TIGA MASALAH GEOMETRI YANG TERMASHUR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

S. WIDISUNARTI

NIM : 971414014

NIRM : 970051120501120013

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2002

SKRIPSI

TIGA MASALAH GEOMETRI

YANG TERMASHUR

Oleh :

S. WI[illegible]UNARTI

NIM : 971414014

NIRM : 9700[illegible]1205[illegible]0013

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A Tanggal : 26 September 2002

SKRIPSI

TIGA MASALAH GEOMETRI

YANG TERMASHUR

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

S. Widisunarti
NIM : 971414014
NIRM : 970051120501120013

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 31 Agustus 2002 dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekertaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	: Prof. Dra. M[illegible]harti [illegible]	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd.	....

Yogyakarta, 31 Agustus 2002
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M. Pd.

" Mintalah, maka akan diberikan kepadamu;

carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan

dibukakan bagimu" (Mat 7:7)

Kupersembahkan skripsi ini untuk:

♥ *Bunda Maria*

♥ *Bapak dan Ibu, saudara kembarku Widyastuti,*

adikku Vitri

♥ *Teman-temanku yang telah membantu dan menyemangatiku*

Tanti dan mas Jabar, Novi,

Suryanti dan Upik terimakasih atas doa-doanya.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 31 Agustus 2002

Penulis

S. Widisunarti

ABSTRAK

Sejak zaman Yunani kuno, terdapat tiga masalah geometri yang termashur, yang belum bisa dipecahkan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, yaitu Duplikasi kubus, Membagi tiga sama sebarang sudut dan Mempersegikan lingkaran. Selama berabad-abad ketiga masalah tersebut belum dapat dipecahkan.

Pada awal abad ke-19 dibuktikan bahwa ketiga masalah tersebut tidak mungkin diselesaikan, dengan menerapkan teori-teori aljabar modern. Suatu field E disebut perluasan field dari F jika E memuat F sebagai subfieldnya. Jika E perluasan field F dan $a \in E$, maka $F(a)$ merupakan subfield terkecil dari E yang memuat F dan a. Jika $p(x) \in F[x]$ polinom berderajat n yang tak terurai atas field F maka ring faktor $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ adalah perluasan dari field F dan $p(x)$ mempunyai suatu penyelesaian α dalam K dan dipenuhi $[F[x]/\langle p(x) \rangle : F] = [F(\alpha) : F] = n$.

Suatu bilangan α disebut bilangan konstruktibel, jika dapat dilukis segmen garis dengan panjang α, dengan sejumlah langkah-langkah berhingga penggunaan penggaris dan jangka dimulai dari suatu satuan panjang yang diketahui.

Karena dibuktikan $\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel, maka tidak mungkin melukis suatu kubus, yang volumenya dua kali volume kubus yang diketahui hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Karena dibuktikan cos 20° bukan bilangan konstruktibel, maka sudut 60° tidak dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama, sehingga dapat disimpulkan tidak mungkin membagi tiga sama sebarang sudut hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

F. Lindemann membuktikan bahwa bilangan π bersifat transenden atas field $\mathbf{Q}$. Karena $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}):\mathbf{Q}]$ tak berhingga maka $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel, sehingga tidak mungkin melukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran yang diketahui hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

ABSTRACT

Since the ancient Greeks period, there were three famous geometry problems that could not be solved only by unmarked ruler and compass, they were: The duplication of the circle, The trisection of the arbitrary angle, and The quadrature of the circle. During centuries, these three problems can not be solved.

In the beginning of nineteenth century, it is proved that these three problems were impossible to finish, using theories of modern algebra. A field E is called a field extension of F if E contains F as these subfield. If $a \in E$ then $F(a)$ is the smallest subfield of E containing a and F. If $p(x) \in F[x]$ is an irreducible polynomial of degree n over F and then quotient ring $K = F[x]/\langle p(x)\rangle$ is a field extension of F and $p(x)$ has a root α in K and $[F[x]/\langle p(x)\rangle : F] = [F(\alpha) : F] = n$

A number α is called a constructible number if can be constructed a line segment with length α, by a finite number of steps using unmarked ruler and compass starting from a known unit length.

Since it is proved $\sqrt[3]{2}$ is not a constructible number then it is impossible to construct a cube whose volume is double of the given cube using only unmarked ruler and compass.

Since it is proved cos 20° is not a constructible number, then an angle 60° can not be trisect into three equal parts, so that it can be concluded that it is impossible to trisect an arbitrary angle into three equal parts using only unmarked ruler and compass.

F. Lindemann proved that π is a transcendental number over field **Q**. Since $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}]$ is infinite, then $\sqrt{\pi}$ is not a constructible number, so that it is impossible to construct a square whose area is the same as the area of a given circle using only unmarked ruler and compass.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan yang telah senantiasa melimpahkan rahmat-Nya, sehingga skripsi dengan judul "Tiga Masalah Geometri Yang Termashur" ini dapat penulis selesaikan.

Skripsi ini disusun dengan maksud untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak, penulis dapat melalui hambatan dan rintangan tersebut. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, petunjuk, dukungan, bantuan maupun saran, kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang dengan sabar, tekun dan penuh perhatian memberikan saran, dorongan dan bimbingannya selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. St. Suwarsono dan M. Andy Rudhito, S.Pd. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran.
3. Drs. Thomas Sugiarto, M.T. selaku dosen pembimbing akademik dan ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan saran selama penulis menempuh studi di Pendidikan Matematika.
4. Bapak dan Ibu dosen yang telah mendidik penulis

5. Bapak Narjo dan Sugeng atas bantuan yang diberikan, terutama masalah kesekertariatan.
6. Semua staf perpustakaan Universitas Sanata Darma, dan teman-temanku P_3W. Terimakasih karena penulis diberi kesempatan menjadi P_3W.
7. Kedua orangtuaku, saudara kembarku Lucia Widyastuti dan adikku Valentina Vitri Endaryati serta keluarga Pak'de yang selalu mendoakan, mendukung, dan menyemangatiku.
8. Teman-temanku Tanti dan Mas Jabar, Nopi dan Felix, Suryanti (terimakasih atas kesabarannya menemani penulis selama 4 tahun), Upix, Utix. Terimakasih atas semangat, bantuan, doa dan dukungannya hingga terselesainya skripsi ini, dan tak lupa semua teman-temanku P. Mat'97 terimakasih atas canda dan kebersamannya selama menjalani masa-masa kuliah. Rekan-rekanku di UKM Kerohanian dan teman-teman kostku : dik Enggal, dik Rini, dik Winda.
9. Semua pihak yang dalam kesempatan ini belum dapat penulis sebutkan.

Penulis menyadari, skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan segala kerendahan hati. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Penulis

S. Widisunarti

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A, B, C,…	: Titik-titik
$a, b, \ldots, l, \ldots$	: Garis-garis
$\overleftrightarrow{AB}$	: Garis yang melalui titik A dan B
$\overline{AB}$	: Segmen garis AB
AB	: Panjang segmen garis AB
$\overrightarrow{AB}$	: Sinar garis yang berpangkal di A ke B
$\angle ABC$	: Sudut ABC
$m \angle ABC$	: Besar sudut ABC
$\perp$	: Tegak lurus
$\parallel$	: Sejajar
ΔABC	: Segitiga ABC
(O,r)	: Lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r
$\sim$	: Sebangun
$\cong$	: Kongruen
$\approx$	: Isomorfik
$m \mid n$	: n habis dibagi oleh m
$m \nmid n$	: n tidak habis dibagi oleh m
K	: Himpunan bilangan konstruktibel
$[E : F]$	: Derajat dari perluasan field E atas field F

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada zaman Yunani kuno (± 560 SM), alat-alat geometri yang digunakan masih sangat sederhana, yaitu penggaris tanpa skala tertentu ("unmarked ruler") dan jangka yang kolaps ("a collapsing compass) yang juga dipakai pada zaman geometri Euclid (± 350 SM). Pada zaman tersebut belum dimiliki penggaris berskala dan busur derajat yang dapat dipercaya. Walaupun demikian, sudah dapat dikerjakan berbagai macam konstruksi, hanya dengan menggunakan kedua alat di atas.

Namun, ada tiga masalah geometri Yunani kuno yang belum bisa dipecahkan pada zaman tersebut, hanya dengan menggunakan kedua alat di atas. Berbagai usaha telah dilakukan beberapa matematikawan untuk memecahkan masalah tersebut. Ketiga masalah tersebut adalah :

1. Duplikasi kubus (" The Duplication of the Cube ")

   Jika diketahui suatu kubus, dapatkah dilukis suatu kubus yang volumenya dua kali volume kubus semula?

2. Membagi Tiga Sama Sebarang Sudut ("The Trisection of the Arbitrary Angle")

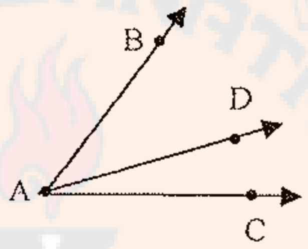
   Jika diketahui sebarang sudut, dapatkah membagi sudut tersebut menjadi tiga bagian yang sama besar?

3. Mempersegikan lingkaran (" The Squaring of the Circle ")

Jika diketahui suatu lingkaran, dapatkah dilukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran tersebut?

Apabila dipandang secara aljabar, masalah tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

1. Jika diketahui y, tentukan x sedemikian sehingga $x^3 = 2y^3$
2. Jika diketahui $\angle BAC$, akan dilukis sinar garis $\overrightarrow{AD}$ sedemikian sehingga $m\angle DAC = \frac{1}{3}\, m\angle BAC$



Gb. 1.1 Ilustrasi masalah kedua

3. Jika diketahui y, tentukan x sedemikian sehingga $x^2 = \pi y^2$

Selama berabad-abad, ketiga masalah geometri ini belum bisa dipecahkan hanya dengan menggunakan kedua alat di atas. Sampai akhirnya pada awal abad ke-19 dengan menyatakan ketiga masalah tersebut ke dalam persamaan aljabar, dan menerapkan definisi-definisi dan teorema-teorema dalam aljabar modern pada masalah geometri tersebut, ketiga masalah tersebut dapat dipecahkan. Dibuktikan bahwa ketiga masalah tersebut tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan kedua alat di atas.

Matematikawan yang berperan penting dalam pemecahan masalah tersebut adalah C.L.F. Lindemann (1882), yang telah membuktikan bahwa bilangan real π bersifat transenden atas field **Q**, sehingga $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel dan P. Laurant Wantzel (1837) yang membuktikan cos 20° bukan bilangan konstruktibel. Untuk masalah pertama dibuktikan $\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel. Menurut definisi bilangan konstruktibel, dibuktikan bahwa ketiga masalah tersebut tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Bagaimanakah sebenarnya pembuktian ketiga masalah ini sehingga hasilnya tidak mungkin? Bagaimanakah hubungan antara geometri dengan aljabar modern sehingga masalah ini bisa dipecahkan? Hal yang sungguh menarik dari topik ini adalah ketiga masalah ini adalah masalah geometri Yunani kuno yang cukup termashur 19 abad yang lalu, namun pemecahan masalahnya melibatkan teorema-teorema dalam aljabar modern. Hal ini menunjukkan adanya hubungan yang sangat erat antara aljabar dan geometri. Serta menunjukkan bahwa dalam matematika hal-hal yang tidak mungkinpun harus dibuktikan walaupun memakan waktu yang cukup lama. Inilah yang melatarbelakangi penulis mengapa tertarik mengambil topik ini.

B. Perumusan Masalah

Pokok-pokok perumusan masalah yang akan dibahas adalah :

1. Definisi-definisi dan teorema-teorema apakah dalam aljabar modern yang digunakan dalam pemecahan ketiga masalah di atas?
2. Apa yang dimaksud dengan bilangan konstruktibel?
3. Bagaimanakah pemecahan ketiga masalah di atas dengan menggunakan definisi-definisi dan teorema-teorema dalam aljabar modern ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dengan penulisan skripsi ini adalah:

1. Memahami definisi dan pembuktian teorema-teorema dalam aljabar modern yang digunakan dalam pemecahan ketiga masalah di atas.
2. Memahami definisi bilangan konstruktibel dan pembuktian teorema-teorema dalam bilangan konstruktibel.
3. Mengetahui ketiga masalah tersebut dari sejarah timbulnya masalah, penyajian masalah secara geometris maupun secara aljabar.
4. Memahami pembuktian teorema-teorema, yang membuktikan bahwa ketiga konstruksi di atas tidak mungkin dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

D. Ruang Lingkup Penulisan

Dalam Bab II, penulis akan menguraikan materi-materi prasyarat dalam aljabar modern, yang digunakan dalam penulisan teori-teori selanjutnya. Pada subbab pertama, akan dibicarakan dahulu ring dan field. Pada subbab kedua, ditulis ring polinom, selanjutnya ring faktor polinom F[x], dan dalam subbab terakhir dibahas tentang perluasan field.

Pada Bab III, dibahas tentang bilangan konstruktibel. Pada subbab pertama, dibahas konstruksi klasik dengan beberapa contoh konstruksi klasik. Selanjutnya pada subbab kedua didefinisikan bilangan konstruktibel, dan konstruksi klasik akan dilihat dari sudut pandang aljabar, dengan dibuktikannya teorema-teorema dalam bilangan konstruktibel yang berguna dalam pemecahan ketiga masalah di atas.

Pada Bab IV penulis mulai membahas pemecahan ketiga masalah geometri di atas. Pembahasan dimulai dari sejarah timbulnya masalah, percobaan oleh beberapa matematikawan, dan hal-hal yang menyebabkan ketiga masalah di atas dikatakan termashur. Selanjutnya dibuktikan teorema-teorema yang membuktikan bahwa ketiga masalah ini tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Pada Bab ini, pemecahan masalah oleh matematikawan dengan alat-alat non klasik hanya diberikan sebagai contoh, dan pembuktian oleh C.L.F Lindemann bahwa bilangan π bersifat transenden atas **Q** tidak dibahas dalam skripsi ini.

Dalam Bab V ditulis kesimpulan dan saran.

E. Manfaat penulisan

Dengan tulisan ini penulis berharap semoga skripsi ini berguna bagi kita, supaya memahami pemecahan ketiga masalah geometri Yunani kuno yang termashur. Selain itu, kita lebih memahami ring, field, ring polinom, ring faktor polinom F[x], serta perluasan field.

Khususnya bagi calon guru, dengan mempelajari tiga masalah geometri ini, seorang guru sedikit mempunyai bekal dalam mengajar. Misalnya semakin memahami materi pelajaran mengenai bangun datar, bangun ruang, fungsi trigonometri, hubungan pemetaan dan grafik, yang terdapat dalam skripsi ini.

Selain itu, guru dapat memperkenalkan tiga masalah geometri Yunani kuno yang termashur ini, sebagai materi pengayaan maupun sebagai motivasi. Siswa dapat diajak untuk mencoba memecahkan ketiga masalah tersebut secara sederhana menurut ide siswa sendiri. Sebagai contoh penyelesaian masalah membagi tiga sama sebarang sudut pada Bab IV, dengan menggunakan penggaris dengan tanda pengukuran dan jangka. Dalam hal ini, guru juga dapat membantu siswa untuk mencapai suatu kesimpulan bahwa suatu masalah geometri tidak harus dipecahkan dengan cara geometri. Dengan demikian siswa pun dapat melihat hubungan antara materi-materi yang telah dipelajari sebelumnya.

Dengan cerita yang cukup menarik dari tiga masalah geometri tersebut, siswa akan semakin berminat mempelajari pokok bahasan yang bersangkutan. Begitu juga untuk pokok bahasan yang lain. Dengan menceritakan sejarah singkat suatu pokok bahasan, siswa akan lebih termotivasi mempelajari matematika yang dianggap sebagai mata pelajaran yang menakutkan.

F. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan penulis adalah metode studi pustaka, sehingga di dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan penulis tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam Bab II ini, dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai, untuk mempelajari teori–teori selanjutnya. Definisi–definisi, teorema–teorema dan contoh–contoh dibagi dalam beberapa sub pokok bahasan. Dalam subbab pertama dibicarakan dulu ring dan field. Dilanjutkan dalam subbab kedua dipelajari ring polinom. Dalam subbab ketiga dibicarakan ring faktor polinom F[x] dan yang terakhir dibahas perluasan field.

A. Ring dan Field

Definisi 2.1 (Ring)

Suatu himpunan tidak kosong R disebut ring, bila di dalam R didefinisikan dua operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.), sedemikian sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

1. (R , +) merupakan grup abelian.

    a) $(\forall a,b \in R)\ a+b \in R$

    b) $(\forall a,b,c \in R)\ (a+b)+c = a+(b+c)$

    c) $(\exists 0 \in R)\ (\forall a \in R)\ 0+a = a+0 = a$ (0 disebut elemen identitias)

    d) $(\forall a \in R)\ (\exists -a \in R)\ a+(-a) = (-a)+a = 0$ (-a disebut invers aditif dari a)

    e) $(\forall a,b \in R)\ a+b = b+a$

2. $(\forall a,b \in R)\ a.b \in R$

3. $(\forall a,b,c \in R)\ a.(b.c) = (a.b).c$

4. $(\forall a,b,c \in R)\ a.(b+c) = a.b + a.c$ dan $(\forall a,b,c \in R)\ (a+b).c = a.c+b.c$

Contoh 2.1

Himpunan bilangan bulat ($\mathbf{Z}$), rasional ($\mathbf{Q}$), real ($\mathbf{R}$) merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Definisi 2.2 (Ring komutatif)

Ring R disebut ring komutatif, jika dipenuhi $(\forall a,b \in R)\ a.b = b.a$

Definisi 2.3(Elemen satuan)

Elemen $e \in R$ disebut elemen satuan dari ring R jika $(\forall a \in R)\ a.e = e.a = a$

Jika ring R memiliki elemen satuan dan memiliki sifat komutatif, maka R disebut ring komutatif dengan elemen satuan.

Contoh 2.2

1. $(\mathbf{Z},+,.)$, $(\mathbf{Q},+,.)$, $(\mathbf{R},+,.)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
2. Himpunan $(H,+,.)$ dengan $H = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ merupakan ring komutatif yang tidak memiliki elemen satuan.

Definisi 2.4 (Pembagi nol)

Jika R merupakan ring komutatif maka elemen $a \in R$, dengan $a \neq 0$ disebut pembagi nol bila $(\exists b \in R,\ b \neq 0)\ a.b = 0$

Definisi 2.5 (Daerah integral)

Suatu ring komutatif R dengan elemen satuan $e \neq 0$, disebut daerah integral jika R tidak memuat pembagi nol.

Jadi daerah integral D adalah ring yang memenuhi:

1. $(\forall a,b \in D)\ a.b = b.a$
2. $(\exists e \in D)\ (\forall a \in D)\ a.e = e.a = a$
3. $(\forall a,b \in D)\ a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ atau

   $(\forall a,b \in D)\ a \neq 0 \wedge a.b = 0 \Rightarrow b = 0$ atau

   $(\forall a,b \in D)\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a.b \neq 0$

Contoh 2.3

1. $(\mathbf{Z},+,.)$, $(\mathbf{Q},+,.)$, $(\mathbf{R},+,.)$ merupakan daerah integral.
2. Jika R dan S daerah integral, maka $R \times S$ bukan daerah integral, karena jika diambil $r \neq 0 \in R$ dan $s \neq 0 \in S$ maka didapat $(r,0).(0,s) = (0,0)$

Definisi 2.6 (Field)

Suatu ring komutatif R dengan elemen satuan e disebut field jika dipenuhi sifat $(\forall a \in R,\ a \neq 0)\ (\exists a^{-1} \in R)\ a^{-1}.a = a.a^{-1} = e$.

Teorema 2.1

Setiap field F merupakan daerah integral.

Bukti :

Karena F suatu field, maka F adalah ring komutatif dengan elemen satuan e. Diambil $a,b \in F$ dengan $a \neq 0$ dan $a.b = 0$. Karena $a \neq 0$ maka ada $a^{-1} \in F$ sedemikian sehingga $(a^{-1}).(a.b) = a^{-1}.0 = 0$ sehingga $(a^{-1}).(a.b) = (a^{-1}.a).b = e.b = b$. Berarti $(\forall a,b \in F)\ a \neq 0 \wedge a.b = 0 \Rightarrow b = 0$. Jadi F tidak memuat pembagi nol. Terbukti F merupakan daerah integral. □

Contoh 2.4

$(\mathbf{Q}, +, .)$, $(\mathbf{R}, +, .)$, $(\mathbf{C}, +, .)$ merupakan field.

Definisi 2.7 (Subfield)

Himpunan bagian K dari field F disebut subfield dari F bila dan hanya bila K merupakan field terhadap operasi-operasi yang didefinisikan pada F.

Teorema 2.2

Jika F field dan $K \subset F$ maka K subfield dari field F bila dan hanya bila

1. $K \neq \emptyset$
2. $(\forall a,b \in K)\ a+b \in K \wedge a.b \in K$
3. $(\forall a \in K)\ -a \in K$
4. $(\forall a \in K)\ a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in K$

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Diketahui $K \subset F$. Karena K subfield dari F, maka K merupakan field terhadap operasi-operasi yang didefinisikan pada F. Karena K field maka K adalah subring dari F dengan elemen yang tidak nol mempunyai invers multiplikatif. Jadi (1), (2), (3), (4) dipenuhi.

($\Leftarrow$) Diketahui $K \subset F$, dan berlaku (1),(2),(3),(4). Dari (1),(2),(3) maka K adalah subring dari F. Diambil sebarang $a \in K$, $a \neq 0$ maka $a^{-1} \in K$ sebab dipenuhi sifat (4). Karena K subring F maka $a.a^{-1} \in K$ sehingga $e \in K$. Jadi K merupakan daerah integral, dengan setiap elemen yang tidak nol memiliki invers multiplikatif. Jadi K merupakan field terhadap operasi-operasi yang didefinisikan pada F . Terbukti K adalah subfield dari field F □

Contoh 2.5

Himpunan bilangan rasional **Q** adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real **R**, dan **Q** merupakan subfield dari **R**.

C. Ring Polinom

Pada subbab ini, secara singkat akan dibahas tentang ring polinom dengan algoritma pembagian untuk ring polinom F[x] dan beberapa sifatnya, serta definisi polinom tak terurai dan polinom terurai.

Definisi 2.8 (Ring polinom)

Diketahui R ring komutatif. Suatu polinom f dalam x atas ring R, f(x) adalah bentuk yang dinyatakan dengan:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \text{ dengan } a_i \in R \text{ dan } i = 0,1,2,\ldots,n.$$

a_i disebut koefisien dari x^i dalam f(x). Nilai terbesar dari i sedemikian sehingga $a_i \neq 0$ disebut derajat f(x) dan ditulis deg f(x).

Polinom f(x) disebut polinom nol jika koefisien-koefisien dalam f(x) adalah nol, dan derajat polinom nol tak terdefinisi. Polinom f(x) disebut polinom konstan jika f(x) polinom nol atau f(x) polinom–polinom berderajat nol.

Himpunan semua polinom dalam x dengan koefisien–koefisien dalam ring R merupakan ring polinom dalam x atas ring R, dinotasikan R[x]. Sedangkan ring polinom dalam x atas field F ditulis F[x]. Polinom $f(x) \in F[x]$ disebut polinom monik, jika koefisien derajat tertingginya merupakan elemen satuan dari field F

Contoh 2.6

Polinom $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 1 \in \mathbf{Q}[x]$ merupakan polinom monik, dengan deg f(x) = 4

Definisi 2.9 (Operasi penjumlahan dan perkalian polinom)

Diketahui ring komutatif R dan p(x), $q(x) \in R[x]$ dengan

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

Operasi penjumlahan dan perkalian polinom didefinisikan sebagai:

$$p(x) + q(x) = \begin{cases} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots + a_n x^n, m \geq n \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_m + b_m)x^m + \ldots + b_m x^m, m \langle n \end{cases}$$

$p(x).q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + a_mb_nx^{m+n}$ dengan koefisien dari x^k adalah $a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ldots + a_kb_0 \in R$

Contoh 2.7

Diketahui $f(x), g(x) \in \mathbf{Q}[x]$ dengan $f(x) = 4 - 2x$ dan $g(x) = 2 + 5x + 3x^2$

$f(x) + g(x) = (4\text{-}2x) + (2+5x + 3x^2) = (4+2) + (-2+5)x + (0+3)x^2 = 6+3x+3x^2$

$f(x) \,.\, g(x) = (4\text{-}2x) \,.\, (2 + 5x+3x^2)$

$= 4.2 + (4.5 + (-2).2)x + (4.3+(-2).5 + 0.2)x^2 + (4.0+(-2).3 + 0.5+0.2)x^3$

$= 8+16x+2x^2\text{-}6x^3$

Teorema 2.3

Jika F suatu daerah integral, maka F[x] merupakan daerah integral.

Bukti:

F[x] merupakan daerah integral sebab

1. F[x] merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinom dan operasi perkalian di F[x] bersifat komutatif.

   Jika diketahui $f(x), g(x) \in F[x]$ dengan $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ maka

   $f(x).g(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n) \,.\, (b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m)$

   $\Leftrightarrow f(x).g(x) = (a_0b_0)+(a_0b_1 + a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+a_nb_mx^{n+m}$

   $\Leftrightarrow f(x).g(x) = (b_0a_0)+(b_1a_0 + b_0a_1)x+(b_2a_0+b_1a_1+b_0a_2)x^2+\ldots+b_ma_nx^{m+n}$

   $\Leftrightarrow f(x).g(x) = g(x).f(x)$

2. F[x] mempunyai elemen satuan, sebab jika e adalah elemen satuan dalam F, maka $(\exists g(x) \in F[x])$ $g(x) = ex^0$, dengan deg $g(x) = 0$, sedemikian sehingga untuk sebarang $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \in F[x]$ dipenuhi

   $f(x).g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \,.\, (ex^0)$

$\Leftrightarrow f(x).g(x) = a_0ex^0 + a_1ex^{1+0} + \ldots + a_nex^{n+0}$

$\Leftrightarrow f(x).g(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$\Leftrightarrow f(x).g(x) = f(x)$. Jadi $(\exists g(x) \in F[x])\ f(x).g(x) = f(x)$.

3. Diketahui F merupakan ring komutatif yang tidak memuat pembagi nol. Diambil sebarang $f(x) \neq 0$, dengan koefisien tertinggi $a_n \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$ dengan $b_m \neq 0$, maka $f(x).g(x) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+a_nb_mx^{m+n} \neq 0$ sebab $a_nb_mx^{m+n} \neq 0$. Dengan demikian f(x).g(x) bukan polinom nol di F[x]. Jadi F[x] tidak memuat pembagi nol. □

Teorema 2.4 (Algoritma pembagian)

Jika F suatu field dan $f(x),g(x) \in F[x]$ dengan $g(x) \neq 0$, maka ada dengan tunggal $q(x),r(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg g(x)$

Polinom q(x) disebut hasil bagi, dan r(x) disebut sisa pembagian f(x) oleh g(x).

Bukti :

Misalkan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $\deg f(x) = n$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, $\deg g(x) = m$

Untuk $f(x) = 0$, ada $q(x) = 0$ dan $r(x) = 0$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x).0 + 0$.

Untuk $f(x) \neq 0$.

Diandaikan $n < m$ maka ada $q(x) = 0$ dan $r(x) = f(x)$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x).0 + r(x)$.

Diandaikan $n \geq m$, akan dibuktikan keberadaan $q(x)$ dan $r(x)$ dengan induksi dalam n. Jika $n = 0$ maka $f(x) = a_0$ dan jika $m = 0$ maka $g(x) = b_0$. Jadi ada $q(x) = \frac{a_0}{b_0}$ dan $r(x) = 0$ sedemikian sehingga $a_0 = b_0 . \frac{a_0}{b_0} + 0$

Andaikan algoritma pembagian dipenuhi untuk deg $f(x) < n$.

Misalkan $f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x)$ maka deg $f_1(x) <$ deg $f(x)$

Selanjutnya menurut hipotesis induksi ada $q_1(x), r_1(x) \in F[x]$ sedemikian hingga $f_1(x) = g(x).q_1(x) + r_1(x)$ dengan $r_1(x) = 0$ atau deg $r_1(x) <$ deg $g(x)$

dari permisalan didapatkan $f(x) = f_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = (g(x).q_1(x) + r_1(x)) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x).q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} .g(x) + r_1(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x).(q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}) + r_1(x)$. Jadi ada $q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ dan $r(x) = r_1(x)$ yang memenuhi $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $q(x)$ dan $r(x)$ adalah tunggal. Andaikan ada polinom $q^*(x)$ dan $r^*(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x).q^*(x) + r^*(x)$ dengan $r^*(x) = 0$ atau deg $r^*(x) <$ deg $g(x)$. Misalkan $f(x) = f(x) \Leftrightarrow g(x).q(x) + r(x) = g(x).q^*(x) + r^*(x) \Leftrightarrow g(x).q(x) - (g(x).q^*(x)) = r^*(x) - r(x) \Leftrightarrow g(x)[q(x)-q^*(x)] = r^*(x)-r(x)$. Karena $r^*(x)-r(x) = 0$ atau deg $(r^*(x)-r(x)) <$ deg $g(x)$

maka haruslah $q(x)-q^*(x) = 0$ sehingga $q(x) = q^*(x)$. Didapatkan pula $r(x) = r^*(x)$. Jadi terbukti ada dengan tunggal $q(x), r(x) \in F[x]$ □

Contoh 2.8

Diketahui $f(x) = x^4 - 1 \in \mathbf{Q}[x]$ dan $g(x) = -x^2 + 2 \in \mathbf{Q}[x]$.

Pembagian f(x) oleh g(x) dalam **Q**[x] adalah

$$\begin{array}{r|l} & -x^2 - 2 \\ \hline -x^2+2 & x^4 - 1 \\ & \underline{x^4 - 2x^2} \\ & 2x^2 - 1 \\ & \underline{2x^2 - 4} \\ & 3 \end{array}$$

Jadi $x^4 - 1 = (-x^2+2)(-x^2-2)+3$, dengan $q(x) = -x^2-2$ dan $r(x) = 3$

Teorema 2.5

Jika $f(x) \in F[x]$ dan $c \in F$, maka sisa pembagian f(x) dengan x-c adalah f(c).

Bukti :

Diketahui $f(x), g(x) \in F[x]$ dengan $g(x) = x-c$. Menurut algoritma pembagian $f(x) = (x-c).q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg g(x)$. Karena deg g(x) adalah 1 dan $r(x) \neq 0$, maka sisa pembagian f(x) dengan x-c harus berpangkat 0, misalnya konstanta $r \in F$ sehingga $f(x) = (x-c).q(x) + r$. Untuk $x = c$ maka $f(c) = (c-c).q(c) + r \Leftrightarrow f(c) = 0.q(c) + r \Leftrightarrow f(c) = r$. Jadi sisa pembagian f(x) oleh (x-c) adalah f(c) □

Contoh 2.9

Pembagian $f(x) = x^3+x+1 \in \mathbf{Q}[x]$ oleh $g(x) = x-1 \in \mathbf{Q}[x]$ adalah

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x-1 & x^3 + 0 + x + 1 \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & \quad x^2 + x + 1 \\ & \quad x^2 - x \\ \hline & \quad 2x + 1 \\ & \quad 2x - 2 \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

Jadi $f(x) = (x-1)(x^2+x+2)+3$, sisanya $r(x) = 3$.

Dengan menggunakan teorema 2.5, $f(1) = 1^3+1+1 = 3$. Jadi $f(1) = 3$ adalah sisa pembagian $f(x) = x^3+x+1$ oleh $g(x) = x-1$

Jika $f(x), g(x) \in F[x]$ dengan $g(x) \neq 0$, maka $f(x)$ dikatakan habis dibagi oleh $g(x)$ jika $f(x) = g(x).q(x)$, untuk $q(x) \in F[x]$. Jika $f(x)$ habis dibagi $g(x)$ maka dikatakan $g(x)$ adalah faktor dari $f(x)$, dinotasikan dengan $g(x) \mid f(x)$.

Teorema 2.6

Jika $f(x) \in F[x]$ dan $c \in F$, maka $x-c$ faktor dari $f(x)$ bila dan hanya bila $f(c) = 0$

Bukti:

($\Rightarrow$) Dikatakan bahwa $(x-c)$ merupakan faktor dari $f(x)$ maka ditulis $f(x) = (x-c).q(x)$. Untuk $x = c$ maka $f(c) = (c-c).q(x)$ sehingga $f(c) = 0$.

($\Leftarrow$) Menurut teorema 2.5 $f(x) = (x-c).q(x) + f(c)$. Bila $f(c) = 0$ maka $f(x) = (x-c).q(x)$, dengan $q(x) \in F[x]$. Bentuk ini dikatakan $(x-c)$ merupakan faktor dari $f(x)$. Jadi $(x-c)$ merupakan faktor dari $f(x)$ bila dan hanya bila $f(c) = 0$ □

Elemen $c \in F$ disebut penyelesaian polinom $f(x) \in F[x]$, jika $f(c) = 0$.

Definisi 2.10 (Faktor Persekutuan Terbesar)

Diketahui polinom $a(x),b(x) \in F[x]$, dengan $a(x),b(x) \neq 0$. Suatu polinom $d(x) \in F[x]$ disebut faktor persekutuan terbesar dari $a(x)$ dan $b(x)$ yang ditulis $FPB(a(x),b(x))$, jika $d(x)$ adalah polinom monik sedemikian sehingga dipenuhi

1. $d(x) | a(x)$ dan $d(x) | b(x)$
2. Jika $h(x) | a(x)$ dan $h(x) | b(x)$ maka $h(x) | d(x)$ untuk sebarang $h(x) \in F[x]$

Teorema 2.7

Jika $a(x) \neq 0$ dan $b(x) \neq 0$ polinom atas field F maka ada polinom $d(x)$ yang merupakan FPB dari $a(x)$ dan $b(x)$, selanjutnya ada polinom $u(x),v(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $d(x) = a(x).u(x) + b(x).v(x)$

Bukti :

Dengan algoritma pembagian, jika $b(x) \neq 0$ maka ada dengan tunggal polinom $q_1(x)$ dan $r_1(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga

$$a(x) = b(x).q_1(x) + r_1(x), \qquad r_1(x) = 0 \text{ atau } \deg r_1(x) < \deg b(x).$$

Jika $r_1(x) = 0$ maka $b(x)$ merupakan FPB dari $a(x)$ dan $b(x)$

Jika $r_1(x) \neq 0$, dengan algoritma pembagian ada polinom $q_2(x)$ dan $r_2(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $b(x) = r_1(x).q_2(x)+r_2(x)$, $r_2(x) = 0$ atau $\deg r_2(x) < \deg r_1(x)$

Selanjutnya dengan mengulangi algoritma pembagian, didapatkan

$$a(x) = b(x).q_1(x)+r_1(x), \qquad \deg r_1(x) < \deg b(x)$$

$$b(x) = r_1(x).q_2(x)+r_2(x), \qquad \deg r_2(x) < \deg r_1(x)$$

$$r_1(x) = r_2(x).q_3(x)+r_3(x) \qquad \deg r_3(x) < \deg r_2(x)$$

$$\ldots$$

$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x).q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x) \qquad \deg r_{k-1}(x) < \deg r_{k-2}(x)$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x).q_k(x)+r_k(x) \qquad \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x).q_{k+1}(x)$$

Polinom nol sebagai sisanya karena $\deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \ldots > r_k(x)$. Andaikan $r_k(x)$ adalah sisa terakhir yang tidak nol, maka didapatkan $r_k(x) | r_{k-1}(x)$, selanjutnya $r_k(x) | r_{k-2}(x), \ldots, r_k(x) | b(x)$, $r_k(x) | a(x)$. Dengan demikian $d(x) = r_k(x)$ sebagai faktor persekutuan dari $a(x)$ dan $b(x)$. Andaikan $h(x) | a(x)$ dan $h(x) | b(x)$ maka $h(x) | r_1(x)$. Tetapi karena $h(x) | b(x)$ dan $h(x) | r_1(x)$ maka $h(x) | r_2(x)$, $h(x) | r_3(x), \ldots, h(x) | r_k(x)$. Jadi $d(x) = r_k(x)$ sebagai faktor persekutuan terbesar dari $a(x)$ dan $b(x)$.

Dari pernyataan di atas diketahui bahwa $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x).q_k(x)+r_k(x)$ sehingga $r_k(x) = r_{k-2}(x)-r_{k-1}(x).q_k(x)$. Bentuk ini dikatakan bahwa $r_k(x)$ merupakan jumlahan hasil kali suatu polinom dengan $r_{k-1}(x)$ dan hasil kali polinom dengan $r_{k-2}(x)$ atau $r_k(x)$ disebut kombinasi linear dari $r_{k-1}(x)$ dan $r_{k-2}(x)$.

Diketahui pula $r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x).q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)$ sehingga $r_{k-1}(x) = r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x).q_{k-1}(x)$, Dengan demikian $r_k(x) = r_{k-2}(x) - (r_{k-3}(x) - r_{k-2}(x).q_{k-1}(x)) .q_k(x)$

Definisi 2.11

Polinom $f(x) \neq 0$ dikatakan tak terurai ("irreducible") atas field F, jika f(x) tidak dapat difaktorkan ke dalam dua polinom berderajat positif anggota F[x].

Polinom $f(x) \neq 0$ dikatakan terurai ("reducible") atas field F jika f(x) dapat difaktorkan ke dalam dua polinom berpangkat positif anggota F[x].

Contoh 2.11

1. $f(x) = x^2-2$ adalah polinom tak terurai dalam **Q**[x] tetapi terurai dalam **R**[x] sebab $x^2-2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.
2. $g(x) = x^2+1$ adalah polinom tak terurai dalam **R**[x] tetapi terurai dalam **C**[x] sebab $x^2+1 = (x-i)(x+i)$

Selanjutnya, akan ditunjukkan beberapa teorema penting dalam polinom bilangan rasional **Q**[x], yaitu metode untuk menentukan apakah suatu polinom bulat f(x) mempunyai penyelesaian rasional (terurai atas field **Q**) ataukah f(x) tak terurai atas field **Q**

Teorema 2.8 (Teorema akar-akar rasional)

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_n x^n \in \mathbf{Z}[x]$. Jika r/s suatu penyelesaian rasional dari f(x) dan FPB(r,s) = 1 maka $r \mid a_0$ dan $s \mid a_n$.

Bukti :

Jika r/s penyelesaian rasional dari f(x) maka dipenuhi f(r/s) = 0 untuk x = r/s sehingga $a_0 + a_1(r/s) + \ldots + a_n (r/s)^n = 0$

$\Leftrightarrow r_k(x) = r_{k-2}(x)\,[1+q_{k-1}(x).q_k(x)] - r_{k-3}(x).q_k(x)$. Bentuk ini dikatakan bahwa $r_k(x)$ merupakan kombinasi linear dari $r_{k-2}(x)$ dan $r_{k-3}(x)$. Kalau proses ini diteruskan, maka didapatkan $r_k(x)$ sebagai kombinasi linear dari $r_1(x)$ dan $b(x)$, dan akhirnya $r_k(x)$ merupakan kombinasi linear dari $b(x)$ dan $a(x)$ yaitu dinyatakan sebagai jumlahan hasil kali suatu polinom $u(x)$ dengan $a(x)$ dan hasil kali suatu polinom $v(x)$ dengan $b(x)$, ditulis sebagai $r_k(x) = a(x).u(x) + b(x).v(x)$ □

Contoh 2.10

Diketahui polinom $f(x),g(x) \in F[x]$ dengan $f(x)=x^4-x^3-x^2+1$ dan $g(x) = x^3-1$ FPB $(f(x),g(x))$ dapat dicari dengan algoritma pembagian.

$f(x) = g(x).q(x)+r(x)$

$x^4-x^3-x^2+1 = (x^3-1) . (x-1) + (-x^2+x)$

$x^3-1 \qquad = (-x^2+x) . (-x-1) + (x-1)$

$-x^2+x \qquad = (x-1) . (-x)$. Jadi FPB $(f(x),g(x))$ adalah $(x-1)$.

$x-1 = d(x)$ dapat dinyatakan sebagai $d(x) = f(x).u(x) + g(x).v(x)$, sebab dari pernyataan di atas diketahui bahwa $-x^2+x = (x^4-x^3-x^2+1) - (x^3-1)(x-1)$ dan

$(x-1) = (x^3-1) - (-x^2+x)(-x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1) = (x^3-1) - [(x^4-x^3-x^2+1) - (x^3-1)(x-1)]\,(-x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1) = (x^4-x^3-x^2+1).(x+1)+(x^3-1)[1+(x-1)(-x-1)]$

$\Leftrightarrow (x-1) = (x^4-x^3-x^2+1).(x+1) + (x^3-1).(-x^2+2)$

jadi $d(x) = (x-1) = f(x).u(x) + g(x).v(x)$, dengan $u(x) = (x+1)$ dan $v(x) = -x^2+2$.

$\Leftrightarrow a_0 + a_1 \frac{r}{s} + \ldots + a_n \frac{r^n}{s^n} = 0 \qquad \times s^n$

$\Leftrightarrow a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + \ldots + a_n r^n = 0$

Penyelesaian dari $a_0 s^n$ adalah $a_0 s^n = -(a_1 r s^{n-1} + \ldots + a_n r^n) = -r(a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n r^{n-1})$. Jadi $r \mid a_0 s^n$. Karena FPB(r,s) = 1 maka FPB(r,s^n) = 1 sehingga $r \mid a_0$.

Sedangkan penyelesaian dari $a_n r^n$ adalah $a_n r^n = -(a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r^{n-1} s)$ $= -s(a_0 s^{n-1} + a_1 r s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r^{n-1})$. Jadi $s \mid a_n r^n$. Karena FPB (r,s) = 1 maka FPB(s,r^n) = 1 sehingga $s \mid a_n$ $\square$

Contoh 2.12

Polinom $f(x) = 8x^3 - 6x - 1 \in \mathbf{Z}[x]$ tak terurai atas field bilangan rasional **Q** sebab, jika r/s penyelesaian rasional dari polinom f(x) atau f(r/s) = 0, maka dipenuhi $r \mid a_0$ atau $r \mid -1$ dan $s \mid a_n$ atau $s \mid 8$. Nilai-nilai r = {±1} dan nilai-nilai s = {±1, ±2, ±4, ±8}. Nilai-nilai r/s yang mungkin adalah {±1, ±1/2, ±1/4, ±1/8}. Ternyata tidak ada satupun nilai r/s yang memenuhi f(r/s) = 0 atau merupakan penyelesaian rasional dari f(x), sehingga penyelesaian dari f(x) harus irrasional. Jadi f(x) polinom tak terurai atas field **Q**

Teorema 2.9 (Lemma Gauss)

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbf{Z}[x]$. Jika f(x) dapat diuraikan dalam **Q**[x], maka f(x) dapat diuraikan pula dalam **Z**[x]

Bukti

Dimisalkan f(x) dapat diuraikan di dalam **Q**[x] sebagai f(x) = g(x).h(x) dengan g(x),h(x)∈**Q**[x]. Polinom g(x) dan h(x) dapat dinyatakan dengan bentuk yang ekuivalen dengan:

g(x) = (s/u)G(x) dengan s/u∈**Q**, G(x)∈**Z**[x] dan FPB dari koefisien-koefisien G(x) adalah 1.

h(x) = (t/v)H(x) dengan t/v∈**Q**, H(x)∈**Z**[x] dan FPB dari koefisien-koefisien H(x) adalah 1.

Sehingga f(x) = g(x).h(x)

⇔ f(x) = (s/u)G(x) . (t/v)H(x)

⇔ f(x) = (st/uv) G(x).H(x)

⇔ (uv)f(x) = (st) G(x).H(x), dengan G(x),H(x)∈**Z**[x]

Akan ditunjukkan bahwa uv | st, dengan membuktikan tidak ada bilangan prima p dalam uv yang dapat membagi koefisien-koefisien dari G(x).H(x).

Misalkan $G(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r$ dengan $b_0, b_1, \ldots, b_r \in \mathbf{Z}$ dan

$H(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_sx^s$ dengan $c_0, c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{Z}$.

Diambil suatu bilangan prima p. Karena FPB $(b_0, b_1, \ldots, b_r) = 1$ dan FPB $(c_0, c_1, \ldots, c_s) = 1$ maka p tidak membagi semua koefisien-koefisien dalam G(x) dan H(x). Misalkan b_i, c_j adalah koefisien-koefisien pertama dari G(x) dan H(x) yang tidak habis dibagi oleh p maka $p \mid b_0$, $p \mid b_1, \ldots, p \mid b_{i-2}$, $p \mid b_{i-1}$, tetapi $p \nmid b_i$ dan $p \mid c_0$, $p \mid c_1, \ldots, p \mid c_{j-1}$, tetapi $p \nmid c_j$.

Koefisien dari x^{i+j} dalam G(x).H(x) adalah

$$d_{i+j} = (b_0c_{i+j} + \ldots + b_{i-1}c_{j+1}) + b_ic_j + (b_{i+1}c_{j-1} + \ldots + b_{i+j-1}c_1 + b_{i+j}c_0)$$

Karena $p \mid b_0$, $p \mid b_1, \ldots, p \mid b_{i-2}$, $p \mid b_{i-1}$ maka $p \mid (b_0c_{i+j} + \ldots + b_{i-1}c_{j+1})$ dan karena $p \mid c_0$, $p \mid c_1, \ldots, p \mid c_{j-1}$ maka $p \mid (b_{i+1}c_{j-1} + \ldots + b_{i+j-1}c_1 + b_{i+j}c_0)$. Tetapi karena $p \nmid b_i$ dan $p \nmid c_j$ maka $p \nmid b_ic_j$ sehingga $p \nmid d_{i+j}$. Hal ini menunjukkan bahwa koefisien-koefisien dalam G(x).H(x) tidak habis dibagi oleh p, sehingga FPB dari koefisien-koefisien dalam G(x).H(x) =1. Jadi $uv \mid st$ dan f(x) dapat diuraikan dalam **Z**[x].

Teorema 2.10 (Kriteria Eisenstein)

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{Z}[x]$. Jika ada sebarang bilangan prima p, sedemikian sehingga dipenuhi

1. $p \mid a_0$, $p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{n-1}$
2. $p \nmid a_n$
3. $p^2 \nmid a_0$

maka f(x) tak terurai atas **Q**.

Bukti :

Misalkan f(x) terurai atas **Q**, maka menurut lemma Gauss faktor-faktornya adalah polinom- polinom dalam **Z**[x] misalkan

$f(x) = (b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r).(c_0 + c_1x + \ldots + c_sx^s)$, dengan $b_i, c_j \in \mathbf{Z}$, $s > 0$ dan $r+s = n$

$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = (b_0c_0) + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \ldots + (b_rc_s)x^{r+s}$

Dengan membandingkan koefisien-koefisiennya, maka $a_0 = b_0c_0$. Diketahui bahwa $p \mid a_0$, tetapi $p^2 \nmid a_0$, sehingga haruslah p membagi b_0 atau c_0 tetapi tidak membagi keduanya sekaligus. Misalkan $p \mid b_0$ dan $p \nmid c_0$. Diketahui bahwa $p \mid a_n$, maka $p \nmid b_r$ dan $p \nmid c_s$ sebab $a_n = b_rc_s$. Misalkan t bilangan bulat terkecil dengan

$p \mid b_t$, dengan $1 \leq t \leq r < n$, maka $a_t = b_0c_t + b_1c_{t-1} + \ldots + b_{t-1}c_1 + b_tc_0$. Karena $p \mid b_0$, $p \mid b_1, \ldots, p \mid b_{t-1}$ dan $p \mid a_t$ maka $p \mid b_tc_0$ padahal diketahui $p \nmid b_t$ dan $p \nmid c_0$ sehingga kontradiksi. Oleh karena itu f(x) harus tak terurai atas **Q** □

Contoh 2.13

1. Polinom $x^4-5 \in \mathbf{Z}[x]$ merupakan polinom tak terurai atas field **Q** sebab ada bilangan prima p = 5 sedemikian sehingga dipenuhi $5 \mid -5$, $5 \nmid 1$ dan $5^2 \nmid -5$
2. Polinom $x^5-9x^3+3 \in \mathbf{Z}[x]$ merupakan polinom tak terurai atas field **Q** sebab ada bilangan prima p = 3 sedemikian sehingga dipenuhi $3 \mid 3$, $3 \nmid -9$, $3 \nmid 1$ dan $9 \nmid 3$
3. Polinom $x^3-2 \in \mathbf{Z}[x]$ merupakan polinom tak terurai atas field **Q** sebab ada bilangan prima p = 2 sedemikian sehingga dipenuhi $2 \mid -2$, $2 \nmid 1$ dan $2^2 \nmid -2$

C. Ring Faktor Polinom F[x]

Pada subbab ini akan dibuktikan bahwa ring faktor polinom F[x] merupakan salah satu contoh dari perluasan field F, bila dipenuhi suatu syarat. Sebelumnya akan dibicarakan dulu ring faktor dengan beberapa landasan teorinya.

Definisi 2.12 (Isomorfisme)

Jika R dan S suatu ring, maka pemetaan $\theta : R \rightarrow S$ disebut homomorfisme ring bila $\forall(a,b \in R)$ dipenuhi $\theta(a+b) = \theta(a)+\theta(b)$ dan $\theta(a.b) = \theta(a).\theta(b)$

Jika $\theta : R \to S$ pemetaan bijektif maka θ disebut isomorfisme dan dikatakan R isomorfik dengan S, dinotasikan dengan $R \approx S$

Definisi 2.13 (Kernel)

Jika $\theta : R \to S$ suatu homomorfisme ring, maka kernel θ (ker θ) merupakan himpunan semua $r \in R$ sedemikian sehingga $\theta(r) = 0_s$

Definisi 2.14 (Ideal)

Suatu himpunan tidak kosong $I \subset R$ disebut ideal dari R, jika untuk $x,y \in I$ dan $\forall r \in R$, dipenuhi (1) $x-y \in I$ (2) $x.r \in I$ dan $r.x \in I$

Teorema 2.11

Jika $\theta : R \to S$ suatu homomorfisme ring, maka ker θ adalah ideal dari R

Bukti

Diambil sebarang $a,b \in \ker \theta$. Karena $a \in \ker \theta$ maka $a \in R$ dan $\theta(a) = 0_s$

Karena $b \in \ker \theta$ maka $b \in R$ dan $\theta(b) = 0_s$. Elemen $a-b \in \ker \theta$ sebab $a-b \in R$, dan $\theta(a-b) = \theta(a+(-b)) = \theta(a)+\theta(-b) = 0_s - 0_s = 0_s$ dan $\theta(a.b) = \theta(a).\theta(b) = 0_s . 0_s = 0_s$

Diambil sebarang $k \in \ker \theta$, maka $k \in R$ dan $\theta(k) = 0_s$. Jika $r \in R$ maka $r.k \in R$ dan $k.r \in R$ dan berlaku

$\theta(r.k) = \theta(r).\theta(k) = \theta(r) . 0_s = 0_s$ dan $\theta(k.r) = \theta(k).\theta(r) = 0_s.\theta(r) = 0_s$.

Jadi $r.k \in \ker \theta$ dan $k.r \in \ker \theta$. Terbukti ker θ ideal dari ring R □

Teorema 2.12

Jika R ring komutatif dengan elemen satuan e, dan $a \in R$ maka $\langle a \rangle$ himpunan semua kelipatan a dengan elemen R merupakan ideal dalam R.

Bukti :

$\langle a \rangle = \{a.r \mid r \in R\}$ ideal dalam R sebab

1. $\langle a \rangle \neq \varnothing$ sebab $(\exists 0 \in \langle a \rangle)$, sedemikian sehingga $0 = 0.a$, karena $0 \in R$
2. Diambil $a.r, a.s \in \langle a \rangle$, dengan $a,r,s \in R$ maka $a.r - a.s = a.(r-s) \in \langle a \rangle$
3. Diambil $a.r, a.s \in \langle a \rangle$, dengan $a,r,s \in R$ dan $t \in R$ maka $(a.r).t = a.(r.t) \in \langle a \rangle$, karena $r.t \in R$ dan $t.(a.r) = t.(r.a) = (t.r).a \in \langle a \rangle$, karena $t.r \in R$.

Jadi $\langle a \rangle$ adalah ideal dari R. $\langle a \rangle$ disebut ideal utama yang dibangkitkan oleh a $\square$

Contoh 2.14

$\langle (x^2-2) \rangle = \{(x^2-2).p(x) \mid p(x) \in \mathbf{Q}[x]\}$ adalah ideal utama yang dibangkitkan oleh (x^2-2) dalam **Q**[x] dan disebut himpunan semua polinom dalam **Q**[x] yang memuat (x^2-2) sebagai faktornya.

Teorema 2.13

Diberikan I ideal dalam ring R. R/I merupakan himpunan koset-koset kanan dari I yaitu $\{I+r \mid r \in R\}$. R/I merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan, dan untuk $(I+a),(I+b) \in R/I$ yang didefinisikan,

$(I+a)+(I+b) = I+(a+b)$

$(I+a).(I+b) = I+(a.b)$

R/I merupakan ring dan disebut sebagai ring faktor R oleh ideal I.

Bukti

R/I merupakan ring sebab

1. R/I merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan
2. Operasi perkalian di dalam R/I didefinisikan secara benar, sebab jika diambil sebarang $I+a_1$, $I+a_2$, $I+b_1$, $I+b_2 \in R/I$ dengan $I+a_1 = I+a_2$ dan $I+b_1 = I+b_2$ maka dibuktikan $I+(a_1.b_1) = I+(a_2.b_2)$. Dari $I+a_1 = I+a_2$ maka didapatkan $a_1 = i_1+a_2$ dengan $i_1 \in I$ dan dari $I+b_1 = I+b_2$ maka didapatkan $b_1 = i_2+b_2$ dengan $i_2 \in I$, sehingga $a_1b_1 = (i_1+a_2).(i_2+b_2) = i_1i_2+i_1b_2+a_2i_2+a_2b_2$. Karena $i_1i_2+i_1b_2+a_2i_2 \in I$, maka $a_1b_1 = i_3+a_2b_2$ dengan $i_3 \in I$. Sehingga $I+(a_1.b_1) = I+(a_2.b_2)$.
3. Operasi perkalian di dalam R/I bersifat assosiatif sebab jika diambil sebarang $(I+a),(I+b),(I+c) \in R/I$ dengan $a,b,c \in R$, maka

   $(I+a).\{(I+b).(I+c)\} = (I+a).\{I+(b.c)\} = I+(a.(b.c))$

   $= I+(a.b).c = \{I+(a.b)\}.(I+c) = \{(I+a).(I+b)\}.(I+c)$
4. Di dalam R/I dipenuhi sifat distributif sebab untuk sebarang $(I+a)$, $(I+b)$, $(I+c) \in R/I$ dengan $a,b,c \in R$ dipenuhi

   $(I+a).\{(I+b)+(I+c)\} = (I+a).\{I+(b+c)\} = I+a.(b+c) = I+\{(a.b)+(a.c)\}$

   $= \{I+(a.b)\}+\{I+(a.c)\} = \{(I+a).(I+b)\}+\{(I+a).(I+c)\}$ dan

   $\{(I+a)+(I+b)\}.(I+c) = \{I+(a+b)\}.(I+c) = I+\{(a+b).c\} = I+\{(a.c)+(b.c)\}$

   $= \{I+(a.c)\}+\{I+(b.c)\} = \{(I+a).(I+c)\}+\{(I+b).(I+c)\}$

Jadi terbukti R/I merupakan suatu ring.

Teorema 2.14 (Teorema fundamental homomorfisme ring)

Jika R dan S adalah ring dan $\theta : R \rightarrow S$ merupakan homomorfisme surjektif dari R ke S dengan $I = \ker \theta$ maka pemetaan $\Phi : R/I \rightarrow S$ yang didefinisikan dengan $\Phi(I+a) = \theta(a)$, $\forall (I+a) \in R/I$ merupakan isomorfisme dari R/I ke S, sehingga $R/I \approx S$

Bukti:

$\Phi : R/I \rightarrow S$ merupakan isomorfisme sebab Φ didefinisikan secara benar dan Φ pemetaan bijektif serta jika diambil sebarang $I+a, I+b \in R/I$ maka

$\Phi((I+a)+(I+b)) = \Phi(I+(a+b)) = \theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b) = \Phi(I+a) + \Phi(I+b)$

$\Phi((I+a).(I+b)) = \Phi(I+(a.b)) = \theta(a.b) = \theta(a) . \theta(b) = \Phi(I+a) . \Phi(I+b)$ $\square$

Diberikan F suatu field. $F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan ring faktor F[x] dengan ideal $I = \langle p(x) \rangle$. Ideal I disebut ideal utama yang dibangkitkan oleh $p(x) \in F[x]$. $\langle p(x) \rangle = \{p(x) . q(x) \mid q(x) \in F[x]\}$. Ring faktor $F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan himpunan koset-koset kanan dari I yaitu $\{I+r(x) \mid r(x) \in F[x]\}$.

Teorema 2.15

Jika F suatu field, $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+ \ldots +a_nx^n$ polinom berpangkat n atas field F dan $I = \langle p(x) \rangle$ ideal dari F[x], maka setiap elemen dari F[x]/I dengan tunggal dapat dinyatakan ke dalam bentuk:

$I + (b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots +b_{n-1}x^{n-1})$, dengan $b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1} \in F$

Bukti :

Diandaikan $I+f(x) \in F[x]/I$. Dengan algoritma pembagian, ada $q(x), r(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = p(x).q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg p(x)$, sehingga $f(x)-r(x) = p(x).q(x)$. Karena $p(x).q(x) \in I$ maka didapatkan $I+f(x) = I+r(x)$. Jadi setiap elemen dari $F[x]/I$ dapat dinyatakan paling sedikit dengan satu cara yang berbentuk $I+(b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots +b_{n-1}x^{n-1})$, dengan $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in F$

Jika $I+r(x)$ dapat dinyatakan dengan cara yang lain misalnya $I+(c_0+c_1x+c_2x^2+ \ldots +c_{n-1}x^{n-1})$ dengan $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in F$ maka haruslah

$I+(b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots +b_{n-1}x^{n-1}) = I+(c_0+c_1x+c_2x^2+ \ldots +c_{n-1}x^{n-1})$ maka

$(b_0-c_0)+(b_1-c_1)x+(b_2-c_2)x^2+ \ldots +(b_{n-1}-c_{n-1})x^{n-1} \in I$ sehingga

$p(x) \mid [(b_0-c_0)+(b_1-c_1)x+(b_2-c_2)x^2+ \ldots +(b_{n-1}-c_{n-1})x^{n-1}]$. Karena $\deg(p(x)) = n > n-1$ maka harus dipenuhi $(b_0-c_0) + (b_1-c_1) + (b_2-c_2)x^2 + \ldots + (b_{n-1}-c_{n-1})x^{n-1} = 0$, sehingga $(b_0 = c_0), (b_1 = c_1), (b_2 = c_2), \ldots, (b_{n-1} = c_{n-1})$. Jadi terbukti setiap elemen $F[x]/I$ dinyatakan secara tunggal dalam bentuk $I+(b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots +b_{n-1}x^{n-1})$, dengan $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in F$ $\square$

Contoh 2.15

Diberikan $p(x) = x^2+2x+2$. Akan ditentukan $\mathbf{Z}_3[x]/\langle x^2+2x+2 \rangle$.

$\mathbf{Z}_3[x]/\langle x^2+2x+2 \rangle = \{I+(b_0+b_1x) \mid b_0, b_1 \in \mathbf{Z}_3\}$. Anggota $\mathbf{Z}_3$ adalah $\{0,1,2\}$ maka $\mathbf{Z}_3[x]/\langle x^2+2x+2 \rangle = \{I+x, I+2x, I+1, I+2, I+1+2x, I+2+x\}$

Teorema 2.16

Diketahui F suatu field dan $p(x) \in F[x]$. Ring faktor $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan field bila dan hanya bila p(x) tak terurai atas field F. Selanjutnya K memuat suatu subfield yang isomorfik dengan F.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diandaikan $\langle p(x) \rangle = I$. Misalkan p(x) terurai atas field F maka ada polinom $a(x), b(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $p(x) = a(x).b(x)$ dengan deg a(x) < deg p(x) dan deg b(x) < deg p(x). Derajat polinom-polinom tidak nol dalam I paling sedikit harus sama dengan derajat p(x), sehingga $a(x) \notin I$ dan $b(x) \notin I$. Jadi $I + a(x)$ dan $I + b(x)$ keduanya bukan elemen nol (I) dari F[x]/I. Tetapi $(I+a(x)).(I+b(x)) = I+(a(x).b(x)) = I+p(x) = I$. Karena I merupakan elemen nol dari F[x]/I, maka F[x]/I mempunyai pembagi nol. Sehingga F[x]/I bukan field. Oleh karena itu p(x) harus tak terurai atas field F.

($\Leftarrow$) Jika p(x) tak terurai maka dibuktikan F[x]/I merupakan field.

1. F[x]/I merupakan ring komutatif sebab operasi perkalian di dalam F[x]/I bersifat komutatif. Untuk sebarang $I+a(x), I+b(x) \in F[x]/I$ dipenuhi
   $(I+a(x)) . (I+b(x)) = I+(a(x) . b(x)) = I+(b(x) . a(x)) = (I+b(x)) . (I+a(x))$
2. F[x]/I mempunyai elemen satuan, yaitu I+e sebab $\forall (I+a(x)) \in F[x]/I$, $\exists (I+e) \in F[x]/I$, sedemikian sehingga $(I+a(x)) . (I+e) = I+(a(x). e) = I+a(x)$
3. Untuk semua $I+f(x) \neq I$ dalam F[x]/I maka $f(x) \notin I$ yang berarti f(x) bukan suatu hasil perkalian dengan p(x). Karena p(x) tak terurai, maka p(x) dan f(x) mempunyai FPB yaitu elemen satuan e dan dipenuhi

$e = p(x).u(x)+f(x).v(x)$ dengan $u(x),v(x) \in F[x] \Leftrightarrow e-f(x).v(x) = p(x).u(x)$

Karena $p(x).u(x) \in I$ maka $I+e = I+(f(x).v(x)) \Leftrightarrow I+e = (I+f(x)).(I+v(x))$.

Jadi $I+v(x)$ merupakan invers dari $I+f(x)$ di dalam $F[x]/I$.

Terbukti jika $p(x)$ tak terurai maka $F[x]/\langle p(x)\rangle$ merupakan field.

$F[x]/I$ memuat subfield yang isomorfik dengan F. Misalkan $A=\{I+b \mid b \in F\}$ subfield dari $F[x]/I$. Jelas bahwa $A \subset F[x]/I$ karena setiap elemen $I+a \in A$ pasti di dalam $F[x]/I$, dan dipenuhi

1. A memuat elemen identitas yaitu $I+0 = I \in A$, sebab untuk $\forall (I+a) \in A$ dipenuhi $(I+a)+(I+0) = I+(a+0) = I+a$.
2. F mempunyai invers aditif yaitu $I+(-a) \in F$ sebab $-a \in F$ dan untuk $\forall (I+a) \in A$ dipenuhi $(I+a)+(I+(-a)) = I+(a+(-a)) = I$
3. A memuat elemen satuan yaitu $I+e$ karena untuk $\forall (I+a) \in A$ dipenuhi $(I+a).(I+e) = I+(a.e) = I+a \in F[x]/I$
4. Untuk setiap $I+a \neq I$ di dalam A maka invers multiplikatif dari $I+a$ adalah $I+a^{-1} \in A$ sebab $a^{-1} \in F$ dan $\forall (I+a) \in A$, $(I+a).(I+a^{-1}) = I+(a.(a^{-1})) = I+e$
5. Diambil sebarang $(I+a),(I+b) \in A$ maka

   $(I+a)+(I+b) = I+(a+b) \in A$ karena $a+b \in F$

   $(I+a).(I+b) = I+(a.b) \in A$ karena $a.b \in F$

Jadi $A = \{I+b \mid b \in F\}$ adalah subfield dari ring faktor $F[x]/I$

Diandaikan $\theta : F \to A = \{I+b \mid b \in F\}$ yang didefinisikan sebagai $\theta(x) = I+x$ $\forall x \in F$. Pemetaan $\theta : F \to A$ merupakan isomorfisme sebab

1. θ didefinisikan secara benar, sebab jika diambil sebarang $a,b \in F$ dengan $a = b$ maka $I+a = I+b \Leftrightarrow \theta(a) = \theta(b)$
2. θ merupakan hamomorfisme ring sebab untuk sebarang $a,b \in F$ dipenuhi

   $\theta(a+b) = I+(a+b) = (I+a)+(I+b) = \theta(a)+\theta(b)$

   $\theta(a.b) = I+(a.b) = (I+a).(I+b) = \theta(a).\theta(b)$
3. θ pemetaan surjektif sebab jika diambil sebarang $y \in A$ yaitu $y = I+a$, dengan $a \in F$ maka ada $a \in F$ sedemikian sehingga $\theta(a) = I+a = y$

   θ pemetaan injektif sebab jika diambil sebarang $a,b \in F$ dengan $\theta(a) = \theta(b)$ maka $I+a = I+b$, sehingga $a-b \in I$. Karena $a-b \in I$ maka a-b habis dibagi p(x). Karena deg $p(x) >$ deg (a-b) maka haruslah $a-b = 0$, sehingga $a = b$.

   Jadi θ pemetaan bijektif.

Jadi A subfield dari F[x]/I yang isomorfik dengan F $\square$

Teorema 2.17

Jika F field, maka setiap ideal dari ring polinom F[x] adalah ideal utama.

Bukti

Misalkan I sebarang ideal dari F[x]. Jika $I = \{0\}$ maka I adalah ideal utama. Jika $I \neq \{0\}$, misalkan g(x) polinom dengan derajat paling kecil diantara polinom-polinom yang tidak sama dengan nol dalam I. Akan dibuktikan $I = \langle g(x) \rangle$. Jelas bahwa $I \supseteq \langle g(x) \rangle$. Dimisalkan $f(x) \in I$. Menurut algoritma pembagian, ada polinom $q(x), r(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga

$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau deg $r(x) <$ deg $g(x)$.

Karena $f(x) \in I$ dan $g(x).q(x) \in I$, maka $r(x) = f(x) - g(x).q(x) \in I$. Karena tidak mungkin deg $r(x) <$ deg $g(x)$ maka haruslah $r(x) = 0$. Karena $g(x)$ polinom dengan derajat paling kecil dalam I, maka $f(x) = g(x).q(x) \in \langle g(x) \rangle$. Terbukti bahwa $I = \langle g(x) \rangle$.

D. Perluasan Field

Pada subbab sebelumnya, telah dibuktikan bahwa ring faktor $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan field jika $p(x)$ polinom tak terurai atas field F, dan field K memuat subfield yang isomorfik dengan F. Dikatakan bahwa K merupakan perluasan field dari F. Pada subbab ini akan dibahas mengenai perluasan field.

Definisi 2.15 (Perluasan Field)

Jika suatu field F merupakan subfield dari field E, maka E disebut perluasan field dari F. Atau Field E merupakan perluasan field dari F, jika E memuat F sebagai subfieldnya.

Contoh 2.16

Q merupakan subfield dari **R**, jadi **R** adalah perluasan field dari **Q**.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang perluasan field, akan diingatkan kembali beberapa definisi yang mendukung pembahasan subbab ini.

Definisi 2.16 (Ruang Vektor)

Diberikan F suatu field. Suatu himpunan tidak kosong V disebut ruang vektor V atas field F, jika V suatu grup abelian terhadap operasi penjumlahan, dan bersama dengan operasi perkalian skalar, untuk setiap $\alpha \in F$ dan $v \in V$, dipenuhi:

1. $\alpha v \in V$
2. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, untuk setiap α, $\beta \in F$ dan $v \in V$
3. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ untuk setiap $\alpha \in F$ dan $v_1, v_2 \in V$
4. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ untuk setiap α, $\beta \in F$ dan $v \in V$
5. $e\, v = v$, untuk semua $v \in V$, e elemen satuan dari F.

Elemen-elemen dari V disebut vektor, dan elemen-elemen dalam F adalah skalar.

Contoh 2.19

Diketahui F adalah suatu field, dan V = F[x] adalah ring polinom dalam x atas field F. V merupakan ruang vektor atas field F dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar, karena F[x] merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan, dan untuk setiap konstanta $\alpha \in F$, dan $f(x) \in F[x]$ dipenuhi aksioma 1-5 dalam definisi 2.16

Definisi 2.17 (Kombinasi Linear)

Diketahui V ruang vektor atas field F, dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$. Vektor $w \in V$ dikatakan sebagai kombinasi linear dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ jika w dapat dinyatakan dengan $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, untuk $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$

Definisi 2.18 (Bebas Linear)

Diketahui V ruang vektor atas field F. $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}\in V$ dikatakan bebas linear atas field F, jika $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n = 0$ dengan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in F$ hanya jika dipenuhi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Definisi 2.19 (Basis)

V merupakan ruang vektor berhingga atas field F. $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$disebut basis dari V atas field F jika:

1. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$merentang V atas field F yaitu setiap vektor $v\in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam F.
2. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ bebas linear atas field F.

Definisi 2.20 (Dimensi)

Dimensi dari ruang vektor berhingga V atas field F merupakan banyaknya vektor di dalam basis dari ruang vektor V atas field F .

Teorema 2.18

Jika E perluasan field dari F, maka E adalah ruang vektor atas field F.

Bukti

Jika E perluasan field dari F maka E adalah ruang vektor atas field F sebab E adalah grup abelian terhadap operasi penjumlahan, dan bersama dengan operasi perkalian skalar untuk $\alpha,\beta\in F$ dan $k, l\in E$ dipenuhi:

1. $\alpha k\in E$

2. $\alpha(\beta k) = (\alpha\beta)k$

3. $\alpha(k + l) = \alpha k + \alpha l$

4. $(\alpha + \beta)k = \alpha k + \beta k$

5. $ek = k$, untuk semua $k \in E$, e merupakan elemen satuan dari F.

Jadi terbukti E adalah ruang vektor atas field F □

Definisi 2.21

Derajat dari perluasan field E atas field F dinotasikan dengan [E : F] adalah dimensi dari E sebagai ruang vektor atas field F.

E disebut perluasan field berhingga jika [E : F] berhingga

Contoh 2.18

Derajat dari perluasan field **C** atas field **R** atau [**C** : **R**] adalah 2 sebab $\{1, i\}$ adalah basis dari **C** atas **R**, karena

1. 1 dan i merentang ruang vektor **C** atas **R**, sebab elemen-elemen dari **C** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari 1 dan i, yaitu $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

2. 1 dan i bebas linear atas field **R**, karena jika diambil $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ maka $\alpha + \beta i = 0$ hanya jika dipenuhi $\alpha = \beta = 0$

Teorema 2.19

Jika diketahui ring faktor $K = F[x]/\langle p(x)\rangle$ dengan ideal $I = \langle p(x)\rangle$ dan $p(x)$ polinom tak terurai berderajat n atas field F maka $[K : F] = n$

Bukti

Menurut teorema 2.16, ring faktor K merupakan field jika p(x) tak terurai atas field F. Karena K memuat subfield yang isomorfik dengan F maka K merupakan perluasan field dari F.

Menurut teorema 2.15 setiap elemen K merupakan himpunan koset–koset kanan yang berbentuk $I+(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})$, dengan $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in F$.

$\{1,x,\ldots,x^{n-1}\}$adalah basis dari ruang vektor K atas field F karena:

1. Elemen-elemen dari K dapat dinyatakan sebagai bentuk kombinasi linear $I+(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})$ dengan $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in F$. Jadi $1,x,\ldots,x^{n-1}$ merentang ruang vektor K atas field F
2. $1,x,\ldots,x^{n-1}$ bebas linear, sebab jika diambil $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in F$, maka $I+(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})=0$ hanya jika $b_0=b_1=\ldots=b_{n-1}=0$

Jadi karena $\{1,x,\ldots,x^{n-1}\}$ basis dari K atas field F maka $[K:F]=n$ □

Teorema 2.20

Jika L perluasan field berhingga dari K dan K perluasan field berhingga dari F, maka L perluasan field berhingga dari F dan $[L:F]=[L:K]\,[K:F]$

Bukti:

Diketahui field L, K dan F, dengan $L\supseteq K\supseteq F$. Akan dibuktikan jika diberikan basis dari ruang vektor L atas field K, dan basis dari ruang vektor K atas field F, maka terbentuk basis dari ruang vektor L atas field F.

Diandaikan $[L:K]=m$ dan $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ basis dari ruang vektor L atas field K. Dan $[K:F]=n$ dan $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ basis dari ruang vektor K atas field F.

Akan diperlihatkan L perluasan field berhingga dari F, dan akan diperlihatkan $\beta = \{\mathbf{v}_j\,\mathbf{u}_i \mid j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots m\}$ basis dari ruang vektor L atas field F

Diambil $x \in L$. Karena $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$basis dari ruang vektor L atas field K maka $x = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \ldots + k_m\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\mathbf{u}_i$, dengan $k_i \in K$. Karena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis dari K atas field F, maka k_i dapat dinyatakan sebagai:

$$k_i = f_{i1}\mathbf{v}_1 + f_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + f_{in}\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\,\mathbf{v}_j, \text{ dengan } f_{ij} \in F$$

Jadi
$$\begin{aligned} x &= (f_{11}\mathbf{v}_1 + f_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + f_{1n}\mathbf{v}_n)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (f_{m1}\mathbf{v}_1 + f_{m2}\mathbf{v}_2 + \ldots + f_{mn}\mathbf{v}_n)\,\mathbf{u}_m \\ &= f_{11}\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1 + f_{12}\mathbf{v}_2\mathbf{u}_1 + \ldots + f_{ij}\mathbf{v}_j\mathbf{u}_i + \ldots + f_{mn}\mathbf{v}_n\mathbf{u}_m \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\mathbf{v}_j\mathbf{u}_i, \text{ dengan } f_{ij} \in F \end{aligned}$$

Dengan demikian $\beta = \{\mathbf{v}_j\mathbf{u}_i \mid j = 1,2,\ldots,n : i = 1,2,\ldots,m\}$merentang ruang vektor L atas field F.

Diandaikan $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\mathbf{v}_j\mathbf{u}_i = 0$ dengan $f_{ij} \in F$. Karena $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$bebas linear atas field K, maka untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\mathbf{v}_j = 0$, tetapi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$juga bebas linear atas field F, sehingga untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ didapatkan $f_{ij} = 0$. Jadi $\beta = \{\mathbf{v}_j\mathbf{u}_i \mid j = 1,2,\ldots,n ; i = 1,2,\ldots,m\}$bebas linear atas field F.

Karena elemen-elemen β merentang L atas field F dan bebas linear atas field F, maka β adalah basis dari ruang vektor L atas field F. Banyaknya elemen dalam basis β adalah m.n elemen, sehingga $[L : F] = m.n = [L : K]\,[K : F]$.

Suatu polinom yang tak terurai atas field F tidak mempunyai penyelesaian di dalam field F. Melangkah ke pembahasan selanjutnya akan ditunjukkan bahwa polinom $p(x) \in F[x]$, mempunyai sebuah penyelesaian di dalam perluasan field F, apabila p(x) tak terurai atas field F.

Definisi 2.22

Misalkan E perluasan field dari F dan $a \in E$. F(a) adalah subfield terkecil dari E yang memuat F dan a, dan F(a) disebut sebagai field yang dihasilkan oleh gabungan a dengan F.

Jika E = F(a) untuk $a \in E$ maka E disebut perluasan field sederhana dari field F

Contoh 2.19

Himpunan bilangan kompleks **C** merupakan perluasan field dari himpunan bilangan real **R**. **R**(i) merupakan subfield terkecil dari **C** yang memuat **R** dan i, dan **R**(i) disebut sebagai field yang dihasilkan oleh gabungan i dengan **R**.

Definisi 2.23

Jika E perluasan field dari F, maka elemen $k \in E$ dikatakan bersifat aljabar atas field F jika k merupakan penyelesaian dari suatu polinom tidak nol dalam F[x]. Atau jika ada $a_0, a_1, .., a_n \in F$ yang semuanya tidak nol, sedemikian sehingga $a_0 + a_1 k + \ldots + a_n k^n = 0$

Jika elemen $k \in E$ tidak bersifat aljabar atas field F maka k dikatakan bersifat transenden atas field F.

Contoh 2.20

R perluasan field dari **Q**. Elemen $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$ bersifat aljabar atas field **Q** karena $\sqrt{3}$ penyelesaian dari polinom $x^2 - 3 \in \mathbf{Q}[x]$, sebab untuk $x = \sqrt{3}$ dipenuhi $x^2 - 3 = 0$

Teorema 2.21

Jika $E = F(\alpha)$ perluasan field sederhana dari field F, maka $F[x]/\langle p(x)\rangle \approx F[\alpha]$, dengan $I = \langle p(x)\rangle$ adalah ideal utama yang memuat semua $f(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$, dan dipenuhi $p(x) = 0$ atau $p(x)$ tak terurai atas field F.

Bukti

Diketahui bahwa $F[\alpha]$ adalah ring polinom dalam α atas field F, dan didefinisikan $\theta : F[x] \rightarrow F[\alpha]$ dengan aturan $\theta(f(x)) = f(\alpha)$.

θ adalah homomorfisme ring sebab

1. θ didefinisikan secara benar. Jika diambil sebarang $g(x), f(x) \in F[x]$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ maka jika $f(x) = g(x)$ maka didapat $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 \ldots, a_n = b_n$ sehingga $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_n\alpha^n$ dengan demikian $\theta(f(x)) = \theta(g(x))$

2. Jika diambil sebarang $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ dan $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ maka

untuk m>n

$\theta\,((f(x)+g(x)) = \theta((a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m))$

$= \theta\,((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n+\ldots+b_mx^m)$

$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\alpha+\ldots+(a_n+b_n)\alpha^n+\ldots+b_m\alpha^m$

$= (a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n)+(b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\ldots+b_m\alpha^m)$

$= \theta\,(f(x)) + \theta\,(g(x))$

untuk m≤n

$\theta\,((f(x).g(x)) = \theta((a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n).(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m))$

$= \theta\,((a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)\,x+\ldots+a_nb_mx^{n+m})$

$= (a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)\alpha+\ldots+a_nb_m\alpha^{n+m}$

$= (a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n).(b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\ldots+b_m\alpha^m)$

$= \theta\,(f(x))\,.\,\theta\,(g(x))$

Selanjutnya menurut teorema fundamental homomorfisme, karena $F[x]$ dan $F[\alpha]$ adalah ring dan $\theta : F[x] \to F[\alpha]$ homomorfisme ring yang surjektif, dengan $I = \ker\theta$ ideal dari $F[x]$, maka pemetaan $\Phi : F[x]/I \to F[\alpha]$ dengan aturan $\Phi\,(I+f(x)) = \theta\,(f(x))$, untuk setiap $I + f(x) \in F[x]/I$ adalah isomorfisme dari $F[x]/I$ ke $F[\alpha]$ sebab

1. Pemetaan Φ didefinisikan dengan benar dan Φ pemetaan bijektif
2. Jika diambil $I+f(x),\ I+g(x) \in F[x]/I$ maka

$\Phi\{(I+f(x)) + (I+g(x))\} = \Phi\{I+(f(x)+g(x))\} = \theta(f(x)+g(x)) = \theta(f(x))+\theta(g(x))$

$= \Phi(I+f(x)) + \Phi(I+g(x))$

$\Phi\{(I+f(x)).(I+g(x))\} = \Phi\{I+(f(x).g(x))\} = \theta(f(x).g(x)) = \theta(f(x)).\theta(g(x))$

$= \Phi(I+f(x)).\Phi(I+g(x))$

Jadi Φ merupakan isomorfisme dari $F[x]/I$ ke $F[\alpha]$ sehingga $F[x]/I \approx F[\alpha]$ dengan $I = \ker \theta$ ideal dalam $F[x]$.

Setiap ideal dalam $F[x]$ adalah ideal utama, jadi $I = \langle p(x) \rangle$, untuk $p(x) \in F[x]$. I memuat polinom-polinom yang mempunyai α sebagai penyelesaiannya, karena $f(x) \in I$ bila dan hanya bila $\theta(f(x)) = f(\alpha) = 0$.

Karena $F[\alpha] \subseteq E$ dan E field maka E tidak memuat pembagi nol. Dengan demikian $F[\alpha]$ tidak memuat pembagi nol. Selanjutnya karena $F[x]/\langle p(x) \rangle \approx F[\alpha]$, maka $F[x]/\langle p(x) \rangle$ tidak mempunyai pembagi nol. Hal ini berakibat $p(x) = 0$ atau $p(x)$ tak terurai atas field F □

Jika $p(x)$ polinom tak terurai atas field F maka ring faktor $F[x]/\langle p(x) \rangle$ adalah field. Karena $F(\alpha)$ merupakan subfield terkecil yang memuat F dan α, dan $F(\alpha) \supseteq F[\alpha] \approx F[x]/\langle p(x) \rangle$, maka $F[\alpha]$ dapat dinyatakan sebagai field.

Jika $p(x) = 0$ maka $F(\alpha)$ dikatakan sebagai perluasan transenden sederhana dari F dan α dikatakan transenden atas field F. Jika $p(x)$ tak terurai atas field F maka $F(\alpha)$ dikatakan perluasan aljabar sederhana dan α dikatakan bersifat aljabar atas field F

Akibat 2.1

Jika E perluasan field dari F dan $\alpha \in E$ penyelesaian dari polinom p(x) berderajat n yang tak terurai atas field F maka $[F(\alpha) : F] = n$.

Bukti :

Menurut teorema 2.19, jika diketahui $F[x]/\langle p(x)\rangle$ dengan ideal $I = \langle p(x)\rangle$ dan p(x) polinom berderajat n yang tak terurai atas field F maka $[F[x]/\langle p(x)\rangle : F] = n$. Sedangkan menurut teorema 2.21, $F[x]/\langle p(x)\rangle \approx F(\alpha)$. Dengan demikian $[F[x]/\langle p(x)\rangle : F] = [F(\alpha) : F] = n$ □

Contoh 2.21

Bilangan $\sqrt[3]{7} \in \mathbf{R}$ merupakan penyelesaian dari polinom $x^3-7 \in \mathbf{Z}[x]$, karena untuk $x = \sqrt[3]{7}$ dipenuhi $x^3-7 = 0$. Menurut Kriteria Eisenstein atau teorema akar-akar rasional polinom $x^3-7 \in \mathbf{Z}[x]$ adalah polinom tak terurai atas field **Q**. Sehingga $[\mathbf{Q}[x]/\langle(x^3-7)\rangle : \mathbf{Q}] = 3$. Karena $\mathbf{Q}[x]/\langle(x^3-7)\rangle \approx \mathbf{Q}(\sqrt[3]{7})$ maka $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{7}) : \mathbf{Q}] = 3$.

Teorema 2.22

Jika F suatu field dan $p(x) \in F[x]$ polinom tak terurai atas field F, maka $F[x]/\langle p(x)\rangle$ adalah perluasan field dari F dan p(x) mempunyai penyelesaian di dalam $F[x]/\langle p(x)\rangle$

Bukti:

Jika F field dan $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \in F[x]$ merupakan polinom tak terurai atas field F dan $I = \langle p(x)\rangle$ ideal dalam F[x], maka menurut teorema 2.16 F[x]/I merupakan field, selanjutnya karena $F[x]/\langle p(x)\rangle$ memuat subfield yang isomorfik dengan field F, maka F[x]/I adalah perluasan dari field F berderajat n, dengan elemen-elemennya adalah koset-koset yang berbentuk I+f(x). Elemen $\alpha = I+x \in F[x]/I$ penyelesaian dari p(x) dalam F[x]/I, sebab

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) &= a_0+a_1(I+x)+a_2(I+x)^2+\ldots+a_n(I+x)^n \\
&= a_0+a_1(I+x)+a_2(I+x^2)+\ldots+a_n(I+x^n) \\
&= I(a_1+\ldots+a_n)+(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n) \\
&= I+(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n) \\
&= I+p(x) = I+0 = I
\end{aligned}
$$

I elemen nol dari F[x]/I. Jadi $\alpha = I+x$ penyelesaian dari p(x) dalam F[x]/I □

Contoh 2.21

Karena polinom $x^2-2 \in \mathbf{Z}[x]$ tak terurai atas field **Q** maka ring faktor $\mathbf{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$ adalah perluasan field dari **Q**, dan $x^2-2 \in \mathbf{Z}[x]$ mempunyai penyelesaian di dalam $\mathbf{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$ yaitu $\sqrt{2}$. Setiap elemen dari $\mathbf{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle \approx \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ dinyatakan dengan bentuk $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$

Teorema 2.22

Jika $[E : F] = 2$ dengan $F \supseteq \mathbf{Q}$ maka $E = F(\sqrt{\lambda})$, untuk $\lambda \in F$

Bukti:

Karena diketahui $[E : F] = 2$, maka field E merupakan ruang vektor berdimensi dua atas field F. Diperluas basis $\{1\}$ ke basis $\{1,x\}$ untuk ruang vektor E atas field F. Sehingga $E = \{a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in F\}$.

Diambil $x \in E$. Karena E adalah field, maka $x^2 \in E$ dan

$$x^2 = a_0 + a_1x \text{ , untuk sebarang } a_0, a_1 \in F$$

$\Leftrightarrow x^2 - a_1x + 1/4a_1^2 = a_0 + 1/4a_1^2$

$\Leftrightarrow (x - 1/2a_1)^2 \quad = a_0 + 1/4a_1^2$

Jika $y = x - 1/2a_1$ maka $y^2 = a_0 + 1/4a_1^2$. Karena $y = x - 1/2a_1$ maka $\{1,y\}$ adalah basis dari ruang vektor E atas field F dan $E = F(y)$. Jika $a_0 + 1/4a_1^2 = \lambda \in F$ maka $y^2 = \lambda$ sehingga $y = \sqrt{\lambda}$. Jadi $E = F(\sqrt{\lambda})$ untuk $\lambda \in F$ $\square$

BAB III

BILANGAN KONSTRUKTIBEL

Pada Bab III ini, akan dipelajari tentang bilangan konstruktibel. Sebelum mendefinisikan bilangan konstruktibel, dibahas dahulu konstruksi klasik pada subbab pertama. Konstruksi klasik yang ingin dikerjakan antara lain konstruksi dari tiga masalah geometri Yunani kuno pada Bab IV nanti. Pada subbab kedua dibuktikan beberapa teorema dalam bilangan konstruktibel yang akan digunakan dalam pemecahan ketiga masalah geometri Yunani kuno pada Bab IV.

A. Konstruksi Klasik

Plato (± 427-347 SM), seorang ahli filsafat Yunani kuno menyatakan bahwa alat-alat geometri yang digunakan untuk mengerjakan konstruksi geometri pada zaman tersebut hanyalah penggaris tanpa tanda pengukuran ("Unmarked rulers") dan jangka yang kolaps (" A collapsing compass"). Penggaris dan jangka ini juga masih digunakan pada zaman geometri Euclides (± 350 SM)

Penggaris tanpa tanda pengukuran ini bukan penggaris dengan skala tertentu seperti penggaris zaman sekarang. Penggaris ini hanya berupa penggaris yang pinggirnya lurus, dan tidak untuk mengukur panjang, lebar dan sebagainya. Penggaris ini hanya digunakan untuk melukis suatu garis lurus.

Jangka yang kolaps ini bukan seperti jangka modern jaman sekarang, namun konstruksi yang dihasilkan akan sama dengan konstruksi dengan menggunakan jangka modern. Dengan kata lain, konstruksi yang dapat dikerjakan dengan jangka yang kolaps dapat juga dikerjakan dengan jangka modern, dengan cara yang lebih sederhana dan cepat. Oleh karena itu, sebagai kesepakatan kita dalam skripsi ini kita pergunakan jangka modern. Untuk selanjutnya, kedua alat di atas kita sebut penggaris dan jangka saja.

Penggaris dan jangka di atas sering disebut sebagai alat-alat klasik, dan konstruksi geometri yang dapat dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka disebut konstruksi klasik ("Classical construction"). Terdapat lima asumsi dasar konstruksi klasik yang juga digunakan oleh matematikawan zaman Yunani kuno. Semua titik, garis dan lingkaran di bawah ini terletak pada bidang. Lima asumsi dasar konstruksi klasik tersebut adalah

1. Jika diketahui dua titik, maka dapat dilukis garis yang menghubungkannya
2. Jika diketahui suatu titik pusat dan suatu segmen garis sebesar r sebagai jari–jarinya, maka dapat dilukis suatu lingkaran yang berpusat pada titik tersebut
3. Jika ada, perpotongan dari dua garis yang tidak sejajar dapat ditunjukkan
4. Jika ada, perpotongan dari suatu lingkaran dan suatu segmen garis dapat ditunjukkan
5. Jika ada, perpotongan dari dua lingkaran, dapat ditunjukkan.

Karena setiap asumsi di atas memuat semua langkah-langkah yang mungkin dengan menggunakan penggaris dan jangka, maka setiap konstruksi klasik harus terdiri atas sejumlah langkah-langkah berhingga, dengan setiap langkah tergantung pada salah satu asumsi di atas.

Sejak zaman Yunani kuno, terdapat beberapa bentuk konstruksi yang sudah dapat dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, antara lain:

1. Melukis garis yang melalui suatu titik dan tegak lurus pada garis yang lain.
2. Melukis garis yang melalui suatu titik dan sejajar dengan garis yang lain.
3. Membagi sebarang sudut menjadi dua bagian yang sama besar.

Ketiga konstruksi tersebut dikerjakan sebagai berikut

1. Melukis suatu garis yang melalui suatu titik dan tegak lurus pada garis yang lain

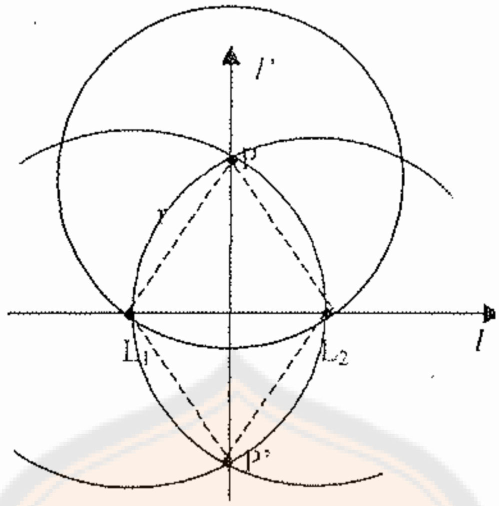
   Diketahui : garis l, dengan titik $P \notin l$

   Dilukis : garis $l' \perp l$ dan melalui titik P

   Lukisan :

   1. Dilukis lingkaran dengan titik pusat P dan jari-jarinya r, sedemikian sehingga dibuat memotong garis l di titik L_1 dan titik L_2
   2. Dilukis lingkaran (L_1,r) dengan titik pusat L_1 dan melalui titik P
   3. Dilukis lingkaran (L_2,r) dengan titik pusat L_2 dan melalui titik P
   4. Kedua lingkaran berpotongan di titik P dan P'
   5. Dilukis garis l' yang melalui titik P dan P', memotong garis l sedemikian sehingga garis l' tegak lurus garis l

   Untuk $P \in l$, langkah (2) dan (3) dapat diganti dengan: dilukis lingkaran (L_1, r_1) dan (L_2, r_1) dengan $r_1 > r$



Gb. 3.1 *l'* tegak lurus garis *l*

Akan ditunjukkan bahwa $l \perp l'$

Karena $PL_2 = P'L_2 = PL_1 = P'L_1 = r$ maka segiempat $PL_2P'L_1$ merupakan suatu belah ketupat, dengan $\overline{L_1L_2}$ dan $\overline{PP'}$ sebagai diagonal-diagonalnya. Karena diagonal-diagonal suatu belah ketupat berpotongan saling tegak lurus maka $\overline{L_1L_2} \perp \overline{PP'}$. Jadi terbukti bahwa garis *l'* melalui titik P dan tegak lurus pada garis *l*. □

2. Dilukis suatu garis yang melalui suatu titik dan sejajar dengan garis yang lain.

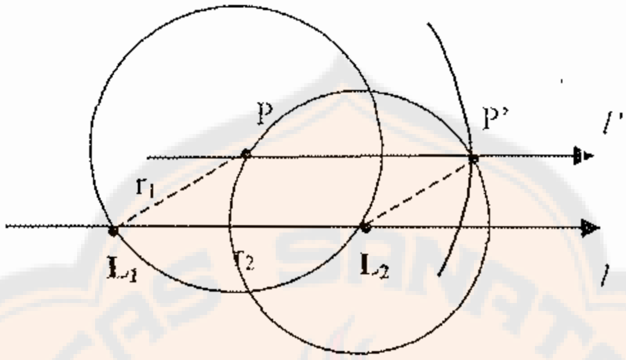
Diketahui : garis *l*, dengan titik $P \notin l$

Dilukis : garis *l'* yang sejajar garis *l* dan melalui titik P

Lukisan :

1. Dilukis lingkaran (P,r_1) sedemikian sehingga dibuat memotong garis *l* di titik L_1 dan L_2
2. Dilukis lingkaran (L_2,r_1), dengan $r_1 = L_1P$
3. Dilukis lingkaran (P,r_2), dengan $r_2 = L_1L_2$ dan berpotongan dengan lingkaran (L_2,r_1) di P'

4. Dilukis garis *l'* yang melalui titik P dan P' sedemikian sehingga garis *l'* sejajar dengan garis *l*



Gb. 3.2 garis $l \parallel l'$

Akan ditunjukkan bahwa garis *l* sejajar garis *l'*

Karena $L_1P = L_2P' = r_1$ dan $L_1L_2 = PP' = r_2$, maka segiempat PL_1L_2P' adalah suatu jajar genjang sehingga $\overline{L_1L_2}$ sejajar $\overline{PP'}$ dan $\overline{L_1P}$ sejajar $\overline{L_2P'}$. Dengan demikian garis *l'* sejajar dengan garis *l* □

3. Membagi sebarang sudut menjadi dua bagian yang sama besar.

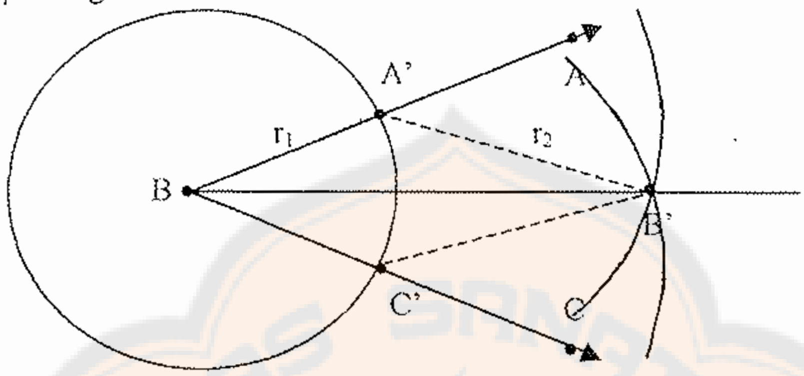
Diketahui : $\angle ABC$

Dilukis : $\angle ABB' \cong \angle CBB'$

Lukisan :

1. Dilukis lingkaran (B,r_1) sedemikian sehingga memotong $\overline{BA}$ di titik A' dan $\overline{BC}$ di titik C'
2. Dilukis lingkaran (A',r_2)
3. Dilukis lingkaran (C',r_2)
4. Lingkaran (A',r_2) dan (C',r_2) berpotongan di titik B'

5. Dilukis garis yang melalui titik B dan B', sedemikian sehingga $\overline{BB'}$ pembagi dua $\angle ABC$



Gb. 3.3 Membagi dua suatu sudut

Akan ditunjukkan bahwa $\angle ABB' \cong \angle CBB'$

Karena $\overline{BA'} \cong \overline{BC'}$; $\overline{A'B'} \cong \overline{C'B'}$; $\overline{BB'} \cong \overline{BB'}$ maka Δ A'BB' $\cong$ Δ C'BB'

sehingga $\angle A'BB' \cong \angle C'BB'$; $\angle BA'B' \cong \angle BC'B$; $\angle A'B'B \cong \angle C'B'B$.

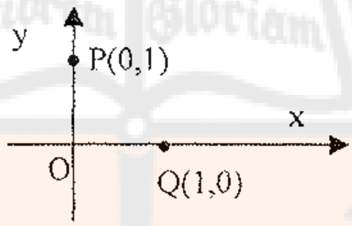
Jadi terbukti $\angle A'BB' \cong \angle C'BB'$. Dengan demikian $\angle ABB' \cong \angle CBB'$

Meskipun sudah dapat mengerjakan konstruksi klasik yang bermacam–macam, ada tiga masalah geometri klasik Yunani kuno, yang belum dapat mereka pecahkan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Ketiga masalah ini begitu termashur sebab walaupun berbagai usaha dilakukan dan hadiah besar diberikan bagi yang bisa memecahkan ketiga masalah tersebut, masalah ini tetap belum terpecahkan. Ketiga masalah ini bertahan hampir 19 abad lamanya. Ternyata ketiga masalah ini dapat dipecahkan dengan menerapkan teori-teori aljabar modern pada masalah geometri di atas. Untuk itu, sekarang kita akan melihat hubungan antara aljabar dan geometri. Pemecahan ketiga masalah tersebut akan dibicarakan pada Bab IV.

B. Definisi dan Teorema–Teorema Bilangan Konstruktibel.

Pada subbab kedua ini akan dibahas mengenai definisi bilangan konstruktibel dan akan dibuktikan beberapa teorema dalam bilangan konstruktibel yang akan digunakan dalam pemecahan ketiga masalah pada Bab IV nanti.

Diandaikan diketahui suatu satuan panjang yang dinyatakan dengan bilangan 1 (Dapat berubah dari satu masalah ke masalah yang lain). Jika diketahui suatu segmen garis, maka dapat dilukis suatu garis yang tegak lurus pada garis tersebut dan berpotongan di titik O(0,0) hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Kedua garis ini disebut sumbu koordinat dan dinyatakan sebagai sumbu x dan sumbu y. Satu satuan panjang yang diketahui diukurkan pada kedua sumbu garis. Pada sumbu x ditentukan titik Q(1,0), dan pada sumbu y ditentukan titik P(0,1). Keadaan di atas disebut sistem koordinat Cartesius.



Gb. 3.4 Ilustrasi 3.1

Titik-titik O, P, Q dan titik-titik yang lain dalam bidang XOY yang dapat dilukis dengan mengulangi penggunaan penggaris dan jangka dimulai dari titik O,P,Q disebut titik–titik kostruktibel.

Garis kostruktibel adalah garis dalam bidang XOY yang menghubungkan dua titik yang kostruktibel

Lingkaran konstruktibel adalah lingkaran dengan pusat titik konstruktibel, dan jari–jarinya adalah jarak antara dua titik konstruktibel yang lain.

Bilangan konstruktibel adalah bilangan yang menyatakan jarak antara dua titik konstruktibel atau dengan kata lain, bilangan yang menyatakan panjang segmen garis konstruktibel.

Titik–titik potong dari dua garis konstruktibel, dua lingkaran konstruktibel atau garis konstruktibel dengan lingkaran konstruktibel juga merupakan titik-titik konstruktibel. Titik-titik ini dapat ditunjukkan berdasarkan langkah-langkah berhingga dari lima asumsi dasar konstruksi penggaris dan jangka.

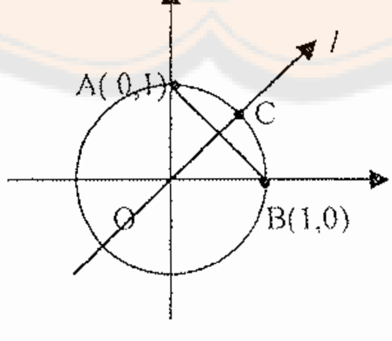
Dengan demikian definisi dari bilangan konstruktibel adalah sebagai berikut:

Definisi 3.1 (Bilangan Konstruktibel)

Diketahui suatu satuan panjang. Bilangan α disebut bilangan konstruktibel, jika dapat dilukis suatu segmen garis dengan panjang α, dengan langkah-langkah berhingga penggunaan penggaris dan jangka dimulai dari satu satuan panjang yang diketahui.

Contoh 3.1

1. Diketahui sistem koordinat Cartesius dengan lingkaran satuan yang konstruktibel, titik pusat O, dan jari–jari OB = 1 satuan.



Gb. 3.5 Ilustrasi contoh 1

a. Titik O(0,0), A(0,1), B(1,0) merupakan titik-titik konstruktibel

b. Segmen garis $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ merupakan segmen garis konstruktibel

c. Garis l merupakan garis konstruktibel, karena garis l menghubungkan titik O(0,0) dengan sebarang titik pada lingkaran satuan .

d. Titik C merupakan titik konstruktibel, karena C merupakan titik potong antara garis konstruktibel l, dengan lingkaran satuan yang konstruktibel.

e. $\sqrt{2}$ adalah bilangan konstruktibel karena $\sqrt{2}$ merupakan jarak antara titik A(0,1) dan B(1,0) atau dengan kata lain $\sqrt{2}$ adalah panjang segmen garis konstruktibel AB.

2. Titik P(a,b) konstruktibel jika dan hanya jika koordinat–koordinat Cartesiusnya, a dan b merupakan bilangan konstruksibel karena

($\Rightarrow$) Jika diketahui titik P(a,b) konstruktibel, maka dapat dilukis garis-garis melalui P yang tegak lurus dengan setiap sumbu koordinatnya. Titik--titik potong garis ini dengan sumbu koordinat adalah A(a,0) dan B(0,b) sehingga a dan b adalah bilangan konstruktibel, sebab merupakan jarak antara titik O(0,0) dengan A(a,0) dan jarak antara titik O(0,0) dengan B(0,b).

($\Leftarrow$) Jika diberikan suatu bilangan konstruktibel a dan b yang merupakan jarak antara O(0,0) dengan titik konstruktibel A(a,0) dan B(0,b), maka titik P(a,b) merupakan titik konstruktibel, karena titik P(a,b) merupakan titik potong antara dua lingkaran yaitu lingkaran dengan titik pusat A(a,0) dan jari–jari b dan lingkaran dengan titik pusat B(0,b) dan jari–jari a.

Penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, serta bentuk-bentuk akar kuadrat dapat dilukis hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, sebab jika diketahui 1 satuan panjang, segmen garis dengan panjang a dan segmen garis dengan panjang b, dapat dilukis segmen garis dengan panjang a+b, a-b, a.b, a/b untuk b≠0 (operasi-operasi rasional), dan $\sqrt{a}$ untuk a>0 hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Jadi empat operasi rasional dan bentuk-bentuk akar kuadrat merupakan konstruksi klasik. Dengan demikian dibuktikan teorema di bawah ini:

Teorema 3.1

Himpunan bilangan konstruktibel **K** adalah subfield dari himpunan bilangan real **R**.

Bukti:

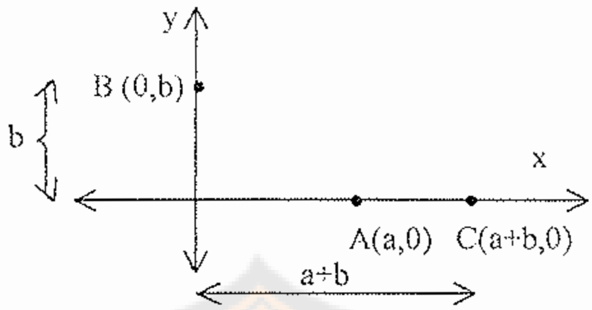
Diketahui : Suatu satuan panjang OP = 1 satuan dan **K** himpunan bagian dari **R**

$a \in \mathbf{K}$ merupakan jarak antara titik A(a,0) dengan O(0,0) pada sumbu x.

$b \in \mathbf{K}$ merupakan jarak antara titik B(0,b) dengan O(0,0) pada sumbu y.

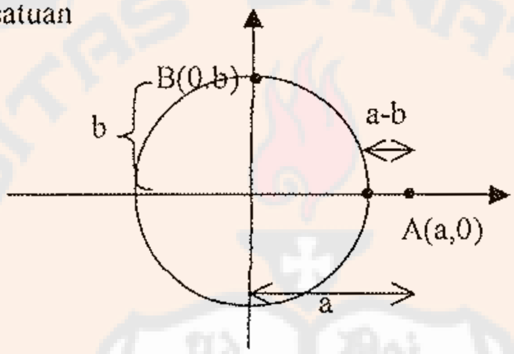
Akan dibuktikan $a+b \in \mathbf{K}$, $a-b \in \mathbf{K}$, $a.b \in \mathbf{K}$ dan untuk $b \neq 0$, $a/b \in \mathbf{K}$.

1. $a+b \in \mathbf{K}$, sebab jika diketahui $a,b \in \mathbf{K}$, maka dapat dilukis segmen garis dengan panjang a+b satuan



Gb. 3.6 Ilustrasi pembuktian 1

2. a-b∈**K** sebab jika diketahui a,b∈**K**, maka dapat dilukis segmen garis dengan panjang a-b satuan

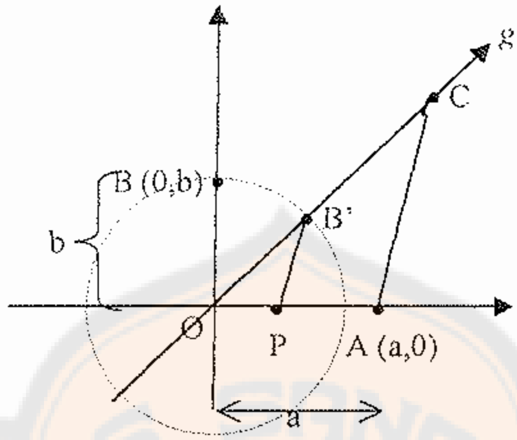


Gb. 3.7 Ilustrasi pembuktian 2

3. a.b∈**K** sebab jika diketahui a,b∈**K**, maka dapat dilukis segmen garis dengan panjang a .b satuan

Lukisan:

1. Dilukis lingkaran (O,b)
2. Dilukis garis yang membagi dua sama ∠ BOA yaitu garis g dan berpotongan dengan lingkaran (O,b) di titik B'
3. Dilukis segmen garis $\overline{PB'}$
4. Dilukis segmen garis ($\overline{AC}$) yang melalui titik A dan sejajar dengan segmen garis $\overline{PB'}$, sehingga berpotongan dengan garis g di titik C.
5. Dapat dilukis segmen garis $\overline{OC}$ dengan panjang a.b satuan



Gb. 3.8 Ilustrasi pembuktian 3

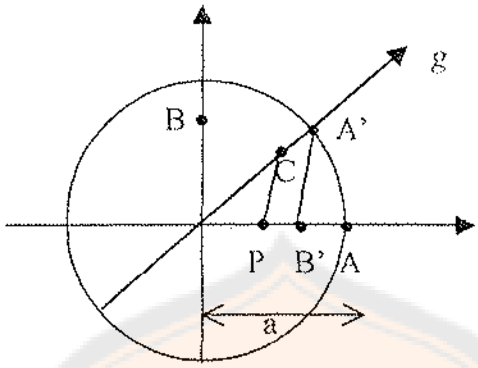
Akan ditunjukkan bahwa OC = a.b satuan

Karena ∠OPB' ≅ ∠OAC ; ∠B'OP ≅ ∠COA, maka Δ OPB' ~ Δ OAC, sehingga $\frac{OB'}{OP} = \frac{OC}{OA} \Leftrightarrow \frac{b}{1} = \frac{OC}{a} \Leftrightarrow OC = a.b$. Jadi terbukti a.b∈**K**

4. Jika b≠0, a/b∈**K** sebab dapat dilukis segmen garis $\overline{OC}$ dengan panjang a/b satuan

   Lukisan:

   1. Dilukis lingkaran (O,a)
   2. Dilukis garis yang membagi dua sama ∠ BOA yaitu garis *g* dan berpotongan dengan lingkaran (O,a) di titik A'
   3. Dilukis segmen garis $\overline{B'A'}$
   4. Dilukis segmen garis ($\overline{PC}$) yang melalui titik P dan sejajar dengan segmen garis $\overline{B'A'}$, sehingga berpotongan dengan garis *g* di titik C.
   5. Dapat dilukis segmen garis $\overline{OC}$ dengan panjang a/b satuan.



Gb. 3.9 Ilustrasi pembuktian 4

Akan ditunjukkan bahwa OC = a/b satuan, jika b≠0

Karena ∠POC ≅ ∠B'OA' ; ∠OPC ≅ ∠OB'A' maka ΔOCP ~ ΔOA'B'. Jadi

$\frac{OC}{OP} = \frac{OA'}{OB'} \Leftrightarrow \frac{OC}{1} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow OC = \frac{a}{b}$. Jadi terbukti a/b∈**K**.

Dengan demikian **K** subfield dari **R** □

Karena dibuktikan bahwa himpunan bilangan konstruktibel subfield dari himpunan bilangan real, maka di bawah ini dapat dibuktikan bahwa himpunan bilangan rasional **Q** subfield dari himpunan bilangan konstruktibel **K**.

Akibat 3.1

Himpunan bilangan konstruktibel **K** merupakan perluasan field dari himpunan bilangan rasional **Q**

Bukti:

Karena 1∈**K** dan penjumlahan, pengurangan dan perkalian bilangan konstruktibel adalah konstruktibel, maka **Z**⊆**K**. Karena pembagian bilangan konstruktibel adalah konstruktibel, maka **Q**⊆**K** sehingga **Q** subfield dari **K**. Dengan demikian **K** perluasan field dari **Q**. □

Jika diketahui suatu satuan panjang, dengan menggunakan penggaris dan jangka dapat dilukis suatu segmen garis dengan panjang $\sqrt{a}$ untuk $a>0$. Dengan demikian bilangan akar kuadrat adalah bilangan konstruktibel, dengan dibuktikannya teorema di bawah ini.

Teorema 3.2

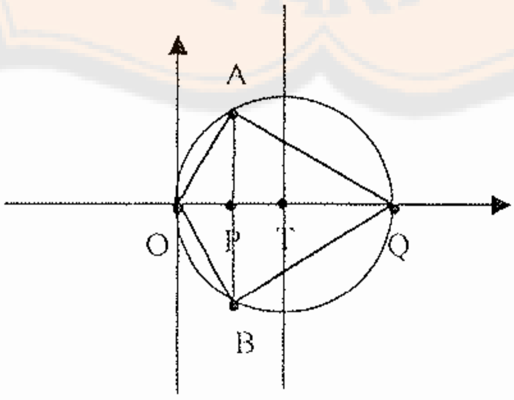
Jika $a \in \mathbf{K}$, dan $a>0$, maka $\sqrt{a} \in \mathbf{K}$

Bukti :

Diketahui segmen satuan $\overline{OP}$ dan segmen garis $\overline{PQ}$ sedemikian sehingga O-P-Q dengan $OP = 1$ satuan dan $PQ = a$ satuan.

Lukisan :

1. Dicari titik tengah T yang membagi $\overline{OQ}$ menjadi dua bagian yang sama $OT = TQ = r$
2. Dilukis lingkaran dengan pusat T dan jari – jari r
3. Dilukis garis yang melalui P dan tegak lurus $\overline{OQ}$ sehingga berpotongan dengan lingkaran (T,r) di dua titik yaitu A dan B.
4. Segmen garis $PA = PB = \sqrt{a}$



Gb. 3.10 lukisan segmen garis $PA = \sqrt{a}$

Akan ditunjukkan bahwa AP = PA = $\sqrt{a}$

Karena $\angle AOP \cong \angle PAQ$; $\angle APQ \cong \angle APO$ maka $\Delta OPA \sim \Delta\ APQ$, sehingga $\frac{OP}{AP} = \frac{PA}{PQ} \Leftrightarrow \frac{1}{AP} = \frac{PA}{a} \Leftrightarrow AP^2 = a \Leftrightarrow AP = \sqrt{a}$. Jadi karena dapat dilukis segmen garis dengan panjang $\sqrt{a}$ untuk a>0 maka $\sqrt{a} \in \mathbf{K}$ □

Contoh 3.2

1. 5, 3/7, $\sqrt{7}$, 2+4$\sqrt{5}$,$\sqrt{3} - \sqrt{4/5}$, $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ adalah bilangan konstruktibel.
2. $\sqrt[4]{3}$ adalah bilangan konstruktibel karena $\sqrt{3}$ bilangan konstruktibel. Jadi $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$ adalah bilangan konstruktibel.

Pada subbab sebelumnya dikatakan ada lima asumsi dasar konstruksi klasik pada definisi bilangan konstruktibel. Kelima asumsi tersebut dapat dinyatakan dengan operasi-operasi di bawah ini

1. Jika diketahui dua titik, maka persamaan garisnya dapat ditunjukkan.
2. Jika diketahui suatu titik dan segmen garis sebagai jari-jarinya maka persamaan lingkarannya dapat ditunjukkan.
3. Jika dua garis yang tidak sejajar berpotongan, maka koordinat-koordinat titik potongnya dapat ditunjukkan.
4. Jika diketahui suatu garis dan suatu lingkaran berpotongan, maka koordinat-koordinat titik potongnya dapat ditunjukkan.

5. Jika dua lingkaran berpotongan, maka koordinat-koordinat titik potongnya dapat ditunjukkan.

Telah dibuktikan pula bahwa himpunan bilangan konstruktibel **K** adalah perluasan field dari himpunan bilangan rasional **Q**, dan bilangan akar kuadrat anggota dari himpunan bilangan konstruktibel. Jadi jika diketahui $a_1 \in \mathbf{Q} = \mathbf{K}_0$ dengan $a_1 > 0$, maka $\sqrt{a_1} \in \mathbf{K}$. Semua anggota dari perluasan field $\mathbf{K}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1})$ atas field **Q** adalah konstruktibel, dan dipenuhi $[\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{K}_1 : \mathbf{Q}] = 1$ atau 2, tergantung apakah $\sqrt{a_1}$ rasional atau irrasional.

Jika $a_2 \in \mathbf{K}_1$, semua anggota dari perluasan field $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1(\sqrt{a_2}) = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$ atas $\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}) = \mathbf{K}_1$ adalah konstruktibel, dan dipenuhi $[\mathbf{K}_2 : \mathbf{K}_1] = 1$ atau 2 tergantung apakah $\sqrt{a_2} \in \mathbf{K}_1$ atau $\sqrt{a_2} \notin \mathbf{K}_1$.

Bila proses ini diteruskan, maka jika $a_n \in \mathbf{K}_{n-1}$ semua anggota dari perluasan field $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n-1}(\sqrt{a_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n})$ atas field $\mathbf{K}_{n-1}$ adalah konstruktibel, dan dipenuhi $[\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) : \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}})] = [\mathbf{K}_n : \mathbf{K}_{n-1}] = 1$ atau 2, tergantung apakah $\sqrt{a_n} \in \mathbf{K}_{n-1}$ atau tidak

Dengan keterangan di atas, dapat diperlihatkan bahwa setiap bilangan konstruktibel terdapat dalam suatu field yang dihasilkan oleh perulangan perluasan field di atas dengan dibuktikannya teorema di bawah ini.

Teorema 3.3

Bilangan α disebut konstruktibel bila dan hanya bila ada suatu urutan field-field bilangan real $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ sedemikian sehingga $\alpha \in \mathbf{K}_n \supseteq \mathbf{K}_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{K}_1 \supseteq \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}$ dan $[\mathbf{K}_i : \mathbf{K}_{i-1}] = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$.

Bukti :

($\Leftarrow$) Jika diketahui $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ sedemikian sehingga $\alpha \in \mathbf{K}_n \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{K}_1 \supseteq \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}$ dan $[\mathbf{K}_i : \mathbf{K}_{i-1}] = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$, maka menurut teorema 2.22 didapat $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i-1}(\sqrt{\lambda_{i-1}})$ untuk $\lambda_{i-1} \in \mathbf{K}_{i-1}$. Karena $\mathbf{K}_i$ field himpunan bilangan real maka $\lambda_{i-1} > 0$. Sedangkan menurut teorema 3.2, karena $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i-1}(\sqrt{\lambda_{i-1}})$ untuk $\lambda_{i-1} \in \mathbf{K}_{i-1}$ dan $\lambda_{i-1} > 0$ maka setiap anggota dari $\mathbf{K}_n$ adalah konstruktibel.

($\Rightarrow$) Jika $\alpha \in \mathbf{K}$ maka α dapat dinyatakan sebagai koordinat-koordinat titik-titik konstruktibel dari (0,0) dan (1,0) oleh suatu langkah-langkah berhingga dari operasi-operasi kelima asumsi dasar konstruksi klasik dalam definisi bilangan konstruksibel. Hal ini dibuktikan dengan induksi dari m yaitu jumlah dari bilangan-bilangan konstruktibel yang digunakan.

Diandaikan $X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ himpunan bilangan konstruktibel, yang dapat dinyatakan sebagai koordinat titik-titik konstruktibel. Jika ada bilangan $x_{k+1} \in \mathbf{K}$ akan diperlihatkan $[\mathbf{Q}(X_{k+1}) : \mathbf{Q}(X_k)] = 1$ atau 2 dengan $\mathbf{Q}(X_{k+1}) = \mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$.

Pertama-tama akan diperlihatkan bahwa jika dilakukan operasi 1 atau 2, maka koefisien-koefisien dari persamaan garis atau persamaan lingkaran tetap di dalam $\mathbf{Q}(X_k)$. Selanjutnya jika dilakukan operasi 3, ditunjukkan bahwa bilangan baru yang terbentuk tetap di dalam $\mathbf{Q}(X_k)$. Jika dilakukan operasi 4 atau 5, bilangan baru yang terbentuk tetap di dalam $\mathbf{Q}(X_k)$ atau merupakan perluasan field berderajat 2 atas field $\mathbf{Q}(X_k)$.

Operasi 1

Jika diketahui titik konstruktibel (a_1,b_1) dan (a_2,b_2) dengan $a_1,b_1,a_2,b_2 \in X_k$, maka persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut adalah

$$\frac{y-b_1}{b_2-b_1} = \frac{x-a_1}{a_2-a_1}$$

$\Leftrightarrow (y-b_1)(a_2-a_1) = (x-a_1)(b_2-b_1)$

$\Leftrightarrow (a_2-a_1)\,y - (b_2-b_1)\,x - b_1(a_2-a_1) + a_1(b_2-b_1) = 0$

Persamaan umum garis lurus berbentuk $Ax+By+C=0$, dengan $A,B,C \in \mathbf{Q}(X_k)$ sebab $a_1,b_1,a_2,b_2 \in X_k$.

Operasi 2

Jika diketahui titik pusat lingkaran (a_1,b_1) dan jari-jarinya adalah jarak antara titik (a_2,b_2) dengan (a_3,b_3) yaitu $r^2 = (a_2-a_3)^2 + (b_2-b_3)^2$ dengan $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3 \in X_k$ maka persamaan lingkarannya adalah

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r^2$$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2a_1x + a_1^2) + (y^2 - 2b_1y + b_1^2) = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + a_1^2 + b_1^2 - r^2 = 0$

Persamaan umum lingkaran berbentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C=0$ dengan $A,B,C \in \mathbf{Q}(X_k)$, sebab $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3 \in X_k$.

Operasi 3

Jika diketahui dua garis yang persamaannya $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dengan $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbf{Q}(X_k)$, maka koordinat-koordinat titik potong kedua garis tersebut adalah :

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Jika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ maka kedua garis tidak sejajar dan berpotongan di titik (x,y). Karena $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbf{Q}(X_k)$ maka $(x,y) \in \mathbf{Q}(X_k)$.

Operasi 4

Jika diketahui suatu lingkaran yang persamaannya $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ dengan $a,b,c \in \mathbf{Q}(X_k)$ dan suatu garis yang persamaannya $dx+ey+f = 0$ dengan $d,e,f \in \mathbf{Q}(X_k)$, maka koordinat-koordinat titik potongnya (x,y) dapat ditunjukkan

Jika $e \neq 0$, $y = \dfrac{-(dx+f)}{e}$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran sehingga

$$x^2 + \left[\frac{-(dx+f)}{e}\right]^2 + ax + b\left[\frac{-(dx+f)}{e}\right]^2 + c = 0$$

Persamaan kuadrat untuk koordinat x adalah $Ax^2+Bx+C = 0$, dengan $A,B,C \in \mathbf{Q}(X_k)$

Garis dan lingkaran berpotongan hanya jika $B^2 - 4AC \geq 0$. Koordinat x dari titik perpotongannya adalah $x = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ dengan $x \in \mathbf{Q}(X_k)$ atau x anggota perluasan field $\mathbf{Q}(X_k)(\sqrt{B^2-4AC})$. Jadi koordinat $x \in \mathbf{Q}(X_k)$ atau ada bilangan baru $x_{k+1} \in \mathbf{Q}(X_{k+1})$ dengan $\mathbf{Q}(X_{k+1}) = \mathbf{Q}(X_k)(\sqrt{B^2-4AC})$ dan dipenuhi $[\mathbf{Q}(X_{k+1}) : \mathbf{Q}(X_k)] = 2$.

Hal yang sama untuk koordinat y.

Jadi koordinat-koordinat titik potong garis dan lingkaran adalah $(x,y) \in \mathbf{Q}(X_k)$ atau $(x,y) \in \mathbf{Q}(X_{k+1})$ dengan $[\mathbf{Q}(X_{k+1}) : \mathbf{Q}(X_k)] = 2$.

Operasi 5

Jika diketahui dua lingkaran yang persamaannya $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ dan $x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$ dengan $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 \in \mathbf{Q}(X_k)$, maka koordinat-koordinat titik potong kedua lingkaran dapat ditunjukkan.

Persamaan garis yang menghubungkan kedua titik potong lingkaran adalah

$(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + (c_1-c_2) = 0$

Persamaan umum garis adalah $ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in \mathbf{Q}(X_k)$.

Jika $a \neq 0$, $x = \dfrac{-by-c}{a}$ disubstitusikan ke salah satu persamaan lingkaran sehingga persamaan kuadrat untuk koordinat y yaitu $Ay^2+By+C=0$, dengan $A,B,C \in \mathbf{Q}(X_k)$.

Kedua lingkaran berpotongan hanya jika $B^2-4AC \geq 0$. Koordinat y dari titik perpotongannya adalah $y = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ dengan $y \in \mathbf{Q}(X_k)$ atau y anggota dari perluasan field $\mathbf{Q}(X_k)(\sqrt{B^2-4AC})$. Jadi koordinat $y \in \mathbf{Q}(X_k)$ atau ada bilangan baru $y_{k+1} \in \mathbf{Q}(X_{k+1})$ dengan $\mathbf{Q}(X_{k+1}) = \mathbf{Q}(X_k)(\sqrt{B^2-4AC})$, dan dipenuhi $[\mathbf{Q}(X_{k+1}) : \mathbf{Q}(X_k)] = 2$.

Hal yang sama untuk koordinat x.

Jadi koordinat-koordinat titik potong kedua lingkaran adalah $(x,y)\in\mathbf{Q}(X_k)$ atau $(x,y)\in\mathbf{Q}(X_{k+1})$ dengan $[\mathbf{Q}(X_{k+1}):\mathbf{Q}(X_k)] = 2$.

Pada mulanya m = 2 yaitu $X_2 = \{0,1\}$ sehingga $\mathbf{Q}(X_2)=\mathbf{Q}$. Dengan induksi pada m, koordinat-koordinat titik konstruktibel yang digunakan maka $\alpha\in\mathbf{Q}(X_m)\supseteq\mathbf{Q}(X_{m-1})\supseteq\ldots\supseteq\mathbf{Q}(X_3)\supseteq\mathbf{Q}(X_2)=\mathbf{Q}$ dengan $[\mathbf{Q}(X_{k+1}):\mathbf{Q}(X_k)] = 1$ atau 2, untuk $2 \le k \le m-1$.

Selanjutnya setiap perluasan field $\mathbf{Q}(X_k)$ adalah subfield dari $\mathbf{R}$, karena $\mathbf{Q}$ dan X_k himpunan bilangan real maka $\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Q}(X_i) \supseteq \mathbf{Q}(X_{i-1}) \supseteq \mathbf{Q}$, dan berakibat $\alpha\in\mathbf{K}_n\supseteq\mathbf{K}_{n-1}\supseteq\ldots\supseteq\mathbf{K}_1\supseteq\mathbf{K}_0=\mathbf{Q}$ dan $[\mathbf{K}_i:\mathbf{K}_{i-1}] = 2$ untuk $1 \le i \le n$ $\square$

Contoh 3.3

Diketahui $\mathbf{K}\supseteq\mathbf{Q}$. Field $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a + b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ adalah subfield terkecil dari $\mathbf{K}$ yang memuat $\mathbf{Q}$ dan $\sqrt{2}\in\mathbf{K}$ dan dipenuhi $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}] = 2$ yaitu $\{1,\sqrt{2}\}$.

$\mathbf{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ adalah perluasan field dari $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Dimisalkan $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ tetapi $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ sebab $\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, sehingga dipenuhi $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})] = 2$ yaitu $\{1, \sqrt{3}\}$

Menurut teorema 2.20 $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}]=[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]$ $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}] = 2\times 2 = 4$ yaitu $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\}$.

Akibat 3.2

Jika α konstruktibel, maka $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 2^r$ untuk $r \geq 0$

Bukti :

Jika α konstruktibel maka menurut teorema 3.3, $\alpha \in \mathbf{K}_n \supseteq \mathbf{K}_{n-1} \supseteq ... \supseteq \mathbf{K}_1 \supseteq \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}$ dan $[\mathbf{K}_i : \mathbf{K}_{i-1}] = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$. Diketahui pula $\mathbf{K}_n \supseteq \mathbf{Q}(\alpha) \supseteq \mathbf{Q}$ sehingga menurut teorema 2.20, $[\mathbf{K}_n : \mathbf{Q}(\alpha)]\,[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{K}_n : \mathbf{Q}]$

$[\mathbf{K}_n : \mathbf{Q}(\alpha)]\,[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{K}_n : \mathbf{K}_{n-1}]\,[\mathbf{K}_{n-1} : \mathbf{K}_{n-2}] ... [\mathbf{K}_1 : \mathbf{Q}]$

karena $[\mathbf{K}_i : \mathbf{K}_{i-1}] = 2$ maka $[\mathbf{K}_n : \mathbf{Q}] = 2^n$. Jadi $[\mathbf{K}_n : \mathbf{Q}(\alpha)]\,[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 2^n$, sehingga $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] \mid 2^n$. Dengan demikian $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 2^r$ untuk $r \geq 0$. $\square$

Contoh 3.4

Penyelesaian dari polinom $x^4 - 5 \in \mathbf{Z}[x]$ adalah bilangan konstruktibel.

$\sqrt[4]{5} \in \mathbf{R}$ adalah penyelesaian dari polinom $x^4 - 5 \in \mathbf{Z}[x]$ sebab untuk $x = \sqrt[4]{5}$ dipenuhi $x^4 - 5 = 0$. Menurut kriteria Eisenstein, polinom $x^4 - 5 \in \mathbf{Z}[x]$ tak terurai atas field $\mathbf{Q}$, sehingga $[\mathbf{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbf{Q}] = 4$. Menurut akibat 3.2, $[\mathbf{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbf{Q}] = 4 = 2^2$ untuk $r = 2$. Jadi $x = \sqrt[4]{5}$ adalah bilangan konstruktibel.

Akibat 3.3

Jika $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] \neq 2^r$ untuk $r \geq 0$ maka α tidak konstruktibel.

Telah dibuktikan bahwa jika α konstruktibel, maka $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 2^r$ untuk $r \geq 0$. Kontraposisinya adalah jika $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] \neq 2^r$ untuk $r \geq 0$ maka α tidak konstruktibel.

Contoh 3.5

Penyelesaian dari polinom $x^5-9x^3+3\in\mathbf{Z}[x]$, tidak dapat dilukis hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Diandaikan α penyelesaian dari polinom $x^5 - 9x^3 + 3\in\mathbf{Z}[x]$. Dengan kriteria Eisenstein dapat dibuktikan bahwa polinom $x^5 - 9x^3 + 3\in\mathbf{Z}[x]$ tak terurai atas field $\mathbf{Q}$.

Menurut akibat 2.1, karena α suatu penyelesaian dari polinom $p(x) = x^5 - 9x^3 + 3$ yang tak terurai atas field $\mathbf{Q}$ maka $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 5$. Menurut akibat 3.3, karena $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 5 \neq 2^r$, untuk $r \geq 0$ maka α bukan bilangan konstruktibel. Karena α bukan bilangan konstruktibel, maka tidak dapat dilukis segmen garis dengan panjang α hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

BAB IV

TIGA MASALAH GEOMETRI YANG TERMASHUR DAN PEMECAHANNYA

Pada subbab sebelumnya, dikatakan bahwa dalam sejarah matematika terdapat tiga masalah geometri Yunani kuno yang belum bisa dipecahkan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Tiga masalah tersebut dikenal dengan tiga masalah geometri Yunani kuno yang termashur yaitu :

1. Duplikasi kubus (" The Duplication of the Cube")
2. Membagi tiga sama sebarang sudut (" The Trisection of the Arbitrary Angle")
3. Mempersegikan lingkaran (" The Squaring of the Circle")

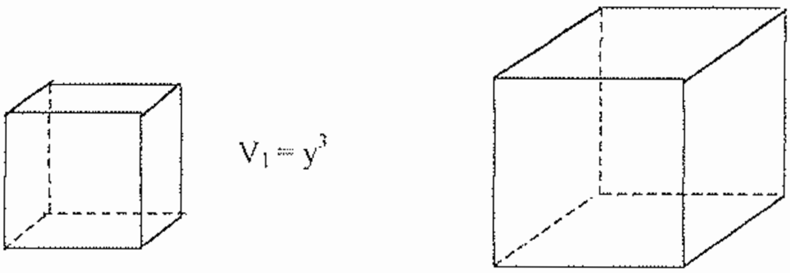
Setelah sekian abad, akhirnya pada awal abad ke-19 ketiga masalah tersebut dapat dipecahkan. Penerapan teori-teori aljabar modern pada ketiga masalah geometri di atas membuktikan bahwa ketiga masalah tersebut tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Pembuktiannya akan dibahas pada setiap subbab di bawah ini.

A. Duplikasi Kubus

Masalah geometri klasik Yunani kuno yang pertama adalah masalah duplikasi kubus. Masalah ini menjadi masalah geometri yang termashur karena sulit dipecahkan selama berabad-abad. Masalah ini sering disebut masalah Delian, sebab menurut cerita, pada tahun ± 560 SM dewa-dewa mengirimkan wabah penyakit kepada orang-orang Delian di Athena. Untuk memenuhi tuntutan para dewa, mereka mengirimkan utusan ke paranormal di Delos. Paranormal mengatakan kepada masyarakat Delian untuk melipatduakan isi altar persembahan Raja Apollo yang berbentuk kubus. Saran kemudian dilaksanakan, namun gagal. Karena tuntutan tidak terpenuhi wabah penyakit berlanjut. Raja Apollo pun mengerahkan ahli geometri dan ahli matematikanya untuk memecahkan masalah tersebut, namun tetap saja gagal. Masalah ini kemudian dikenal sebagai masalah untuk melukis suatu kubus yang volumenya dua kali volume kubus yang diketahui hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Masalah ini pun menarik perhatian matematikawan yang lain antara lain: Hippocrates (440 SM), Archytas (400 SM), Menaechmus (350 SM), Apollonius (225 SM). Mereka berusaha memecahkan masalah ini, namun tidak hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka saja. Rene' Descartes (1637) mengatakan bahwa masalah ini tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, namun belum ada seorangpun yang dapat menunjukkan bukti-bukti ketidakmungkinannya. Pada akhirnya pada awal abad ke-19 masalah ini dapat dipecahkan.

Masalah di atas dinyatakan sebagai berikut: apabila diketahui suatu kubus dengan panjang rusuk y satuan, dapatkah dilukis suatu kubus yang volumenya dua kali volume kubus semula, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka ?



$V_1 = y^3$ $\qquad$ $V_2 = x^3 = 2V_1$

Gb. 4.1 Penggambaran masalah I

Secara aljabar masalah ini dianalisis sebagai berikut:

Diketahui: Kubus pertama (K_1) dengan panjang rusuk y satuan, volume $V_1 = y^3$

Dilukis: Kubus kedua (K_2) dengan panjang rusuk x satuan, volume $V_2 = 2V_1 = 2y^3$

Volume kubus II = 2 × volume kubus I $\Leftrightarrow V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow x^3 = 2y^3 \Leftrightarrow x = y\sqrt[3]{2}$.

Permasalahannya tetap sama yaitu dapatkah dilukis rusuk suatu kubus yang panjangnya $x = y\sqrt[3]{2}$ jika panjang rusuk yang diketahui y satuan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka? Jika panjang rusuk kubus yang diketahui 1 satuan panjang, dapatkah dilukis segmen garis yaitu rusuk suatu kubus dengan panjang $\sqrt[3]{2}$ hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka?

Setelah kita mengenal bilangan konstruktibel, ternyata dapat ditunjukkan bahwa konstruksi di atas tidak mungkin dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Ketidakmungkinan konstruksi di atas dibuktikan dengan teorema berikut

Teorema 4.1

$\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel

Bukti:

$\sqrt[3]{2} \in \mathbf{R}$ merupakan penyelesaian dari polinom $p(x) = x^3-2 \in \mathbf{Z}[x]$, sebab untuk $x = \sqrt[3]{2}$ dipenuhi $p(x) = 0$ atau $x^3-2 = 0$. Menurut Kriteria Eisenstein, polinom $p(x) = x^3-2 \in \mathbf{Z}[x]$ tak terurai atas field $\mathbf{Q}$.

Menurut akibat 2.1 karena $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{R}$ merupakan penyelesaian dari polinom $p(x) = x^3-2 \in \mathbf{Z}[x]$ yang tak terurai atas field $\mathbf{Q}$, (bersifat aljabar atas field $\mathbf{Q}$) maka derajat dari perluasan field $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ atas field $\mathbf{Q}$ adalah 3 atau $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3$. Sedangkan menurut akibat 3.3, karena $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3 \neq 2^r$, untuk $r \geq 0$ maka $\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel.

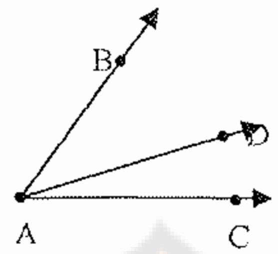
Karena terbukti bahwa $x = \sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel, maka menurut definisi bilangan konstruktibel, tidak dapat dilukis suatu segmen garis yaitu rusuk kubus yang panjangnya $\sqrt[3]{2}$ dimulai dari satu satuan panjang yang diketahui hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Jadi masalah duplikasi kubus orang Yunani kuno di Athena dapat dipecahkan yaitu tidak mungkin dilukis suatu kubus yang volumenya dua kali volume kubus yang diketahui, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

B. Membagi Tiga Sama Sebarang Sudut

Masalah geometri Yunani kuno yang kedua adalah masalah untuk membagi tiga sebarang sudut menjadi tiga bagian yang sama, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Masalah ini timbul pada tahun ± 450 SM ketika saat itu, dengan mudah untuk membagi suatu sudut menjadi dua bagian yang sama, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Kemudian timbul suatu pertanyaan dapatkah dengan mudah membagi sudut tersebut menjadi tiga bagian yang sama juga, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka ?

Jika diketahui $\angle BAC$, akan dilukis sinar garis $\overrightarrow{AD}$ sedemikian sehingga $m\angle DAC = \frac{1}{3} m\angle BAC$.



Gb. 4.2 Ilustrasi masalah kedua

Untuk pertama kalinya Hippias dari Elis, dalam tahun ± 425 SM berusaha memecahkan masalah ini. Selain menggunakan penggaris dan jangka, Hippias juga menggunakan kurva yang disebut "Quadratrix". Matematikawan lain yang berusaha untuk memecahkan masalah ini antara lain: Archimedes, Nicomedes (240 SM), Pappus (320 SM), Leonardo Da Vinci. Namun usaha-usaha yang mereka lakukan tidak hanya menggunakan penggaris dan jangka. Belum ada yang berhasil memecahkan masalah ini hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka saja.

Contoh 4.2

Archimedes memperlihatkan bahwa jika menggunakan penggaris yang diberi tanda pengukuran sehingga berjarak r satuan dan jangka, maka ada kemungkinan untuk membagi suatu sudut menjadi tiga bagian yang sama besar.

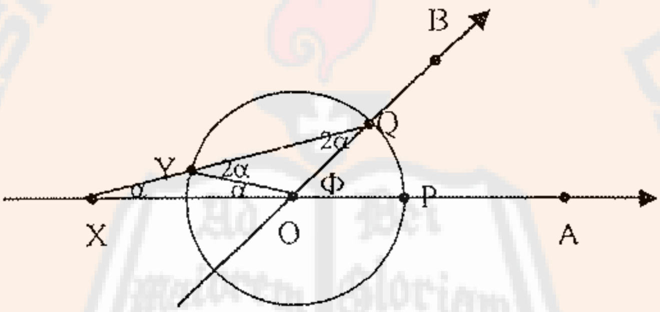
Diketahui: $\angle AOB$

Dilukis : $1/3\ \angle AOB$ dengan kedua alat di atas

Lukisan:

1. Dilukis lingkaran dengan titik pusat 0 dan berjari-jari r satuan
2. Lingkaran berpotongan dengan $\overrightarrow{OB}$ di titik Q dan dengan $\overrightarrow{OA}$ di titik P

3. Tandai penggaris dengan dua titik X dan Y sedemikian sehingga XY = r satuan
4. Sinar garis $\overline{OA}$ diperpanjang melalui titik O
5. Penggaris bertanda digunakan pada lukisan dengan melewati titik Q. Penggaris digeser-geserkan sedemikian sehingga titik X pada $\overline{OA}$ dan titik Y pada lingkaran. Dilukis segmen garis yang melalui titik Q,Y,X.
6. Dilukis segmen garis $\overline{OY}$
7. Jadi m ∠ YXO = 1/3 m ∠ AOB sehingga ∠ AOB dapat dibagi tiga sama.



Gb. 4.3 Lukisan Archimedes

Akan ditunjukkan bahwa m∠ YXO = 1/3 m∠ AOB

Karena XY = OQ = OY = r satuan, maka Δ XYO dan Δ YOQ adalah segitiga sama kaki. Sehingga m∠ YXO = m ∠ YOX dan m ∠ QYO = m∠ YQO

Misalkan m∠ YXO = α, maka m∠YOX = α, karena Δ XYO adalah segitiga sama kaki. Menurut aturan jumlah sudut dalam suatu segitiga adalah 180° maka m∠OYQ = m∠OXY + m∠YOX = α + α = 2α.

Karena Δ YOQ adalah segitiga sama kaki, maka m∠OQY = 2α. Menurut aturan jumlah sudut dalam suatu segitiga adalah 180° maka m∠AOB = m∠QXO + m∠XQO = m∠YXO + m∠OQY = α + 2α = 3α.

Sehingga m $\angle AOB = 3\alpha = 3$ m$\angle YXO$ atau m$\angle YXO = 1/3$ m$\angle AOB$ □

Jadi, dengan menggunakan penggaris yang diberi tanda pengukuran dan jangka, sebarang sudut dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama besar.

Contoh 4.3

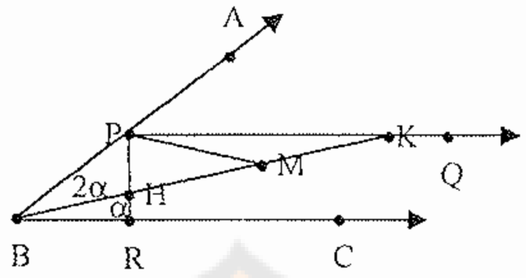
Pemecahan masalah membagi tiga sama sebarang sudut dengan menggunakan penggaris bertanda dan jangka, juga pernah didiskusikan di suatu sekolah menengah. Beberapa cara pemecahan ditunjukkan, salah satunya ditunjukkan di bawah ini.

Diketahui: $\angle ABC$.

Dilukis : $1/3\ \angle ABC$.

Lukisan:

1. Diambil suatu titik P pada sinar garis $\overline{AB}$
2. Dilukis sinar garis $\overrightarrow{PQ}$ yang sejajar dengan $\overrightarrow{BC}$
3. Dilukis segmen garis $\overline{PR}$ yang tegak lurus $\overrightarrow{BC}$ dan memotong $\overline{BC}$ di R
4. Penggaris ditandai dengan dua titik X dan Y sedemikian sehingga XY = 2 BP
5. Penggaris bertanda digunakan pada lukisan melewati titik B. Penggaris bertanda digeser-geserkan sedemikian sehingga X pada $\overline{PR}$ dan Y pada $\overline{PQ}$, dan ditentukan titik H pada $\overline{PR}$, titik K pada $\overline{PQ}$ sedemikian sehingga dipenuhi HK = 2 BP. Dilukis garis melalui titik B,H,K.
6. Segmen garis $\overline{BK}$ pembagi tiga $\angle ABC$. Jadi m$\angle KBC = 1/3$ m$\angle ABC$



G.b 4.4 Membagi tiga sama sebarang sudut

Akan ditunjukkan m∠KBC = 1/3 m∠ABC.

Diambil titik M pada $\overline{HK}$ sedemikian sehingga HM = MK = ½ HK. Karena MK = PM = BP, maka Δ BPM dan Δ PMK adalah segitiga samakaki. Dimisalkan m∠PKM = α. Karena Δ PMK adalah segitiga samakaki maka m∠KPM = α. Menurut aturan jumlah besar sudut dalam suatu segitiga adalah 180° maka m∠PMB = m∠PKM + m∠KPM = α+α = 2α.

Karena Δ BPM adalah segitiga samakaki maka m∠PBM = 2α. Dengan demikian m∠ABC = m∠PBM + m∠KBC = 2α+α = 3α.

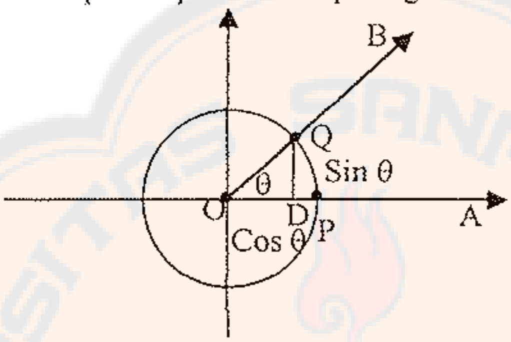
Jadi m ∠KBC = 1/3m ∠ABC.

Jadi dengan menggunakan penggaris yang diberi tanda pengukuran dan jangka, suatu sudut dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama besar.

Masalah ini begitu termashur, terutama bagi matematikawan geometri, sebab masalah ini dianggap kelihatan begitu sederhana, namun mengapa pemecahannya begitu rumit dan lama. Masalah ini selalu menghiasi setiap jurnal matematika dan selalu menjadi bahan penyelidikan. Sampai akhirnya pada abad ke-18, masalah ini dapat dipecahkan. Masalah ini dibuktikan tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka oleh

Pierre Laurant Wantsel (1814-1848) pada tahun 1837. Pembuktiannya dipublikasikan pada tahun 1942 oleh Franklin Press Inc dari Boston, Lousiana

Diketahui lingkaran satuan pada sistem koordinat Cartesius. Suatu sudut θ dapat dilukis bila dan hanya bila suatu segmen garis dengan panjang cos θ atau sin θ dapat dilukis seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Gb. 4.5

Sudut-sudut yang dapat dilukis hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka antara lain: $\angle 90^{\circ}$, $\angle 135^{\circ}$, $\angle 180^{\circ}$. Sudut-sudut ini dapat dibagi menjadi tiga hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka sebab $\angle 30^{\circ}$, $\angle 45^{\circ}$, $\angle 60^{\circ}$ dapat dilukis hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Jika diketahui $\angle 30^{\circ}$, $\angle 45^{\circ}$, $\angle 60^{\circ}$ maka dapat dilukis segmen garis dengan panjang cos 30°, cos 45°, cos 60°. Sebaliknya jika diketahui segmen garis dengan panjang cos 30°, cos 45°, cos 60° maka dapat dilukis sudut-sudut tersebut. Jadi jika diketahui sudut θ dapat dibentuk suatu bilangan dalam perluasan field $\mathbf{Q}(\cos\theta)$. Jika $\cos\theta \in \mathbf{Q}$ maka $\mathbf{Q}(\cos\theta) \in \mathbf{Q}$

Dalam pembuktian masalah ini, akan diperlihatkan bahwa jika tidak semua sudut atau ada paling sedikit satu sudut yang tidak dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, maka dapat disimpulkan masalah ini tidak mungkin diselesaikan. Suatu sudut θ dapat dibagi menjadi tiga berdasarkan teorema berikut :

Teorema 4.2

Suatu sudut θ dapat dibagi tiga sama, bila dan hanya bila polinom $4x^3$-$3x$-$\cos\theta$ terurai atas field $\mathbf{Q}(\cos\theta)$

Bukti:

Diketahui $\theta/3 = \alpha$ atau $\theta = 3\alpha$. Suatu sudut α dapat dilukis dari sudut θ bila dan hanya bila $\cos\alpha$ dapat dilukis dari sudut θ, sehingga

$\cos\theta = \cos 3\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos(2\alpha + \alpha)$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = (2\cos^3\alpha - \cos\alpha) - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = (2\cos^3\alpha - \cos\alpha) - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\theta = (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos\theta = 0$

Jadi $\cos\alpha \in \mathbf{Q}(\cos\theta)$ adalah penyelesaian dari polinom $f(x) = 4x^3$-$3x$-$\cos\theta$

($\Leftarrow$) Jika $f(x) = 4x^3$-$3x$-$\cos\theta$ terurai atas field $\mathbf{Q}(\cos\theta)$, maka $\cos\alpha$ adalah penyelesaian dari suatu polinom berderajat 1 atau 2 atas $\mathbf{Q}(\cos\theta)$, sehingga perluasan field $\mathbf{Q}(\cos\theta, \cos\alpha)$ atas field $\mathbf{Q}(\cos\theta)$ berderajat 1 atau 2.

Menurut teorema 2.22 karena [**Q**(cos θ, cos α) : **Q**(cos θ)] = 1 atau 2 maka **Q**(cos θ, cos α) = **Q**(cos θ)($\sqrt{\lambda}$), untuk $\lambda \in$ **Q**(cos θ). Karena **Q**(cos θ, cos α) = **Q**(cos θ)($\sqrt{\lambda}$), maka menurut teorema 3.2, **Q**(cos θ)($\sqrt{\lambda}$) anggota bilangan konstruktibel. Jadi cos α merupakan bilangan konstruktibel, sehingga sudut θ dapat dibagi menjadi tiga sama hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

(⇒) Jika f(x) = $4x^3$-3x-cos θ tak terurai atas field **Q**(cos θ) dan cos α merupakan penyelesaian dari polinom f(x) = $4x^3$-3x-cos θ maka menurut akibat 2.1, [**Q**(cos θ,cos α) : **Q**(cosθ)] = 3. Selanjutnya menurut akibat 3.3, karena [**Q**(cos θ,cos α) : **Q**(cos θ)] = 3 ≠ 2^r, untuk r ≥ 0, maka cos α bukan bilangan konstruktibel. Jadi karena cos α bukan bilangan konstruktibel, maka sudut θ tidak dapat dibagi tiga hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka . □

Di bawah ini akan ditunjukkan bahwa ada paling sedikit satu sudut yaitu ∠ 60° yang dapat dilukis hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka tetapi tidak dapat dibagi tiga sama hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, dengan membuktikan cos 20° bukan bilangan konstruktibel.

Contoh 4.4

Sudut 60° tidak dapat dibagi menjadi tiga sama hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Menurut teorema 4.2, sudut θ dapat dibagi tiga bila dan hanya bila polinom f(x) = $4x^3$-3x-cos θ terurai atas field **Q**(cos θ). Untuk sudut θ = 60° polinom di atas menjadi f(x) = $4x^3$-3x-1/2, dan dipenuhi $8\cos^3 20°-6\cos 20°-1 = 0$.

Jadi Cos 20^o adalah penyelesaian dari polinom $f(x) = 8x^3 - 6x - 1 \in \mathbf{Z}[x]$, sebab untuk $x = \cos 20^o$, dipenuhi persamaan $8\cos^3 20^o - 6\cos 20^o - 1 = 0$.

Menurut teorema akar-akar rasional polinom $f(x) = 8x^3 - 6x - 1 \in \mathbf{Z}[x]$, tak terurai atas field **Q**. Sedangkan menurut akibat 2.1, karena cos 20^o penyelesaian dari polinom yang tak terurai atas field **Q** maka $[\mathbf{Q}(\cos 20^o) : \mathbf{Q}] = 3$. Menurut akibat 3.3, karena $[\mathbf{Q}(\cos 20^o) : \mathbf{Q}] = 3 \neq 2^r$ untuk $r \geq 0$, maka cos 20^o bukan bilangan konstruktibel.

Karena cos 20^o bukan bilangan konstruktibel, maka menurut definisi bilangan konstruktibel, tidak dapat dilukis suatu segmen garis dengan panjang cos 20^o. Jadi sudut 60^o tidak dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama besar hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Karena ada paling sedikit satu sudut yang tidak dapat dibagi tiga sama hanya menggunakan penggaris dan jangka, maka dapat disimpulkan bahwa sebarang sudut tidak dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama besar, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

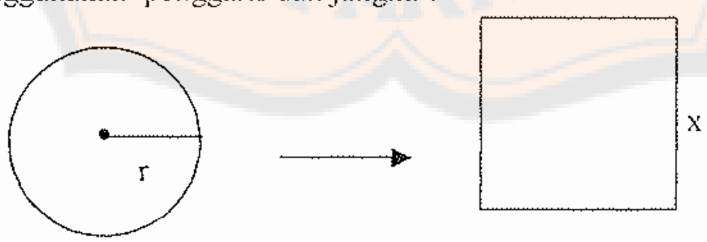
C. Mempersegikan Lingkaran

Masalah geometri Yunani kuno yang ketiga adalah mempersegikan lingkaran, yang dalam bahasa latinnya "Quadratura circuli". Masalah ini merupakan masalah yang tertua sebab masalah ini timbul pada zaman Mesir kuno (± 1650 SM). Masalah ini dikenal sebagai masalah untuk melukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran yang diketahui, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Meskipun masalah ini kelihatan begitu sederhana, namun pemecahannya begitu rumit sejak 19 abad yang lalu. Matematikawan yang berusaha memecahkan masalah ini antara lain Anaxagoras (± 440 SM), Hippocrates (± 440 SM), Archimedes (± 225 SM) dan Hippias dari Ellis. Hippias berhasil memecahkan masalah ini namun tidak hanya menggunakan penggaris dan jangka saja, tetapi juga menggunakan suatu kurva yang disebut "Quadratrix". Kesimpulan Hippias adalah dapat dilukis suatu persegi di atas dengan menggunakan "Quadratrix", penggaris dan jangka. Masalah ini belum dapat dipecahkan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka saja.

Sampai akhirnya ketika pada tahun 1882 seorang ahli matematika Jerman yang bernama C.L.Ferdinand Lindemann, membuktikan bahwa bilangan π bersifat transenden atas field **Q**, masalah ini mulai dapat dipecahkan. Dengan menggunakan definisi bilangan konstruktibel, juga pembuktian Lindemann, dibuktikan bahwa masalah di atas tidak dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Jika diketahui suatu lingkaran dengan jari-jari r, dapatkah dilukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran tersebut, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka ?



Luas lingkaran $= \pi r^2$ Luas persegi $= x^2$

Gb. 4.6 Ilustrasi masalah ketiga

Luas persegi = luas lingkaran $\Leftrightarrow x^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\pi r^2} \Leftrightarrow x = r\sqrt{\pi}$

Permasalahannya tetap sama yaitu dapatkah dilukis sisi suatu persegi dengan panjang $x = r\sqrt{\pi}$ hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka jika diketahui suatu lingkaran dengan panjang jari-jari r? Jika diketahui lingkaran dengan jari-jari 1 satuan panjang, dapatkah dilukis sisi suatu persegi yang panjangnya $x = \sqrt{\pi}$ hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka?

Setelah kita mengenal definisi bilangan konstruktibel, dapat dibuktikan bahwa konstruksi di atas tidak mungkin diselesaikan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Ketidakmungkinan konstruksi di atas dengan menunjukkan $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel.

Teorema 4.3

$[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}]$ adalah tak berhingga, sehingga $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel.

Bukti:

Pembuktian teorema di atas berdasar pada pembuktian C.L.F Lindemann bahwa π bersifat transenden atas field **Q**. Dengan demikian untuk $\pi \in \mathbf{R}$ tidak dipenuhi persamaan $a_0 + a_1\pi + \ldots + a_n\pi^n = 0$, dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$, yang tidak semuanya nol. Jadi $a_0 + a_1\pi + \ldots + a_n\pi^n \neq 0$ dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$, yang tidak semuanya nol.

Karena π bersifat transenden atas field **Q** maka $\pi, \pi^2, \ldots, \pi^n$ bebas linear atas field **Q**, sebab $a_0 + a_1\pi + \ldots + a_n\pi^n = 0$, hanya jika $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ anggota **Q**, dan $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga.

$\mathbf{Q}(\pi)$ subfield dari $\mathbf{Q}(\sqrt{\pi})$ atau $\mathbf{Q}(\sqrt{\pi})$ perluasan dari field $\mathbf{Q}(\pi)$, sebab $\pi = (\sqrt{\pi}\,.\sqrt{\pi}) = (\sqrt{\pi})^2 \in \mathbf{Q}(\sqrt{\pi})$, sehingga menurut teorema 2.20, $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}(\pi)]\,[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$.

Karena $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga maka $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga. Karena $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga, maka menurut akibat 3.3, tidak ada bilangan real r sedemikian sehingga $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}] = 2^r$. Jadi $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel. $\square$

Karena dibuktikan $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel, maka menurut definisi bilangan konstruktibel, tidak dapat dilukis sisi suatu persegi dengan panjang $x = \sqrt{\pi}$, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, apabila diketahui lingkaran dengan jari-jari 1 satuan panjang. Dengan demikian masalah ketiga dapat dipecahkan yaitu tidak mungkin dilukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran yang diketahui, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dalam sejarah matematika, pada zaman Yunani kuno terdapat tiga masalah geometri yang termashur, yang belum bisa dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka. Pada abad ke-19, dibuktikan bahwa ketiga masalah tersebut tidak mungkin dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka, yaitu

1. Tidak mungkin melukis suatu kubus yang volumenya dua kali volume kubus yang diketahui.
2. Tidak mungkin membagi sebarang sudut menjadi tiga bagian yang sama besar.
3. Tidak mungkin melukis suatu persegi yang luas daerahnya sama dengan luas daerah lingkaran yang diketahui.

Ketiga masalah tersebut dapat disimpulkan demikian dengan menyatakan ketiga masalah tersebut ke dalam persamaan aljabar dan menerapkan definisi-definisi dan teorema dalam aljabar modern, antara lain:

Suatu field E disebut perluasan field F jika E memuat F sebagai subfieldnya. Perluasan field E atas field F merupakan ruang vektor E atas field F. Derajat dari perluasan field E atas field F, [E : F] merupakan dimensi dari E sebagai ruang vektor atas field F.

Jika E perluasan field dari F dan $a \in E$, maka F(a) merupakan subfield terkecil dari E yang memuat F dan a, dan F(a) disebut field yang dihasilkan oleh gabungan a dengan F. Elemen $a \in E$ dikatakan bersifat aljabar atas field F jika a merupakan penyelesaian dari suatu polinom yang tidak nol dalam F[x].

Jika $p(x) \in F[x]$ polinom berderajat n yang tak terurai atas field F maka ring faktor $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan perluasan dari field F dan p(x) mempunyai suatu penyelesaian α di dalam K dan dipenuhi $[F[x]/\langle p(x)\rangle : F] = [F(\alpha) : F] = n$.

Ketiga masalah tersebut dapat disimpulkan demikian, karena didasarkan pada definisi bilangan konstruktibel. Suatu bilangan α disebut bilangan konstruktibel, jika dapat dilukis segmen garis dengan panjang α dengan langkah-langkah berhingga penggunaan penggaris dan jangka, dimulai dari suatu satuan panjang yang diketahui. Himpunan bilangan konstruktibel **K** merupakan perluasan dari field bilangan rasional **Q**, dan bilangan akar kuadrat anggota dari himpunan bilangan konstruktibel.

Jadi ketiga masalah tersebut tidak mungkin dikerjakan hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka sebab dapat dibuktikan:

1. $\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel.

   $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{R}$ penyelesaian dari polinom $x^3 - 2 \in \mathbf{Z}[x]$ yang tak terurai atas field **Q**, (Kriteria Eisenstein). Jadi derajat dari perluasan field $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ atas **Q** adalah 3 atau $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3 \neq 2^r$ untuk $r \geq 0$. Jadi $\sqrt[3]{2}$ bukan bilangan konstruktibel.

2. Ada paling sedikit satu sudut yaitu $\angle 60^o$ yang tidak dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama besar, sebab cos 20^o bukan bilangan konstruktibel. Cos 20^o adalah penyelesaian dari polinom $8x^3-6x-1 \in \mathbf{Z}[x]$ yang tak terurai atas field **Q**, sehingga $[\mathbf{Q}(\cos 20^o) : \mathbf{Q}] = 3 \neq 2^r$ untuk $r \geq 0$. Jadi cos 20^o bukan bilangan konstruktibel.

   Jadi disimpulkan tidak dapat membagi sebarang sudut menjadi tiga bagian yang sama besar, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

3. $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel.

   Menurut C.L.F Lindemann, π bersifat transenden atas field **Q**. Untuk $\pi \in \mathbf{R}$, $a_0+a_1\pi+\ldots+a_n\pi^n \neq 0$ dengan $a_0, a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{Q}$, yang tidak semuanya nol, atau $a_0+a_1\pi+\ldots+a_n\pi^n = 0$, hanya jika $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ anggota **Q**. Jadi $\pi, \pi^2,\ldots,\pi^n$ bebas linear atas field **Q**, dan $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga. Karena $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga dan $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}(\pi)]\,[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}]$ maka $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}]$ tak berhingga. Jadi tidak ada bilangan real r sedemikian sehingga $[\mathbf{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbf{Q}] = 2^r$. Jadi $\sqrt{\pi}$ bukan bilangan konstruktibel.

Ketiga masalah di atas timbul dari cerita yang cukup menarik. Walaupun dianggap sederhana, namun pemecahan masalah ini begitu rumit. Banyak matematikawan terkenal pada zaman Yunani kuno yang berusaha memecahkan masalah ini, namun gagal. Masalah ini selalu menghiasi setiap jurnal matematika dan selalu menjadi bahan penyelidikan selama 19 abad. Ketiga masalah tersebut akhirnya dapat dipecahkan dengan hasil di atas. Hal-hal inilah yang menyebabkan ketiga masalah geometri ini disebut tiga masalah geometri yang termashur.

B. Saran

Setelah penulis menyelesaikan skripsi ini, ternyata topik ini sungguh menarik untuk dipelajari. Topik ini mengenalkan adanya sejarah masalah matematika yang menarik dan membuktikan adanya hubungan yang erat antara aljabar dan geometri, karena ketiga masalah ini adalah masalah geometri yang pemecahannya menggunakan aljabar modern.

Sebenarnya masih banyak aspek lain dari tiga masalah geometri yang termashur, yang tidak diangkat dalam skripsi ini karena keterbatasan penulis, misalnya: dalam skripsi ini pemecahan masalah selain menggunakan penggaris dan jangka oleh matematikawan Yunani kuno, seperti: Hippias dengan "Quadratrix"nya, Nicomedes, Archimedes hanya diberikan sebagai contoh. Topik tersebut dapat diteruskan atau diangkat sebagai topik skripsi yang sangat menarik.

DAFTAR PUSTAKA

Brothers, Laidlaw. (1987). *Geometry Laidlaw*. New York : A Division of Doubleday and Company, Inc.

Durbin, John R. (1985). *Modern Algebra An Introduction, Second Edition*. New York : John Wiley and Sons.

Eves, Howard. (1983). *An Introduction to The History of Mathematics, Fifth Edition*. New York : Sounders College Publishing.

Eves, Howard. (1971). *The History of Geometry* dalam *Historycal Topics for the Mathematics Classroom*. Washinton D.C : National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Fraleigh, John B. (1989). *A First Course in Abstract Algebra, Fourth Edition*. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Gilbert, William J. (1976). *Modern Algebra With Aplications*. New York : John Wiley and Sons.

Herstein, I.N. (1986). *Abstract Algebra, Third Edition*. New Jersey : Prentice-Hall International, Inc.

Meserve, Bruce E. (1959). *Fundamentals Concepts of Algebra*. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Shulte, Albert P. (1987). *Learning and Teaching Geometry K-12*, 1987 *Yearbook*. Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Smart, James, R. 1998. *Modern Geometries, 5th ed.* San Jose Sate University : brooks / Cole Publishing Company.

Yates, Robert C. (1942). *The Trisection Problem*. Lousiana : Franklin Press, Inc.