\times n}$ adalah dengan mendapatkan SPB dari $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_n\}$.

$$L = \left\{ \begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\xleftarrow{\qquad\qquad} n \xrightarrow{\qquad\qquad}} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \cdots & x_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & x_{p3} & \cdots & x_{pn} \end{array} \right. \quad \updownarrow p$$

$$\left. \begin{array}{ccccc} x_{(p+1)1} & x_{(p+1)2} & x_{(p+1)3} & \cdots & x_{(p+1)n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \in \boldsymbol{S}_1 & \in \boldsymbol{S}_2 & \in \boldsymbol{S}_3 & & \in \boldsymbol{S}_n \end{array} \right\} \text{baris tambahan}$$

Gambar 3.1. Ilustrasi $L_{p\times n}$ dengan baris tambahan

Diketahui ada p baris. Berarti $|\boldsymbol{S}_1| = |\boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{S}_3| = \ldots = |\boldsymbol{S}_n| = n - p$ dan untuk $1 \leq j \leq n$, elemen j terjadi tepat p kali dalam $L_{p\times n}$, yaitu dalam p kolom berbeda. Dengan kata lain elemen j belum terjadi pada $n - p$ kolom berbeda lainnya atau elemen j masih berada pada $n - p$ himpunan $\boldsymbol{S}_i$. Sebut $n - p$ himpunan $\boldsymbol{S}_i$ itu ζ'. Akan dibuktikan ζ' mempunyai SPB.

Diketahui bahwa $\zeta' \subseteq \zeta$. Andaikan $\zeta' = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_r\}$. Maka diperoleh $|\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_r| = r(n-p)$ (ada perulangan). Tetapi elemen j tidak ada yang terjadi lebih dari $n - p$ kali. Berarti $|\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{S}_r| \geq r$. Sedangkan $r \geq r + (k - n) = k - (n - r)$. Jadi berdasarkan Teorema 2.2, ζ' mempunyai SPB. SPB yang dihasilkan ini membentuk baris tambahan untuk $L_{p\times n}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin $L_{(p+1)\times n}$. Proses diulang sampai terbentuk bujursangkar Latin $n \times n$. ∎

Untuk persegi panjang Latin $n \times q$ dengan $q < n$ pembuktiannya analog dengan pembuktian pada persegi panjang Latin $p \times n$ dengan $p < n$ di atas. Berikut akan diberikan contoh perluasan persegi panjang Latin $p \times n$ dengan $p < n$ dan persegi panjang Latin $n \times q$ dengan $q < n$ menjadi bujursangkar Latin $n \times n$.

Contoh 3.4

a. Diberikan persegi panjang Latin $D_{2\times5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Persegi panjang Latin $D_{2\times5}$ ini akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 5×5, dengan menambah tiga baris berikutnya secara bertahap.

<u>*Langkah - 1*</u> : Menambah satu baris pada $D_{2\times5}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 3×5. Caranya, dalam setiap kolom, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam kolom itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{S}_1 = \{2, 3, 4\}$ $\boldsymbol{S}_3 = \{1, 3, 5\}$ $\boldsymbol{S}_5 = \{1, 2, 5\}$

$\boldsymbol{S}_2 = \{3, 4, 5\}$ $\boldsymbol{S}_4 = \{1, 2, 4\}$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_5\}$. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 2 = 3$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 3. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk baris baru. Misalkan SPB itu $\{4, 5, 3, 1, 2\}$. Persegi panjang Latin 3×5 yang diperoleh adalah

$$D_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Langkah - 2 : Menambah satu baris pada $D_{3\times 5}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 4 × 5. Caranya, dalam setiap kolom tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \leq i \leq 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam kolom itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{S}_1 = \{2, 3\}$ $\boldsymbol{S}_3 = \{1, 5\}$ $\boldsymbol{S}_5 = \{1, 5\}$

$\boldsymbol{S}_2 = \{3, 4\}$ $\boldsymbol{S}_4 = \{2, 4\}$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_5\}$. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 3 = 2$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 2. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk baris baru. Misalkan SPB itu {2, 3, 1, 4, 5}. Persegi panjang Latin 4 × 5 yang diperoleh adalah

$$D_{4\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Langkah - 3 : Menambah satu baris pada $D_{4\times 5}$ sehingga terbentuk bujursangkar Latin 5 × 5. Caranya, dalam setiap kolom, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \leq i \leq 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam kolom itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \{3\} \qquad S_2 = \{4\} \qquad S_3 = \{5\} \qquad S_4 = \{2\} \qquad S_5 = \{1\}$$

Diperoleh $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 4 = 1$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 1. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk baris baru. SPB yang diperoleh adalah $\{3, 4, 5, 2, 1\}$. Persegi panjang Latin 5×5 yang diperoleh adalah

$$D_{5\times5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Diberikan persegi panjang Latin $E_{5\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Persegi panjang Latin $E_{5\times3}$ ini akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 5×5, dengan menambah dua kolom berikutnya secara bertahap.

<u>*Langkah - 1*</u> : Menambah satu kolom pada $E_{5\times3}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 5×4. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \_ \\ 5 & 1 & 2 & \_ \\ 4 & 5 & 3 & \_ \\ 2 & 3 & 1 & \_ \\ 3 & 4 & 5 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \{3,5\} \\ \longrightarrow \{3,4\} \\ \longrightarrow \{1,2\} \\ \longrightarrow \{4,5\} \\ \longrightarrow \{1,2\} \end{array}$$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_5\}$. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 3 = 2$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 2. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk kolom baru. Misalkan SPB itu $\{3, 4, 1, 5, 2\}$. Persegi panjang Latin 5×4 yang diperoleh adalah

$$E_{5\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>*Langkah - 2*</u> : Menambah satu kolom pada $E_{5\times4}$ sehingga terbentuk bujursangkar Latin 5×5. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & \_ \\ 5 & 1 & 2 & 4 & \_ \\ 4 & 5 & 3 & 1 & \_ \\ 2 & 3 & 1 & 5 & \_ \\ 3 & 4 & 5 & 2 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \{5\} \\ \longrightarrow \{3\} \\ \longrightarrow \{2\} \\ \longrightarrow \{4\} \\ \longrightarrow \{2\} \end{array}$$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_5\}$. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 4 = 1$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 1. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk kolom baru. Persegi panjang Latin 5×5

yang diperoleh adalah $E_{5\times5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Persegi panjang Latin $p \times q$ dengan $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$ dengan menambah baris dan kolom berikutnya. Proses penambahannya merupakan perpaduan dari proses penambahan baris dan proses penambahan kolom. Berikut akan diberikan contohnya.

Contoh 3.5

Diberikan persegi panjang Latin $F_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Persegi panjang Latin $F_{3\times2}$ ini akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 5×5, dengan menambah dua baris dan tiga kolom berikutnya secara bertahap. Akan lebih mudah jika dilakukan penambahan terlebih dahulu pada baris atau kolom yang jumlahnya lebih banyak.

Langkah - 1 : Menambah satu baris pada $F_{3\times2}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 4×2. Caranya, dalam setiap kolom, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 2$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam kolom itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ \text{--} & \text{--} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \{2, 3\} \qquad\qquad \boldsymbol{S}_2 = \{4, 5\}$$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\}$. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 3 = 2$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 2. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk baris baru. Misalkan SPB itu $\{2, 4\}$. Persegi panjang Latin 4×2 yang diperoleh adalah $F_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>*Langkah - 2*</u> : Menambah satu baris pada $F_{4\times 2}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 5×2. Caranya, dalam setiap kolom, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \leq i \leq 2$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam kolom itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ \text{--} & \text{--} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \{3\} \qquad\qquad \boldsymbol{S}_2 = \{5\}$$

Diperoleh $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\}$. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 4 = 1$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 1. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk baris baru. SPB yang diperoleh adalah $\{3, 5\}$. Persegi panjang

Latin 5 × 2 yang diperoleh adalah $F_{5\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Langkah - 3 : Menambah satu kolom pada $F_{5\times 2}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 5 × 3. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan S_i, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam S yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \_ \\ 4 & 3 & \_ \\ 5 & 1 & \_ \\ 2 & 4 & \_ \\ 3 & 5 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow S_1 = \{3,4,5\} \\ \longrightarrow S_2 = \{1,2,5\} \\ \longrightarrow S_3 = \{2,3,4\} \\ \longrightarrow S_4 = \{1,3,5\} \\ \longrightarrow S_5 = \{1,2,4\} \end{array}$$

Diperoleh $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 2 = 3$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 3. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk kolom baru. Misalkan SPB itu {5, 2, 4, 3, 1}.

Persegi panjang Latin 5 × 3 yang diperoleh adalah $F_{5\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Langkah - 4 : Menambah satu kolom pada $F_{5\times 3}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 5 × 4. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan S_i, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam S yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \_ \\ 4 & 3 & 2 & \_ \\ 5 & 1 & 4 & \_ \\ 2 & 4 & 3 & \_ \\ 3 & 5 & 1 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow S_1 = \{3,4\} \\ \longrightarrow S_2 = \{1,5\} \\ \longrightarrow S_3 = \{2,3\} \\ \longrightarrow S_4 = \{1,5\} \\ \longrightarrow S_5 = \{2,4\} \end{array}$$

Diperoleh $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 3 = 2$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 2. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk kolom baru. Misalkan SPB itu $\{3, 5, 2, 1, 4\}$. Persegi panjang Latin 5×4 yang diperoleh adalah

$$F_{5\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Langkah - 5 : Menambah satu kolom pada $F_{5\times4}$ sehingga terbentuk bujursangkar Latin 5×5. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan S_i, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam S yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & \_ \\ 4 & 3 & 2 & 5 & \_ \\ 5 & 1 & 4 & 2 & \_ \\ 2 & 4 & 3 & 1 & \_ \\ 3 & 5 & 1 & 4 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow S_1 = \{4\} \\ \longrightarrow S_2 = \{1\} \\ \longrightarrow S_3 = \{3\} \\ \longrightarrow S_4 = \{5\} \\ \longrightarrow S_5 = \{2\} \end{array}$$

Diperoleh $\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 4 = 1$. Jumlah elemen j tidak ada yang lebih dari 1. Berarti ζ mempunyai SPB yang membentuk kolom baru. SPB yang diperoleh adalah $\{4, 1, 3, 5, 2\}$. Persegi panjang Latin 5×4 yang diperoleh adalah

$$F_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 3.5 di atas, memperlihatkan bahwa persegi panjang Latin $p \times q$ dengan $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$. Tetapi, tidak semua persegi panjang Latin $p \times q$ dengan $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$, seperti contoh yang akan diberikan berikut.

Contoh 3.6

a. Diberikan persegi panjang Latin $G_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Persegi panjang Latin $G_{3\times 4}$ akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 5 × 5, dengan menambah dua baris dan satu kolom berikutnya. Untuk melihat apakah $G_{3\times 4}$ dapat diperluas, maka tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap baris dan tulis himpunan $\boldsymbol{T}_i$, $1 \le i \le 5$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap kolom .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & \_ \\ 2 & 5 & 1 & 4 & \_ \\ 4 & 1 & 5 & 3 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{3\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_3 = \{2\} \\ \end{array}$$

$\boldsymbol{T}_1 = \{3, 5\}$ $\quad$ $\boldsymbol{T}_2 = \{2, 4\}$ $\quad$ $\boldsymbol{T}_3 = \{2, 3\}$ $\quad$ $\boldsymbol{T}_4 = \{1, 2\}$

Diperoleh $\zeta = \{S_1, S_2, S_3\}$dan $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$.

Andaikan dilakukan penambahan kolom baru terlebih dahulu. Jumlah kolom yang harus ditambah ada $n - q = 5 - 4 = 1$. Ada elemen $j = 2$ yang jumlahnya lebih dari 1. Berdasarkan Teorema 3.1, ζ tidak mempunyai SPB. Jadi tidak mungkin menambah kolom baru pada $G_{3\times4}$.

Andaikan dilakukan penambahan baris baru terlebih dahulu. Jumlah baris yang harus ditambah ada $n - p = 5 - 3 = 2$. Ada elemen $j = 2$ yang jumlahnya lebih dari 2. Berdasarkan Teorema 3.1, $\mathfrak{T}$ tidak mempunyai SPB. Jadi tidak mungkin menambah baris baru pada $G_{3\times4}$.

Dengan mengetahui $G_{3\times4}$ tidak dapat ditambah baris atau kolom baru maka dapat disimpulkan bahwa persegi panjang Latin $G_{3\times4}$ tidak dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 5×5.

b. Diberikan persegi panjang Latin $H_{4\times3} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Persegi panjang Latin $H_{4\times3}$ akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 6×6, dengan menambah dua baris dan tiga kolom berikutnya. Untuk melihat apakah $H_{4\times3}$ dapat diperluas, maka tulis $\boldsymbol{S}_i$ dengan anggota dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai pada setiap baris dan tulis $\boldsymbol{T}_i$ dengan anggota dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai pada setiap kolom.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & \_ \\ 5 & 6 & 3 & \_ \\ 1 & 3 & 6 & \_ \\ 3 & 2 & 1 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{3,4,5\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{1,2,4\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_3 = \{2,4,5\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_4 = \{4,5,6\} \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{T}_1 = \{2, 4\} \qquad \boldsymbol{T}_2 = \{4, 5\} \qquad \boldsymbol{T}_3 = \{4, 5\}$$

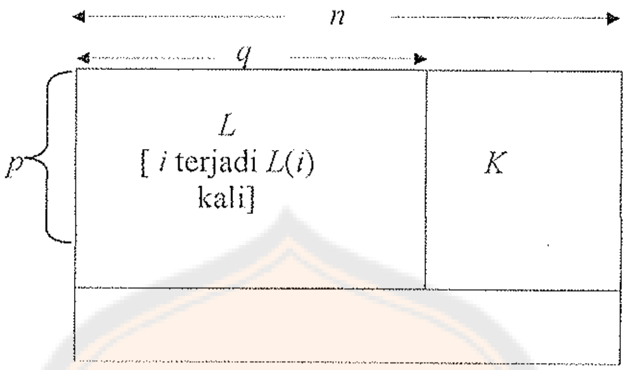
Dari sini terbentuklah $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4\}$ dan $\mathfrak{T} = \{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3\}$.

Andaikan dilakukan penambahan kolom baru terlebih dahulu. Jumlah kolom yang harus ditambahkan ada $n - q = 6 - 3 = 3$. Ada elemen $j = 4$ yang jumlahnya lebih dari 3. Berdasarkan Teorema 3.1, ζ tidak mempunyai SPB. Jadi tidak mungkin menambah baris baru pada $H_{4\times 3}$.

Andaikan dilakukan penambahan baris baru terlebih dahulu. Jumlah baris yang harus ditambahkan ada $n - p = 6 - 4 = 2$. Ada elemen $j = 4$ yang jumlahnya lebih dari 2. Berdasarkan Teorema 3.1, $\mathfrak{T}$ tidak mempunyai SPB. Jadi tidak mungkin menambah baris baru pada $H_{4\times 3}$.

Dengan mengetahui $H_{4\times 3}$ tidak dapat ditambah baris atau kolom baru maka $H_{4\times 3}$ tidak dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 6×6.

Secara umum, agar ada kemungkinan persegi panjang Latin $L_{p\times q}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$, maka harus dibatasi dengan $L(i)$ yaitu ***bilangan kejadian*** dari elemen i dalam $L_{p\times q}$ untuk $1 \le i \le n$. Andaikan $L_{p\times q}$ dapat diperluas dan elemen i terjadi sebanyak $L(i)$ kali dalam $L_{p\times q}$.



Gambar 3.2. Ilustrasi elemen i terjadi $L(i)$ kali dalam $L_{p\times q}$

Elemen i terjadi sekali dalam setiap baris. Jadi untuk p baris, elemen i terjadi sebanyak p kali. Dengan kata lain elemen i terjadi sebanyak $p - L(i)$ kali pada K. Dalam K hanya ada $n - q$ kolom. Jadi jika $p - L(i) \leq n - q$ atau $L(i) \geq p + q - n$ maka ada jaminan bahwa $L_{p\times q}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar $n \times n$.

Persegi panjang Latin $L_{p\times q}$ akan diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$. Persegi panjang Latin $L_{p\times q}$ ditambah satu kolom menjadi persegi panjang Latin $L'_{(p+1)\times q}$. $L'(i)$ adalah jumlah elemen i yang terjadi dalam $L'_{(p+1)\times q}$. $L'(i)$ harus memenuhi $L'(i) \geq p + (q + 1) - n$. Karena itu, jika untuk elemen i terjadi saat $L(i) = p + q - n$, maka ada jaminan bahwa elemen i ada dalam kolom baru. Andaikan $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ dan } L(i) = p + q - n\}$. Maka kolom tambahan harus memuat anggota himpunan $\boldsymbol{P}$.

Contoh 3.7

Diberikan persegi panjang Latin $N_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Persegi panjang Latin $N_{2\times 3}$ akan diperluas menjadi bujursangkar Latin 5 × 5, dengan menambah tiga baris dan dua kolom berikutnya secara bertahap.

Langkah - 1 : Menambah satu kolom pada $N_{2\times 3}$ sehingga terbentuk persegi panjang Latin 2 × 4. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 2$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam baris itu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & \_ \\ 4 & 1 & 5 & \_ \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2, 5\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{2, 3\} \end{matrix}$$

Diketahui $p = 2$, $q = 3$ dan $n = 5$, sehingga diperoleh $p + q - n = 2 + 3 - 5 = 0$. Untuk setiap elemen i, $1 \le i \le n$, akan ditunjukkan $L(i) \ge 0$. Dapat dilihat bahwa $L(1) = 2$, $L(2) = 0$, $L(3) = 1$, $L(4) = 2$ dan $L(5) = 1$. Karena semua $L(i) \ge 0$, maka $N_{2\times 3}$ dapat diperluas. Untuk memilih elemen i mana yang harus digunakan terlebih dahulu, maka pilih elemen i dengan $L(i) = 0$. Jadi "2" harus dipakai salah satu dalam kolom baru dan yang lain bebas. Persegi panjang Latin 2 × 4 yang diperoleh yaitu N_1' dan N_2'.

$$N_1' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad N_2' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_3' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

N_3' adalah juga persegi panjang Latin 2 × 4, namun tidak menggunakan elemen i dengan $L(i) = 0$. Dalam proses selanjutnya akan terlihat bahwa persegi panjang Latin $N_3^{'}$ tidak mungkin diperluas.

Langkah - 2 : Menambah satu kolom pada persegi panjang Latin 2 × 4 sehingga terbentuk persegi panjang Latin 2 × 5. Caranya, dalam setiap baris, tulis himpunan $\boldsymbol{S}_i$, $1 \le i \le 2$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam baris itu.

$$N_1^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & \_ \\ 4 & 1 & 5 & 3 & \_ \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{5\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{2\} \end{matrix}$$

$$N_2^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & \_ \\ 4 & 1 & 5 & 2 & \_ \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{3\} \end{matrix}$$

$$N_3^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & \_ \\ 4 & 1 & 5 & 3 & \_ \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{2\} \end{matrix}$$

Diketahui $p = 2$, $q = 4$ dan $n = 5$, sehingga diperoleh $p + q - n = 2 + 4 - 5 = 1$. Untuk setiap elemen i, akan ditunjukkan $L(i) \ge 1$.

- Untuk $N_1^{'}$, dapat dilihat bahwa $L(1) = 2$, $L(2) = 1$, $L(3) = 2$, $L(4) = 2$ dan $L(5) = 1$. Karena semua $L(i) \ge 1$, maka $N_1^{'}$ dapat diperluas. Elemen i yang harus digunakan terlebih dahulu adalah elemen i dengan $L(i) = 1$, yaitu $i = 2$ dan $i = 5$ atau $\boldsymbol{P} = \{2, 5\}$. Jadi 2 dan 5 harus dipakai dalam kolom baru dan yang lain bebas.
- Untuk $N_2^{'}$, dapat dilihat bahwa $L(1) = 2$, $L(2) = 1$, $L(3) = 1$, $L(4) = 2$ dan $L(5) = 2$. Karena semua $L(i) \ge 1$, maka $N_2^{'}$ dapat diperluas. Elemen i yang harus digunakan terlebih dahulu adalah elemen i dengan $L(i) = 1$, yaitu $i = 2$ dan $i = 3$ atau $\boldsymbol{P} = \{2, 3\}$. Jadi 2 dan 3 harus dipakai dalam kolom baru dan yang lain bebas.

- Untuk $N_3^{'}$, dapat dilihat bahwa $L(1) = 2$, $L(2) = 0$, $L(3) = 2$, $L(4) = 2$ dan $L(5) = 2$. Karena ada $L(i) < 1$, yaitu $i = 2$ maka $N_3^{'}$ tidak dapat diperluas.

Persegi panjang Latin 2×5 yang diperoleh yaitu $N_1^{''}$ dan $N_2^{''}$.

$$N_1^{''} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad N_2^{''} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N_3^{''} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$N_3^{''}$ bukan persegi panjang Latin 2×5, karena ada pengulangan "2" pada kolom terakhir.

Berikut ini akan dibuktikan bahwa untuk setiap elemen i, $1 \le i \le n$, $L(i) \ge p + q - n$ menjamin bahwa persegi panjang Latin $p \times q$ dengan $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$. Namun sebelumnya akan dibuktikan bahwa jumlah elemen i yang terjadi m kali dalam persegi panjang Latin $p \times q$ dan pada semua r baris pertama persegi panjang Latin $p \times q$, tidak lebih dari $\dfrac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.

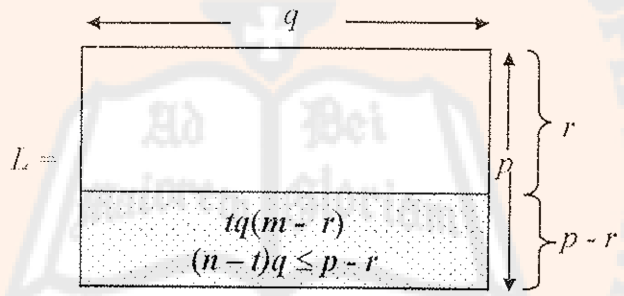
Lemma 3.1

Andaikan m, p, q, dan r adalah bilangan asli, $0 \le r \le m < p$, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan bukan himpunan kosong serta $L_{p\times q}$ adalah persegi panjang Latin $p \times q$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$, $p < n$ dan $q < n$. Elemen i anggota $\boldsymbol{S}$ yang terjadi m kali dalam

$L_{p\times q}$ *dan pada semua r baris pertama* $L_{p\times q}$ *tidak lebih dari* $\frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.

Bukti :

Andaikan t elemen i anggota $\boldsymbol{S}$, terjadi m kali dalam $L_{p\times q}$ dan pada semua r baris pertama $L_{p\times q}$. Maka t elemen i terjadi m - r kali dalam daerah bayangan $L_{p\times q}$. Berarti n - t elemen lainnya terjadi paling banyak p - r kali dalam daerah bayangan yang sama. Akan dibuktikan bahwa $t \leq \frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.



Gambar 3.3. Ilustrasi daerah bayangan $L_{p\times q}$

Jumlah kejadian dalam daerah bayangan yaitu :

$$(p-r)q \leq t(m-r) + (n-t)(p-r)$$

Dari ketidaksamaan di atas diperoleh :

$$(p-r)q \leq tm - tr + np - nr - tp + tr$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-r)q \leq tm + np - nr - tp$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-r)q \leq t(m-p) + n(p-r)$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-r)q - t(m-p) \leq n(p-r)$$

$$\Leftrightarrow \quad -t(m-p) \leq n(p-r) - (p-r)q$$

$$\Leftrightarrow \qquad t(p-m) \leq (n-q)(p-r)$$

$$\Leftrightarrow \qquad t \leq \frac{(n-q)(p-r)}{p-m}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.8

Diberikan persegi panjang Latin $O_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Akan ditunjukkan t elemen i yang terjadi m kali dalam $O_{3\times4}$ dan pada semua r baris pertama $O_{3\times4}$, kurang dari $\frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.

Diketahui bahwa $n = 6$, $p = 3$ dan $q = 4$. Untuk menentukan m dan r, perlu diingat bahwa m dan r harus memenuhi $0 \leq r \leq m < p$.

m	r	A	B	C	B ∩ C	|B ∩ C|
0	0	2	-	-	-	0
1	0	3	5	-	-	0
1	1	2	5	1, 2, 3, 4	-	0
2	0	6	2, 3, 4, 6	-	-	0
2	1	4	2, 3, 4, 6	-	-	0
2	2	2	2, 3, 4, 6	1, 4	4	1

Tabel 3.1. Tabel elemen i yang terjadi m kali

Keterangan :

- A = $\frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.
- B = elemen i yang terjadi m kali dalam $O_{3\times4}$
- C = elemen i yang terjadi m kali pada semua r baris pertama $O_{3\times4}$
- B ∩ C = elemen i yang terjadi m kali dalam $O_{3\times4}$ dan pada semua r baris pertama $O_{3\times4}$

Dari tabel 3.1 dapat dilihat dengan jelas bahwa semua $|B \cap C| < A$. Dengan kata lain t elemen i yang terjadi m kali dalam $O_{3\times 4}$ dan pada semua r baris pertama $O_{3\times 4}$, kurang dari $\frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$.

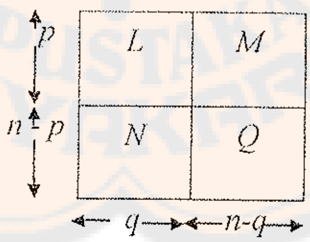
Teorema 3.2

Andaikan i, n, p dan q adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong. Persegi panjang Latin* $L_{p\times q}$ *dengan elemen dalam* $\boldsymbol{S}$, $p < n$ *dan* $q < n$, *dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin* $n \times n$ *jika hanya jika* $L(i)$, *bilangan kejadian dari elemen i dalam* $L_{p\times q}$ *memenuhi* $L(i) \geq p + q - n$ *untuk* $1 \leq i \leq n$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Andaikan $L_{p\times q}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$.

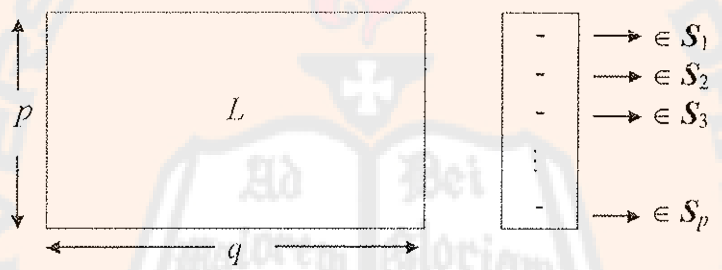


Gambar 3.4. Ilustrasi $L_{p\times q}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$

Elemen i terjadi sebanyak $L(i)$ kali dalam $L_{p\times q}$ dan terjadi sebanyak p kali dalam L dan M. Berarti elemen i terjadi sebanyak $p - L(i)$ kali dalam M. Elemen i terjadi sebanyak $n - q$ kali dalam M dan Q. Jadi $p - L(i) \leq n - q$ atau $L(i) \geq p + q - n$.

($\Leftarrow$)

Andaikan untuk $1 \le i \le n$, $L(i) \ge p + q - n$. Akan ditunjukkan $L_{p \times q}$ dengan $p < n$ dan $q < n$ dapat diperluas menjadi persegi panjang Latin $L_{p \times (q+1)}$. Proses dapat dilanjutkan sampai terbentuk persegi panjang Latin $L_{p \times n}$. Andaikan $\boldsymbol{S}_i$ = {anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum digunakan dalam $L_{p \times q}$ baris ke-i} untuk $1 \le i \le p$, $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le n$ dan $L(i) = p + q - n\}$ dan $|\boldsymbol{S}_1| = |\boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{S}_3| = \ldots = |\boldsymbol{S}_p| = n - q$. Akan ditunjukkan $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_p\}$ mempunyai SPB.



Gambar 3.5. Ilustrasi $L_{p \times q}$ dengan kolom tambahan

Untuk menunjukkan bahwa $\zeta = \{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_p\}$ mempunyai SPB yang berisi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le n$ dan $L(i) = p + q - n\}$, maka akan diperlihatkan untuk $1 \le i \le n$ dan $\boldsymbol{I} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dipenuhi $\left| \boldsymbol{P} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \boldsymbol{S}_i \right) \right| \le \boldsymbol{P} - |\boldsymbol{I}|$.

$$\left| \boldsymbol{P} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \boldsymbol{S}_i \right) \right| = \text{elemen } i \text{ anggota } \boldsymbol{P} \text{ tidak dalam } \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_r$$

$$= \text{elemen } i \text{ anggota } \boldsymbol{P} \text{ dalam semua } r \text{ baris pertama } L_{p \times n}$$

Setiap elemen i terjadi tepat $p + q - n$ kali dalam $L_{p \times n}$, dan jumlahnya tidak kosong jika $r > p + q - n$. Dengan kata lain, jika $r \le p + q - n$, maka dengan menerima $m = p + q - n$ dalam Lemma 3.1 akan diperoleh

$$\left| \boldsymbol{P} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right) \right| = \text{elemen } i \text{ anggota } \boldsymbol{S} \text{ terjadi } p + q - n \text{ kali dalam } L_{p\times n} \text{ dan dalam semua } r \text{ baris pertama } L_{p\times n}$$

$$\le \frac{(n-q)(p-r)}{p-(p+q-n)}$$

$$= p - r$$

$$= p - |\boldsymbol{I}|$$

Berdasarkan teorema, $\zeta = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ mempunyai SPB. SPB digunakan untuk menambah kolom pada $L_{p\times q}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin $L'_{p\times(q+1)}$. Jika $L'(i)$ adalah jumlah elemen i yang terjadi pada $L'_{p\times(q+1)}$ maka diperoleh :

- $L'(i) = L(i) + 1 = (p + q - n) + 1$, untuk $i \in \boldsymbol{P}$
- $L'(i) \ge L(i) > p + q - n$, untuk $i \notin \boldsymbol{P}$.

Jadi dalam setiap kejadian $L'(i) \ge p + (q + 1) - n$ dan proses dapat diulang sehingga penambahan dapat dilakukan sampai $L_{p\times n}$. Berdasarkan teorema 3.1, $L_{p\times n}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$. ■

Contoh 3.9

Diberikan persegi panjang Latin $Q_{3\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Akan ditunjukkan bahwa $Q_{3\times3}$ dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin 6 × 6.

Untuk mendapatkan bujursangkar Latin 6 × 6, maka $Q_{3\times 3}$ harus ditambah tiga kolom dan tiga baris berikutnya. Akan diadakan penambahan kolom terlebih dahulu.

Langkah - 1 : Menambah satu kolom pada $Q_{3\times 3}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 3 × 4. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap baris sebelumnya.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & \_ \\ 6 & 5 & 2 & \_ \\ 1 & 2 & 3 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2,3,4\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{1,3,4\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_3 = \{4,5,6\} \end{array}$$

Dari $Q_{3\times 3}$ diperoleh $p = 3$, $q = 3$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n = 3 + 3 - 6 = 0$. Diketahui bahwa $L(1) = 2$, $L(2) = 2$, $L(3) = 1$, $L(4) = 0$, $L(5) = 2$ dan $L(6) = 2$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le 6 \text{ dan } L(i) = 0\} = \{4\}$. Berarti "4" harus dipakai dalam kolom baru dan yang lain bebas. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 3 × 4 yang diperoleh yaitu $Q_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Langkah - 2 : Menambah satu kolom pada $Q_{3\times 4}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 3 × 5. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap baris.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & \_ \\ 6 & 5 & 2 & 1 & \_ \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2,3\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{3,4\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_3 = \{4,6\} \end{array}$$

Dari $Q_{3\times 4}$ diperoleh $p = 3$, $q = 4$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n =$

$3 + 4 - 6 = 1$. Diketahui bahwa $L(1) = 3$, $L(2) = 2$, $L(3) = 1$, $L(4) = 1$, $L(5) = 3$ dan $L(6) = 3$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq 6 \text{ dan } L(i) = 1\} = \{3, 4\}$. Berarti "3" dan "4" harus dipakai dalam kolom baru dan yang lain bebas. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 3×5 yang diperoleh yaitu

$$Q_{3\times5} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>*Langkah - 3*</u> : Menambah satu kolom pada $Q_{3\times5}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 3×6. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap baris.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & \_ \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & \_ \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & \_ \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{S}_1 = \{2\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_2 = \{3\} \\ \longrightarrow \boldsymbol{S}_3 = \{4\} \end{matrix}$$

Dari $Q_{3\times5}$ diperoleh $p = 3$, $q = 5$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n = 3 + 5 - 6 = 2$. Diketahui bahwa $L(1) = 3$, $L(2) = 2$, $L(3) = 2$, $L(4) = 2$, $L(5) = 3$ dan $L(6) = 3$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq 6 \text{ dan } L(i) = 2\} = \{2, 3, 4\}$. Berarti "2", "3", "4" harus dipakai dalam kolom baru dan yang lain bebas. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 3×6 yang diperoleh yaitu

$$Q_{3\times6} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Karena sudah tidak ada lagi kolom yang ditambah, maka sekarang akan ditambah tiga baris berikutnya.

<u>*Langkah - 4*</u> : Menambah satu baris pada $Q_{3\times6}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 4×6. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap kolom.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$T_1 = \{2, 3, 4\}$ $T_2 = \{1, 3, 4\}$ $T_3 = \{4, 5, 6\}$ $T_4 = \{2, 3, 6\}$ $T_5 = \{1, 2, 5\}$ $T_6 = \{1, 5, 6\}$

Dari $Q_{3\times6}$ diperoleh $p = 3$, $q = 6$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n = 3 + 6 - 6 = 3$. Diketahui bahwa $L(1) = 3$, $L(2) = 3$, $L(3) = 3$, $L(4) = 3$, $L(5) = 3$ dan $L(6) = 3$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le 6$ dan $L(i) = 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Berarti "1", "2", "3", "4", "5", "6" harus dipakai dalam kolom baru. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 4×6 yang diperoleh yaitu

$$Q_{4\times6} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*Langkah - 5*</u> : Menambah satu baris pada $Q_{4\times6}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 5×6. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap kolom.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$T_1 = \{3, 4\}$ $T_2 = \{1, 4\}$ $T_3 = \{5, 6\}$ $T_4 = \{2, 3\}$ $T_5 = \{1, 2\}$ $T_6 = \{5, 6\}$

Dari $Q_{4\times6}$ diperoleh $p = 4$, $q = 6$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n = 4 + 6 - 6 = 4$. Diketahui bahwa $L(1) = 4$, $L(2) = 4$, $L(3) = 4$, $L(4) = 4$, $L(5) = 4$ dan

$L(6) = 4$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le 6 \text{ dan } L(i) = 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Berarti "1", "2", "3", "4", "5", "6" harus dipakai dalam kolom baru. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 5×6 yang diperoleh yaitu

$$Q_{5\times 6} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Langkah - 6 : Menambah satu baris pada $Q_{5\times 6}$ sehingga menjadi persegi panjang Latin 6×6. Caranya, tulis anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum terpakai dalam setiap kolom.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{T}_1 = \{4\}$ $\boldsymbol{T}_2 = \{1\}$ $\boldsymbol{T}_3 = \{6\}$ $\boldsymbol{T}_4 = \{3\}$ $\boldsymbol{T}_5 = \{2\}$ $\boldsymbol{T}_6 = \{5\}$

Dari $Q_{5\times 6}$ diperoleh $p = 5$, $q = 6$ dan $n = 6$ sehingga $p + q - n = 5 + 6 - 6 = 5$. Diketahui bahwa $L(1) = 5$, $L(2) = 5$, $L(3) = 5$, $L(4) = 5$, $L(5) = 5$ dan $L(6) = 5$. Kolom baru harus meliputi $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \le i \le 6 \text{ dan } L(i) = 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Berarti "1", "2", "3", "4", "5", "6" harus dipakai dalam kolom baru. Salah satu bentuk persegi panjang Latin 6×6 yang diperoleh yaitu

$$Q_{6\times 6} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Dalam subbab pertama, telah dibahas mengenai pengertian persegi panjang Latin dan bujursangkar Latin serta pembentukan bujursangkar Latin dari persegi panjang Latin dengan menggunakan konsep SPB. Sekarang akan dibahas mengenai sifat-sifat dari bujursangkar Latin.

B. Sifat-sifat Bujursangkar Latin

Bujursangkar Latin mempunyai dua sifat, yaitu ortogonal dan saling ortogonal. Berikut akan dibahas mengenai dua bujursangkar Latin yang ortogonal dan bujursangkar Latin yang saling ortogonal.

Dari dua bujursangkar Latin dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ yang sama, dapat dibentuk sebuah matriks yang elemennya merupakan pasangan dari kedua bujursangkar Latin tersebut. Jika semua elemen matriks itu berbeda maka bujursangkar Latin pertama ortogonal dengan bujursangkar Latin kedua.

Definisi 3.2 (Dua Bujursangkar Latin yang Ortogonal)

Andaikan i, j dan n adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong,* $K_{n\times n} = (k_{ij})$ *dan* $L_{n\times n} = (l_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *adalah dua bujursangkar Latin* $n \times n$, *dengan elemen dalam* $\boldsymbol{S}$. *Andaikan pula* $M_{n\times n} = (m_{ij})$ *adalah matriks yang elemennya adalah pasangan "*$k_{ij}l_{ij}$*" (*k_{ij} *menduduki posisi pertama* m_{ij} *dan* l_{ij} *menduduki posisi kedua* m_{ij}*). Bujursangkar Latin* $K_{n\times n}$ *dikatakan* ***ortogonal*** *dengan* $L_{n\times n}$, *jika* n^2 m_{ij} *semua berbeda. Ditulis* $K \perp L$.

Contoh 3.10

a. Diberikan dua bujursangkar Latin $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $S = \{1, 2, 3\}$. Pasangan "$a_{ij}b_{ij}$" dari $A_{3\times3}$ dan $B_{3\times3}$ (a_{ij} menduduki posisi pertama dan b_{ij} menduduki posisi kedua) membentuk matriks $C_{3\times3} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 32 & 13 & 21 \\ 23 & 31 & 12 \end{pmatrix}$. Dapat dilihat $11 \neq 22 \neq 33 \neq 32 \neq 13 \neq 21 \neq 23 \neq 31 \neq 12$. Dengan kata lain, $n^2 = 3^2 = 9$ c_{ij} semua berbeda. Jadi $A \perp B$.

b. Diberikan dua bujursangkar Latin $D_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $E_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Pasangan "$d_{ij}e_{ij}$" dari $D_{4\times4}$ dan $E_{4\times4}$ membentuk matriks $F_{4\times4} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 34 & 43 & 12 & 21 \\ 23 & 14 & 41 & 32 \\ 42 & 31 & 24 & 13 \end{pmatrix}$.

Dapat dilihat $11 \neq 22 \neq 33 \neq 44 \neq 34 \neq 43 \neq 12 \neq 21 \neq 23 \neq 14 \neq 41 \neq 32 \neq 42 \neq 31 \neq 24 \neq 13$. Dengan kata lain, $n^2 = 3^2 = 9$ f_{ij} semua berbeda. Jadi

$D \perp E$.

c. Diberikan dua bujursangkar Latin $G_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $H_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3\}$. Pasangan "$g_{ij}h_{ij}$" dari $G_{3\times3}$ dan $H_{3\times3}$, membentuk matriks $I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 23 & 12 & 31 \\ 11 & 33 & 22 \\ 32 & 21 & 13 \end{pmatrix}$. Dapat dilihat $23 \neq 12 \neq 31 \neq 11 \neq 33 \neq 22 \neq 32 \neq 21 \neq 13$. Dengan kata lain, $n^2 = 3^2 = 9$ i_{ij} semua berbeda. Jadi $G \perp H$.

Sekarang akan dibahas mengenai bujursangkar Latin $n \times n$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$, yang saling ortogonal.

Definisi 3.3 (Bujursangkar Latin Saling Ortogonal)

Andaikan i, j, n dan t adalah bilangan asli, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *dan bukan himpunan kosong, serta* $L_1, L_2, \ldots, L_t$ *adalah t bujursangkar Latin* $n \times n$ *dengan elemen dalam* $\boldsymbol{S}$*. Bujursangkar Latin* $n \times n$ $L_1, L_2, \ldots, L_t$ *dikatakan* ***saling ortogonal*** *jika untuk setiap* $i \neq j$, $L_i \perp L_j$, $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

Untuk mengetahui apakah t bujursangkar Latin $n \times n$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S}$ saling ortogonal, maka perlu diperiksa apakah untuk setiap $i \neq j$, $L_i \perp L_j$, yaitu dengan membentuk matriks tunggal $R_{n^2\times(t+2)}$ dari t bujursangkar Latin $n \times n$ itu. Jika tidak ada elemen dari matriks tunggal $R_{n^2\times(t+2)}$ yang berbentuk persegi panjang $\begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{matrix}$, maka t bujursangkar Latin $n \times n$ itu saling ortogonal.

Contoh 3.11

Diberikan empat bujursangkar Latin 5×5 A_1, A_2, A_3 dan A_4 dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk mengetahui apakah keempat bujursangkar Latin 5×5 ini saling ortogonal maka harus diperiksa apakah untuk setiap $i \neq j$, $L_i \perp L_j$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$. Akan dibentuk matriks tunggal dari keempat bujursangkar Latin 5×5 A_1, A_2, A_3 dan A_4. Diketahui bahwa $n = 5$ dan $t = 4$. Matriks tunggal yang diperoleh yaitu $B_{5^2\times(4+2)} = B_{25\times 6}$.

$$
B_{25\times 6} = \begin{array}{cccccc}
i & j & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\
3 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\
3 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\
3 & 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\
3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\
4 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\
4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\
4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\
4 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\
4 & 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\
5 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\
5 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\
5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\
5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\
5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{pmatrix}
$$

Baris ke-9 dari matriks tunggal $B_{25\times 6}$, mengatakan bahwa masukan pada baris ke-2 kolom ke-4 pada bujursangkar Latin 5×5 A_1 adalah 5, pada A_2 adalah 1, pada A_3 adalah 2 dan pada A_4 adalah 3.

Dari matriks tunggal $B_{25\times 6}$, dapat dilihat bahwa tidak ada persegi panjang dari elemen berbentuk $\begin{array}{ccc} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{array}$. Jadi keempat bujursangkar Latin 5×5 A_1, A_2, A_3 dan A_4 saling ortogonal.

Contoh 3.11 memperlihatkan bahwa t bujursangkar Latin $n \times n$ yang diberikan saling ortogonal. Tetapi tidak semua t bujursangkar Latin $n \times n$ yang diberikan saling ortogonal, seperti yang akan diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 3.12

Diberikan empat bujursangkar Latin 3×3 C_1, C_2, C_3 dan C_4 dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3\}$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Untuk mengetahui apakah keempat bujursangkar Latin 3×3 ini saling ortogonal maka harus diperiksa apakah untuk setiap $i \neq j$, $L_i \perp L_j$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$. Akan dibentuk matriks tunggal dari keempat bujursangkar Latin 3×3 C_1, C_2, C_3 dan C_4. Diketahui bahwa $n = 3$ dan $t = 4$. Matriks tunggal yang diperoleh yaitu $D_{3^2 \times (4+2)} = D_{9\times 6}$.

$$D_{9\times 6} = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Baris ke-5 dari matriks tunggal $D_{9\times 6}$, mengatakan bahwa masukan pada baris ke-2 kolom ke-2 pada bujursangkar Latin 3×3 C_1 adalah 3, pada C_2 adalah 1, pada C_3 adalah 1 dan pada C_4 adalah 2.

Dari matriks tunggal $D_{9\times 6}$, dapat dilihat bahwa ada elemen berbentuk persegi panjang dari $\begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{matrix}$, yaitu

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & & & 2 \\ 2 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 3 & & & 2 \\ 2 & 3 & & & & \\ 3 & 1 & 3 & & & 2 \\ 3 & 2 & & & & \\ 3 & 3 & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

. Jadi keempat bujursangkar Latin 5×5 C_1, C_2, C_3 dan C_4 tidak saling ortogonal.

Karena untuk t bujursangkar Latin $n \times n$ yang diberikan belum tentu saling ortogonal maka berikut ini akan dibahas berapakah bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal untuk sembarang n yang diberikan.

Teorema 3.3

Untuk bilangan asli $n > 1$, ada paling banyak n - 1 bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal.

Bukti :

Andaikan T_1, T_2, T_3, …, T_q adalah q bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal. Akan ditunjukkan bahwa $q \leq n - 1$.

Dalam contoh 3.11, baris ke-1 dari setiap bujursangkar Latin 5×5 A_1, A_2, A_3 dan A_4 adalah (1 2 3 4 5). Sekarang akan diperlihatkan bahwa T_1, T_2, T_3, …, T_q memberikan q bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal, yaitu

$T_1', T_2', T_3', \ldots, T_q'$, dengan baris pertama dari $T_1', T_2', T_3', \ldots, T_q'$ adalah (1 2 3 4 5 … n). Andaikan baris pertama dari T_1 adalah ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$). Ganti semua a_1 dengan 1, a_2 dengan 2, a_3 dengan 3, … , a_n dengan n, dimanapun terjadinya. Bujursangkar Latin $n \times n$ baru yang terbentuk ini namakanlah T_1'. Proses ini diulang pada bujursangkar Latin $n \times n$ T_i , $1 \le i \le q$. Hasilnya adalah q' bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal, yaitu $T_1', T_2', T_3', \ldots, T_q'$, dengan baris pertama (1 2 3 4 5 … n).

$$T_1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad T_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

$$T_3' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \ldots, T_q' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Elemen bertanda "?" dalam q' bujursangkar Latin $n \times n$ $T_1', T_2', T_3', \ldots, T_q'$ bukan 1, karena 1 sudah ada dalam setiap kolom ke-1 dari q' bujursangkar Latin $n \times n$ $T_1', T_2', T_3', \ldots, T_q'$. Elemen bertanda "?" tidak boleh ada dua yang sama. Jika ada dua yang sama, misalkan "i" pada bujursangkar Latin $n \times n$ T_j' dan T_k', $j \le q$ dan $k \le q$, maka pasangan "ii" akan diulang. Dengan demikian bujursangkar Latin $n \times n$ T_j' dan T_k' tidak ortogonal.

$$T_j' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i & \ldots & n \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \qquad T_k' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i & \ldots & n \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Jadi q anggota bertanda " ? " berbeda yaitu 2, 3, …, n, karena 1 tidak digunakan lagi. Jadi $q \leq n - 1$. ■

Contoh 3.13

Dari matriks tunggal $D_{9\times6}$, pada contoh 3.12 dapat dilihat bahwa $C_1 \perp C_2$, $C_1 \perp C_3$, $C_2 \perp C_1$, $C_2 \perp C_4$, $C_3 \perp C_1$, $C_3 \perp C_4$, $C_4 \perp C_2$ dan $C_4 \perp C_3$. Sedangkan C_1 tidak ortogonal dengan C_4, C_2 tidak ortogonal dengan C_3, C_3 tidak ortogonal dengan C_2 dan C_4 tidak ortogonal dengan C_1. Sekarang akan diperlihatkan bahwa untuk $n = 3$, ada $n - 1 = 3 - 1 = 2$ bujursangkar Latin 3×3 yang saling ortogonal.

1. Ambil dua bujursangkar Latin 3×3
   - C_1 dan C_2. Diketahui bahwa $C_1 \perp C_2$ dan $C_2 \perp C_1$. Jadi C_1 dan C_2 saling ortogonal.
   - C_1 dan C_3. Diketahui bahwa $C_1 \perp C_3$ dan $C_3 \perp C_1$. Jadi C_1 dan C_3 saling ortogonal.
   - C_1 dan C_4. Diketahui bahwa C_1 tidak ortogonal dengan C_4 dan C_4 tidak ortogonal dengan C_1. Jadi C_1 dan C_4 tidak saling ortogonal.
2. Ambil tiga bujursangkar Latin 3×3
   - C_1, C_2 dan C_3. Di atas, diketahui bahwa C_2 tidak ortogonal dengan C_3. Jadi C_1, C_2 dan C_3 tidak saling ortogonal
   - C_1, C_2 dan C_4. Di atas, diketahui bahwa C_1 tidak ortogonal dengan C_4. Jadi C_1, C_2 dan C_4 tidak saling ortogonal

- C_1, C_3 dan C_4 . Di atas, diketahui bahwa C_1 tidak ortogonal dengan C_4. Jadi C_1, C_2 dan C_4 tidak saling ortogonal
- C_2, C_3 dan C_4. Di atas, diketahui bahwa C_2 tidak ortogonal dengan C_3. Jadi C_1, C_2 dan C_3 tidak saling ortogonal

3. Ambil empat bujursangkar Latin 3×3 C_1, C_2, C_3 dan C_4. Di atas, diketahui bahwa C_1 tidak ortogonal dengan C_4. Jadi C_1, C_2, C_3 dan C_4 tidak saling ortogonal.

Dari hasil di atas, dapat dilihat bahwa untuk $n = 3$, ada $n - 1 = 2$ bujursangkar Latin 3×3 yang saling ortogonal.

BAB IV

PENERAPAN BUJURSANGKAR LATIN

Bujursangkar Latin dapat digunakan untuk membentuk bujursangkar ajaib dan untuk merancang suatu percobaan. Berikut akan dibahas bagaimana cara membentuk bujursangkar ajaib dan bagaimana cara merancang suatu percobaan dalam bidang pertanian, farmasi dan industri, dengan menggunakan bujursangkar Latin.

A. Bujursangkar Ajaib

Salah satu cara untuk menarik minat siswa (SD) agar lebih terampil dalam melakukan operasi penjumlahan adalah dengan bujursangkar ajaib. Dari dua bujursangkar Latin yang ortogonal, ada kemungkinan dapat dibentuk sebuah bujursangkar ajaib. Berikut ini akan dibahas proses pembentukan bujursangkar ajaib dari dua bujursangkar Latin yang ortogonal. Tetapi sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai pengertian bujursangkar ajaib beserta contohnya.

Bujursangkar ajaib orde n adalah matriks $M_{n\times n} = (m_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots n$, dengan $m_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, n^2\text{-}1\}$ atau $m_{ij} \in \{1, 2, \ldots, n^2\}$ sedemikian rupa sehingga jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal semuanya sama.

Contoh 4.1

a. Diberikan matriks $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Elemen-elemen dari $A_{3\times 3}$ dan $B_{3\times 3}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $A_{3\times 3}$ dan $B_{3\times 3}$, semuanya sama yaitu 12. Jadi $A_{3\times 3}$ dan $B_{3\times 3}$ adalah bujursangkar ajaib.

b. Diberikan matriks $C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 14 \\ 10 & 13 & 3 & 8 \\ 15 & 12 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 11 \end{pmatrix}$. Elemen-elemen $C_{4\times 4}$ terdiri dari bilangan 1 sampai dengan $n^2 = 4^2 = 16$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $C_{4\times 4}$, semuanya sama yaitu 34. Jadi $C_{4\times 4}$ adalah bujursangkar ajaib.

Berikut ini akan dibahas proses pembentukan bujursangkar ajaib dari dua bujursangkar Latin yang ortogonal. Andaikan $K_{n\times n} = (k_{ij})$ dan $L_{n\times n} = (l_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, adalah dua bujursangkar Latin $n \times n$ dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$, $K_{n\times n} \perp L_{n\times n}$ dan matriks $M_{n\times n} = (m_{ij})$ dengan m_{ij} adalah pasangan "$k_{ij}l_{ij}$". Elemen m_{ij} adalah bilangan berbasis n. Jika m_{ij} dituliskan dalam bilangan basis 10, maka m_{ij} dapat ditulis dengan $m_{ij} = n.k_{ij} + l_{ij}$. Namakanlah matriks baru itu $M'_{n\times n}$. Jika jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $M'_{n\times n}$, semuanya sama, yaitu $\dfrac{n(n^2-1)}{2}$ maka $M'_{n\times n}$ adalah sebuah bujursangkar ajaib. Berikut akan ditunjukkan bahwa jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $M'_{n\times n}$ adalah $\frac{n(n^2-1)}{2}$.

Teorema 4.1

*Jika $K_{n\times n}$ dan $L_{n\times n}$ adalah dua bujursangkar Latin $n \times n$ yang ortogonal dengan elemen dalam **S** = {0, 1, 2, ... , n-1} dan jumlah setiap diagonal dari $K_{n\times n}$ dan $L_{n\times n}$ adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ maka matriks $M'_{n\times n}$ seperti di atas merupakan bujursangkar ajaib.*

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa jumlah setiap baris dan setiap kolom dari $M'_{n\times n}$ semuanya sama. Diketahui bahwa dalam setiap baris dan setiap kolom dari K dan L berisi perulangan dari bilangan 0 sampai dengan $n-1$, serta $m_{ij} = n.k_{ij} + l_{ij}$. Jumlah setiap baris dan setiap kolom dari $M'_{n\times n}$ adalah

$$\begin{aligned}(0+1+2+\ldots+n-1)n+(0+1+2+\ldots+n-1) &= (n+1)(0+1+2+\ldots+n-1)\\ &= (n+1)\left(\frac{n^2-n}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)(n-1)n}{2}\\ &= \frac{n(n^2-1)}{2}\end{aligned}$$

Sekarang akan dibuktikan bahwa jumlah setiap diagonal dari $M'_{n\times n}$ adalah juga $\frac{n(n^2-1)}{2}$. Diketahui bahwa jumlah setiap diagonal dari K dan L adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Jumlah diagonal dari $M'_{n\times n}$ adalah

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\times n\right)+\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)(n+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n^2+n-n-1)}{2}$$
$$=\frac{n(n^2-1)}{2}$$

Telah dibuktikan bahwa jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $M'_{n\times n}$ adalah $\frac{n(n^2-1)}{2}$. Jadi $M'_{n\times n}$ adalah bujursangkar ajaib. ■

Contoh 4.2

a. Diberikan dua bujursangkar Latin 3 × 3 dengan elemen dalam S = {0, 1, 2}, yaitu $K_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ dan $L_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$. Bentuk ortogonal dari $K_{3\times 3}$ dan $L_{3\times 3}$ adalah matriks $M_{3\times 3}=\begin{pmatrix}10&22&01\\02&11&20\\21&00&12\end{pmatrix}$. Elemen m_{ij} adalah bilangan berbasis $n = 3$. Berarti $M_{3\times 3}$ dalam basis 10 menjadi $M'_{3\times 3}=\begin{pmatrix}3&8&1\\2&4&6\\7&0&5\end{pmatrix}$.

Matriks $M'_{3\times 3}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $M'_{3\times 3}$, semuanya sama yaitu $\frac{3(3^2-1)}{2}=\frac{3(8)}{2}=12$. Jadi $M'_{3\times 3}$ adalah bujursangkar ajaib.

b. Diberikan dua bujursangkar Latin 3×3 dengan elemen dalam $S = \{0, 1, 2\}$, yaitu

$G_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $H_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bentuk ortogonal dari $G_{3\times3}$ dan

$H_{3\times3}$ adalah matriks $I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 12 & 00 & 21 \\ 20 & 11 & 02 \\ 01 & 22 & 10 \end{pmatrix}$. Elemen i_{ij} adalah bilangan berbasis

$n = 3$. Berarti $I_{3\times3}$ dalam basis 10 menjadi $I'_{3\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Matriks $I'_{3\times3}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$.

Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $I'_{3\times3}$, semuanya sama yaitu $\frac{3(3^2-1)}{2} = \frac{3(8)}{2} = 12$. Jadi $I'_{3\times3}$ adalah bujursangkar ajaib.

c. Diberikan dua bujursangkar Latin 4×4 dengan elemen dalam $S = \{0, 1, 2, 3\}$,

$J_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $O_{4\times4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Bentuk ortogonal dari $J_{4\times4}$

dan $O_{4\times4}$ adalah matriks $P_{4\times4} = \begin{pmatrix} 03 & 12 & 20 & 31 \\ 21 & 30 & 02 & 13 \\ 32 & 23 & 11 & 00 \\ 10 & 01 & 33 & 22 \end{pmatrix}$. Elemen p_{ij} adalah bilangan

berbasis $n = 4$. Berarti $P_{4\times4}$ dalam basis 10 menjadi $P'_{4\times4} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 13 \\ 9 & 12 & 2 & 7 \\ 14 & 11 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 15 & 10 \end{pmatrix}$.

Matriks $P'_{4\times4}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $P'_{4\times4}$, semuanya sama yaitu $\frac{4(4^2-1)}{2} = \frac{4(15)}{2} = 30$. Jadi $P'_{4\times4}$ adalah bujursangkar ajaib.

d. Diberikan dua bujursangkar Latin 5 × 5 dengan elemen dalam $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$Q_{5\times5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } R_{5\times5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bentuk ortogonal dari $Q_{5\times5}$ dan $R_{5\times5}$ adalah matriks

$$U_{5\times5} = \begin{pmatrix} 00 & 11 & 22 & 33 & 44 \\ 23 & 34 & 40 & 01 & 12 \\ 41 & 02 & 13 & 24 & 30 \\ 14 & 20 & 31 & 42 & 03 \\ 32 & 43 & 04 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

Elemen u_{ij} adalah bilangan berbasis $n = 5$. Berarti $U_{5\times5}$ dalam basis 10 menjadi

$$U'_{5\times5} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 18 & 24 \\ 13 & 19 & 20 & 1 & 7 \\ 21 & 2 & 8 & 14 & 15 \\ 9 & 10 & 16 & 22 & 3 \\ 17 & 23 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Matriks $U'_{5\times5}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $U'_{5\times5}$, semuanya sama yaitu $\frac{5(5^2-1)}{2} = \frac{5(24)}{2} = 60$. Jadi $U'_{5\times5}$ adalah bujursangkar ajaib.

e. Diberikan dua bujursangkar Latin 11×11 dengan elemen dalam S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }, yaitu $V_{11\times11}$ dan $W_{11\times11}$.

$$V_{11\times11} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$W_{11\times11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Bentuk ortogonal dari $V_{11\times11}$ dan $W_{11\times11}$ adalah matriks $X_{11\times11}$. Elemen x_{ij} adalah bilangan berbasis $n = 11$. Berarti $X_{11\times11}$ dalam basis 10 menjadi $X'_{11\times11}$.

$$X_{11\times 11} = \begin{pmatrix} 37 & 48 & 59 & 610 & 70 & 81 & 92 & 103 & 04 & 15 & 26 \\ 710 & 80 & 91 & 102 & 03 & 14 & 25 & 36 & 47 & 58 & 69 \\ 101 & 02 & 13 & 24 & 35 & 46 & 57 & 68 & 79 & 810 & 90 \\ 16 & 27 & 38 & 49 & 510 & 60 & 71 & 82 & 93 & 104 & 05 \\ 89 & 910 & 100 & 01 & 12 & 23 & 34 & 45 & 56 & 67 & 78 \\ 42 & 53 & 64 & 75 & 86 & 97 & 108 & 09 & 110 & 20 & 31 \\ 63 & 74 & 85 & 96 & 107 & 08 & 19 & 210 & 30 & 41 & 52 \\ 28 & 39 & 410 & 50 & 61 & 72 & 83 & 94 & 105 & 06 & 17 \\ 95 & 106 & 07 & 18 & 29 & 310 & 40 & 51 & 62 & 73 & 84 \\ 00 & 11 & 22 & 33 & 44 & 55 & 66 & 77 & 88 & 99 & 1010 \\ 54 & 65 & 76 & 87 & 98 & 109 & 010 & 10 & 21 & 32 & 43 \end{pmatrix}$$

$$X'_{11\times 11} = \begin{pmatrix} 40 & 52 & 64 & 76 & 77 & 89 & 101 & 113 & 4 & 16 & 28 \\ 87 & 88 & 100 & 112 & 3 & 15 & 27 & 39 & 51 & 63 & 75 \\ 111 & 2 & 14 & 26 & 38 & 50 & 62 & 74 & 86 & 98 & 99 \\ 17 & 29 & 41 & 53 & 65 & 66 & 78 & 90 & 102 & 114 & 5 \\ 97 & 109 & 110 & 1 & 13 & 25 & 37 & 49 & 61 & 73 & 85 \\ 46 & 58 & 70 & 82 & 94 & 106 & 118 & 9 & 21 & 22 & 34 \\ 69 & 81 & 93 & 105 & 117 & 8 & 20 & 32 & 33 & 45 & 57 \\ 30 & 42 & 54 & 55 & 67 & 79 & 91 & 103 & 115 & 6 & 18 \\ 104 & 116 & 7 & 19 & 31 & 43 & 44 & 56 & 68 & 80 & 92 \\ 0 & 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 & 84 & 96 & 108 & 120 \\ 59 & 71 & 83 & 95 & 107 & 119 & 10 & 11 & 23 & 35 & 47 \end{pmatrix}$$

Matriks $X'_{11\times 11}$ terdiri dari bilangan 0 sampai dengan $n^2 - 1 = 11^2 - 1 = 120$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $X'_{11\times 11}$, semuanya sama yaitu $\frac{11(11^2-1)}{2} = \frac{11(120)}{2} = 660$. Jadi $X'_{11\times 11}$ adalah bujursangkar ajaib.

Dari bujursangkar ajaib $M'_{n\times n}$ dapat dibentuk bujursangkar ajaib $N_{n\times n}$, dengan cara menambah setiap elemen $M'_{n\times n}$ dengan 1. Jadi dari $M'_{n\times n}$ diperoleh bujursangkar ajaib $N_{n\times n}$ dengan $n_{ij} = m'_{ij} + 1$. Jumlah baris, kolom dan diagonalnya adalah $\frac{n(n^2-1)}{2} + n = \frac{n(n^2-1)}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^3 - n + 2n}{2} = \frac{n^3+n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

Contoh 4.3

a. Dari contoh 4.2.a diperoleh bujursangkar ajaib $M'_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Matriks $A_{3\times 3}$ diperoleh dengan menambah setiap elemen bujursangkar ajaib $M'_{3\times 3}$ dengan 1.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3+1 & 8+1 & 1+1 \\ 2+1 & 4+1 & 6+1 \\ 7+1 & 0+1 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriks $A_{3\times 3}$ terdiri dari bilangan 1 sampai dengan $n^2 = 3^2 = 9$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $A_{3\times 3}$ semuanya sama yaitu $\frac{3(3^2+1)}{2} = \frac{3(10)}{2} = 15$. Jadi $A_{3\times 3}$ adalah bujursangkar ajaib.

b. Dari contoh 4.2.b diperoleh bujursangkar ajaib $I'_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Matriks $B_{3\times 3}$ diperoleh dengan menambah setiap elemen bujursangkar ajaib $I'_{3\times 3}$ dengan 1.

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1+1 & 6+1 & 5+1 \\ 8+1 & 4+1 & 6+1 \\ 3+1 & 2+1 & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriks $B_{3\times3}$ terdiri dari bilangan 1 sampai dengan $n^2 = 3^2 = 9$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $B_{3\times3}$ semuanya sama yaitu $\frac{3(3^2+1)}{2} = \frac{3(10)}{2} = 15$. Jadi $B_{3\times3}$ adalah bujursangkar ajaib.

c. Dari contoh 4.2.c diperoleh bujursangkar ajaib $P'_{4\times4} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 13 \\ 9 & 12 & 2 & 7 \\ 14 & 11 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 15 & 10 \end{pmatrix}$.

Matriks $C_{4\times4}$ diperoleh dengan menambah setiap elemen bujursangkar ajaib $P'_{4\times4}$ dengan 1.

$$C_{4\times4} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+1 & 8+1 & 13+1 \\ 9+1 & 12+1 & 2+1 & 7+1 \\ 14+1 & 11+1 & 5+1 & 0+1 \\ 4+1 & 1+1 & 15+1 & 10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 14 \\ 10 & 13 & 3 & 8 \\ 15 & 12 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

Matriks $C_{4\times4}$ terdiri dari bilangan 1 sampai dengan $n^2 = 4^2 = 16$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $C_{4\times4}$ semuanya sama yaitu $\frac{4(4^2+1)}{2} = \frac{4(17)}{2} = 34$. Jadi $C_{4\times4}$ adalah bujursangkar ajaib.

d. Dari contoh 4.2.d diperoleh bujursangkar ajaib $U'_{5\times5} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 18 & 24 \\ 13 & 19 & 20 & 1 & 7 \\ 21 & 2 & 8 & 14 & 15 \\ 9 & 10 & 16 & 22 & 3 \\ 17 & 23 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Matriks $D_{5\times5}$ diperoleh dengan menambah setiap elemen bujursangkar ajaib $U'_{5\times5}$ dengan 1.

$$D_{5\times5} = \begin{pmatrix} 0+1 & 6+1 & 12+1 & 18+1 & 24+1 \\ 13+1 & 19+1 & 20+1 & 1+1 & 7+1 \\ 21+1 & 2+1 & 8+1 & 14+1 & 15+1 \\ 9+1 & 10+1 & 16+1 & 22+1 & 3+1 \\ 17+1 & 23+1 & 4+1 & 5+1 & 11+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \\ 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 10 & 11 & 17 & 23 & 4 \\ 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriks $D_{5\times5}$ tersusun dari bilangan 1 sampai dengan $n^2 = 5^2 = 25$. Jumlah setiap baris, jumlah setiap kolom dan jumlah setiap diagonal dari $D_{5\times5}$, semuanya sama yaitu $\frac{5(5^2+1)}{2} = \frac{5(26)}{2} = 65$. Jadi $D_{5\times5}$ adalah bujursangkar ajaib.

B. Rancangan Percobaan

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai rancangan percobaan dalam bidang pertanian, farmasi dan industri mobil.

1. Bidang Pertanian

Penerapan bujursangkar Latin dalam bidang pertanian yaitu untuk merancang suatu percobaan. Misalnya seorang petani memiliki sebidang tanah yang tidak diketahui tingkat kesuburannya. Petani ingin menanami tanah itu dengan tanaman jagung. Ternyata ada tiga jenis jagung. Petani bingung manakah diantara ketiga jenis jagung itu yang cocok ditanam sehingga hasil produksinya paling baik?

Untuk menyelesaikan masalah ini maka petani harus melakukan percobaan terhadap ketiga jenis jagung itu. Misalkan ketiga jenis jagung itu adalah j_1, j_2 dan j_3. Agar bujursangkar Latin dapat digunakan maka tanah harus dibagi menjadi tiga baris dan tiga kolom. Anggaplah satu baris lebih subur dari baris lainnya dan satu kolom lebih subur dari kolom lainnya. Bilangan pembagi tanah ini harus sama dengan banyaknya jenis. Bujursangkar Latin menyusun percobaan itu dengan menanam setiap jenis jagung sekali dalam setiap baris dan sekali dalam setiap kolom. Salah satu bentuk rancangan percobaan itu adalah $J_{3\times3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_3 & j_1 & j_2 \\ j_2 & j_3 & j_1 \end{pmatrix}$.

Berarti pada lahan baris ke-1 kolom ke-1 ditanami jagung jenis-1. Pada lahan baris ke-3 kolom ke-2 ditanami jagung jenis-3. Demikian juga untuk lahan yang lain.

Hasil percobaan ketiga jenis jagung dapat dibandingkan, sehingga bisa ditentukan jagung jenis mana yang hasil produksinya paling baik. Misalkan hasil percobaan itu adalah $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 9 \\ 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Hasil total dari jagung jenis-1 adalah $(10 + 15 + 6)_{\text{ton}} = 31_{\text{ton}}$. Hasil total dari jagung jenis-2 adalah $(7 + 9 + 8)_{\text{ton}} = 24_{\text{ton}}$. Hasil total dari jagung jenis-3 adalah $(12 + 4 + 10)_{\text{ton}} = 26_{\text{ton}}$. Hasil total paling banyak yaitu jagung jenis-1. Jadi jagung jenis-1 lebih cocok ditanam dilahan itu.

Muncul masalah baru yaitu pupuk dan insektisida mana yang harus digunakan agar tanaman jagung tumbuh dengan subur dan hasil produksinya baik. Untuk menyelesaikan masalah ini maka perlu diadakan percobaan untuk menguji setiap jenis jagung menggunakan setiap jenis pupuk dan menggunakan setiap jenis insektisida. Misalkan tiga jenis pupuk itu p_1, p_2 dan p_3 serta tiga insektisida itu i_1, i_2 dan i_3. Hal ini sama artinya dengan mendapatkan tiga bujursangkar Latin 3 × 3 yang saling ortogonal. Berdasarkan Teorema 3.3 hanya ada $n - 1 = 3 - 1 = 2$ bujursangkar Latin 3 × 3 yang saling ortogonal. Jadi dalam bentuk bujursangkar Latin 3 × 3 percobaan ketiga unsur itu tidak dapat dirancang.

Untuk mengatasi masalah itu, maka setiap unsur harus ditambah satu jenis. Jika tidak ada jenis yang lain, maka pada jenis-x yang bersangkutan tidak dilakukan percobaan. Salah satu bentuk rancangan percobaan:

- setiap jenis jagung ditanam dalam setiap baris dan setiap kolom adalah

$$J_{4\times4} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_x \\ j_2 & j_1 & j_x & j_3 \\ j_3 & j_x & j_1 & j_2 \\ j_x & j_3 & j_2 & j_1 \end{pmatrix}$$

  Berarti pada lahan baris ke-1 kolom ke-1 ditanami jagung jenis-1. Pada lahan baris ke-3 kolom ke-2 ditanami jagung jenis-x.

- setiap jenis pupuk digunakan dalam setiap baris dan setiap kolom adalah

$$P_{4\times4} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_x \\ p_3 & p_x & p_1 & p_2 \\ p_x & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_2 & p_1 & p_x & p_3 \end{pmatrix}$$

  Berarti pada lahan baris ke-1 kolom ke-1 digunakan pupuk jenis-1. Pada lahan baris ke-3 kolom ke-2 digunakan pupuk jenis-3.

- setiap insektisida digunakan dalam setiap baris dan setiap kolom adalah

$$I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_x \\ i_x & i_3 & i_2 & i_1 \\ i_2 & i_1 & i_x & i_3 \\ i_3 & i_x & i_1 & i_2 \end{pmatrix}$$

Berarti pada lahan baris ke-1 kolom ke-1 digunakan insektisida jenis-1. Pada lahan baris ke-3 kolom ke-2 digunakan insektisida jenis-3.

Rancangan percobaan setiap jagung menggunakan setiap pupuk dan juga menggunakan setiap insektisida adalah matriks $C_{4\times 4}$ yang merupakan bentuk saling ortogonal dari bujursangkar Latin $J_{4\times 4}$, $P_{4\times 4}$ dan $I_{4\times 4}$.

$$C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} j_1p_1i_1 & j_2p_2i_2 & j_3p_3i_3 & j_xp_xi_x \\ j_2p_3i_x & j_1p_xi_3 & j_xp_1i_2 & j_3p_2i_1 \\ j_3p_xi_2 & j_xp_3i_1 & j_1p_2i_x & j_2p_1i_3 \\ j_xp_2i_3 & j_3p_1i_x & j_2p_xi_1 & j_1p_3i_2 \end{pmatrix}$$

Berarti pada lahan baris ke-1 kolom ke-1 ditanam jagung jenis-1, digunakan pupuk jenis-1 dan juga digunakan insektisida jenis-1. Pada lahan baris ke-3 kolom ke-2 ditanam jagung jenis-x, digunakan pupuk jenis-3 dan digunakan insektisida jenis-1.

Untuk mengetahui jagung mana yang harus ditanam, pupuk dan insektisida mana yang akan digunakan maka hasil percobaan $C_{4\times 4}$ harus dibandingkan.

2. Bidang Farmasi

Sebuah perusahaan obat akan memproduksi obat dengan kombinasi dari tiga bahan yaitu decongestant, antihistamine dan pain-reliever. Ada tiga jenis decongestant, tiga jenis antihistamine dan tiga jenis pain-reliever. Akan diuji kombinasi obat itu dalam empat grup A, B, C dan D, dari hari senin sampai dengan hari kamis.

Misalkan huruf a menunjukkan placebo dan huruf b, c dan d menunjukkan tiga jenis yang lain. Maka rancangan percobaan masing-masing bahan dalam empat grup A, B, C dan D, dari hari senin sampai dengan hari kamis, berbentuk bujursangkar Latin 4 × 4 dalam tabel berikut.

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
A	a	b	c	d
B	b	a	d	c
C	c	d	a	b
D	d	c	b	a

Tabel 4.1. Rancangan percobaan decongestant.

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
A	a	b	c	d
B	c	d	a	b
C	d	c	b	a
D	b	a	d	c

Tabel 4.2. Rancangan percobaan antihistamine.

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
A	a	b	c	d
B	d	c	b	a
C	b	a	d	c
D	c	d	a	b

Tabel 4.3. Rancangan percobaan pain-reliever.

Masing-masing bahan sudah dibandingkan dengan placebo. Rancangan percobaan kombinasi obat tersebut merupakan bentuk saling ortogonal dari ketiga bujursangkar Latin 4 × 4 di atas, yaitu

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
A	*aaa*	*bbb*	*ccc*	*ddd*
B	*bcd*	*adc*	*dab*	*cba*
C	*cdb*	*dca*	*abd*	*bac*
D	*dbc*	*cad*	*bda*	*acb*

Tabel 4.3. Rancangan percobaan kombinasi obat.

Posisi-1 menunjukkan decongestant, posisi-2 menunjukkan antihistamine dan posisi-3 menunjukkan pain-reliever.

Rancangan percobaan itu mengatakan bahwa grup B pada hari selasa melakukan uji coba obat dengan kombinasi *adc*. Grup D pada hari rabu melakukan uji coba obat dengan kombinasi *bda*.

Hasil percobaan dapat dibandingkan sehingga dapat dipilih kombinasi dari tiga bahan itu yang paling efektif untuk menyembuhkan suatu penyakit.

3. Bidang Industri

Sebuah perusahaan mobil akan melakukan percobaan gas adiktif a_1, a_2 dan a_3. Percobaan dimaksudkan untuk melihat efek gas adiktif terhadap emisi zat asam nitrogen dalam mobil. Dalam melakukan percobaan digunakan tiga mobil dengan tiga sopir. Misalkan tiga mobil itu m_1, m_2 dan m_3 serta tiga sopir itu s_1, s_2 dan s_3. Rancangan percobaan gas adiktif dalam tiga mobil dan tiga sopir adalah bujursangkar Latin 3 × 3 dalam Tabel 4.5.

	m_1	m_2	m_3
s_1	a_1	a_2	a_3
s_2	a_3	a_1	a_2
s_3	a_2	a_3	a_1

Tabel 4.5. Rancangan percobaan gas adiktif.

Tabel 4.5 mengatakan bahwa sopir s_1 menggunakan mobil m_3 melakukan uji coba gas adiktif a_3.

Andaikan perlakuan adiktif variatif dengan keadaan cuaca c_1, c_2 dan c_3. Maka rancangan percobaan untuk cuaca adalah bujursangkar Latin 3 × 3 dalam Tabel 4.6.

	m_1	m_2	m_3
s_1	c_1	c_2	c_3
s_2	c_2	c_3	c_1
s_3	c_3	c_1	c_2

Tabel 4.6. Rancangan percobaan cuaca

Tabel 4.6 mengatakan bahwa sopir s_1 menggunakan mobil m_3 melakukan uji coba dalam cuaca c_3.

Rancangan percobaan setiap gas adiktif digunakan pada setiap mobil dengan setiap sopir dalam setiap cuaca merupakan bentuk saling ortogonal dari kedua bujursangkar Latin 3 × 3 di atas, yaitu

	m_1	m_2	m_3
s_1	a_1c_1	a_2c_2	a_3c_3
s_2	a_3c_2	a_1c_3	a_2c_1
s_3	a_2c_3	a_3c_1	a_1c_2

Tabel 4.7. Rancangan percobaan gas adiktif dilakukan pada cuaca

Tabel 4.7 mengatakan bahwa sopir s_1 menggunakan mobil m_3 melakukan uji coba gas adiktif a_3 dalam cuaca c_3.

Hasil percobaan dapat dibandingkan, sehingga dapat dilihat manakah gas adiktif yang menghasilkan emisi paling kecil. Gas adiktif ini yang paling bagus digunakan dalam mobil, sehingga mobil tidak cepat rusak.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil setelah mempelajari skripsi bujursangkar Latin yaitu:

1. Persegi panjang Latin $p \times n$ dengan $p < n$ (persegi panjang Latin $n \times q$ dengan $q < n$) dan dengan elemen dalam $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$, dengan menambah baris (kolom) berikutnya secara bertahap. Baris (kolom) tambahan diperoleh dengan mendapatkan SBP dari keluarga $\zeta = \{ \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_n\}$, dengan $\boldsymbol{S}_i = \{$anggota $\boldsymbol{S}$ yang belum digunakan dalam baris (kolom) ke-$i\}$.
2. Persegi panjang Latin $p \times q$ dengan $p < n$ dan $q < n$, dapat diperluas menjadi bujursangkar Latin $n \times n$ jika $L(i) \geq p + q - n$. Baris atau kolom baru harus memuat anggota himpunan $\boldsymbol{P} = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ dan } L(i) = p + q - n\}$.
3. Cara untuk memeriksa apakah t bujursangkar Latin $n \times n$ saling ortogonal yaitu dengan membentuk matriks tunggal $M_{n^2 \times (t+2)}$. Jika tidak ada elemen berbentuk persegi panjang $\begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{matrix}$ maka t bujursangkar Latin $n \times n$ itu saling ortogonal.
4. Untuk $n > 1$ ada paling sedikit n - 1 bujursangkar Latin $n \times n$ yang saling ortogonal.

5. Dari matriks $M_{n\times n}$ yang merupakan bentuk ortogonal dari dua bujursangkar Latin $K_{n\times n}$ dan $L_{n\times n}$, dapat dibentuk bujursangkar ajaib yaitu dengan mengubah elemen m_{ij} = "$k_{ij}l_{ij}$" yang berbasis n menjadi bilangan berbasis 10.
6. Bujursangkar Latin ortogonal dan bujursangkar Latin saling ortogonal dapat digunakan untuk merancang suatu percobaan yang menginginkan setiap perlakuan muncul tepat satu kali dalam setiap baris dan kolom.

B. Saran

Dalam skripsi ini pembahasan mengenai Bujursangkar Latin melalui pendekatan konsep sistem perwakilan-beda. Berikut ini diberikan beberapa hal yang dapat digunakan sebagai topik penulisan yang serupa dengan menggunakan pendekatan konsep yang berbeda:

1. Pembahasan bujursangkar Latin dengan menggunakan konsep field dalam aljabar abstrak.
2. Pembahasan bujursangkar Latin dengan menggunakan konsep konsep proyeksi bidang berhingga dalam geometri.

DAFTAR PUSTAKA

Craig, Robet T. (1969). *Modern Principles of Mathematics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Gilbert, William J. (1976). *Modern Algebra With Applications*. New York: John Wiley & son.

Hall, Marshall JR. (1967). *Combinatorial Theory*. New York: John Wiley & son.

Lidl, Rodolf & Gunter Pilz. (1998). *Applied Abstract Algebra* (second edition). New York: Springer.

Slamet, Sumantri & Hendrik Makaliwe. (1991). *Matematika Kombinatorik*. Jakarta: PT. Elex Media Komputindo.

Bryant, Victor. (1993). *Aspects of Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, Robin J. (1972). *Introduction to Graph Theory*. Edinburgh: Oliver & boyd.

Walpole, Ronald E. (1993). *Pengantar Statistika* (Edisi ke-3). Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama