

GARIS-GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD DALAM SEGITIGA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

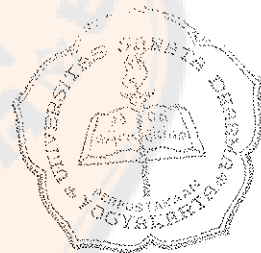


Oleh :

A.M. SARMIYATI

NIM : 971414013

NIRM : 970051120501120012



**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004**

SKRIPSI

**GARIS-GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD
DALAM SEGITIGA**

Oleh:

A.M. SARMIYATI

NIM : 971414013

NIRM : 970051120501120012

Telah disetujui Oleh:

Pembimbing I

tanggal : 17 Mei 2004



Prof. Dra. Mocharti Hadiwijoyo, M.A.

SKRIPSI

**GARIS-GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD
DALAM SEGITIGA**

Dipersiapkan dan disusun oleh:

A.M. SARMIYATI
NIM : 971414013
NIRM : 970051120501120012

Telah dipertahankan dihadapan panitia penguji
pada tanggal 14 juni 2004
dan dinyatakan memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA PENGUJI

Nama lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A.	
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	
Anggota	: Drs. A. Mardjono	

Yogyakarta, 14 Juni 2004

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,



Dr. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**“Orang yang bahagia adalah orang yang dapat menikmati
apa yang telah dan dapat mereka lakukan,
tidak terobsesi
oleh apa yang harus dan seharusnya mereka lakukan”**

**“Tuhan jadikanlah hidupku sebagai tindakan kasihMu,
isilah dan penuhilah aku dengan kebijaksanaanMu”**

Kupersembahkan skripsi ini untuk:

- Allahku,
- Keluargaku,
- Seorang sahabat yang selalu menaruh kasih setiap waktu dan menjadi saudara dalam kesukaran.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 14 juni 2004

Penulis



A. M. Sarmiyati

ABSTRAK

Skripsi dengan judul “GARIS-GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD DALAM SEGITIGA” bertujuan untuk: (1) memahami pengertian garis-garis isogonal dan lingkaran Brocard serta pembuktian teorema-teoremanya, dan (2) dapat menentukan titik symmedian (titik Lemoine), titik Brocard, lingkaran Brocard dan segitiga-segitiga Brocard dalam segitiga yang diketahui.

Metode penulisan yang digunakan adalah studi pustaka, dengan mengacu pada berbagai buku sehingga dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan tercantum dalam daftar pustaka

Dalam suatu segitiga yang telah dilukis garis bagi salah satu sudutnya, dua garis yang melalui titik sudut itu sedemikian hingga sudut-sudut yang dibentuk oleh garis-garis dengan garis bagi sudut kongruen, garis-garis itu disebut garis-garis isogonal. Salah satu garis adalah konjugat isogonal dari garis yang lain. Symmedian-symmedian segitiga merupakan konjugat isogonal dari median-median. Titik potong ketiga symmedian disebut titik symmedian (titik Lemoine). Titik symmedian (titik Lemoine) adalah titik konjugat isogonal dari titik berat. Perbandingan jarak suatu titik yang terletak pada symmedian segitiga ke sisi-sisi disamping symmedian sama dengan perbandingan panjang sisi-sisi tersebut.

Titik potong tiga lingkaran yang dilukis pada segitiga sesuai urutan putaran searah, masing-masing lingkaran memuat satu sisi segitiga sebagai tali busur dan sisi disampingnya sebagai garis singgung disebut titik Brocard. Jika arah positif yang diambil diperoleh titik Brocard pertama, sedang oleh arah negatif diperoleh titik Brocard kedua. Sinar garis-sinar garis yang menghubungkan setiap titik sudut segitiga dengan titik Brocard disebut sinar-sinar Brocard. Sudut yang dibentuk oleh sinar-sinar Brocard dan sisi segitiga sebagai garis singgung disebut sudut Brocard. Ketiga sudut Brocard adalah kongruen.

Lingkaran Brocard adalah lingkaran dengan ujung-ujung diameternya berupa titik symmedian dan titik pusat lingkaran luar segitiga yang diketahui. Kedua titik Brocard segitiga terletak pada lingkaran Brocard. Dalam lingkaran Brocard dapat dilukis segitiga-segitiga Brocard yaitu segitiga Brocard pertama dan segitiga Brocard kedua. Segitiga Brocard pertama adalah segitiga dengan titik sudut-titik sudut sebagai titik potong kedua sinar-sinar Brocard dengan lingkaran Brocard. Segitiga Brocard kedua adalah segitiga dengan titik sudut-titik sudut sebagai titik potong kedua symmedian-symmedian segitiga dengan lingkaran Brocard.

ABSTRACT

The study with title "ISOGONAL LINES AND THE BROCARD POINT IN THE TRIANGLE" was aimed at: (1) understanding isogonal lines and the Brocard circle, and proved theorems about its, (2) understanding and determining the symmedian point or Lemoine point, Brocard Point and Brocard triangles in a given triangle.

This is a literature study with sources taken from relevant geometry books, so in the study can't founded somethings new. The literature which used inserted on the reference list.

In a triangle with an angle bisector through a vertex, lines through this vertex making congruent angles with the angle bisector are called isogonal lines and one is the isogonal conjugate of the other. A conjugate isogonal of a median is called a symmedian. The three symmedian of a triangle are concurrent; the point of concurrency of the symmedians is the symmedian point or the Lemoine point, which is a conjugate isogonal point of the centroid. The ratio of the distances from a point on the symmedian to the adjacent sides of the triangle equals the ratio of the lengths of these sides.

Three circles, each with one side of a triangle as a chord and tangent to an adjacent side, taken in cyclic order around the figure, meet in a point, called a Brocard point, the first one is when the cyclic order is taken counter clockwise and the second one is when the order is taken clockwise. The rays joining each vertex of a triangle with the Brocard points are the Brocard rays. The angle formed by a Brocard ray and the side of the triangle as a tangent is a Brocard angle. The three Brocard angles are congruent.

The circle whose diameter has as endpoint the circumcenter and the symmedian point of a triangle is Brocard circle. The Brocard points are on the Brocard circle. The second intersection points of the Brocard rays with the Brocard circle form a triangle called the first Brocard triangle, while the second intersection points of the symmedians with the Brocard triangle is the second Brocard triangle.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah Bapa yang telah senantiasa melimpahkan rahmat-Nya sehingga skripsi dengan judul “ Garis-Garis Isogonal Dan Titik Brocard Dalam Segitiga “ ini dapat penulis selesaikan.

Skripsi ini disusun dengan maksud untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulisan skripsi ini tidak akan berhasil dengan baik tanpa dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A. selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar, tekun dan penuh perhatian memberikan saran, dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T. selaku dosen pembimbing akademik dan ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan saran selama penulis menempuh studi di pendidikan Matematika.
3. Semua Dosen JPMIPA dan FMIPA yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
4. Staf sekretariat JPMIPA dan MIPA yang membantu penulis selama kuliah sampai penyelesaian skripsi.
5. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas bantuan dan pelayanannya.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

6. Kedua orang tua, kakak-kakak serta keponakan penulis atas segala doa, dukungan dan kasih sayang yang diberikan.
7. Seorang sahabat yang menaruh kasih setiap waktu dan menjadi saudara dalam kesukaran.
8. Mas Nurwanto. Terima kasih atas kepercayaan dan kerjasama selama ini.
9. Teman-teman penulis yang telah mendorong penulis dalam penyusunan skripsi ini : Hanta, Tri, Sisi, Verro, Pur, Esti, Trio, Mistar, Tri Wahyudi, Himawan, Abraham, Een, Putut Sukarsena, Mbak Lusi, Tri hary, Pak Janang, guru-guru SMK WK, serta rekan-rekan P.Mat angkatan 97.
10. Semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini yang belum dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulisan skripsi ini mungkin masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan segala kerendahan hati. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 14 Juni 2004

Penulis



A. M. Sarmiyati

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Perumusan Masalah	2
C. Tujuan Penulisan	2
D. Metode Penulisan	3
E. Manfaat Penulisan	3
F. Sistematika Pembahasan	4
BAB II LANDASAN TEORI	
A. Segitiga-segitiga Kongruen	6



B. Garis-garis Pararel	11
C. Segitiga-segitiga Sebangun	17
D. Garis-garis Istimewa Segitiga	23
D.1. Sumbu Segmen Garis dan Garis Bagi Sudut	24
D.2. Garis-garis Istimewa Segitiga	28
E. Teorema Menelaus dan Teorema Ceva	34
E.1. Teorema Menelaus dan Kebalikan Teorema Menelaus	34
E.2. Teorema Ceva dan Kebalikan Teorema Ceva	38
BAB III : GARIS – GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD	
A. Garis-garis Isogonal	40
B. Symmedian-symmedian Segitiga	45
B.1. Titik Symmedian (Titik Lemoine)	47
B.2. Sifat-sifat Symmedian dan titik Symmedian (Titik Lemoine)	48
C. Titik Brocard Segitiga	56
C.1. Titik Brocard	56
C.2. Sifat-sifat Titik Brocard	59
C.3. Sudut Brocard	62
D. Lingkaran Brocard	63
E. Segitiga-segitiga Brocard	66
E.1. Segitiga Brocard Pertama	66
E.2. Segitiga Brocard Kedua	69

BAB IV : PENUTUP

A. Kesimpulan	71
B. Saran	74
DAFTAR PUSTAKA	76



DAFTAR SYMBOL

$A, B, C, \dots, M, \dots$	: Titik-titik
$a, b, c, \dots, m, \dots$	: Garis-garis
$\overleftrightarrow{AB}$	: Garis yang melalui titik A dan B
$\overline{AB}$	: Segmen garis AB
AB	: Panjang segmen garis AB
$\overrightarrow{AB}$	: Sinar yang berpangkal di A ke B
$\angle ABC$	: Sudut ABC
$m\angle ABC$	: Besar sudut ABC
$\widehat{AB}$	: Busur AB
$m\widehat{AB}$	: Besar busur AB
$\perp$	: Tegak lurus
$\parallel$	: Sejajar
$\triangle ABC$	: Segitiga ABC
$\approx$	: Sebangun
$\cong$	: Kongruen
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\equiv$	: Identik
ω	: Sudut Brocard

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Dua segitiga kongruen	7
Gambar 2.2 Ilustrasi aksioma 2.1	7
Gambar 2.3 Ilustrasi pembuktian teorema 2.1	8
Gambar 2.4 Ilustrasi contoh 2.4	9
Gambar 2.5 Ilustrasi pembuktian teorema 2.2	10
Gambar 2.6 Jajargenjang ABCD	11
Gambar 2.7 Garis a sejajar dengan garis b	12
Gambar 2.8 Sudut-sudut dalam berseberangan	12
Gambar 2.9 Ilustrasi pembuktian teorema 2.3	13
Gambar 2.10 Sudut-sudut sehadap	14
Gambar 2.11 Ilustrasi pembuktian teorema 2.4	14
Gambar 2.12 Ilustrasi pembuktian teorema 2.5	15
Gambar 2.13 Ilustrasi pembuktian teorema 2.6	16
Gambar 2.14 Ilustrasi pembuktian teorema 2.7	17
Gambar 2.15 Dua segitiga sebangun	18
Gambar 2.16 Ilustrasi pembuktian teorema 2.8	18
Gambar 2.17 Ilustrasi pembuktian teorema 2.9	20
Gambar 2.18 Ilustrasi pembuktian teorema 2.11	22
Gambar 2.19 Ilustrasi pembuktian teorema 2.12	23
Gambar 2.20 Sumbu $\overline{AB}$	24

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Gambar 2.21 Ilustrasi pembuktian teorema 2.13i	25
Gambar 2.22 Ilustrasi pembuktian teorema 2.13ii	25
Gambar 2.23 Ilustrasi pembuktian akibat teorema 2.13	26
Gambar 2.24 Garis bagi $\angle BAC$	27
Gambar 2.25 Ilustrasi pembuktian teorema 2.14	27
Gambar 2.26 Garis sumbu, garis tinggi, garis berat, dan garis bagi $\angle BAC$ dalam $\triangle ABC$	29
Gambar 2.27 Ilustrasi pembuktian teorema 2.15	30
Gambar 2.28 Ilustrasi pembuktian teorema 2.16	31
Gambar 2.29 Ilustrasi pembuktian teorema 2.17	32
Gambar 2.30 Ilustrasi pembuktian teorema 2.18	33
Gambar 2.31 Ilustrasi pembuktian teorema 2.19	35
Gambar 2.32 Ilustrasi pembuktian tiga titik kolinear yang terletak pada perpanjangan sisi-sisi $\triangle ABC$	36
Gambar 2.33 Ilustrasi pembuktian teorema 2.20	37
Gambar 2.34 Ilustrasi pembuktian teorema 2.21	38
Gambar 2.35 Ilustrasi pembuktian teorema 2.21 (arahkiri)	39
Gambar. 3.1 Garis-garis isogonal dalam $\triangle ABC$	41
Gambar 3.2 Ilustrasi contoh 3.2	42
Gambar 3.3 Ilustrasi pembuktian teorema 3.1	43
Gambar 3.4 Median dan symmedian dalam $\triangle ABC$	46
Gambar 3.5 Ilustrasi pembuktian teorema 3.2	47
Gambar 3.6 Ilustrasi contoh 3.4	48

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Gambar 3.7	Ilustrasi pembuktian teorema 3.3	49
Gambar 3.8	Ilustrasi pembuktian teorema 3.4	51
Gambar 3.9	Ilustrasi pembuktian teorema 3.6	54
Gambar 3.10	Ilustrasi pembuktian teorema 3.7	57
Gambar 3.11	Ilustrasi pembuktian teorema 3.7 (arah negatif)	58
Gambar 3.12	Ilustrasi pembuktian teorema 3.8	60
Gambar 3.13	Ilustrasi pembuktian teorema 3.9	61
Gambar 3.14	Lingkaran Brocard ΔABC	63
Gambar 3.15	Ilustrasi pembuktian teorema 3.10	64
Gambar 3.16	Ilustrasi pembuktian teorema 3.10	65
Gambar 3.17	Segitiga Brocard pertama	67
Gambar 3.18	Ilustrasi pembuktian teorema 3.12	69
Gambar 3.19	Segitiga Brocard kedua	70
Gambar 3.20	Ilustrasi pembuktian teorema 3.14	71
Gambar 4.1	Titik Symmedian, titik Brocard, lingkaran Brocard dan Segitiga-Segitiga Brocard dalam ΔABC	74

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Salah satu mata pelajaran wajib di sekolah adalah matematika, dan geometri sebagai salah satu cabang dari matematika tentu dipelajari sejak Sekolah Dasar (SD) sampai Sekolah Menengah. Oleh karena itu, pada umumnya masyarakat luas terutama pelajar telah mengenal adanya titik, garis, persegi panjang, segitiga, lingkaran, balok, kerucut, dan sebagainya.

Pengetahuan geometri yang diperoleh dari Sekolah Dasar (SD) sampai sekolah menengah tersebut dipelajari lagi secara lebih luas di perguruan tinggi, antara lain dalam Geometri Euclides. Bukunya yang disebut “Euclid’s Element” atau “Unsur-unsur Euclides” membahas segitiga, segi empat, segi banyak beraturan, lingkaran, limas, kelima bidang banyak beraturan, dan sebagainya. Adanya bangun segi empat, segi banyak beraturan, lingkaran, limas, dan kelima bidang banyak beraturan tersebut tidak terlepas dari bangun segitiga, karena bangun-bangun itu dapat dibentuk dari segitiga-segitiga. Kenyataan ini menunjukkan bahwa segitiga mempunyai peranan yang penting dalam geometri.

Dalam perkembangan geometri, ditemukan gagasan-gagasan dari para ahli geometri yang telah berhasil menyelesaikan dasar-dasar geometri yang melibatkan segitiga dan lingkaran. Misalnya: dapat dilukis lingkaran dalam maupun lingkaran luar suatu segitiga. Hal ini mendorong adanya penelitian-penelitian lanjutan yang memperluas ruang lingkup pembahasan, salah satunya yaitu segitiga yang

melibatkan titik-titik, garis-garis, dan lingkaran-lingkaran. Banyak titik-titik, garis-garis, dan lingkaran-lingkaran telah ditemukan dan diberi nama sesuai dengan penemunya, antara lain oleh Gergonne, Simson, Euler, Brocard, Lemoine, dan sebagainya.

Bagaimana hubungan antara segitiga dengan titik-titik, garis-garis, dan lingkaran-lingkaran khususnya yang ditemukan oleh Emile Lemoine dan Henry Brocard? Bagaimana melukis titik-titik, garis-garis, dan lingkaran Brocard dalam segitiga yang diketahui? Hal inilah yang melatar belakangi penulis mengapa tertarik mengambil topik ini.

B. Perumusan Masalah

Pokok-pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah :

1. Apakah yang disebut garis-garis isogonal segitiga?
2. Bagaimana menentukan titik symmedian (titik Lemoine) segitiga?
3. Bagaimana menentukan titik Brocard segitiga?
4. Apakah yang disebut lingkaran Brocard?
5. Bagaimana menentukan segitiga-segitiga Brocard dalam lingkaran Brocard?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah sebagai berikut :

1. Memahami pengertian garis-garis isogonal dan pembuktian teorema-teorema tentang garis-garis isogonal,
2. Dapat menentukan titik symmedian (titik Lemoine) dalam segitiga,

3. Dapat menentukan titik Brocard dalam segitiga yang diketahui,
4. Memahami pengertian lingkaran Brocard dan pembuktian teorema-teorema tentang lingkaran Brocard,
5. Dapat menentukan segitiga-segitiga Brocard dalam lingkaran Brocard.

D. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan adalah metode studi pustaka, sehingga dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan tercantum dalam daftar pustaka.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diperoleh setelah mempelajari topik ini adalah mengenal adanya garis-garis isogonal, konjugat-konjugat isogonal, titik symmedian (titik Lemoine), titik Brocard, lingkaran Brocard dan segitiga-segitiga Brocard dan mempunyai gambaran tentang garis-garis isogonal, konjugat-konjugat isogonal, titik symmedian, titik Brocard, lingkaran Brocard dan segitiga-segitiga Brocard sehingga dapat melukiskannya dalam segitiga yang diketahui. Disamping itu, mengetahui hubungan antara garis-garis isogonal, konjugat-konjugat isogonal, symmedian, titik symmedian, titik Brocard, lingkaran Brocard, dan segitiga-segitiga Brocard.

Khususnya bagi calon guru, dengan mempelajari topik ini akan mempunyai tambahan bekal dalam mengajar geometri.

F. Sistematika Pembahasan

Adapun sistematika pembahasan dalam tulisan ini adalah :

BAB I PENDAHULUAN

- A. Latar belakang
- B. Perumusan Masalah
- C. Tujuan Penulisan
- D. Metode Penulisan
- E. Manfaat penulisan
- F. Sistematika Pembahasan

BAB II LANDASAN TEORI

- A. Segitiga-segitiga Kongruen
- B. Garis-garis Paralel
- C. Segitiga-segitiga sebangun
- D. Garis-garis Istimewa dalam Segitiga
 - D.1. Sumbu dari Segmen Garis dan Garis Bagi Suatu Sudut
 - D.2. Garis-garis Istimewa dalam Segitiga
- E. Teorema Menelaus dan Teorema Ceva
 - E.1. Teorema Menelaus dan Kebalikan Teorema Menelaus
 - E.2. Teorema Ceva dan Kebalikan Teorema Ceva

BAB III Garis-garis Isogonal dan Titik Brocard

- A. Garis-garis isogonal
- B. Symmedian-symmedian segitiga

B.1. Titik Symmedian (titik Lemoine)

B.2. Sifat-sifat Symmedian dan Titik Symmedian (Titik Lemoine)

B.2.1. Sifat-sifat Symmedian

B.2.2. Sifat-sifat Titik Symmedian (Titik Lemoine)

C. Titik Brocard dalam Segitiga

C.1. Titik Brocard

C.2. Sifat-sifat Titik Brocard

C.3. Sudut Brocard

D. Lingkaran Brocard

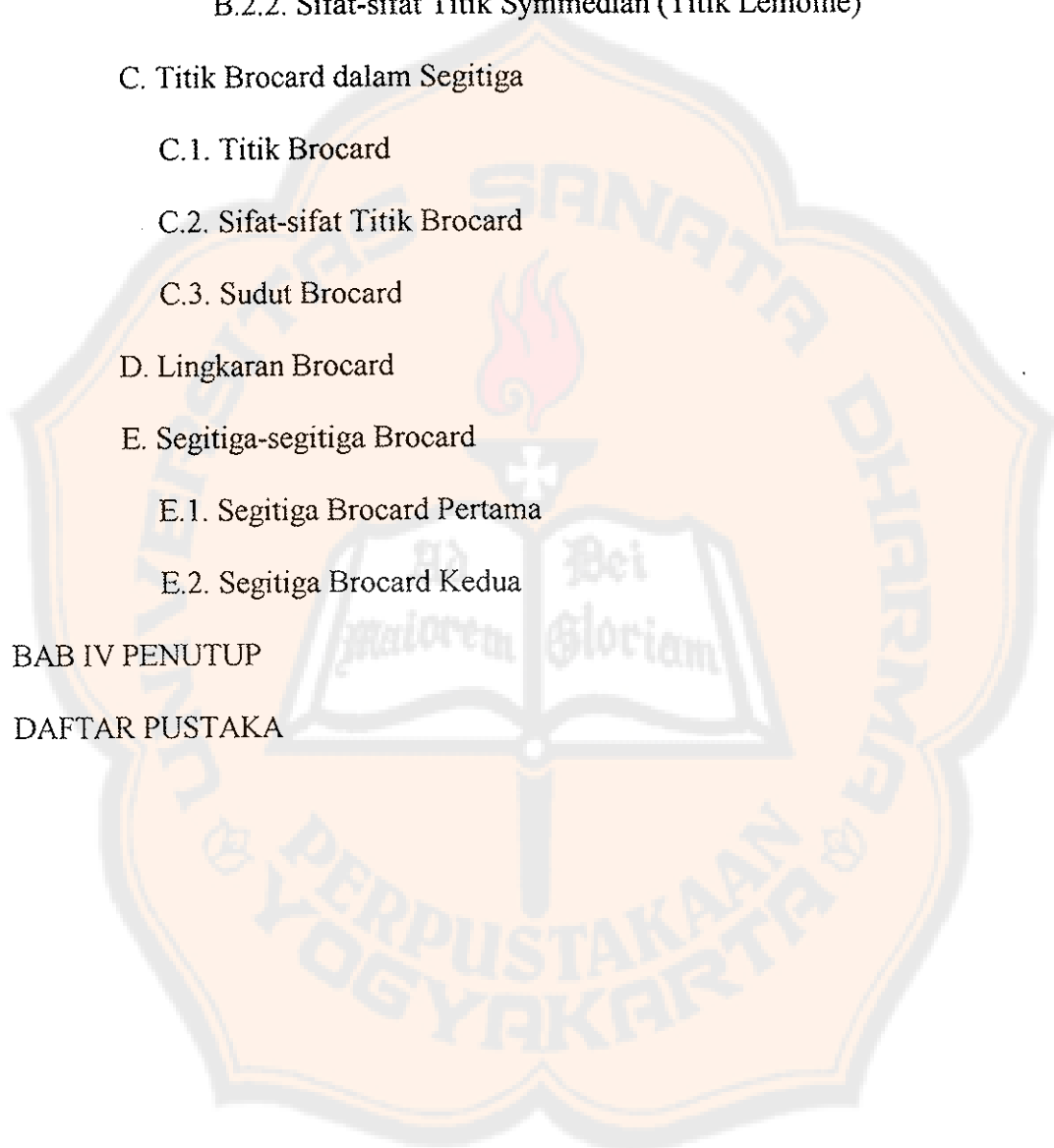
E. Segitiga-segitiga Brocard

E.1. Segitiga Brocard Pertama

E.2. Segitiga Brocard Kedua

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA



BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai untuk mempelajari teori-teori selanjutnya. Definisi-definisi, aksioma-aksioma, teorema-teorema dan contoh-contoh yang berhubungan dengan segmen garis dan segitiga dibagi dalam beberapa sub pokok bahasan.

A. Segitiga-segitiga Kongruen

Definisi 2.1 (Segmen-segmen garis yang kongruen)

Dua segmen garis disebut kongruen jika dan hanya jika segmen-segmen garis tersebut mempunyai panjang yang sama.

Contoh 2.1: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ jika dan hanya jika $AB = CD$

Definisi 2.2 (Sudut-sudut yang kongruen)

Dua sudut disebut kongruen jika dan hanya jika sudut-sudut tersebut mempunyai ukuran derajat yang sama

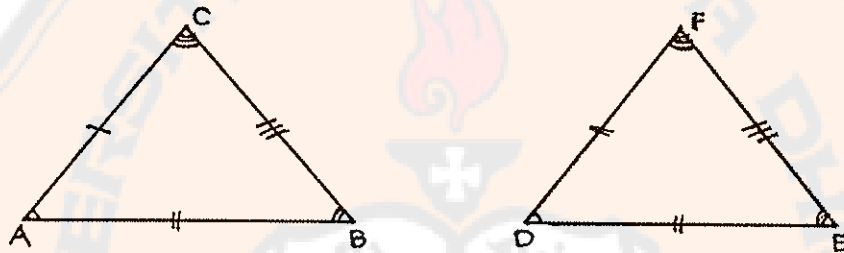
Contoh 2.2 : $\angle ABC \cong \angle DEF$ jika dan hanya jika $m\angle ABC = m\angle DEF$

Definisi 2.3 (Segitiga-segitiga Kongruen)

Dua segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi disebut segitiga-segitiga kongruen jika dan hanya jika sisi-sisi yang berkorespondensi dan sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen.

Contoh 2.3 :

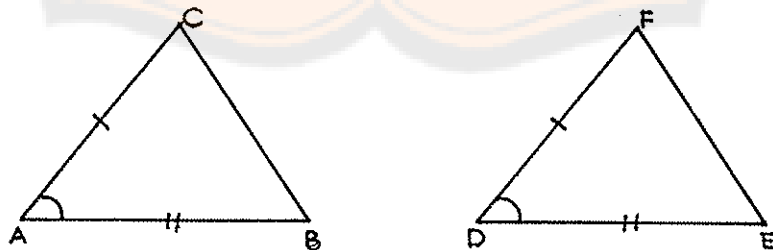
Diketahui $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi, yaitu : $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ berturut-turut berkorespondensi dengan $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$ dan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ berturut-turut berkorespondensi dengan $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{DF}$. Dalam Gambar 2.1: $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle C \cong \angle F$; $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ dan $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, menurut definisi segitiga-segitiga kongruen dikatakan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



Gambar 2.1 . Dua segitiga kongruen

Aksioma 2.1 (sisi-sudut-sisi)

Dua segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi, jika dua sisi pada segitiga pertama dan sudut yang diapitnya kongruen dengan dua sisi dan sudut yang diapit yang berkorespondensi pada segitiga kedua, maka segitiga-segitiga itu kongruen.



Gambar 2.2. Ilustrasi aksioma 2.1

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ karena $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ dan $\angle CAB \cong \angle FDE$

Teorema 2.1 (sudut-sisi-sudut)

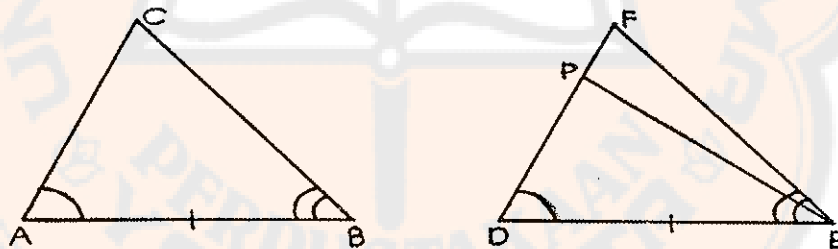
Diketahui dua segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi, jika dua sudut pada segitiga pertama dan sisi yang terletak diantaranya kongruen dengan dua sudut dan sisi diantara dua sudut yang berkorespondensi pada segitiga kedua maka segitiga-segitiga tersebut kongruen.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ yang berkorespondensi; $\angle CAB \cong \angle FDE$;

$\angle CBA \cong \angle FED$; dan $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

Dibuktikan : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Bukti :



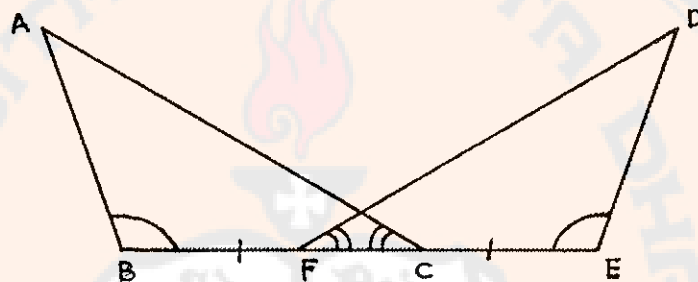
Gambar 2.3. Ilustrasi pembuktian teorema 2.1

Diasumsikan $\overline{AC}$ tidak kongruen dengan $\overline{DF}$, dalam hal ini $AC < DF$. Oleh karena $AC < DF$, maka terdapat satu titik P pada $\overline{DF}$ sedemikian hingga $\overline{AC} \cong \overline{DP}$. Dengan menggunakan aksioma 2.1 (sisi-sudut-sisi) maka $\triangle ABC \cong \triangle DEP$ dan diperoleh $\angle CBA \cong \angle PED$.

Selanjutnya diketahui $\angle CBA \cong \angle FED$, dengan menggunakan sifat transitif diperoleh $\angle PED \cong \angle FED$. Terdapat pertentangan, maka $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Oleh karena $\overline{AC} \cong \overline{DF}$; $\angle CAB \cong \angle FDE$ dan $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (aksioma 2.1).

Contoh 2.4:

Diketahui $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ seperti dalam gambar 2.4. Jika $\angle ABC \cong \angle DEF$; $\overline{BF} \cong \overline{EC}$ dan $\angle ACB \cong \angle DFE$, buktikan bahwa $\overline{AB} \cong \overline{DE}$!



Gambar 2.4. Ilustrasi contoh 2.4

Penyelesaian :

Diketahui bahwa $\angle ABC \cong \angle DEF$; $\angle ACB \cong \angle DFE$; dan $\overline{BF} \cong \overline{EC}$. Oleh karena $\overline{BF} \cong \overline{EC}$ maka $BF = EC$. Dengan menggunakan sifat penjumlahan pada persamaan: $BF + FC = EC + FC$. Dari gambar 2.4: $BF + FC = BC$ dan $EC + FC = EF$, sedemikian hingga $BC = EF$ dan diperoleh $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Menurut teorema 2.1 (sudut-sisi-sudut) maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Jadi $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Teorema 2.2 (sisi-sisi-sisi)

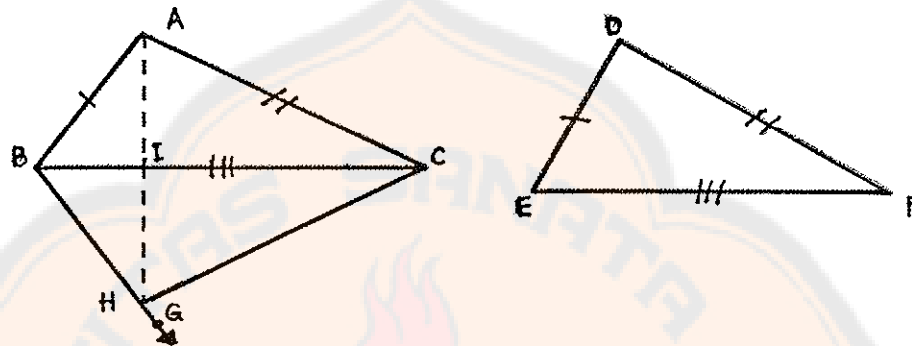
Diketahui dua segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi, jika ketiga pasangan sisi-sisi yang berkorespondensi pada kedua segitiga kongruen maka segitiga-segitiga tersebut kongruen.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ yang berkorespondensi. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ dan

$$\overline{AC} \cong \overline{DF}$$

Dibuktikan : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Bukti :



Gambar 2.5. Ilustrasi pembuktian teorema 2.2

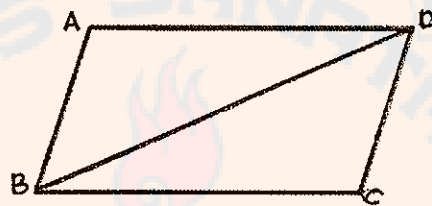
Dilukis sinar $\overline{BG}$ dengan G terletak dihadapan pihak $\overline{BC}$ dari A sedemikian hingga $m\angle CBG = m\angle DEF$ maka $\angle CBG \cong \angle DEF$. Kemudian ditempatkan titik H pada $\overline{BG}$ sedemikian hingga $DE = BH$, dan diperoleh $\overline{DE} \cong \overline{BH}$. Oleh karena $\overline{BC} \cong \overline{EF}$; $\angle CBH \cong \angle DEF$ dan $\overline{BH} \cong \overline{DE}$ maka $\triangle HBC \cong \triangle DEF$, dan diperoleh $\overline{DF} \cong \overline{HC}$. Selanjutnya : $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ dan $\overline{DE} \cong \overline{BH}$, serta $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ dan $\overline{DF} \cong \overline{HC}$ dengan menggunakan sifat transitif diperoleh berturut-turut $\overline{AB} \cong \overline{BH}$ dan $\overline{AC} \cong \overline{HC}$.

$\overline{AH}$ memotong $\overline{BC}$, misalnya di titik I sehingga diperoleh $\triangle ABH$ dan $\triangle ACH$ sama kaki. $\angle BAH \cong \angle BHA$ atau $m\angle BAH = m\angle BHA$ dan $\angle CAH \cong \angle CHA$ atau $m\angle CAH = m\angle CHA$. Dengan demikian didapat $m\angle BAH + m\angle CAH = m\angle BHA + m\angle CHA$; sehingga $m\angle BAC = m\angle BHC$ atau $\angle BAC \cong \angle BHC$. Menurut aksioma 2.1 (sisi-sudut-sisi) maka $\triangle ABC \cong \triangle HBC$.

Telah dibuktikan bahwa $\triangle HBC \cong \triangle DEF$ dan $\triangle ABC \cong \triangle HBC$, maka $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. Jadi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (terbukti).

Contoh 2.5 :

Suatu jajargenjang ABCD (gambar 2.6) dengan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{CB}$,buktikan bahwa $\angle BAD \cong \angle BCD$!



Gambar 2.6. Jajargenjang ABCD

Penyelesaian :

Diketahui : jajargenjang ABCD dengan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

Dibuktikan : $\angle BAD \cong \angle BCD$

Bukti :

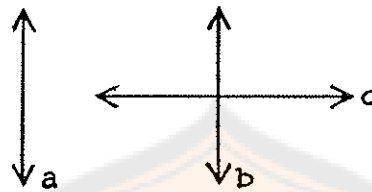
Dilukis $\overline{BD}$ sehingga diperoleh $\overline{BD} \cong \overline{BD}$. Oleh karena $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ dan $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ maka $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (sisi-sisi-sisi). Jadi $\angle BAD \cong \angle BCD$ (terbukti).

B. Garis-garis Paralel

Definisi 2.4 (Dua Garis Paralel)

Dua garis disebut parallel jika dan hanya jika garis-garis tersebut sebidang dan tidak berpotongan.

Dalam gambar 2.7, garis b dan garis c berpotongan, garis a dan garis b tidak berpotongan, maka dikatakan garis a paralel dengan garis b.



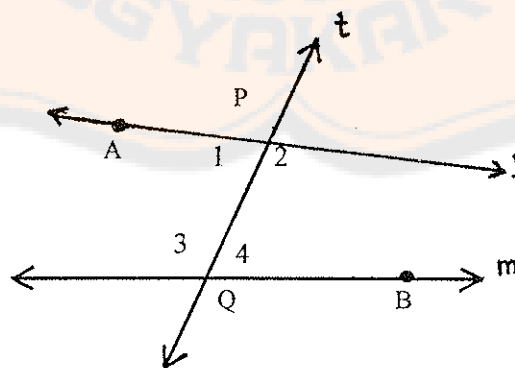
Gambar 2.7. Garis a paralel dengan garis b

Definisi 2.5 (Garis Transversal)

Suatu garis disebut transversal dari dua garis yang sebidang jika dan hanya jika garis tersebut memotong kedua garis itu di dua titik yang berlainan.

Definisi 2.6 (Sudut-sudut dalam berseberangan)

Misalkan dua garis l dan m dipotong oleh suatu transversal t berturut-turut di titik P dan Q. Ditentukan titik A terletak pada garis l dan titik B pada garis m sedemikian hingga A dan B berada pada pihak-pihak yang berlawanan dari t. Dalam hal ini $\angle PQB$ dan $\angle QPA$ disebut sudut-sudut dalam berseberangan yang dibentuk oleh garis l dan m dengan transversal t.



Gambar 2.8. Sudut-sudut dalam berseberangan

Menurut definisi sudut-sudut dalam berseberangan, pada gambar 2.8 maka $\angle 1$ dan $\angle 4$ serta $\angle 2$ dan $\angle 3$ disebut sudut-sudut dalam berseberangan.

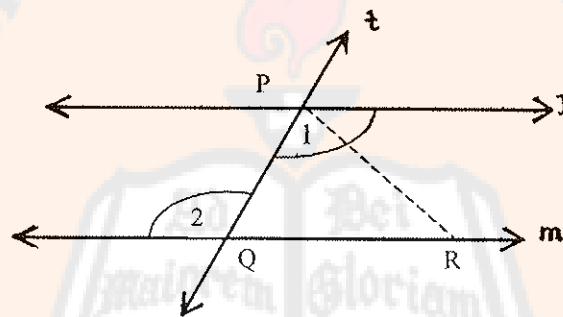
Teorema 2.3

Jika dua garis dipotong oleh transversal, dan jika salah satu pasangan sudut-sudut dalam berseberangan kongruen maka garis-garis itu paralel.

Diketahui : garis l dan m dengan transversal t , $\angle 1 \cong \angle 2$

Dibuktikan : $l \parallel m$

Bukti :



Gambar 2.9. Ilustrasi pembuktian teorema 2.3

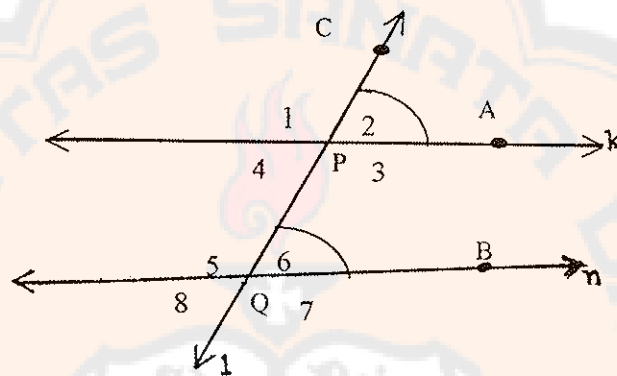
Diasumsikan bahwa garis l tidak paralel dengan garis m , dengan demikian l berpotongan dengan m di titik R sehingga terbentuk $\triangle PQR$. $\angle 2$ merupakan sudut luar dari $\triangle PQR$ di titik Q , maka $m\angle 2 > m\angle QPR$. Terdapat pertentangan dengan yang diketahui. Jadi $l \parallel m$ (terbukti).

Definisi 2.7 (Sudut-sudut Sehadap)

Misalkan dua garis k dan n dipotong oleh suatu transversal l berturut-turut di titik P dan Q . Ditentukan titik A pada k dan titik B pada n sedemikian hingga A dan B terletak pada pihak yang sama terhadap l . Ditentukan pula titik C

pada l sedemikian hingga C dan B terletak pada pihak yang berlawanan terhadap k . Dalam hal ini $\angle CPA$ dan $\angle PQB$ disebut sudut-sudut sehadap yang dibentuk oleh garis k dan n dengan transversal l .

Menurut definisi sudut-sudut sehadap, pada gambar 2.10 maka $\angle 2$ dan $\angle 6$ disebut sudut-sudut sehadap, demikian pula $\angle 4$ dan $\angle 8$; $\angle 1$ dan $\angle 5$; serta $\angle 3$ dan $\angle 7$ disebut sudut-sudut sehadap.



Gambar 2.10. Sudut-sudut sehadap

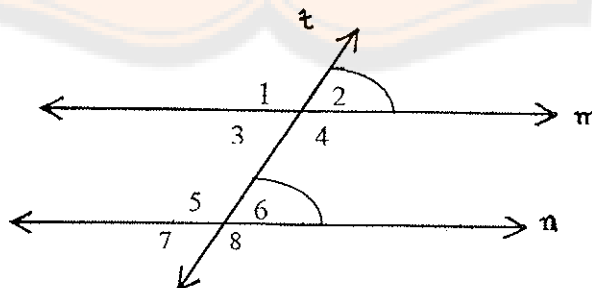
Teorema 2.4

Jika dua garis dipotong oleh suatu transversal, dan jika salah satu pasangan sudut-sudut sehadap kongruen maka ketiga pasangan sudut-sudut sehadap lainnya juga kongruen.

Diketahui : garis m dan n yang dipotong oleh transversal t , $\angle 2 \cong \angle 6$

Dibuktikan: $\angle 4 \cong \angle 8$; $\angle 1 \cong \angle 5$ dan $\angle 3 \cong \angle 7$

Bukti :



Gambar 2.11. Ilustrasi pembuktian teorema 2.4

Dipandang $\angle 2$ dan $\angle 4$; $\angle 6$ dan $\angle 8$ maka $\angle 4$ dan $\angle 8$ berturut turut merupakan suplemen dari $\angle 2$ dan $\angle 6$. Oleh karena $\angle 2 \cong \angle 6$ maka $\angle 4 \cong \angle 8$.

Dipandang, $\angle 1$ dan $\angle 2$ serta $\angle 5$ dan $\angle 6$ maka $\angle 1$ dan $\angle 5$ berturut-turut merupakan suplemen dari $\angle 2$ dan $\angle 6$. Oleh karena $\angle 2 \cong \angle 6$ maka $\angle 1 \cong \angle 5$.

Dipandang $\angle 1$ dan $\angle 3$ serta $\angle 5$ dan $\angle 7$ maka $\angle 3$ dan $\angle 7$ berturut-turut suplemen dari $\angle 1$ dan $\angle 5$. Telah dibuktikan bahwa $\angle 1 \cong \angle 5$, maka $\angle 3 \cong \angle 7$. Jadi ketiga pasangan sudut-sudut sehadap yang lain kongruen.

Teorema 2.5

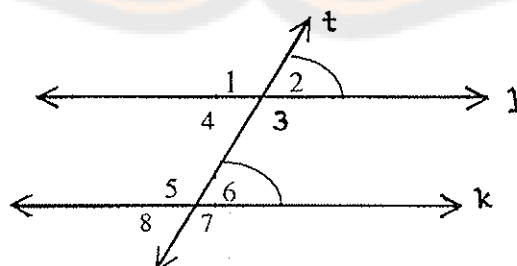
Jika dua garis dipotong oleh suatu transversal dan jika salah satu pasangan sudut-sudut sehadap kongruen maka garis-garis tersebut paralel.

Diketahui : garis l dan k dipotong oleh transversal t , $\angle 2 \cong \angle 6$

Dibuktikan : $l \parallel k$

Bukti :

Perpotongan garis-garis dengan transversal mengakibatkan terbentuknya sudut-sudut bertolak belakang. $\angle 2$ dan $\angle 4$ adalah sudut-sudut bertolak belakang, maka $\angle 2 \cong \angle 4$. Oleh karena $\angle 2 \cong \angle 4$ dan $\angle 2 \cong \angle 6$ maka $\angle 4 \cong \angle 6$ (sudut-sudut dalam berseberangan yang kongruen). Menurut teorema 2.3 maka $l \parallel k$. Jadi kedua garis paralel (terbukti).



Gambar 2.12. Ilustrasi pembuktian teorema 2.5

Aksioma 2.2 (Postulat Paralel)

Diketahui suatu garis dan suatu titik tidak pada garis tersebut, terdapat hanya satu garis yang melalui titik itu dan paralel dengan garis yang diketahui.

Teorema 2.6

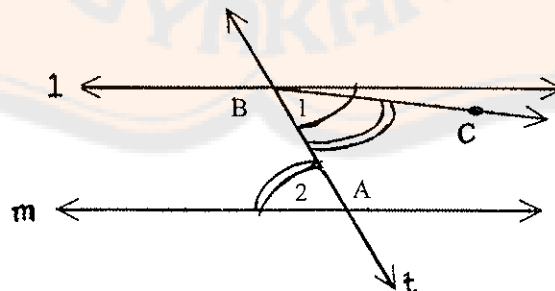
Jika dua garis paralel dipotong oleh suatu transversal, maka sudut-sudut dalam berseberangan kongruen.

Diketahui : garis $l \parallel m$ yang dipotong transversal t dan membentuk sudut-sudut dalam berseberangan.

Dibuktikan : $\angle 1 \cong \angle 2$

Bukti :

Diasumsikan $\angle 1$ dan $\angle 2$ tidak kongruen, dalam hal ini $m\angle 1 > m\angle 2$ sehingga dapat dilukis sinar $\overrightarrow{BC}$ sedemikian hingga $\angle ABC \cong \angle 2$. Menurut teorema 2.3 maka $\overrightarrow{BC} \parallel m$, dengan $\overrightarrow{BC} \neq l$. Selanjutnya diperoleh dua garis yang melalui B paralel dengan m yaitu $\overrightarrow{BC}$ dan l . Hal ini bertentangan dengan postulat paralel, sehingga $\overrightarrow{BC}$ sama dengan garis l . Jadi $\angle 1 \cong \angle 2$ (terbukti).



Gambar 2.13. Ilustrasi pembuktian teorema 2.6

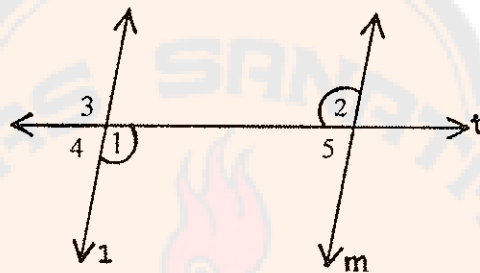
Teorema 2.7

Jika dua garis paralel dipotong oleh suatu transversal, maka setiap pasangan sudut-sudut sehadap kongruen.

Diketahui : garis $l \parallel m$ dipotong oleh transversal t

Dibuktikan : setiap pasangan sudut-sudut sehadap kongruen.

Bukti :



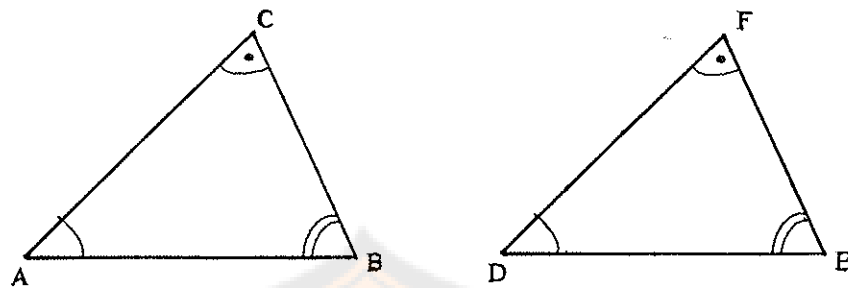
Gambar 2.14. Ilustrasi pembuktian teorema 2.7

Dua garis paralel dipotong transversal t , maka diperoleh $\angle 1 \cong \angle 2$ (teorema 2.6). $\angle 4$ dan $\angle 5$ berturut-turut merupakan suplemen dari $\angle 1$ dan $\angle 2$ maka $\angle 4 \cong \angle 5$. Selanjutnya $\angle 1 \cong \angle 3$ (sudut-sudut bertolak belakang). Telah dibuktikan $\angle 1 \cong \angle 2$ dan, $\angle 1 \cong \angle 3$ diperoleh $\angle 2 \cong \angle 3$. Jadi terbukti bahwa setiap pasangan sudut-sudut sehadap kongruen.

C. Segitiga-segitiga Sebangun

Definisi 2.8 (segitiga-segitiga sebangun)

Diketahui dua segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi, Apabila sudut-sudut yang berkorespondensi pada kedua segitiga kongruen dan sisi-sisi yang berkorespondensi sebanding, kedua segitiga itu disebut sebangun.



Gambar 2.15. Dua segitiga sebangun

Diketahui $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dengan sisi-sisi dan sudut-sudut yang berkorespondensi. $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$ dan $\angle C \cong \angle F$ adalah sudut-sudut berkorespondensi yang kongruen, dan $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ adalah sisi-sisi berkorespondensi yang sebanding, maka dikatakan bahwa $\triangle ABC \approx \triangle DEF$.

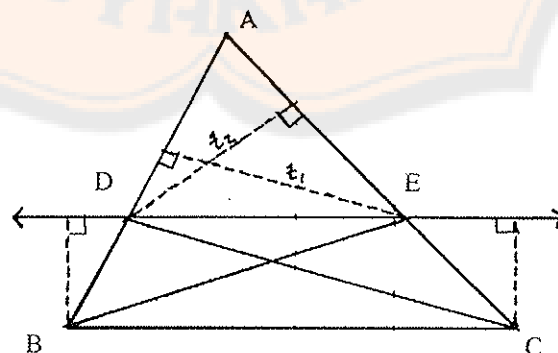
Teorema 2.8

Jika suatu garis paralel dengan salah satu sisi pada segitiga dan memotong dua sisi lainnya di dua titik yang berlainan maka garis tersebut membagi sisi-sisi ke dalam segmen-segmen yang sebanding.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Dibuktikan : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Bukti :



Gambar 2.16. Ilustrasi pembuktian teorema 2.8

Dipandang $\triangle ADE$ dengan $\overline{AD}$ sebagai alas dan $\triangle BDE$ dengan $\overline{BD}$ sebagai alas. Garis tinggi kedua segitiga adalah sama yaitu t_1 sehingga :

$$\frac{\text{luas}\triangle ADE}{\text{luas}\triangle BDE} = \frac{1/2 \cdot AD \cdot t_1}{1/2 \cdot BD \cdot t_1} = \frac{AD}{BD} \dots\dots\dots 1)$$

Dipandang $\triangle ADE$ dengan $\overline{AE}$ sebagai alas dan $\triangle DEC$ dengan $\overline{EC}$ sebagai alas. Garis tinggi kedua segitiga adalah sama yaitu t_2 sehingga :

$$\frac{\text{luas}\triangle ADE}{\text{luas}\triangle DEC} = \frac{1/2 \cdot AE \cdot t_2}{1/2 \cdot EC \cdot t_2} = \frac{AE}{EC} \dots\dots\dots 2)$$

Dipandang $\triangle BDE$ dan $\triangle DEC$ dengan $\overline{DE}$ sebagai alas kedua segitiga tersebut. Diketahui bahwa $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, yang berarti bahwa garis tinggi kedua segitiga mempunyai panjang yang sama. Oleh karena itu $\text{luas}\triangle BDE = \text{luas}\triangle DEC \dots\dots\dots 3)$

Dari persamaan 1), 2) dan 3) maka :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\text{luas}\triangle ADE}{\text{luas}\triangle BDE} = \frac{\text{luas}\triangle ADE}{\text{luas}\triangle DEC} = \frac{AE}{EC}, \text{ sehingga diperoleh } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (terbukti)}$$

Akibat teorema 2.8

Jika suatu garis paralel dengan salah satu sisi segitiga , memotong dua sisi lainnya di dua titik yang berlainan maka garis tersebut membagi sisi-sisi ke dalam segmen-segmen yang sebanding dengan sisi-sisi tersebut.

Denga menggunakan Gambar 2.16, akibat teorema 2.8 menyatakan

$$\text{perbandingan : } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ atau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

Teorema 2.9

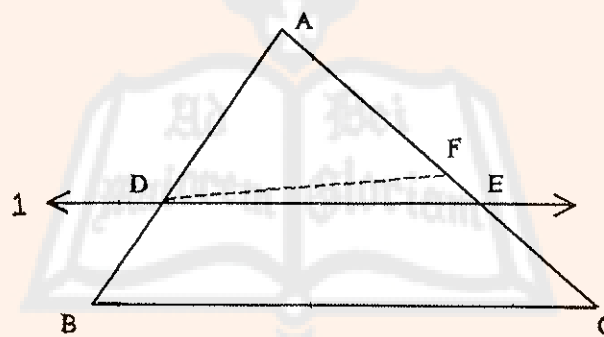
Jika suatu garis memotong dua sisi segitiga di dua titik yang berlainan sedemikian hingga garis tersebut membagi sisi-sisi ke dalam segmen-segmen yang sebanding dengan sisi-sisi tersebut maka garis itu paralel dengan sisi yang ketiga.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan garis l memotong sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ berturut-turut di titik D

dan E sedemikian hingga $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Dibuktikan : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Bukti :



Gambar 2.17. Ilustrasi pembuktian teorema 2.9

Dengan menggunakan postulat paralel, terdapat satu garis tunggal yang melalui D dan paralel dengan $\overline{BC}$. Garis tersebut memotong $\overline{AC}$ di titik F. Menurut akibat teorema 2.8 : $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Diketahui pula : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ dan telah

dibuktikan $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Selanjutnya $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AC}$ sedemikian hingga $AF = AE$. Oleh

karena $AF = AE$ maka titik F sama dengan titik E. Jadi $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (terbukti).

Berikut ini disajikan salah satu teorema tentang segitiga-segitiga sebangun yang tidak dibuktikan, karena dalam segitiga yang ketiga sudutnya kongruen tentu ketiga sisinya sebanding.

Teorema 2.10 (sudut-sudut-sudut)

Diketahui korespondensi antara dua segitiga, jika sudut-sudut yang berkorespondensi pada kedua segitiga kongruen maka segitiga-segitiga itu sebangun.

Akibat teorema 2.10

Diketahui korespondensi dua segitiga, jika dua pasangan sudut-sudut yang berkorespondensi pada kedua segitiga kongruen maka segitiga-segitiga itu sebangun.

Teorema 2.11 (sisi-sudut-sisi)

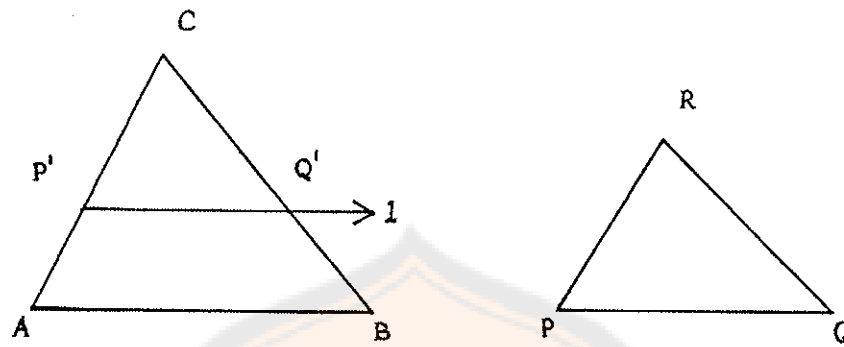
Diketahui korespondensi pada dua segitiga, jika dua pasangan sisi-sisi yang berkorespondensi adalah sebanding dan sudut yang diapit oleh sisi-sisi tersebut kongruen maka segitiga-segitiga itu sebangun.

Diketahui : $\triangle ABC$ berkorespondensi dengan $\triangle PQR$, $\angle ACB \cong \angle PRQ$ dan

$$\frac{RP}{CA} = \frac{RQ}{CB}$$

Dibuktikan : $\triangle ABC \approx \triangle PQR$

Bukti:



Gambar 2.18. Ilustrasi pembuktian teorema 2.11

Diasumsikan $\overline{CA}$ tidak kongruen dengan $\overline{RP}$, dalam hal ini $CA > RP$. Selanjutnya dapat ditentukan titik P' dan Q' berturut-turut pada $\overline{CA}$ dan $\overline{CB}$ sedemikian hingga $\overline{CP'} \cong \overline{RP}$ dan $\overline{CQ'} \cong \overline{RQ}$, melalui P' dan Q' dilukis garis l . Oleh karena $\overline{CP'} \cong \overline{RP}$, $\overline{CQ'} \cong \overline{RQ}$ dan $\angle P'CQ' \cong \angle PRQ$ maka $\triangle CP'Q' \cong \triangle RPQ$ (sisi-sudut-sisi). Diketahui pula bahwa $\frac{RP}{CA} = \frac{RQ}{CB}$, dengan mensubstitusikan $RP = CP'$ dan $RQ = CQ'$ diperoleh : $\frac{CP'}{CA} = \frac{CQ'}{CB}$ maka menurut teorema 2.9 : $\overline{P'Q'} \parallel \overline{AB}$.

Dipandang $\triangle CP'Q'$ dan $\triangle CAB$, $\angle CP'Q' \cong \angle CAB$ dan $\angle P'CQ' \cong \angle ACB$ maka $\triangle CP'Q' \approx \triangle CAB$ (sudut-sudut). Oleh karena $\triangle CP'Q' \cong \triangle RPQ$ dan $\triangle CP'Q' \approx \triangle CAB$ maka $\triangle RPQ \approx \triangle CAB$. Jadi $\triangle ABC \approx \triangle PQR$ (terbukti).

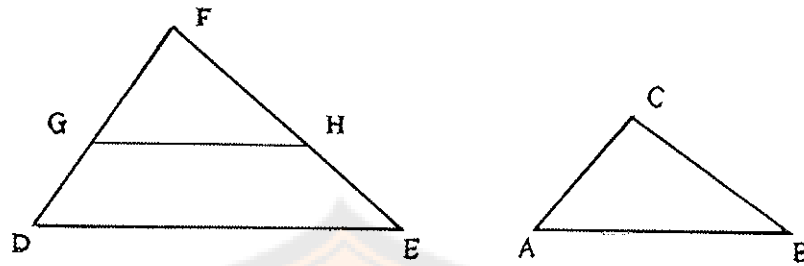
Teorema 2.12 (sisi-sisi-sisi)

Diketahui korespondensi antara dua segitiga, jika ketiga sisi yang berkorespondensi sebanding maka segitiga-segitiga itu sebangun.

Diketahui: $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ yang berkorespondensi, dan $\frac{FD}{CA} = \frac{FE}{CB} = \frac{DE}{AB}$

Dibuktikan : $\triangle ABC \approx \triangle DEF$

Bukti :



Gambar 2.19. Ilustrasi pembuktian teorema 2.12

Ditempatkan titik G dan H berturut-turut pada $\overline{FD}$ dan $\overline{FE}$ sedemikian hingga $FG = CA$ dan $FH = CB$, kemudian dilukis $\overline{GH}$. Diketahui : $\frac{FD}{CA} = \frac{FE}{CB}$, dengan mensubstitusikan $FG = CA$ dan $FH = CB$ diperoleh : $\frac{FD}{FG} = \frac{FE}{FH}$. Menurut teorema 2.9 : $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$.

Dipandang $\triangle FGH$ dan $\triangle FDE$; $\angle FGH \cong \angle FDE$ dan $\angle GFH \cong \angle DFE$, maka $\triangle FGH \approx \triangle FDE$ dan diperoleh : $\frac{FD}{FG} = \frac{DE}{GH}$. Oleh karena $FG = CA$, didapat : $\frac{FD}{CA} = \frac{DE}{GH}$. Diketahui pula : $\frac{FD}{CA} = \frac{DE}{AB}$ dan telah dibuktikan $\frac{FD}{CA} = \frac{DE}{GH}$, dengan menggunakan sifat transitif didapat : $\frac{DE}{AB} = \frac{DE}{GH}$ sehingga $AB = GH$. Selanjutnya $\overline{AB} \cong \overline{GH}$; $\overline{CA} \cong \overline{FG}$; dan $\overline{CB} \cong \overline{FH}$ maka $\triangle CAB \cong \triangle FGH$ (sisi-sisi-sisi). Telah terbukti : $\triangle FGH \approx \triangle FDE$ dan $\triangle CAB \cong \triangle FGH$ maka $\triangle FDE \approx \triangle CAB$. Jadi $\triangle ABC \approx \triangle DEF$ (terbukti).

D. Garis-garis Istimewa dalam segitiga

Garis-garis istimewa dalam segitiga berupa garis sumbu, garis tinggi, garis bagi (bisektor), dan garis berat (median). Garis sumbu dapat pula dilukis pada suatu

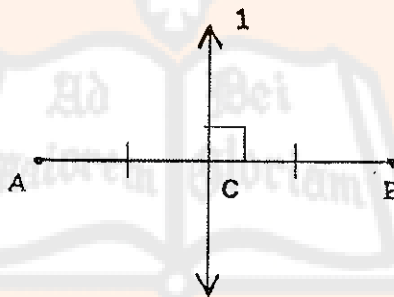
segmen garis, sedangkan garis bagi (bisektor) dapat dilukis dalam suatu sudut yang sering disebut sebagai garis bagi sudut. Kedua garis ini akan disajikan terlebih dahulu sebelum membahas garis-garis istimewa dalam segitiga.

D.1. Sumbu Segmen Garis dan Garis Bagi Sudut

Definisi 2.9 (Sumbu Segmen Garis)

Sumbu suatu segmen garis adalah suatu garis yang tegak lurus pada segmen dan membagi dua sama panjang segmen tersebut.

Dalam gambar 2.20, diketahui $\overline{AB}$; $AC = CB$ dan $l \perp \overline{AB}$, maka l disebut sumbu $\overline{AB}$.



Gambar 2.20. Sumbu $\overline{AB}$

Teorema 2.13

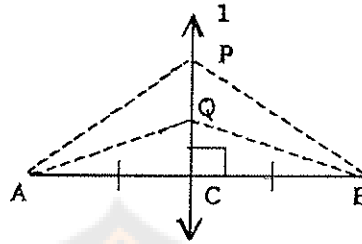
Sumbu suatu segmen garis adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari ujung-ujung segmen garis tersebut.

Diketahui : $\overline{AB}$ dan garis l dengan l merupakan sumbu $\overline{AB}$.

Dibuktikan : i). Jika P adalah titik pada l maka $PA = PB$

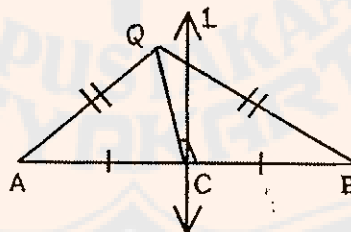
ii). Jika $QA = QB$ maka Q adalah titik yang terletak pada l .

Bukti :



Gambar 2.21. Ilustrasi pembuktian teorema 2.13ⁱ

- i). P adalah titik pada l, jika P merupakan titik yang sama dengan C maka $PA = PB$ karena C titik tengah $\overline{AB}$. Jika P bukan titik yang sama dengan C maka $\overline{PC} \cong \overline{PC}$ dan $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. Selanjutnya $\angle PCA \cong \angle PCB$, sehingga $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ (sisi-sudut-sisi). Jadi $PA = PB$.
- ii). Q adalah titik sedemikian hingga $QA = QB$, jika Q pada $\overline{AB}$ maka $Q \equiv C$ karena suatu segmen garis hanya mempunyai satu titik tengah. Menurut definisi sumbu segmen garis maka C terletak pada l sehingga Q juga terletak pada l. Jika Q tidak terletak pada $\overline{AB}$, dilukis garis yang memuat titik Q dan C sehingga $\overline{QC} \cong \overline{QC}$ (gambar 2.22). Diketahui $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ dan $\overline{QA} \cong \overline{QB}$, maka $\triangle QCA \cong \triangle QCB$ (sisi-sisi-sisi) dan diperoleh $\angle QCA \cong \angle QCB$.



Gambar 2.22. Ilustrasi pembuktian teorema 2.13ⁱⁱ

$\angle QCA$ dan $\angle QCB$ membentuk sudut pelurus dan mempunyai ukuran yang sama, dalam hal ini $\angle QCA$ dan $\angle QCB$ merupakan sudut siku-siku. Jadi $\overline{QC}$



dan l merupakan garis yang sama, karena melalui titik Q yang tidak pada $\overline{AB}$ ada tepatnya satu garis yang tegak lurus dengan $\overline{AB}$. Jadi Q terletak pada l .

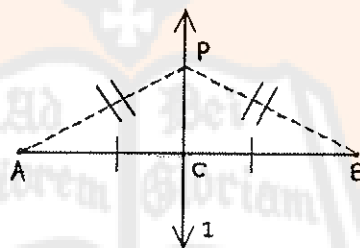
Akibat teorema 2.13:

Diketahui segmen $\overline{AB}$ dan garis l , jika dua titik pada l berjarak sama dari A dan B maka l adalah garis sumbu $\overline{AB}$.

Diketahui : $\overline{AB}$ dan garis l , dua titik pada l yaitu P dan C sedemikian hingga $PA = PB$ dan $CA = CB$.

Dibuktikan : l adalah garis sumbu $\overline{AB}$

Bukti :



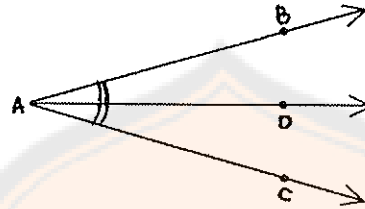
Gambar 2.23. Ilustrasi pembuktian akibat teorema 2.13

Titik C terletak pada l dan pada $\overline{AB}$, diketahui $CA = CB$ yang berarti C titik tengah $\overline{AB}$. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$ dan $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Jadi $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ (sisi-sisi-sisi) sehingga $\angle PCA \cong \angle PCB$. $\angle PCA$ merupakan suplemen $\angle PCB$ yang mempunyai ukuran yang sama, dalam hal ini keduanya sudut siku-siku. Jadi $\overline{PC} \perp \overline{AB}$. Menurut teorema 3.2 maka l adalah sumbu $\overline{AB}$ (terbukti).

Definisi 2.10 (Garis Bagi Sudut)

Garis bagi sudut adalah sinar garis yang membagi suatu sudut menjadi dua sudut yang kongruen.

Dalam Gambar 4.5, $\overrightarrow{AD}$ membagi $\angle BAC$, jika titik D terletak dalam $\angle BAC$ dan $\angle BAD \cong \angle DAC$ maka $\overrightarrow{AD}$ disebut garis bagi $\angle BAC$.



Gambar 2.24. Garis bagi $\angle BAC$.

Teorema 2.14

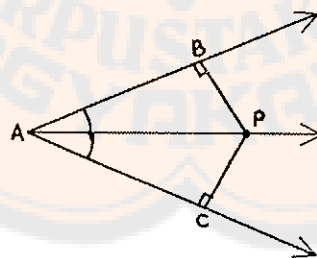
Garis bagi suatu sudut adalah himpunan titik-titik di dalam interior sudut yang berjarak sama dari sisi-sisi sudut itu.

Diketahui : $\angle BAC$ dengan $\overrightarrow{AP}$ garis bagi $\angle BAC$

Dibuktikan : i). Jika P berjarak sama dari $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ sedemikian hingga $PB = PC$ maka $\overrightarrow{AP}$ adalah garis bagi $\angle BAC$.

ii). Jika $\overrightarrow{AP}$ adalah garis bagi $\angle BAC$ maka P berjarak sama dari $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ dan $PB = PC$

Bukti :



Gambar 2.25. Ilustrasi pembuktian teorema 2.14

i). Dilukis $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{PC} \perp \overline{AC}$ sehingga membentuk segitiga siku-siku yaitu $\triangle ABP$ dan $\triangle ACP$. Diketahui $PB = PC$, sehingga $\overline{PB} \cong \overline{PC}$. Selanjutnya

$\overline{PA} \cong \overline{PA}$. Jadi $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, sehingga $\angle BAP \cong \angle CAP$. Menurut definisi garis bagi sudut maka $\overline{AP}$ adalah garis bagi $\angle BAC$.

- ii). Dilukis $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{PC} \perp \overline{AC}$. Diketahui $\overline{AP}$ adalah garis bagi $\angle BAC$ sehingga $\angle BAP \cong \angle CAP$ dan $\angle ABP \cong \angle ACP$, maka $\angle APB \cong \angle APC$. Selanjutnya $\overline{AP} \cong \overline{AP}$. Jadi $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (sisi-sudut-sisi) sehingga $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ dan $PB = PC$.

D.2. Garis-garis Istimewa Segitiga

Definisi 2.11 (Garis Sumbu Segitiga)

Garis yang membagi dua sama panjang sisi-sisi segitiga dan tegak lurus pada sisi tersebut disebut garis sumbu.

Definisi 2.12 (Garis Tinggi Segitiga)

Segmen garis yang dilukis dari titik sudut segitiga tegak lurus pada sisi dihadapan titik sudut itu disebut garis tinggi.

Definisi 2.13 (Garis Bagi Sudut Segitiga)

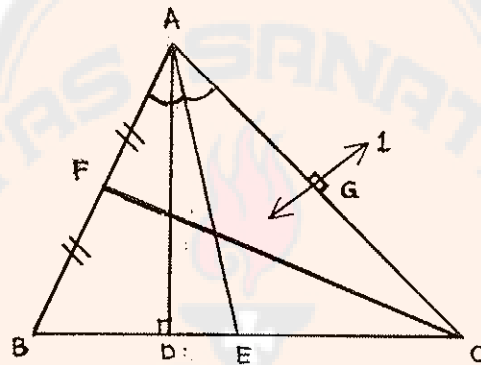
Segmen garis yang membagi sudut-sudut pada segitiga menjadi dua sudut yang kongruen disebut garis bagi sudut.

Definisi 2.14 (Garis Berat Segitiga)

Segmen garis yang dilukis dari titik sudut segitiga ke titik tengah sisi dihadapan titik sudut itu disebut garis berat.

Contoh 2.6:

Diketahui $\triangle ABC$ seperti dalam gambar 2.26, $\overline{AD}$ disebut garis tinggi yang dilukis dari titik sudut A tegak lurus pada $\overline{BC}$; $\overline{AE}$ disebut garis bagi $\angle BAC$; $\overline{CF}$ disebut garis berat yang dilukis dari titik sudut C ke titik tengah sisi $\overline{AB}$, dan garis $l \perp \overline{AC}$ merupakan garis sumbu pada sisi $\overline{AC}$ sehingga $AG = GC$.



Gambar 2.26. Garis sumbu, garis tinggi, garis berat, dan garis bagi $\angle BAC$ dalam $\triangle ABC$

Teorema 2.15

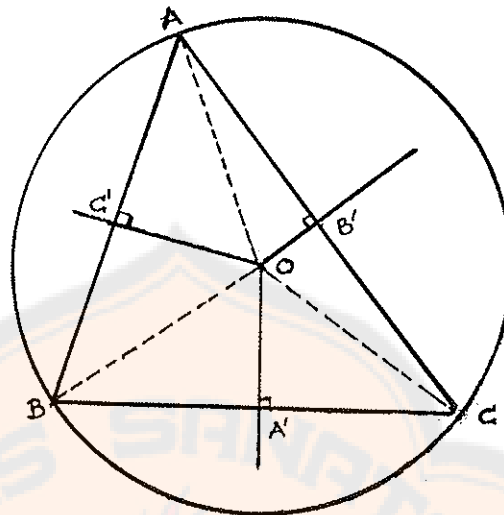
Ketiga garis sumbu segitiga berpotongan di satu titik yang berupa titik pusat lingkaran luar.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan dua garis sumbu pada sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ yang berpotongan di satu titik yaitu titik O.

Dibuktikan : Garis sumbu pada $\overline{AC}$ juga melalui O

Bukti :

Dilukis garis sumbu pada $\overline{AB}$ dan garis sumbu pada $\overline{BC}$ yang berpotongan di satu titik yaitu titik O. Menurut definisi garis sumbu maka : $\overline{OA} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{OB} \perp \overline{BC}$ serta $OA = OB$ dan $OB = OC$.
 Dilukis garis sumbu pada $\overline{AC}$ yang berpotongan di titik O. Menurut definisi garis sumbu maka : $\overline{OA} \perp \overline{AC}$ dan $OA = OC$.
 Maka : $\overline{OA} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{OA} \perp \overline{AC}$ sehingga $\overline{OA}$ merupakan garis sumbu pada $\overline{AC}$ juga melalui O.



Gambar 2.27. Ilustrasi pembuktian teorema 2.15

Selanjutnya menurut teorema 3.2 maka $OA = OB$ dan $OB = OC$ sehingga diperoleh $OA = OC$, yang berarti bahwa garis sumbu pada $\overline{AC}$ juga melalui O . Dalam gambar 2.27 ditunjukkan dengan $\overline{OB'}$. Jadi $\overline{OC'}$, $\overline{OA'}$, dan $\overline{OB'}$ berpotongan di satu titik yaitu titik O . Oleh karena $OA = OB = OC$ maka titik O merupakan titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$.

Teorema 2.16

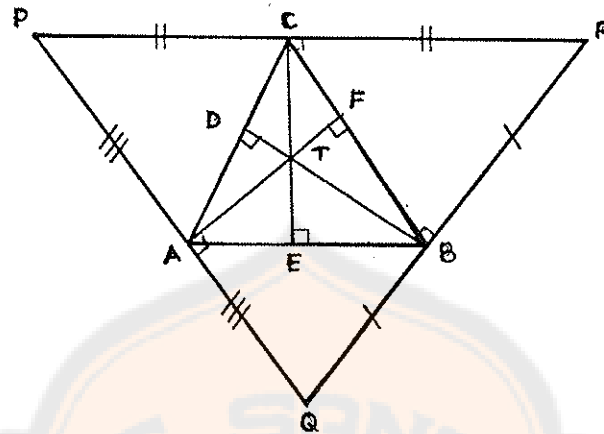
Ketiga garis tinggi segitiga berpotongan di satu titik yang disebut titik tinggi.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan dua garis tinggi yaitu $\overline{CE}$ dan $\overline{BD}$ yang berpotongan di satu titik yaitu titik T .

Dibuktikan : Garis tinggi $\overline{AF}$ juga melalui T

Bukti :

Dilukis garis melalui titik A yang sejajar dengan $\overline{BC}$, melalui titik B sejajar dengan $\overline{AC}$ dan melalui titik C yang sejajar dengan $\overline{AB}$. Garis-garis tersebut berpotongan berturut-turut di titik P , Q , dan R .



Gambar 2.28. Ilustrasi pembuktian teorema 2.16

Dipandang $\triangle ABC$ dan $\triangle CPA$: $\angle CAB \cong \angle PCA$; $\angle ACB \cong \angle CAP$ dan $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, maka $\triangle ABC \cong \triangle CPA$ (sudut-sisi-sudut) dan diperoleh $\overline{AB} \cong \overline{CP}$.
Dipandang $\triangle ABC$ dan $\triangle RCB$: $\angle ABC \cong \angle BCR$; $\angle ACB \cong \angle CBR$ dan $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ maka $\triangle ABC \cong \triangle RCB$ (sudut-sisi-sudut) dan diperoleh $\overline{AB} \cong \overline{RC}$. Oleh karena $\overline{AB} \cong \overline{CP}$ dan $\overline{AB} \cong \overline{RC}$ maka $\overline{CP} \cong \overline{RC}$. Selanjutnya $\overline{CE} \perp \overline{PR}$ dan $CP = RC$, menurut definisi garis sumbu maka $\overline{CE}$ adalah garis sumbu $\overline{PR}$.

Dengan cara yang serupa akan ditunjukkan bahwa $\overline{BD}$ merupakan sumbu $\overline{QR}$, untuk itu dipandang $\triangle ABC$ dan $\triangle BAQ$: $\angle CAB \cong \angle ABQ$; $\angle ABC \cong \angle BAQ$ dan $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ maka $\triangle ABC \cong \triangle BAQ$ (sudut-sisi-sudut) dan diperoleh $\overline{CA} \cong \overline{QB}$.
Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $\triangle ABC \cong \triangle RCB$ sehingga $\overline{CA} \cong \overline{BR}$. Oleh karena $\overline{CA} \cong \overline{QB}$ dan $\overline{CA} \cong \overline{BR}$ maka $\overline{QB} \cong \overline{BR}$ yang berarti $QB = BR$.
Selanjutnya $\overline{BD} \perp \overline{QR}$ dan $QB = BR$, menurut definisi garis sumbu maka $\overline{BD}$ adalah garis sumbu $\overline{QR}$.

Oleh karena $\overline{CE}$ dan $\overline{BD}$ merupakan garis-garis sumbu dari ΔPQR yang berpotongan di titik T maka menurut teorema 2.13 garis sumbu yang ketiga dari ΔPQR yaitu $\overline{AF}$ juga melalui titik T. Jadi $\overline{CE}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{AF}$ yang merupakan garis-garis tinggi pada ΔABC juga berpotongan di satu titik yaitu titik T (terbukti).

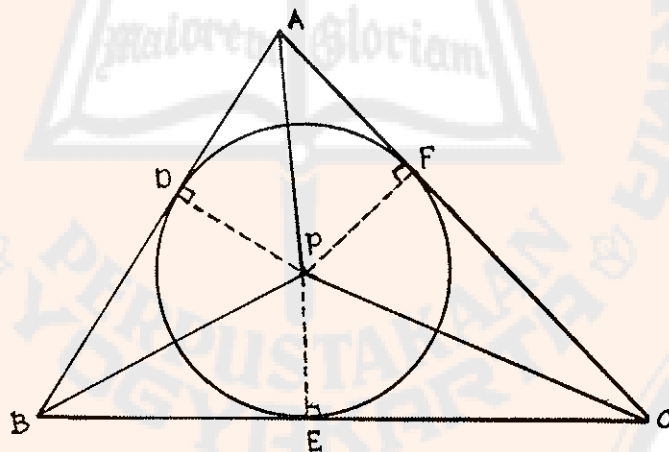
Teorema 2.17

Ketiga garis bagi sudut-sudut segitiga berpotongan di satu titik yang berupa titik pusat lingkaran dalam segitiga.

Diketahui : ΔABC dengan garis bagi $\angle BAC$ serta garis bagi $\angle ABC$ yang berpotongan di satu titik P

Dibuktikan : garis bagi $\angle ACB$ juga melalui titik P

Bukti :



Gambar. 2.29. Ilustrasi pembuktian teorema 2.17

Menurut teorema 2.14, $PF = PD$ dan $PD = PE$ maka diperoleh $PF = PE$ yang berarti P terletak pada garis bagi $\angle ACB$. Jadi ketiga garis bagi sudut ΔABC berpotongan di satu titik yaitu titik P. Oleh karena $PD = PF = PE$ maka titik P merupakan titik pusat lingkaran dalam ΔABC .

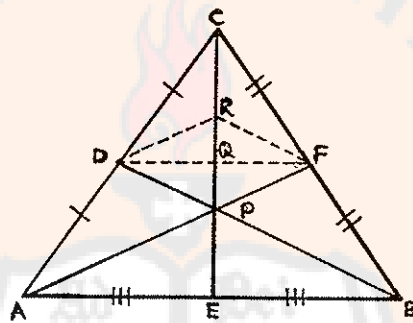
Teorema 2.18

Ketiga garis berat segitiga berpotongan di satu titik yaitu titik berat lempeng segitiga homogen

Diketahui : $\triangle ABC$ dan kedua garis berat yaitu $\overline{AF}$ dan $\overline{BD}$ yang berpotongan di titik P

Dibuktikan : $\overline{CE}$ juga melalui titik berat yaitu P

Bukti :



Gambar. 2.30. Ilustrasi pembuktian teorema 2.18

Ditempatkan titik R sebagai titik tengah $\overline{CP}$, kemudian dilukis $\overline{DR}$, $\overline{RF}$ dan $\overline{DF}$. Dipandang $\triangle CPB$; titik R, dan F berturut-turut merupakan titik tengah $\overline{CP}$ dan $\overline{CB}$ sehingga $\overline{RF} \parallel \overline{PB}$. Oleh karena $\overline{RF} \parallel \overline{PB}$ dan P terletak pada $\overline{BD}$ maka $\overline{RF} \parallel \overline{DP}$. Dipandang $\triangle CPA$; titik R dan D berturut-turut merupakan titik tengah $\overline{CP}$ dan $\overline{CA}$ sehingga $\overline{RD} \parallel \overline{PA}$. Oleh karena $\overline{RD} \parallel \overline{PA}$ dan P terletak pada $\overline{AF}$ maka $\overline{RD} \parallel \overline{FP}$. $\overline{RF} \parallel \overline{DP}$ dan $\overline{RD} \parallel \overline{FP}$ didapat RFPD jajargenjang dengan diagonal-diagonal $\overline{RP}$ dan $\overline{DF}$ yang saling membagi sehingga diperoleh $DQ = QF$. Dipandang $\triangle CDQ$ dan $\triangle CAE$; $\angle CDQ \cong \angle CAE$ dan $\angle DCQ \cong \angle ACE$ sehingga $\triangle CDQ \approx \triangle CAE$ (sudut-sudut), diperoleh : $\frac{CD}{CA} = \frac{CQ}{CE} = \frac{DQ}{AE}$. D merupakan titik

tengah $\overline{CA}$ maka $CD = DA$ dan $CA = 2 \cdot CD$. Selanjutnya : $\frac{CD}{CA} = \frac{DQ}{AE}$ dengan

mensubstitusikan $CA = 2 \cdot CD$, diperoleh : $\frac{CD}{2 \cdot CD} = \frac{DQ}{AE}$ atau $AE = 2 \cdot DQ$.

Dipandang $\triangle CQF$ dan $\triangle CEB$; $\angle CQF \cong \angle CEB$ dan $\angle QCF \cong \angle ECB$ maka

$\triangle CQF \approx \triangle CEB$ (sudut-sudut), diperoleh : $\frac{CF}{CB} = \frac{CQ}{CE} = \frac{QF}{EB}$. F merupakan titik

tengah $\overline{CB}$ sehingga $CF = FB$ dan $CB = 2 \cdot CF$. Selanjutnya : $\frac{CF}{CB} = \frac{QF}{EB}$, dengan

mensubstitusikan $CB = 2 \cdot CF$ diperoleh : $\frac{CF}{2 \cdot CF} = \frac{QF}{EB}$ atau $EB = 2 \cdot QF$. Oleh

karena $AE = 2 \cdot DQ$ dan $EB = 2 \cdot QF$ maka $AE = EB$ karena $DF = QF$, yang berarti

E merupakan titik tengah $\overline{AB}$.

Dengan demikian $\overline{CE}$ merupakan garis berat $\triangle ABC$ yang melalui titik P.

Jadi $\overline{AF}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{CE}$ berpotongan di satu titik yaitu titik P (terbukti).

E. Teorema Menelaus dan Teorema Ceva

Berikut ini dibahas tentang dua teorema yang berhubungan dengan kekolinearan tiga titik dan perpotongan tiga garis.

E.1. Teorema Menelaus dan Kebalikan Teorema Menelaus

Teorema 2.19

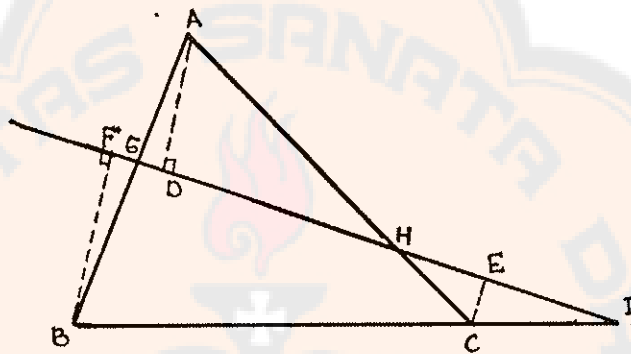
Jika tiga titik masing-masing pada sisi yang berlainan dari suatu segitiga atau perpanjangannya adalah kolinear, maka hasil kali perbandingan segmen-segmen sisi-sisi yang terbagi oleh titik-titik itu sama dengan -1.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan G, H, dan I merupakan tiga titik kolinear berturut-turut

pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{AC}$

Dibuktikan : $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} = -1$

Bukti :



Gambar. 2.31. Ilustrasi pembuktian teorema 2.19

Diambil arah positif yaitu dari A ke B sehingga $\overline{AB}$ menunjukkan segmen garis dengan panjang positif dan $AB = -BA$. Dipandang $\triangle CEI$ dan $\triangle BFI$; $\angle CEI \cong \angle BFI$ dan $\angle EIC \cong \angle FIB$ maka $\triangle CEI \approx \triangle BFI$ (sudut-sudut), diperoleh :

$\frac{BI}{IC} = -\frac{BF}{CE}$. Dipandang $\triangle BFG$ dan $\triangle ADG$; $\angle FGB \cong \angle DGA$ dan $\angle ADG \cong \angle BFG$

maka $\triangle BFG \approx \triangle ADG$ (sudut-sudut), diperoleh : $\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{BF}$.

Dipandang $\triangle ADH$ dan $\triangle CEH$; $\angle ADH \cong \angle CEH$ dan $\angle AHD \cong \angle CHE$

maka $\triangle ADH \approx \triangle CEH$ (sudut-sudut), diperoleh : $\frac{CH}{HA} = \frac{CE}{AD}$. Selanjutnya

diperoleh hasil kali perbandingan segmen-segmen yang terbagi oleh titik G, H dan I:

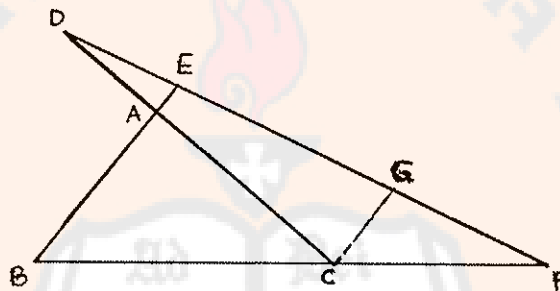
$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} = \frac{AD}{BF} \cdot \left(-\frac{BF}{CE}\right) \cdot \frac{CE}{AD} = -1 \text{ (terbukti).}$$

Apabila tiga titik kolinear membagi sisi-sisi segitiga pada perpanjangannya, maka hasil kali perbandingan segmen-segmen sisi-sisi yang terbagi juga sama dengan -1.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan D, E,, dan F merupakan tiga titik kolinear yang berturut-turut terletak pada perpanjangan $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, dan $\overline{BC}$

Dibuktikan : $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = -1$

Bukti :



Gambar. 2.32. Ilustrasi pembuktian tiga titik kolinear yang terletak pada perpanjangan sisi-sisi $\triangle ABC$

Dilukis $\overline{CG} \parallel \overline{AE}$ dan dipandang $\triangle CGF$ dan $\triangle BEF$; $\angle CGF \cong \angle BEF$ dan $\angle GFC \cong \angle EFB$ maka $\triangle CGF \approx \triangle BEF$ (sudut-sudut) diperoleh : $\frac{BF}{FC} = -\frac{BE}{CG}$.

Dipandang $\triangle DEA$ dan $\triangle DGC$; $\angle DAE \cong \angle DCG$ dan $\angle ADE \cong \angle CDG$ maka $\triangle DEA \approx \triangle DGC$ (sudut-sudut), diperoleh : $\frac{CD}{DA} = -\frac{CG}{AE}$.

Dipandang $\overline{BA}$ dan $\overline{AE}$, maka $\frac{AE}{EB} = -\frac{AE}{BE}$. Selanjutnya diperoleh hasil kali

perbandingan segmen-segmen sisi-sisi yang terbagi oleh titik D, E dan F adalah :

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = -\frac{AE}{BE} \cdot \left(-\frac{BE}{CG}\right) \cdot \left(-\frac{CG}{AE}\right) = -1.$$

Teorema 2.20 (Kebalikan Teorema Menelaus)

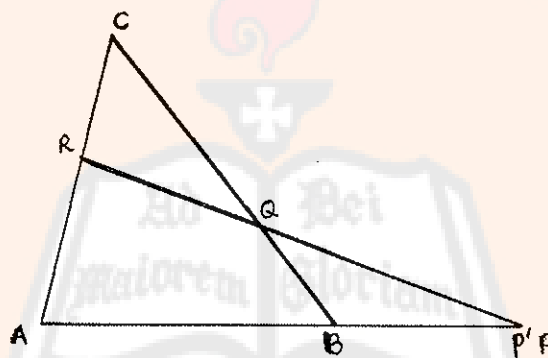
Jika hasil kali perbandingan segmen-segmen sisi-sisi yang terbagi oleh tiga titik yang terletak pada setiap sisi segitiga atau perpanjangannya adalah -1 maka tiga titik tersebut kolinear.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan

$$\overline{AC} \text{ sedemikian hingga } \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} = -1$$

Dibuktikan : P, Q, dan R merupakan tiga titik kolinear

Bukti :



Gambar. 2.33. Ilustrasi pembuktian teorema 2.20

Dilukis garis $\overline{RQ}$ yang memotong perpanjangan $\overline{AB}$ di titik P' , maka

menurut teorema Menelaus : $\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ}{QC} = -1$. Telah diketahui bahwa :

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} = -1, \text{ maka diperoleh : } \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} = -1. \text{ Jadi}$$

$\frac{AP'}{P'B} = \frac{AP}{PB}$, sehingga P' berimpit dengan P. Jadi titik P, Q, dan R merupakan tiga titik

kolinear.

E.2. Teorema Ceva dan Kebalikan dari Teorema Ceva

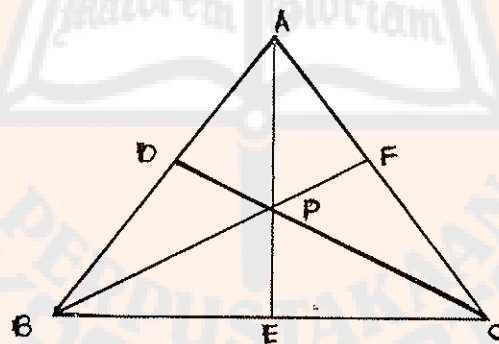
Teorema 2.21 (Teorema Ceva dan Kebalikannya)

Tiga segmen garis yang menghubungkan tiga titik masing-masing pada sisi-segitiga dengan titik sudut di hadapannya berpotongan sisi di satu titik bila dan hanya bila hasil kali perbandingan segmen-segmen sisi-sisi segitiga yang terbagi oleh tiga segmen garis tersebut sama dengan 1.

($\Rightarrow$) Diketahui : $\triangle ABC$ dan tiga segmen garis yang menghubungkan tiga titik masing-masing terletak pada sisi-sisi $\triangle ABC$ dengan titik sudut di hadapannya yaitu $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, dan $\overline{CD}$ berpotongan di satu titik yaitu titik P

Dibuktikan : $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$

Bukti :



Gambar 2.34. Ilustrasi pembuktian teorema 2.21

Dipandang $\triangle AEC$ dan $\overline{BF}$; menurut teorema Menelaus :

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1. \text{ Dipandang } \triangle ABE \text{ dan } \overline{CD}; \text{ menurut teorema Menelaus :}$$

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EP}{PA} = -1. \text{ Hasil kali kedua persamaan diperoleh :}$$

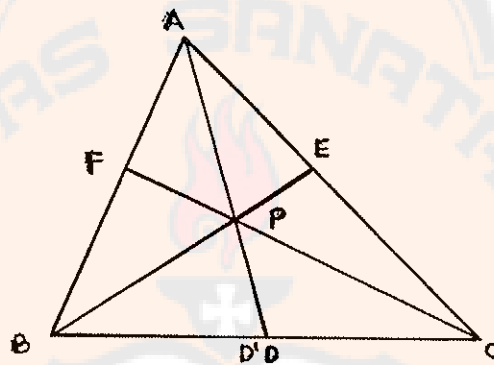
$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \times \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EP}{PA} = 1 \text{ atau } \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \text{ (terbukti).}$$

($\Leftarrow$) Diketahui : $\triangle ABC$ dan pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$ berturut-turut terletak titik F, D,

dan E sedemikian hingga : $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Dibuktikan : $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ berpotongan di satu titik

Bukti :



Gambar. 2.35. Ilustrasi pembuktian teorema 2.21 (arah kiri)

Dilukis $\overline{CF}$, dan $\overline{BE}$ yang berpotongan di titik P, dilukis pula garis dari A melalui P yang memotong $\overline{BC}$ di titik D' , maka menurut teorema Ceva :

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \text{ Telah diketahui : } \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \text{ Dari kedua persamaan :}$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \text{ diperoleh } \frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC} \text{ sehingga } D' \text{ berimpit}$$

dengan D. dengan demikian $\overline{AD}$ melalui P. Jadi $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ melalui satu titik yaitu titik P.

BAB III

GARIS-GARIS ISOGONAL DAN TITIK BROCARD

Dalam bab ini akan dibahas tentang garis-garis yang dapat dilukis dalam segitiga, titik-titik dan lingkaran yang berhubungan dengan segitiga. Titik-titik ini ditemukan oleh Emile Lemoine (± 1879) dan Henri Brocard (1845 – 1922).

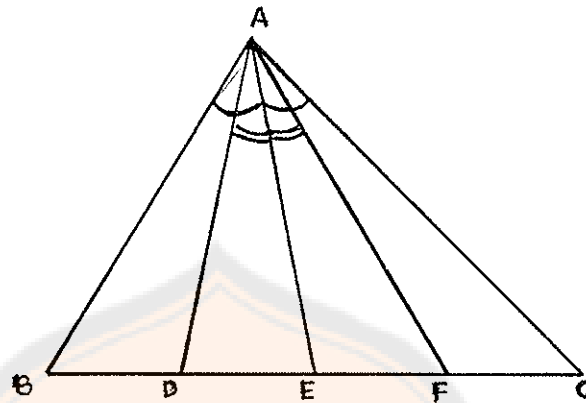
A. Garis-garis Isogonal

Definisi 3.1 (Garis-garis Isogonal)

Diketahui sebuah segitiga dan garis bagi salah satu sudutnya. Dua garis yang melalui titik sudut itu sedemikian hingga sudut-sudut yang dibentuk oleh garis-garis itu dengan garis bagi sudut adalah kongruen, garis-garis itu disebut garis-garis isogonal. Salah satu garis merupakan garis konjugat isogonal dari garis yang lain.

Contoh 3.1:

Diketahui $\triangle ABC$ seperti dalam gambar 3.1, jika $\overline{AE}$ garis bagi $\angle A$ dan $\angle DAE \cong \angle FAE$ maka $\overline{AD}$ dan $\overline{AF}$ disebut garis-garis isogonal. $\overline{AD}$ merupakan konjugat isogonal dari $\overline{AF}$. Sisi-sisi yang berdampingan pada $\triangle ABC$ juga merupakan konjugat-konjugat isogonal. Dalam hal ini $\overline{AC}$ konjugat isogonal dari $\overline{AB}$; $\overline{BA}$ konjugat isogonal dari $\overline{BC}$ jika dibuat garis bagi di $\angle B$ dan $\overline{CA}$ konjugat isogonal dari $\overline{CB}$ jika dibuat garis bagi di $\angle C$.



Gambar 3.1. Garis-garis isogonal dalam $\triangle ABC$

Contoh 3.2:

Buktikan bahwa garis tinggi dan diameter lingkaran luar yang melalui titik sudut suatu segitiga merupakan garis-garis isogonal!

Penyelesaian :

Diketahui : $\triangle ABC$ dan P adalah titik pusat lingkaran luarnya. $\overline{AD}$ garis bagi $\angle A$, $\overline{AE}$ garis tinggi, dan $\overline{AG}$ diameter lingkaran luarnya.

Dibuktikan : $\angle EAD \cong \angle DAF$

Bukti :

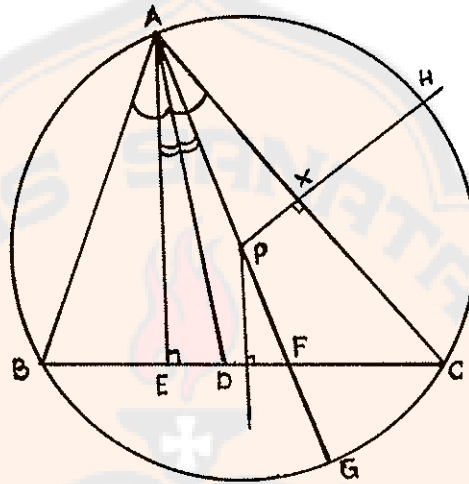
Dipandang $\triangle AXP$ dan $\triangle ABE$, $\angle AXP \cong \angle AEB$ yang berarti :
 $m\angle PAX + m\angle APX = 90$ dan $m\angle BAE + m\angle ABE = 90$. Dipandang $\triangle APC$ dan $\triangle ABC$, $\angle APC$ dan $\angle ABC$ menghadap busur yang sama yaitu AC. $\angle APC$ merupakan sudut pusat sedang $\angle ABC$ merupakan sudut keliling, maka berlaku :

$$m\angle APC = 2 \cdot m\angle ABC \quad \text{atau} \quad m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot m\angle APC. \quad \text{Selanjutnya}$$

$$m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC} = \widehat{AH} \quad \text{atau} \quad m\angle ABC = m\angle APH, \text{ diperoleh } \angle ABC \cong \angle APH;$$

dalam hal ini maka $\angle ABE \cong \angle APX$.

Oleh karena : $m\angle PAX + m\angle APX = 90$ dan $m\angle BAE + m\angle ABE = 90$ serta $\angle ABE \cong \angle APX$ maka $\angle PAX \cong \angle BAE$. Selanjutnya $\angle BAD \cong \angle CAD$ karena $\overline{AD}$ garis bagi $\angle A$, sehingga $\angle EAD \cong \angle DAF$. Jadi $\overline{AE}$ dan $\overline{AG}$ merupakan garis-garis isogonal.



Gambar 3.2. Ilustrasi contoh 3.2

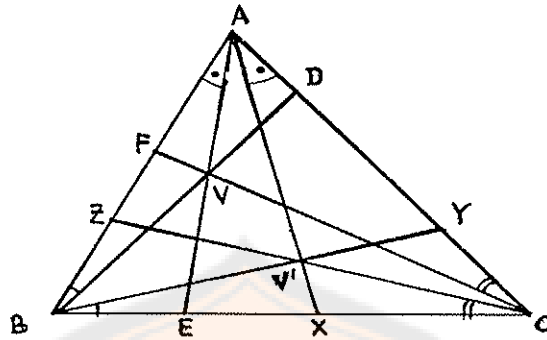
Teorema 3.1

Konjugat-konjugat isogonal dari tiga segmen garis yang berpotongan di satu titik, yang ditarik dari titik sudut-titik sudut segitiga ke sisi dihadapannya juga berpotongan di satu titik.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan tiga segmen garis yaitu $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{CF}$ yang berpotongan di titik V . $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ berturut-turut merupakan konjugat isogonal dari $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{CF}$.

Dibuktikan : $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ berpotongan di satu titik.

Bukti :



Gambar 3.3. Ilustrasi pembuktian teorema 3.1

Dipandang $\triangle ABE$ dan $\triangle ACE$, dengan menggunakan aturan sinus diperoleh:

$$\frac{BA}{\sin \angle BEA} = \frac{BE}{\sin \angle BAE} \quad \text{sedemikian hingga} \quad BE = \frac{BA \cdot \sin \angle BAE}{\sin \angle BEA}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{EC}{\sin \angle CAE} = \frac{CA}{\sin \angle CEA} \quad \text{sedemikian hingga} \quad EC = \frac{CA \cdot \sin \angle CAE}{\sin \angle CEA}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle BEA = \sin \angle CEA \quad \text{maka} \quad \frac{BE}{EC} = \frac{BA \cdot \sin \angle BAE}{CA \cdot \sin \angle CAE}.$$

Dipandang $\triangle BAD$ dan $\triangle BCD$, dengan menggunakan aturan sinus diperoleh:

$$\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} \quad \text{sedemikian hingga} \quad CD = \frac{BC \cdot \sin \angle CBD}{\sin \angle BDC}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{DA}{\sin \angle DBA} = \frac{BA}{\sin \angle BDA} \quad \text{sedemikian hingga} \quad DA = \frac{BA \cdot \sin \angle DBA}{\sin \angle BDA}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle BDC = \sin \angle BDA \quad \text{maka} \quad \frac{CD}{DA} = \frac{BC \cdot \sin \angle CBD}{BA \cdot \sin \angle DBA}.$$

Sekarang dipandang $\triangle BCF$ dan $\triangle ACF$, dengan menggunakan aturan sinus

$$\text{diperoleh : } \frac{AF}{\sin \angle ACF} = \frac{CA}{\sin \angle AFC} \quad \text{sedemikian hingga} \quad AF = \frac{CA \cdot \sin \angle ACF}{\sin \angle AFC}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{FB}{\sin \angle BCF} = \frac{BC}{\sin \angle BFC} \quad \text{sedemikian hingga} \quad FB = \frac{BC \cdot \sin \angle BCF}{\sin \angle BFC}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle AFC = \sin \angle BFC \quad \text{maka} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{CA \cdot \sin \angle ACF}{BC \cdot \sin \angle BCF}.$$

Selanjutnya dengan teorema Ceva maka :

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BA \cdot \sin \angle BAE}{CA \cdot \sin \angle CAE} \cdot \frac{BC \cdot \sin \angle CBD}{BA \cdot \sin \angle ABD} \cdot \frac{CA \cdot \sin \angle ACF}{BC \cdot \sin \angle BCF} = 1, \quad \text{sehingga}$$

$$\text{diperoleh } \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle CAE} \cdot \frac{\sin \angle CBD}{\sin \angle ABD} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle BCF} = 1.$$

$\overline{AX}$ merupakan konjugat isogonal dari $\overline{AE}$, dengan demikian $\angle BAE \cong \angle CAX$ dan $\angle CAE \cong \angle BAX$. $\overline{BY}$ merupakan konjugat isogonal dari $\overline{BD}$, dengan demikian $\angle ABD \cong \angle CBY$ dan $\angle CBD \cong \angle ABY$. $\overline{CZ}$ merupakan konjugat isogonal dari $\overline{CF}$, dengan demikian $\angle ACF \cong \angle BCZ$ dan $\angle BCF \cong \angle ACZ$. Dengan mensubstitusikan sudut-sudut yang kongruen, diperoleh :

$$\frac{\sin \angle CAX}{\sin \angle BAX} \cdot \frac{\sin \angle ABY}{\sin \angle CBY} \cdot \frac{\sin \angle BCZ}{\sin \angle ACZ} = 1 \dots\dots\dots 1)$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ berpotongan di satu titik dengan mengubah bentuk persamaan 1). Untuk itu dipandang $\triangle CAX$ dan $\triangle BAX$, dengan menggunakan aturan sinus diperoleh :

$$\frac{CX}{\sin \angle CAX} = \frac{CA}{\sin \angle CXA}$$

$$\text{sedemikian hingga } \sin \angle CXA = \frac{CA \cdot \sin \angle CAX}{CX}, \text{ dan } \frac{XB}{\sin \angle BAX} = \frac{BA}{\sin \angle BXA}$$

$$\text{sedemikian hingga } \sin \angle BXA = \frac{BA \cdot \sin \angle BAX}{XB}. \quad \text{Oleh karena}$$

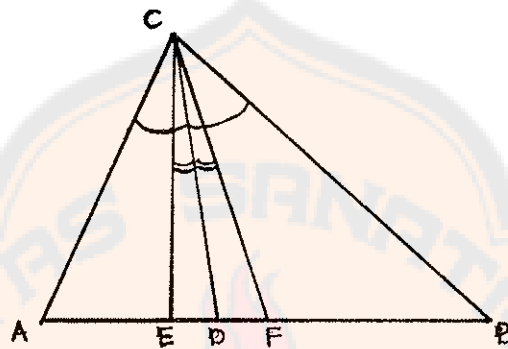
$$\sin \angle CXA = \sin \angle BXA \quad \text{maka} \quad \frac{CA \cdot \sin \angle CAX}{CX} = \frac{BA \cdot \sin \angle BAX}{XB} \quad \text{atau}$$

$$\frac{CX}{XB} = \frac{CA \cdot \sin \angle CAX}{BA \cdot \sin \angle BAX}.$$

Definisi 3.2 (Symmedian Segitiga)

Symmedian dalam segitiga merupakan konjugat isogonal dari median (garis berat).

Contoh 3.3 :



Gambar 3.4. Median dan symmedian dalam $\triangle ABC$

Dalam gambar 3.4, $\triangle ABC$ dengan $\overline{CD}$ garis bagi $\angle C$. Jika $\overline{CF}$ adalah median (garis berat) $\triangle ABC$ maka $\overline{CE}$ adalah symmedian karena $\angle ECD \cong \angle FCD$, akibatnya $\angle ACE \cong \angle BCF$.

Telah dibahas dalam bab sebelumnya, bahwa median-median (garis-garis berat) dalam segitiga berpotongan di satu titik yang disebut titik berat. Menurut teorema 3.1 maka symmedian-symmedian dalam segitiga juga berpotongan di satu titik, karena symmedian-symmedian tersebut merupakan konjugat-konjugat isogonal dari ketiga median (garis berat). Hal ini disajikan dalam teorema berikut ;

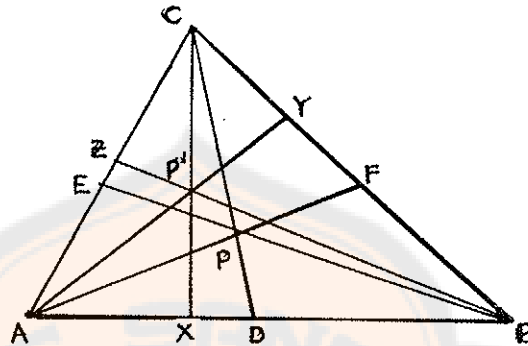
Teorema 3.2

Symmedian-symmedian dalam segitiga berpotongan di satu titik

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AF}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CD}$ merupakan ketiga median yang berpotongan di satu titik yaitu titik P. $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$, dan $\overline{CX}$ berturut-turut symmedian dari $\overline{AF}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CD}$.

Dibuktikan : $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$, dan $\overline{CX}$ berpotongan di satu titik.

Bukti :



Gambar 3.5. Ilustrasi pembuktian teorema 3.2

Berdasarkan teorema 3.1, maka $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$, dan $\overline{CX}$ berpotongan di satu titik yaitu titik P' .

B.1. Titik Symmedian (Titik Lemoine)

Definisi 3.3 (Titik Symmedian atau Titik Lemoine)

Titik potong symmedian-symmedian dalam suatu segitiga disebut titik symmedian (titik Lemoine).

Dalam gambar 3.5, $\overline{AF}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CD}$ merupakan ketiga median $\triangle ABC$; $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$, dan $\overline{CX}$ berturut-turut symmedian-symmediannya. Titik P' adalah titik symmedian (titik Lemoine).

Median (garis berat) yang ditarik dari titik sudut segitiga ke sisi dihadapannya membagi dua sama panjang suatu segmen garis yang paralel dengan sisi dihadapan titik sudut tersebut.

Contoh 3.4 :

Jika segmen $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ dan $\overline{AA'}$ median $\triangle ABC$, maka $DF = FE$.

Dipandang $\triangle ABY$ dan $\triangle CBY$, dengan menggunakan aturan sinus

diperoleh: $\frac{AY}{\sin \angle ABY} = \frac{BA}{\sin \angle AYB}$ sedemikian hingga $\sin \angle AYB = \frac{BA \cdot \sin \angle ABY}{AY}$,

dan $\frac{YC}{\sin \angle CBY} = \frac{CB}{\sin \angle CYB}$ sedemikian hingga $\sin \angle CYB = \frac{CB \cdot \sin \angle CBY}{YC}$. Oleh

karena $\sin \angle AYB = \sin \angle CYB$ maka $\frac{BA \cdot \sin \angle ABY}{AY} = \frac{CB \cdot \sin \angle CBY}{YC}$ atau

$$\frac{AY}{YC} = \frac{BA \cdot \sin \angle ABY}{CB \cdot \sin \angle CBY}.$$

Dipandang $\triangle BCZ$ dan $\triangle ACZ$, dengan menggunakan aturan sinus diperoleh :

$\frac{BZ}{\sin \angle BCZ} = \frac{CB}{\sin \angle BZC}$ sedemikian hingga $\sin \angle BZC = \frac{CB \cdot \sin \angle BCZ}{BZ}$, dan

$\frac{ZA}{\sin \angle ACZ} = \frac{CA}{\sin \angle AZC}$ sedemikian hingga $\sin \angle AZC = \frac{CA \cdot \sin \angle ACZ}{ZA}$. Oleh karena

$\sin \angle BZC = \sin \angle AZC$ maka $\frac{CB \cdot \sin \angle BCZ}{BZ} = \frac{CA \cdot \sin \angle ACZ}{ZA}$ atau

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{CB \cdot \sin \angle BCZ}{CA \cdot \sin \angle ACZ}.$$

Dari persamaan 1) dapat diubah ke bentuk :

$$\frac{CA \cdot \sin \angle CAX}{BA \cdot \sin \angle BAX} \cdot \frac{CB \cdot \sin \angle BCZ}{CA \cdot \sin \angle ACZ} \cdot \frac{BA \cdot \sin \angle ABY}{CB \cdot \sin \angle CBY} = 1 \quad \text{atau} \quad \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1.$$

Dengan menggunakan kebalikan teorema Ceva, maka $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ berpotongan di satu titik, yaitu titik V^1 .

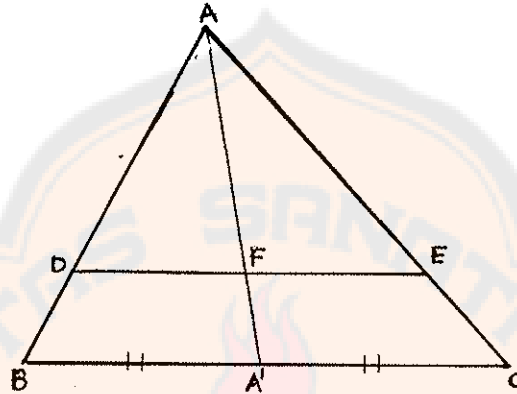
B. Symmedian-symmedian dalam Segitiga

Pada subbab ini dibahas tentang symmedian, titik symmedian sebagai titik konjugat isogonal dari titik berat dan sifat-sifat symmedian serta titik symmedian.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AA'}$ median, dan $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Dibuktikan : $DF = FE$

Bukti :



Gambar 3.6. Ilustrasi contoh 3.4

Dipandang $\triangle ADF$ dan $\triangle ABA'$, $\angle DAF \cong \angle BAA'$ dan $\angle ADF \cong \angle ABA'$ maka $\triangle ADF \approx \triangle ABA'$ (sudut-sudut) sehingga diperoleh : $\frac{AF}{AA'} = \frac{DF}{BA'}$. Dipandang $\triangle AFE$ dan $\triangle AA'C$, $\angle FAE \cong \angle A'AC$ dan $\angle AFE \cong \angle AA'C$ maka $\triangle AFE \approx \triangle AA'C$ (sudut-sudut) sehingga diperoleh : $\frac{AF}{AA'} = \frac{FE}{A'C}$. Oleh karena $\frac{AF}{AA'} = \frac{DF}{BA'}$ dan $\frac{AF}{AA'} = \frac{FE}{A'C}$ maka diperoleh $\frac{DF}{BA'} = \frac{FE}{A'C}$. Selanjutnya $BA' = A'C$ sehingga $DF = FE$ (terbukti).

B.2. Sifat-sifat Symmedian dan Titik Symmedian

Berikut ini disajikan sifat-sifat symmedian dan titik symmedian.

B.2.1. Sifat-sifat Symmedian

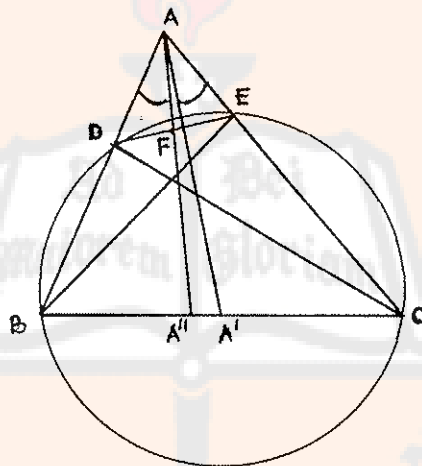
Teorema 3.3

Symmedian yang ditarik dari salah satu titik sudut segitiga ke sisi dihadapannya membagi sama panjang segmen garis yang antiparalel dengan sisi dihadapan titik sudut tersebut.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AA''}$ symmedian dan $\overline{DE}$ adalah segmen garis yang antiparalel dengan $\overline{BC}$.

Dibuktikan : $DF = FE$

Bukti :



Gambar 3.7. Ilustrasi pembuktian teorema 3.3

Pada $\triangle ABC$ dilukis lingkaran yang berpusat di titik tengah $\overline{BC}$ yaitu titik A' . $\overline{AA''}$ symmedian dan $\overline{DE}$ adalah segmen garis yang antiparalel dengan $\overline{BC}$. Selanjutnya dilukis $\overline{BE}$ dan $\overline{CD}$.

Dipandang $\triangle ABE$ dan $\triangle ACD$, $\angle BAE \cong \angle CAD$ dan $\angle ABE \cong \angle ACD$ maka $\triangle ABE \approx \triangle ACD$ (sudut-sudut) sehingga diperoleh $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ atau

$$AD \cdot AB = AE \cdot AC.$$

Dipandang $\triangle ABA'$ dan $\triangle ACA'$, dengan menggunakan aturan sinus didapat :

$$\frac{BA'}{\sin \angle BAA'} = \frac{AB}{\sin \angle BA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad BA' = \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{\sin \angle BA'A}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{CA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{\sin \angle CA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad CA' = \frac{AC \cdot \sin \angle CAA'}{\sin \angle CA'A}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle BA'A = \sin \angle CA'A \quad \text{maka} \quad \frac{BA'}{CA'} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{AC \cdot \sin \angle CAA'}. \quad \text{Titik } A' \text{ merupakan titik}$$

$$\text{tengah } \overline{BC}, \text{ sehingga : } \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{AC \cdot \sin \angle CAA'} = 1 \quad \text{atau} \quad AB \cdot \sin \angle BAA' = AC \cdot \sin \angle CAA'.$$

$$\text{Selanjutnya diperoleh : } \frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{AB}.$$

Dipandang $\triangle ADF$ dan $\triangle AEF$, dengan menggunakan aturan sinus didapat :

$$\frac{DF}{\sin \angle DAF} = \frac{AD}{\sin \angle DFA} \quad \text{sedemikian hingga} \quad DF = \frac{AD \cdot \sin \angle DAF}{\sin \angle DFA}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{EF}{\sin \angle EAF} = \frac{AE}{\sin \angle AFE} \quad \text{sedemikian hingga} \quad EF = \frac{AE \cdot \sin \angle EAF}{\sin \angle AFE}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle DFA = \sin \angle AFE \quad \text{maka} \quad \frac{DF}{EF} = \frac{AD \cdot \sin \angle DAF}{AE \cdot \sin \angle EAF}.$$

Selanjutnya diketahui AA'' symmedian $\triangle ABC$ yang berarti AA'' konjugat isogonal dari AA' , menurut definisi : $\angle DAF \cong \angle CAA'$ dan $\angle EAF \cong \angle BAA'$.

$$\text{Dengan mensubstitusi sudut-sudut yang kongruen, diperoleh : } \frac{DF}{EF} = \frac{AD \cdot \sin \angle CAA'}{AE \cdot \sin \angle BAA'}.$$

$$\text{Telah dibuktikan : } \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} \quad \text{dan} \quad \frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{AB} \quad \text{maka} \quad \frac{DF}{EF} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} \quad \text{atau}$$

$$\frac{DF}{EF} = 1. \quad \text{Jadi } DF = FE \text{ sehingga } F \text{ merupakan titik tengah } \overline{DE} \text{ (terbukti).}$$



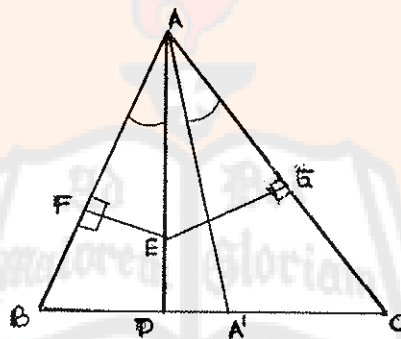
Teorema 3.4

Perbandingan jarak suatu titik yang terletak pada symmedian segitiga ke sisi disamping symmedian sama dengan perbandingan panjang dari sisi-sisi tersebut.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AD}$ merupakan symmedian dan $\overline{AA'}$ merupakan median. Titik E pada $\overline{AD}$.

Dibuktikan : $\frac{EF}{EG} = \frac{AB}{AC}$

Bukti:



Gambar 3.8. Ilustrasi pembuktian teorema 3.4

Titik E pada $\overline{AD}$, dilukis $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{EG} \perp \overline{AC}$. Dipandang $\triangle AFE$ dan $\triangle AGE$, dengan menggunakan rumus sinus diperoleh : $\sin \angle FAE = \frac{EF}{AE}$ atau

$EF = AE \cdot \sin \angle FAE$; dan $\sin \angle GAE = \frac{EG}{AE}$ atau $EG = AE \cdot \sin \angle GAE$. Selanjutnya :

$\frac{EF}{EG} = \frac{AE \cdot \sin \angle FAE}{AE \cdot \sin \angle GAE} = \frac{\sin \angle FAE}{\sin \angle GAE}$. Oleh karena $\angle FAE \cong \angle BAD \cong \angle CAA'$ dan

$\angle GAE \cong \angle CAD \cong \angle BAA'$, dengan mensubstitusikan sudut-sudut yang kongruen

diperoleh : $\frac{EF}{EG} = \frac{\sin \angle FAE}{\sin \angle GAE} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle BAA'}$.

Dipandang $\triangle ABA'$ dan $\triangle ACA'$, dengan menggunakan aturan sinus didapat :

$$\frac{BA'}{\sin \angle BAA'} = \frac{AB}{\sin \angle BA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad \sin \angle BAA' = \frac{BA' \cdot \sin \angle BA'A}{AB}; \quad \text{dan}$$

$$\frac{CA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{\sin \angle CA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad \sin \angle CAA' = \frac{CA' \cdot \sin \angle CA'A}{AC}. \quad \text{Oleh}$$

karena $\sin \angle BA'A = \sin \angle CA'A$ dan $BA' = CA'$ maka diperoleh

$$\frac{EF}{EG} = \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle BAA'} = \frac{CA' \cdot \sin \angle CA'A}{AC} \cdot \frac{AB}{BA' \cdot \sin \angle BA'A} = \frac{AB}{AC}. \quad \text{Jadi} \quad \frac{EF}{EG} = \frac{AB}{AC}$$

(terbukti).

Teorema 3.5

Perbandingan segmen-segmen yang dipisahkan oleh suatu symmedian yang membagi sisi yang berkorespondensi pada segitiga sama dengan perbandingan kuadrat panjang sisi-sisi yang berdampingan.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AD}$ merupakan symmediannya.

$$\text{Dibuktikan : } \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Bukti :

Dipandang $\triangle ABC$ seperti dalam gambar 3.8, $\overline{AA'}$ median dan $\overline{AD}$ symmediannya. Selanjutnya dipandang $\triangle ABA'$ dan $\triangle ACA'$, dengan menggunakan

$$\text{aturan sinus : } \frac{BA'}{\sin \angle BAA'} = \frac{AB}{\sin \angle BA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad BA' = \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{\sin \angle BA'A};$$

$$\text{dan} \quad \frac{CA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{\sin \angle CA'A} \quad \text{sedemikian hingga} \quad CA' = \frac{AC \cdot \sin \angle CAA'}{\sin \angle CA'A}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle BA'A = \sin \angle CA'A \quad \text{maka} \quad \frac{BA'}{CA'} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{AC \cdot \sin \angle CAA'}. \quad \text{Titik } A' \text{ merupakan titik}$$

tengah $\overline{BC}$ sehingga : $\frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{AC \cdot \sin \angle CAA'} = 1$ atau $AB \cdot \sin \angle BAA' = AC \cdot \sin \angle CAA'$,

selanjutnya dapat ditulis: $\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} = \frac{AC}{AB}$.

Sekarang dipandang $\triangle ABD$ dan $\triangle ADC$, dengan menggunakan aturan sinus :

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle BDA} \quad \text{sedemikian} \quad \text{hingga} \quad BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle BDA}; \quad \text{dan}$$

$$\frac{DC}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle CDA} \quad \text{sedemikian} \quad \text{hingga} \quad DC = \frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle CDA}. \quad \text{Oleh karena}$$

$$\sin \angle BDA = \sin \angle CDA \quad \text{maka} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{AC \cdot \sin \angle CAD}. \quad \text{Selanjutnya} \quad \angle BAD \cong \angle CAA'$$

$$\text{dan} \quad \angle CAD \cong \angle BAA' \quad \text{sehingga} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \sin \angle CAA'}{AC \cdot \sin \angle BAA'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad \text{Jadi}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad (\text{terbukti}).$$

B.2.2. Sifat-sifat Titik Symmedian (Titik Lemoine)

Dalam uraian berikut akan disajikan sifat dari titik symmedian (titik Lemoine). Oleh karena symmedian merupakan konjugat isogonal dari median, dalam hal ini titik symmedian (titik Lemoine) disebut konjugat isogonal dari titik median (titik berat). Dalam teorema 3.4 telah ditunjukkan bahwa titik yang terletak pada symmedian mempunyai perbandingan jarak ke sisi-sisi disamping symmedian segitiga yang diketahui sama dengan perbandingan panjang sisi-sisi tersebut. Jika p, q, dan r berturut-turut adalah jarak dari sebuah titik yang terletak pada symmedian ke sisi-sisi a, b, dan c dalam $\triangle ABC$, maka :

$$p : a = q : b = r : c \quad \text{atau} \quad p : q : r = a : b : c$$

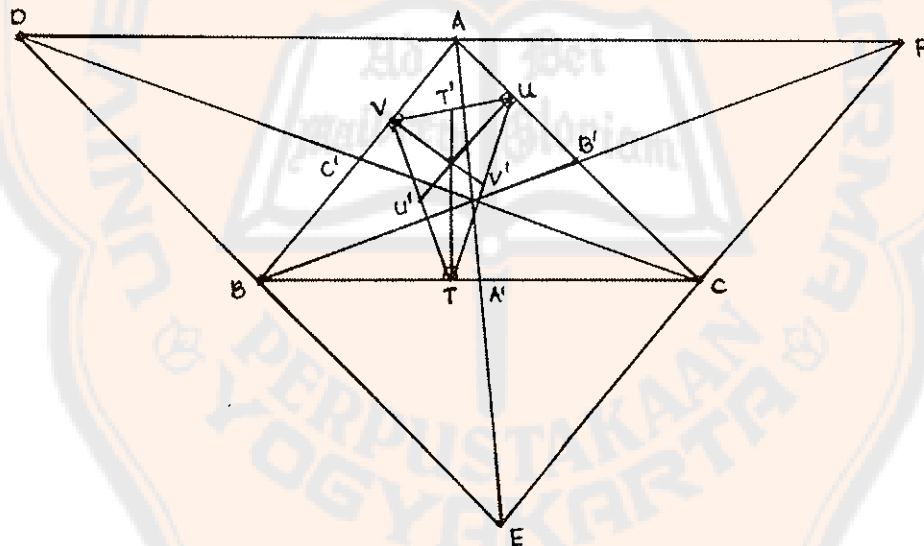
Teorema 3.6

Titik symmedian (titik Lemoine) segitiga yang diketahui merupakan titik berat segitiga yang dibentuk oleh titik kaki-titik kaki segmen-segmen yang ditarik dari titik symmedian tegak lurus pada sisi-sisi segitiga yang diketahui.

Diketahui : S adalah titik symmedian (titik Lemoine) $\triangle ABC$ dan $\triangle VTU$ merupakan segitiga yang dibentuk oleh titik-titik kaki dari segmen garis-segmen garis yang ditarik dari S tegak lurus pada sisi-sisi $\triangle ABC$.

Dibuktikan : S merupakan titik berat $\triangle VTU$

Bukti :



Gambar 3.9. Ilustrasi pembuktian teorema 3.6

Dilukis garis-garis melalui titik sudut A , B , dan C berturut-turut sejajar dengan $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ dan $\overline{AB}$ yang berpotongan di titik D , E , dan F . Kemudian dilukis pula median $\overline{CC'}$, $\overline{AA'}$, dan $\overline{BB'}$ berturut-turut pada sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$

yang melalui titik D, E, dan F sedemikian hingga ADBC, ABEC, dan ABCF merupakan jajargenjang.

Dipandang jajargenjang ADBC dengan diagonal-diagonal $\overline{CD}$ dan $\overline{BA}$: $\angle CBD \cong \angle TSU$ (keduanya merupakan suplemen dari $\angle ACB$), dan S merupakan titik symmedian $\triangle ABC$. $\overline{SU} \perp \overline{AC}$ dan $\overline{ST} \perp \overline{BC}$, menurut teorema 3.4 maka : $\frac{SU}{ST} = \frac{AC}{BC}$. Oleh karena $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$ dan $AC = DB$ diperoleh : $\frac{SU}{ST} = \frac{DB}{BC}$, maka $\triangle ADBC \approx \triangle UST$ (sisi-sudut-sisi) sehingga $\overline{CD}$ berkorespondensi dengan $\overline{TU}$.

Selanjutnya dilukis $\overline{VS}$ yang memotong $\overline{TU}$ di titik V' , diperoleh : $\angle VBT \cong \angle TSV'$ (keduanya suplemen dari $\angle VST$) atau $\angle C'BC \cong \angle TSV'$, dan $\angle BCD \cong \angle STU$ atau $\angle BCC' \cong \angle STV'$, maka $\triangle BCC' \approx \triangle STV'$ (sudut-sudut) sehingga $\overline{BC'}$ berkorespondensi dengan $\overline{SV'}$.

$\overline{BA}$ dan $\overline{CD}$ adalah diagonal-diagonal jajargenjang ADBC maka $BC' = C'A$ dan $CC' = C'D$. Oleh karena $\overline{CD}$ berkorespondensi dengan $\overline{TU}$ serta $\overline{BC'}$ berkorespondensi dengan $\overline{SV'}$ maka diperoleh : $TV' = V'U$ sehingga $\overline{VV'}$ merupakan median dari $\triangle VTU$ pada sisi $\overline{TU}$.

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa : $UT' = T'V$ sehingga $\overline{TT'}$ median $\triangle VTU$ pada sisi $\overline{UV}$ dan $TU' = U'V$ sehingga $\overline{UU'}$ median $\triangle VTU$ pada sisi $\overline{TV}$. Oleh karena $\overline{VV'}$, $\overline{TT'}$ dan $\overline{UU'}$ median $\triangle VTU$ maka dapat disimpulkan S adalah titik berat $\triangle VTU$.

C. Titik Brocard Segitiga

Pada sub bab ini akan dibahas titik Brocard segitiga, sifat-sifat titik Brocard yang disajikan dalam bentuk teorema-teorema dan sudut Brocard.

C.1. Titik Brocard Segitiga

Titik Brocard ditemukan oleh Henri Brocard (1845 – 1922), ditunjukkan sebagai titik potong tiga lingkaran yang dilukis pada segitiga yang diketahui.

Teorema 3.7

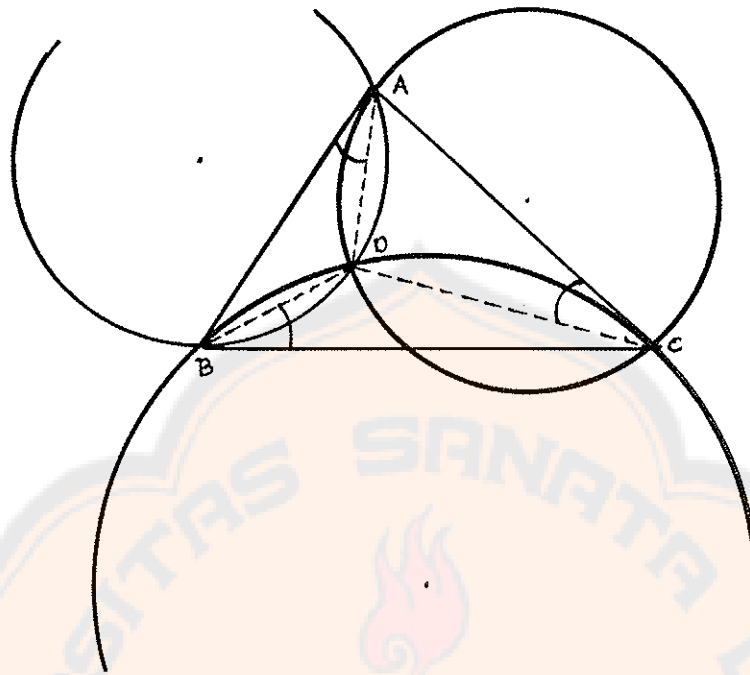
Tiga lingkaran, masing-masing memuat satu sisi segitiga sebagai tali busur dan sisi yang berdampingan sebagai garis singgung, diambil pada putaran yang searah berpotongan di satu titik yang disebut titik Brocard.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan dua lingkaran yang masing-masing memuat satu sisi sebagai tali busur dan sisi yang berdampingan sebagai garis singgung berpotongan di satu titik yaitu titik D.

Dibuktikan : lingkaran yang ketiga yang memuat satu sisi segitiga sebagai tali busur dan sisi disampingnya sebagai garis singgung akan melalui titik D.

Bukti :

Diambil arah positif (berlawanan dengan arah jarum jam), dalam gambar 3.10, lingkaran 1 memuat $\overline{AB}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{BC}$ di titik B; lingkaran kedua memuat $\overline{BC}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{CA}$ di titik C. Lingkaran 1 dan lingkaran 2 berpotongan di titik D.

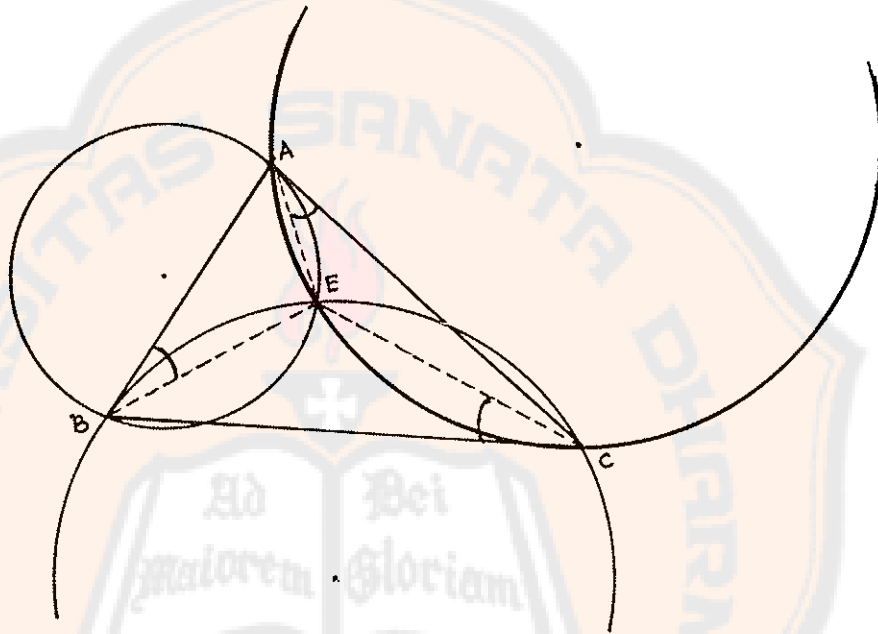


Gambar 3.10. Ilustrasi pembuktian teorema 3.7

Dipandang $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$: $\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot m\widehat{BD}$, dan $\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot m\widehat{BD}$, diperoleh : $\angle BAD \cong \angle CBD$. Dipandang $\triangle ADC$ dan $\triangle BCD$: $\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot m\widehat{DC}$, dan $\angle ACD = \frac{1}{2} \cdot m\widehat{DC}$, diperoleh : $\angle CBD \cong \angle ACD$. Oleh karena : $\angle BAD \cong \angle CBD$ dan $\angle CBD \cong \angle ACD$ maka $\angle BAD \cong \angle ACD$. Dengan demikian : $\angle BAD \cong \angle CBD \cong \angle ACD$. Lingkaran ketiga memuat $\overline{AC}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{AB}$ di titik A. $\overline{AD}$ termuat dalam $\angle ACD$, dan $\angle ACD \cong \angle BAD$ sehingga lingkaran ketiga juga melalui titik D. Titik D ini disebut titik Brocard yang pertama.

Dengan cara yang serupa, jika arah negatif (searah jarum jam) yang diambil, lingkaran 1 memuat $\overline{BA}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{AC}$ di titik A, lingkaran kedua memuat $\overline{AC}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{CB}$ di titik C, dan

lingkaran ketiga memuat $\overline{CB}$ sebagai tali busur dan menyinggung $\overline{BA}$ di titik B. Misalkan lingkaran 1 dan lingkaran 2 berpotongan di satu titik yaitu titik E, dapat dibuktikan bahwa lingkaran ketiga juga melalui titik E (gambar 3.11). Titik E ini disebut titik Brocard kedua.



Gambar 3.11. Ilustrasi pembuktian teorema 3.7 (diambil arah negatif)

Jadi ketiga lingkaran yang dilukis pada segitiga yang diketahui berpotongan di satu titik yang disebut titik Brocard. Segmen garis-segmen garis yang menghubungkan setiap titik sudut segitiga dengan titik Brocard disebut sinar-sinar Brocard.

Definisi 3.4 (Konjugat Isogonal Titik Brocard)

Dua titik disebut konjugat isogonal jika salah satu titik merupakan titik potong dari garis-garis yang konjugat isogonal dengan garis-garis yang berpotongan di titik yang lain.

Apabila terdapat dua titik Brocard dalam suatu segitiga (titik Brocard pertama dan titik Brocard kedua) maka dapat dibuktikan bahwa dua titik Brocard tersebut konjugat isogonal.

C.2. Sifat-sifat Titik Brocard

Titik-titik Brocard dalam segitiga adalah salah satu titik sedemikian hingga sudut-sudut yang diapit oleh segmen garis-segmen garis yang menghubungkan titik Brocard dengan titik sudut-titik sudut segitiga dan sisi-sisi segitiga sebagai garis singgung dalam urutan putaran searah kongruen.

Berikut disajikan sifat-sifat titik Brocard:

Teorema 3.8

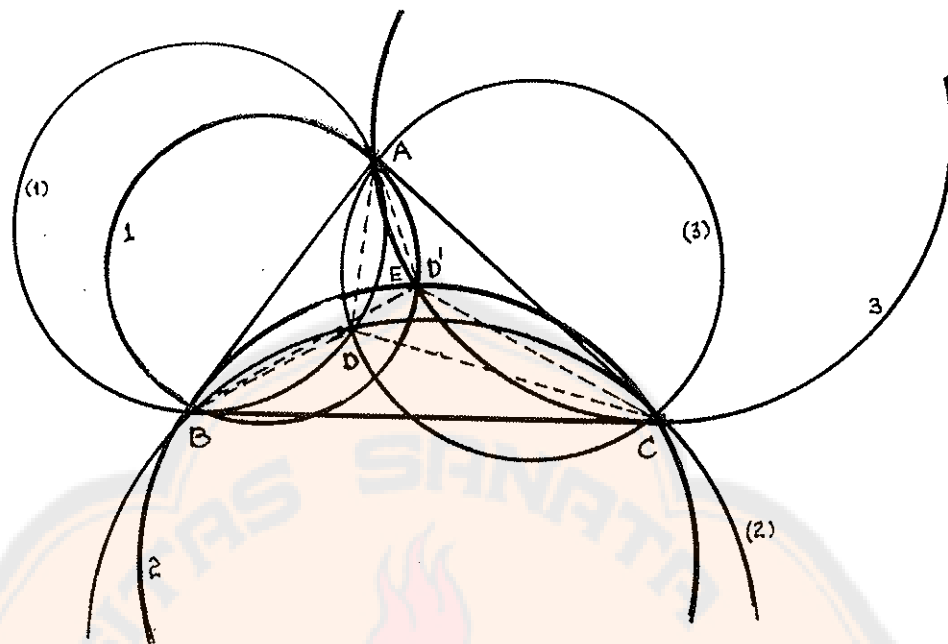
Titik-titik Brocard merupakan titik-titik konjugat isogonal dalam segitiga.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan titik D dan E merupakan titik-titik Brocard.

Dibuktikan : titik E konjugat isogonal dari titik D

Bukti :

Misalkan titik D' adalah konjugat isogonal dari titik D, diperoleh :
 $\angle BAD \cong \angle D'AC$, $\angle CBD \cong \angle D'BA$ dan $\angle ACD \cong \angle D'CB$, tetapi diketahui :
 $\angle BAD \cong \angle CBD \cong \angle ACD$. Dengan demikian $\angle D'AC \cong \angle D'BA \cong \angle D'CB$ yang berarti bahwa titik D' berimpit dengan titik E karena diketahui $\angle EAC \cong \angle EBA \cong \angle ECB$. Jadi titik E merupakan konjugat isogonal titik D.



Gambar 3.12. Ilustrasi pembuktian teorema 3.8

Teorema 3.9

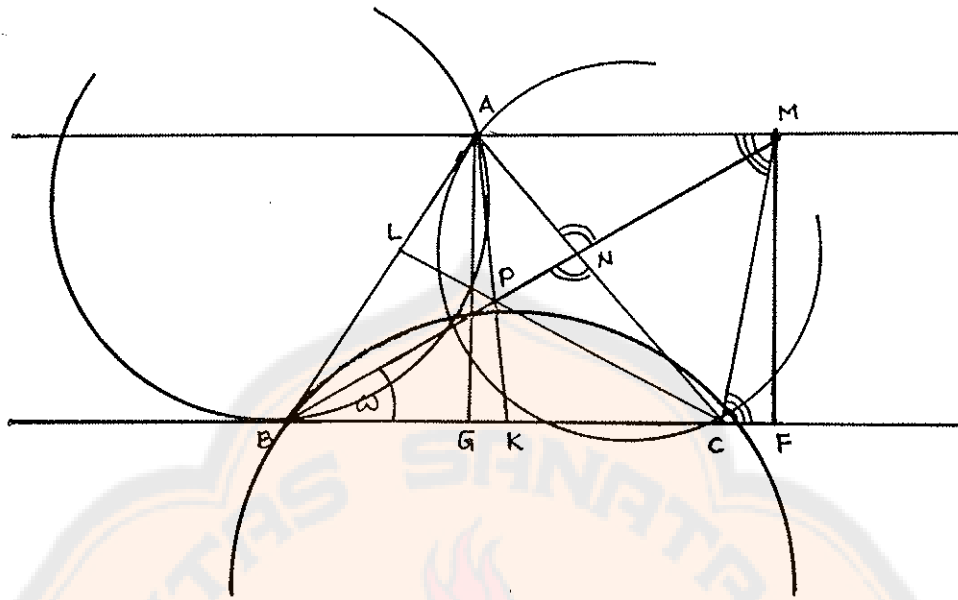
Median yang melalui salah satu titik sudut segitiga, sinar-sinar Brocard pertama (kedua) yang melalui titik sudut kedua dan symmedian yang melalui titik sudut ketiga, diambil arah positif atau negatif akan berpotongan di satu titik.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan $\overline{AK}$ median, $\overline{BD}$ sinar-sinar Brocard pertama dan $\overline{CL}$ symmediannya.

Dibuktikan : $\overline{AK}$, $\overline{BD}$ dan $\overline{CL}$ berpotongan di satu titik

Bukti :

Dilukis garis melalui titik A yang sejajar dengan $\overline{BC}$, kemudian dilukis pula $\overline{BD}$ yang memotong $\overline{AC}$ di titik N dan memotong garis yang sejajar dengan $\overline{BC}$ di titik M.



Gambar 3.13. Ilustrasi pembuktian teorema 3.9

Dipandang $\triangle NCB$ dan $\triangle NAM$: $\angle MNA \cong \angle BNC$ dan $\angle AMN \cong \angle CBN$, maka $\triangle NCB \approx \triangle NAM$ (sudut-sudut) diperoleh : $NC : NA = CB : AM$, atau $NC : NA = a : AM$

Dipandang $\triangle ABC$ dan $\triangle MCA$: $\angle CAB \cong \angle AMC \cong \angle MCF$, akibatnya $\angle ABC \cong \angle MCA$. $\overline{CA} \cong \overline{CA}$, $\angle ABC \cong \angle MCA$ dan $\angle BCA \cong \angle CAM$, maka $\triangle ABC \approx \triangle MCA$ (sudut-sisi-sudut) diperoleh : $BC : CA = CA : AM$, atau $a : b = b : AM$. Dengan demikian : $NC : NA = a^2 : b^2$.

Selanjutnya $\overline{CL}$ symmedian pada $\overline{AB}$, dengan menggunakan teorema 3.5 : $AL : LB = b^2 : a^2$. Titik K adalah titik tengah $\overline{BC}$ sehingga hasil kali

perbandingan segmen-segmen : $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{b^2} = 1$. Menurut kebalikan

teorema Ceva, maka $\overline{AK}$, $\overline{BD}$ dan $\overline{CL}$ berpotongan di satu titik yaitu titik P.

C.3. Sudut Brocard

Sinar-sinar Brocard yang dilukis melalui titik sudut segitiga dan titik Brocard membentuk sudut-sudut dengan sisi-sisi segitiga. Sudut-sudut yang dibentuk oleh sinar-sinar Brocard dengan sisi-sisi segitiga sebagai garis singgung ketiga lingkaran disebut sudut-sudut Brocard. Pada gambar 3.12, $\angle BAD \cong \angle CBD \cong \angle ACD$ merupakan sudut-sudut Brocard. Besar sudut Brocard dapat dicari sebagai berikut :

Dengan menggunakan gambar 3.13, $\overline{AM} \parallel \overline{BC}$, dilukis $\overline{AG} \perp \overline{BC}$ dan $\overline{MF} \perp \overline{BC}$ sehingga $AG = MF$, maka : $\text{ctg} \angle CBP = \text{ctg} \omega = \frac{BF}{FM} = \frac{BG + GC + CF}{FM}$. Oleh karena $FM = GA$, diperoleh :

$$\text{ctg} \omega = \frac{BG}{GA} + \frac{GC}{GA} + \frac{CF}{FM} \quad \text{atau} \quad \text{ctg} \omega = \text{ctg} \angle A + \text{ctg} \angle B + \text{ctg} \angle C.$$

Selanjutnya jika dipandang $\triangle ABC$ diperoleh : $NC : NA = a^2 : b^2$ dan $NC + NA = b$. Dengan demikian : $\frac{NC}{NA} = \frac{a^2}{b^2}$ atau $NC = \frac{a^2 \cdot NA}{b^2}$, dengan mensubstitusikan $NA = b - NC$, diperoleh : $NC = \frac{a^2 \cdot b}{a^2 + b^2}$. Oleh karena $NC = \frac{a^2 \cdot b}{a^2 + b^2}$ maka $NA = b - \frac{a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$.

Dipandang $\triangle BNC$, dengan menggunakan aturan sinus : $\frac{\sin \angle BNC}{\sin \omega} = \frac{BC}{NC}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle (180 - (C + \omega))}{\sin \omega} = \frac{BC}{NC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin \angle (C + \omega)}{\sin \omega} = \frac{a}{a^2 \cdot b / a^2 + b^2}, \text{ diperoleh :}$$

$$\frac{\sin \angle(C + \omega)}{\sin \omega} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \text{ Nilai maksimum } \sin \angle(C + \omega) \text{ adalah } 1, \text{ maka nilai } \sin \omega$$

tidak lebih dari $\frac{1}{2}$ yang berarti sudut maksimum ω adalah 30° .

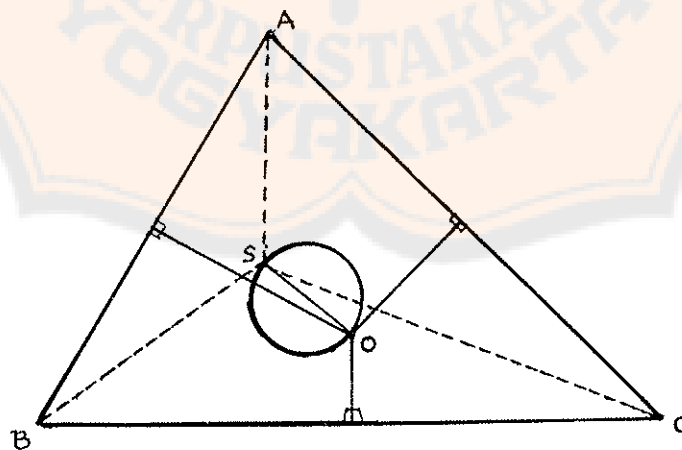
D. Lingkaran Brocard

Berikut ini disajikan lingkaran Brocard dan teorema-teorema serta pembuktiannya yang berhubungan dengan teorema-teorema sebelumnya tentang symmedian dan juga titik Brocard.

Definisi 3.5 (Lingkaran Brocard)

Lingkaran yang mempunyai diameter dengan ujung-ujungnya berturut-turut titik symmedian (titik Lemoine) dan titik pusat lingkaran luar segitiga yang diketahui disebut lingkaran Brocard.

Jika diketahui $\triangle ABC$ dengan O titik pusat lingkaran luar dan S titik symmedian (gambar 3.14), lingkaran dengan diameter $\overline{OS}$ merupakan lingkaran Brocard.



Gambar 3.14. Lingkaran Brocard $\triangle ABC$

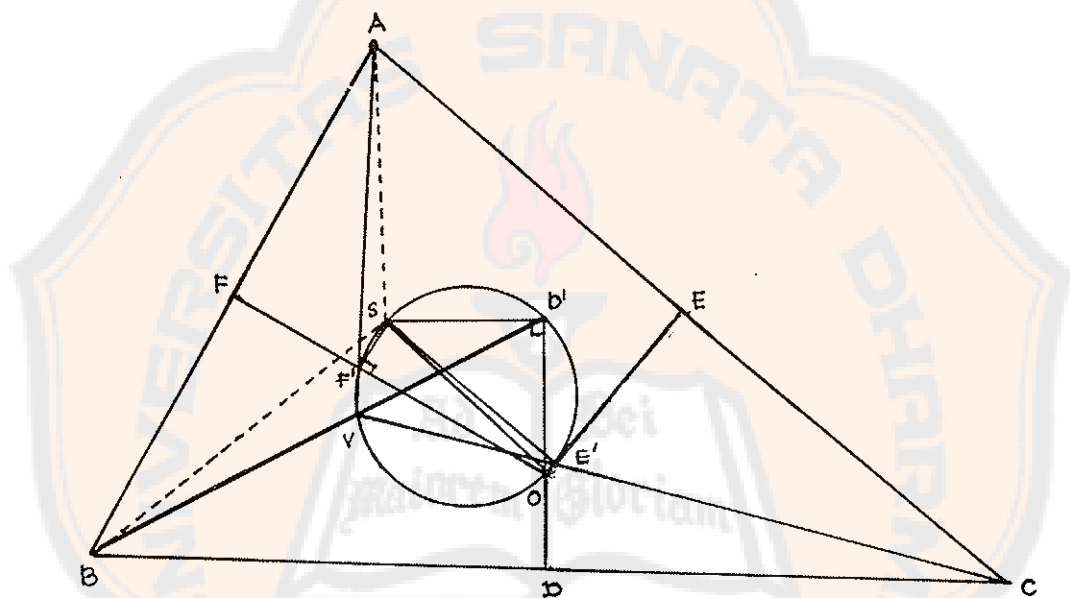
Teorema 3.10

Titik-titik Brocard segitiga terletak pada lingkaran Brocard.

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan O titik pusat lingkaran luar dan S titik symmediannya.

Dibuktikan : titik-titik Brocard $\triangle ABC$ terletak pada lingkaran Brocard

Bukti :



Gambar 3.15. Ilustrasi pembuktian teorema 3.10

$\overline{OD}$, $\overline{OE}$, dan $\overline{OF}$ berturut-turut merupakan garis-garis sumbu $\triangle ABC$ pada $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{AB}$ memotong lingkaran Brocard di titik yang kedua yaitu titik D' , E' , dan F' .

Dipandang $\triangle SD'O$, $\triangle SE'O$, dan $\triangle SF'O$: $\angle SD'O \cong \angle SE'O \cong \angle SF'O$ (menghadap busur setengah lingkaran) sehingga $m\angle SD'O = m\angle SE'O = m\angle SF'O = 90^\circ$. Diperoleh $\triangle SD'O$, $\triangle SE'O$, dan $\triangle SF'O$ merupakan segitiga siku-siku. Oleh karena itu $\overline{SD'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{SE'} \parallel \overline{AC}$, dan $\overline{SF'} \parallel \overline{AB}$. Hal ini berarti bahwa jarak titik S ke sisi-sisi $\triangle ABC$ sama dengan jarak sepanjang

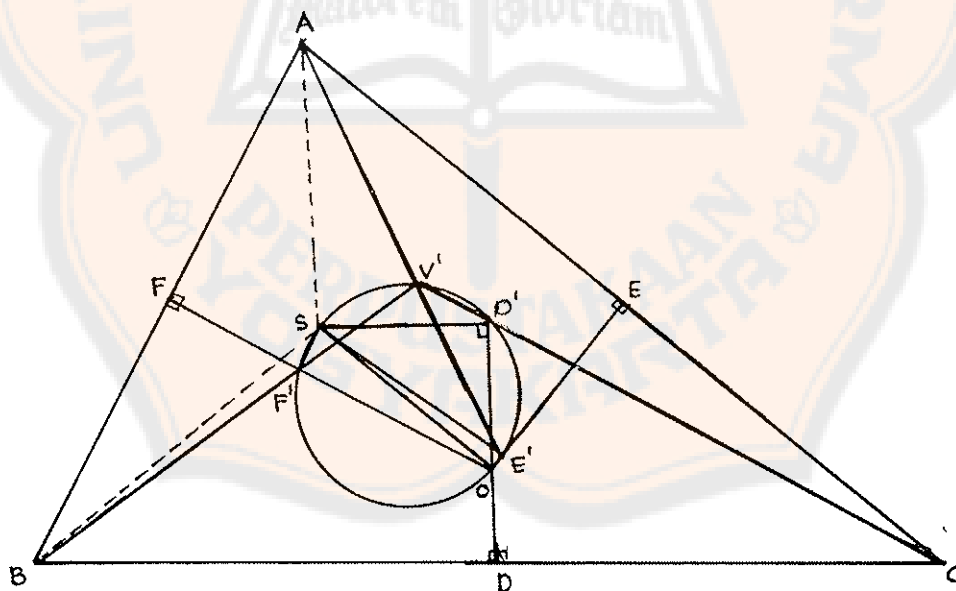
garis sumbu dari titik D' , E' , dan F' berturut-turut ke titik D , E , dan F . Dengan

teorema 3.4 : $\frac{D'D}{DB} = \frac{E'E}{EC} = \frac{F'F}{FA}$, maka $\Delta D'DB \approx \Delta E'EC \approx \Delta F'FA$

sedemikian hingga $\angle DBD' \cong \angle ECE' \cong \angle FAF'$ atau $\angle CBD' \cong \angle ACE' \cong \angle BAF'$.

Dalam hal ini sinar-sinar $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{CE'}$ dan $\overrightarrow{AF'}$ berpotongan di satu titik yaitu titik Brocard V . Selanjutnya $\angle AF'F \cong \angle VF'O \cong \angle VD'O$ dan $F'VOD'$ merupakan segiempat dalam lingkaran sehingga titik Brocard V terletak pada lingkaran yaitu lingkaran Brocard.

Dengan cara yang serupa akan ditunjukkan bahwa sinar-sinar $\overrightarrow{AE'}$, $\overrightarrow{BF'}$ dan $\overrightarrow{CD'}$ juga berpotongan di satu titik yaitu titik Brocard V' dan titik V' terletak pada lingkaran Brocard. Untuk itu diperhatikan gambar 3.16 berikut ini :



Gambar 3.16. Ilustrasi pembuktian teorema 3.10

Telah dibuktikan bahwa $\Delta SD'O$, $\Delta SE'O$, dan $\Delta SF'O$ merupakan segitiga siku-siku dan $\overline{SD'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{SE'} \parallel \overline{AC}$, dan $\overline{SF'} \parallel \overline{AB}$ yang berarti bahwa jarak titik S

ke sisi-sisi $\triangle ABC$ sama dengan jarak sepanjang garis sumbu dari titik D' , E' , dan F' berturut-turut ke titik D , E , dan F . Dengan teorema 3.4 : $\frac{D'D}{DC} = \frac{E'E}{EA} = \frac{F'F}{FA}$, maka $\triangle D'DC \approx \triangle E'E'A \approx \triangle F'F'B$ sedemikian hingga $\angle DCD' \cong \angle EAE' \cong \angle FBF'$ atau $\angle BCD' \cong \angle CAE' \cong \angle ABF'$. Dalam hal ini sinar-sinar $\overrightarrow{CD'}$, $\overrightarrow{AE'}$ dan $\overrightarrow{BF'}$ berpotongan di satu titik yaitu titik Brocard V' . Selanjutnya $\angle BF'F \cong \angle V'F'O \cong \angle V'SO$ dan $F'SV'O$ merupakan segiempat dalam lingkaran sehingga titik Brocard V' terletak pada lingkaran yaitu lingkaran Brocard.

E. Segitiga-segitiga Brocard

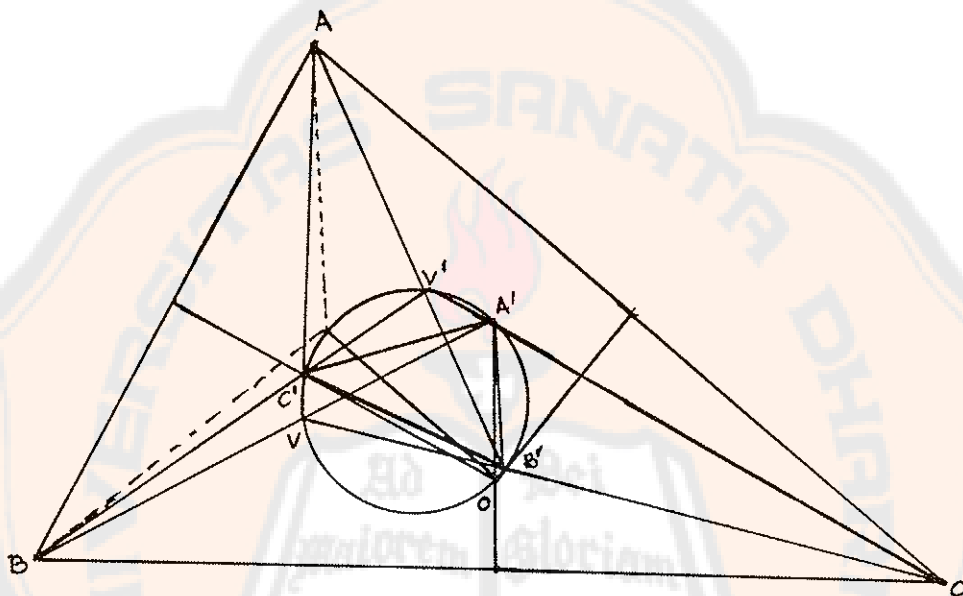
Segitiga-segitiga yang dibahas berikut ini merupakan segitiga yang terletak dalam lingkaran Brocard. Segitiga pertama yang akan dibahas adalah segitiga dengan titik sudut-titik sudutnya adalah titik potong sinar-sinar Brocard segitiga dengan lingkaran Brocard, sedang segitiga kedua adalah segitiga dengan titik sudut-titik sudutnya adalah titik potong kedua symmedian-symmedian segitiga dengan lingkaran Brocard.

E.1. Segitiga Brocard Pertama

Definisi 3.6 (Segitiga Brocard Pertama)

Segitiga dengan titik-titik sudutnya merupakan titik-titik potong kedua sinar-sinar Brocard segitiga yang diketahui dengan lingkaran Brocard disebut segitiga Brocard pertama.

Jika diketahui $\triangle ABC$ dengan O merupakan titik pusat lingkaran luar dan S merupakan titik symmedian sedemikian hingga $\overline{OS}$ diameter lingkaran Brocard, dan titik A' , B' , dan C' berturut-turut adalah titik potong-titik potong kedua sinar-sinar Brocard dengan lingkaran Brocard maka $\triangle A'B'C'$ disebut segitiga Brocard pertama.



Gambar 3.17. Segitiga Brocard pertama

Teorema 3.11

Segitiga Brocard pertama sebangun dengan segitiga yang diketahui

Diketahui : $\triangle ABC$ dengan O merupakan titik pusat lingkaran luar dan S merupakan titik symmedian sedemikian hingga $\overline{OS}$ diameter lingkaran Brocard.

Dibuktikan : $\triangle A'B'C' \approx \triangle ABC$

Bukti :

Dengan memperhatikan gambar 3.17, $\triangle A'B'C'$ adalah segitiga Brocard pertama dengan $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, dan $\overline{CV}$ sinar-sinar Brocard. $\angle A'VC'$ merupakan sudut

luar $\triangle ABV$, $m\angle ABC = m\angle ABV + m\angle VBC$, dengan $m\angle VBC = m\angle BAV$ diperoleh : $m\angle ABC = m\angle A'VC'$ atau $\angle ABC \cong \angle A'VC'$. Selanjutnya $\angle A'VC' \cong \angle A'B'C'$. Dengan demikian : $\angle ABC \cong \angle A'VC' \cong \angle A'B'C'$.

$\angle B'VA'$ merupakan sudut luar $\triangle BVC$, $m\angle ACB = m\angle ACV + m\angle VCB$, dengan $m\angle ACV = m\angle VBC$ diperoleh : $m\angle ACB = m\angle B'VA'$ atau $\angle ACB \cong \angle B'VA'$. Selanjutnya $\angle B'VA' \cong \angle A'C'B'$. Dengan demikian : $\angle ACB \cong \angle B'VA' \cong \angle A'C'B'$. Oleh karena $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ dan $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ maka $\triangle A'B'C' \approx \triangle ABC$ (sudut-sudut).

Teorema 3.12

Tiga garis masing-masing melalui titik sudut segitiga yang diketahui dan paralel dengan sisi-sisi yang berkorespondensi pada segitiga Brocard pertama, bertemu di satu titik yang terletak pada lingkaran luar segitiga yang diketahui.

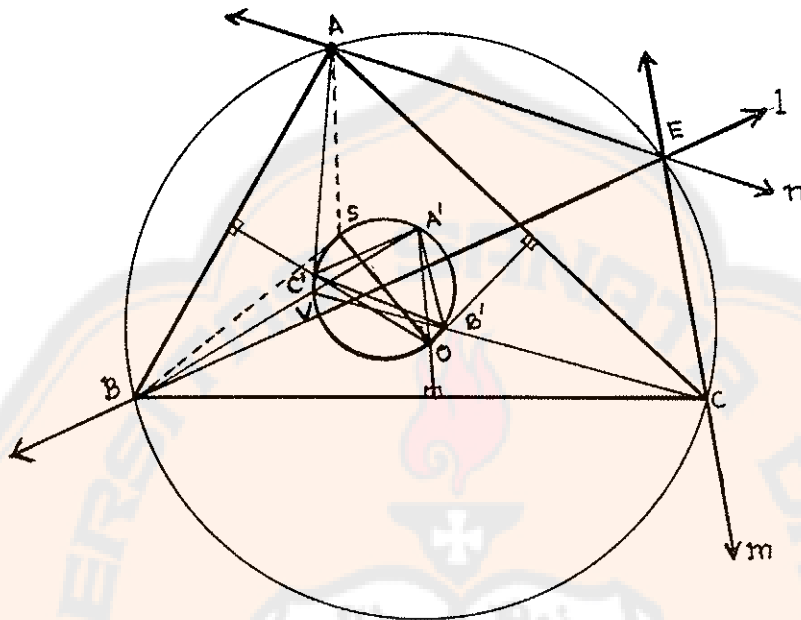
Diketahui : $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ yang merupakan segitiga Brocard pertama, garis l dan m berturut-turut melalui titik B dan C paralel dengan $\overline{C'A'}$ dan $\overline{A'B'}$ berpotongan di titik E

Dibuktikan : Garis ketiga yang melalui titik A paralel dengan $\overline{C'B'}$ melalui titik E .

Bukti :

Garis $l \parallel \overline{C'A'}$ dan garis $m \parallel \overline{A'B'}$, keduanya berpotongan di E , maka $\angle BEC \cong \angle C'A'B' \cong \angle BAC$, yang berarti titik B , C , E , dan A termuat dalam satu lingkaran. Dalam hal ini : $\angle AEB \cong \angle ACB \cong \angle A'C'B'$ sehingga $\overline{AE} \parallel \overline{C'B'}$. Jadi

garis l , m , dan n berpotongan di satu titik yaitu titik E yang terletak pada lingkaran luar $\triangle ABC$.



Gambar 3.18. Ilustrasi pembuktian teorema 3.12

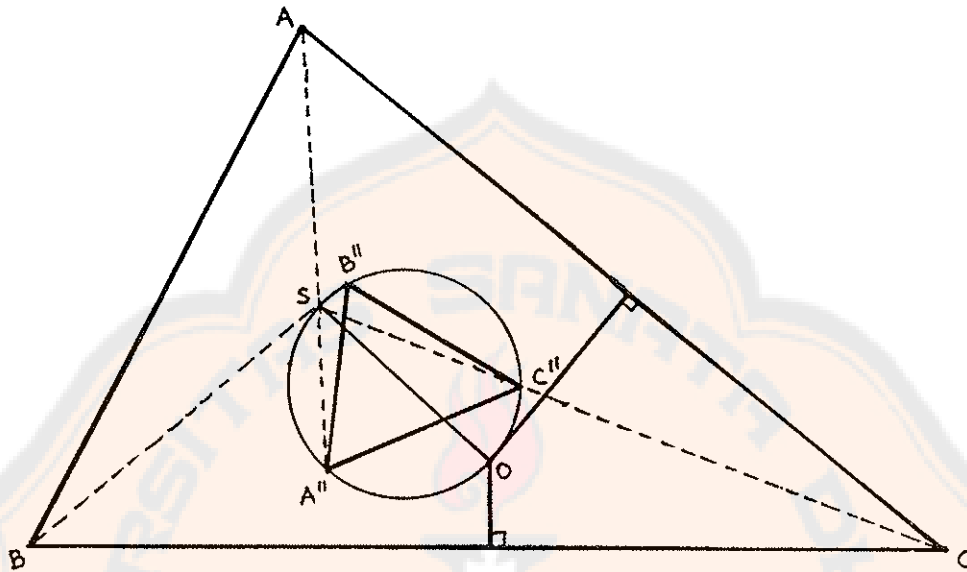
E.2. Segitiga Brocard Kedua

Definisi 3.7 (Segitiga Brocard Kedua)

Segitiga dengan titik-titik sudutnya merupakan titik potong kedua symmedian-symmedian segitiga yang diketahui dengan lingkaran Brocard disebut segitiga Brocard kedua.

Apabila diketahui $\triangle ABC$ dengan O merupakan titik pusat lingkaran luar dan S merupakan titik symmedian sedemikian hingga $\overline{OS}$ diameter lingkaran Brocard, titik-titik A'' , B'' , dan C'' berturut-turut adalah titik potong-titik potong kedua

symmedian-symmedian segitiga $\triangle ABC$ dengan lingkaran Brocard, maka $\triangle A''B''C''$ yang dibentuk merupakan segitiga Brocard kedua.



Gambar 3.19. Segitiga Brocard kedua

Teorema 3.14

Setiap titik sudut segitiga Brocard kedua merupakan titik tengah tali busur-tali busur lingkaran luar segitiga yang diketahui, yaitu tali busur yang melalui titik symmedian.

Diketahui : $\triangle ABC$ dan $\triangle A''B''C''$ merupakan segitiga Brocard kedua

Dibuktikan : $AA'' = A''D$; $BB'' = B''E$; dan $CC'' = C''F$

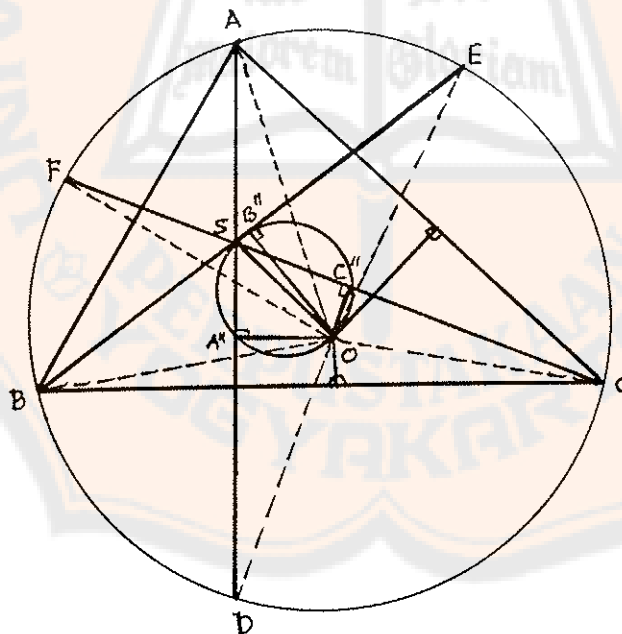
Bukti :

Dipandang $\triangle SA''O$, $\triangle SB''O$, dan $\triangle SC''O$: $\angle SA''O \cong \angle SB''O \cong \angle SC''O$
 (menghadap busur setengah lingkaran), sehingga
 $m\angle SA''O = m\angle SB''O = m\angle SC''O = 90$. Dengan demikian $\triangle SA''O$, $\triangle SB''O$, dan
 $\triangle SC''O$ merupakan segitiga siku-siku berturut-turut di titik A'' , B'' , dan C'' .

Dipandang $\triangle AA''O$, dan $\triangle DA''O$ (keduanya siku-siku di titik A''), $A''O = A''O$ dan $OA = OD$, maka $AA'' = DA''$. Selanjutnya titik A'' merupakan titik tengah $\overline{AD}$.

Dipandang $\triangle CC''O$, dan $\triangle FC''O$ (keduanya siku-siku di titik C''), $C''O = C''O$ dan $OC = OF$, maka $CC'' = FC''$. Selanjutnya titik C'' merupakan titik tengah $\overline{CF}$.

Dipandang $\triangle BB''O$, dan $\triangle EB''O$ (keduanya siku-siku di titik B''), $B''O = B''O$ dan $OB = OE$, maka $BB'' = EB''$. Selanjutnya titik B'' merupakan titik tengah $\overline{BE}$. Jadi titik A'' , B'' , dan C'' merupakan titik tengah tali busur lingkaran luar $\triangle ABC$.



Gambar 3.20. Ilustrasi pembuktian teorema 3.14

BAB IV

PENUTUP

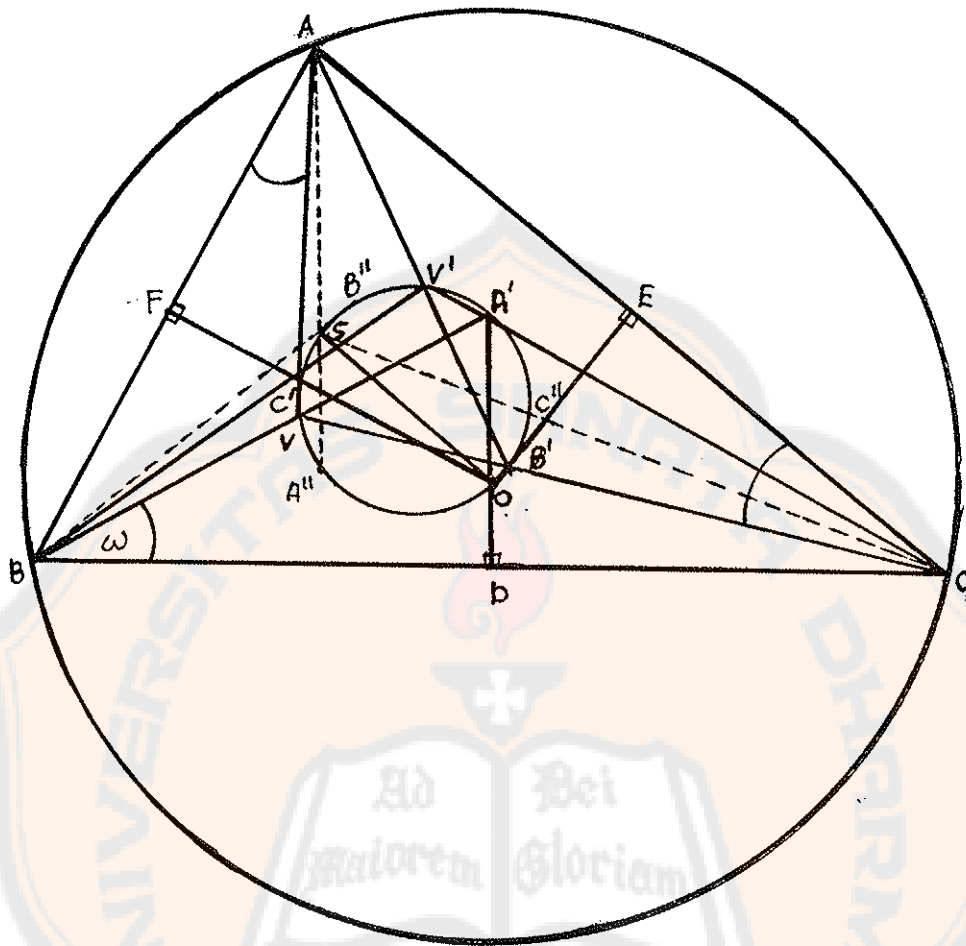
A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian dalam bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Dua segmen garis yang melalui salah satu titik sudut segitiga yang telah dilukis garis bagi sudutnya sedemikian hingga sudut-sudut yang dibentuk oleh tiap garis dan garis bagi sudut kongruen, kedua garis itu disebut garis-garis isogonal. Salah satu garis merupakan konjugat isogonal dari garis yang lain. Apabila terdapat tiga segmen garis yang dilukis dari titik sudut-titik sudut segitiga ke sisi-sisi dihadapannya berpotongan di satu titik, maka garis-garis konjugat isogonalnya juga berpotongan di satu titik. Dua titik potong tersebut merupakan pasangan titik-titik konjugat isogonal dalam segitiga.
2. Symmedian-symmedian segitiga adalah konjugat isogonal dari median (garis berat). Oleh karena ketiga median (garis berat) segitiga berpotongan di satu titik yaitu titik berat, ketiga symmedianpun juga berpotongan di satu titik yang disebut titik symmedian (titik Lemoine). Dengan demikian, titik konjugat isogonal dari titik berat adalah titik symmedian (titik Lemoine).
3. Ketiga lingkaran dilukis pada segitiga, masing-masing lingkaran memuat satu sisi segitiga sebagai tali busur dan sisi disampingnya sebagai garis singgung lingkaran, ketiga lingkaran itu berpotongan di satu titik yang disebut titik Brocard. Ketiga lingkaran harus dilukis dalam urutan putaran yang searah, yaitu

berlawanan dengan arah jarum jam atau searah jarum jam. Jika berlawanan dengan arah jarum jam, akan diperoleh titik Brocard pertama, sedang jika searah diperoleh titik Brocard kedua. Titik Brocard kedua merupakan titik-titik konjugat isogonal dari titik Brocard pertama. Segmen-segmen garis yang menghubungkan setiap titik sudut segitiga dengan titik-titik Brocard disebut sinar-sinar Brocard dan sudut-sudut yang dibentuk oleh sinar-sinar Brocard dengan sisi-sisi segitiga yang merupakan garis singgung disebut sudut-sudut Brocard. Ketiga sudut Brocard adalah kongruen.

4. Lingkaran dengan diameter sebagai garis hubung antara titik symmedian (titik Lemoine) dan titik pusat lingkaran luar segitiga yang diketahui disebut lingkaran Brocard. Titik-titik Brocard dalam segitiga terletak pada lingkaran Brocard, oleh karena itu titik-titik tersebut merupakan titik potong pertama sinar-sinar Brocard dengan lingkaran Brocard.
5. Sinar-sinar Brocard atau perpanjangannya juga akan memotong lingkaran brocard di titik potong yang kedua. Segmen-segmen garis yang menghubungkan titik-titik potong kedua sinar-sinar Brocard dan lingkaran Brocard membentuk segitiga yang dikenal sebagai segitiga Brocard pertama. Segitiga Brocard pertama ini sebangun dengan segitiga yang diketahui. Selain segitiga Brocard pertama, dapat dilukis pula segitiga Brocard kedua dengan cara menghubungkan titik-titik potona kedua symmedian-symmedian segitiga dengan lingkaran Brocard. Ketiga titik sudut segitiga Brocard kedua merupakan titik tengah tali busur-tali busur lingkaran luar segitiga yang diketahui, yaitu tali busur yang melalui titik symmedian (titik Lemoine).



Gambar 4.1. Titik symmedian, titik Brocard, lingkaran Brocard dan segitiga-segitiga Brocard dalam $\triangle ABC$

B. Saran

Setelah penulis menyelesaikan skripsi ini, ternyata topik ini sungguh menarik untuk dipelajari. Topik ini membahas adanya hubungan antara garis-garis isogonal, titik symmedian (titik Lemoine), titik Brocard, dan lingkaran Brocard sehingga dapat dilukis segitiga-segitiga Brocard dalam lingkaran Brocard.

Sebenarnya masih banyak hal lain dari titik-titik, garis-garis dan lingkaran-lingkaran yang dapat dijumpai dalam segitiga, misalnya garis simson, Teorema Miquel, lingkaran symmedian. Topik-topik tersebut dapat diangkat sebagai topik skripsi ataupun dipelajari lebih lanjut untuk menambah pengetahuan tentang geometri, khususnya tentang segitiga.



DAFTAR PUSTAKA

- Adler, Claire F.(1967). Modern Geometry. New York : Mc Graw-Hill Book Co, Inc
- Brothers, Laidlaw. (1987). Geometry. New York : A Division of Double day and Company, Inc.
- Davis, David R. (1957). Modern College Geometry. Reading, Mass :Addison – Wesley Publishing Co. Inc.
- Eves , Howard. (1983). An Introduction to The History of Mathematics, Fifth Edition. New York : Sounders College Publishing
- Moise Edwin E. (1974). Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, 2nd ed. Reading , Mass : Addison – Wesley Publishing Co, Inc.
- Smart, James R. (1967). Introduction Geometry. California : Brooks / Cole Publishing Company.
- Smart, James R. (1998). Modern Geomerics, 5th ed. San Jose State University: Brook / Cole Publishing Company.
- Wallace, Edward C. (1992). Roads to Geometry. New Jersey : Englewood Cliffs.

