METODE ITERASI TITIK TETAP UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Agustina Yuni Susarwati

NIM : 971414018
NIRM : 970051120501120016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

SKRIPSI

METODE ITERASI TITIK TETAP UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Disusun oleh :

Agustina Yuni Susarwati

NIM : 971414018

NIRM : 970051120501120016

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si tanggal 2 Juli 2003

SKRIPSI

METODE ITERASI TITIK TETAP UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Dipersiapkan dan disusun oleh:

Agustina Yuni Susarwati
NIM : 971414018
NIRM : 970051120501120016

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 31 Juli 2003 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	**Drs. A. Atmadi, M.Si**	....
Sekertaris	**Drs. Th. Sugiarto, M.T**	....
Anggota	**M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si**	....
Anggota	**Dr. St. Suwarsono**	....
Anggota	**Wanty Widjaja, M.Ed**	....

Yogyakarta, 31 Juli 2003
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PERSEMBAHAN

Yang pertama ada dalam benakku saat bangun pagi adalah rasa syukur.
Setiap hari aku berkata: " Allah, Engkau sungguh mengagumkan ".
Semakin sering aku mengatakannya, semakin Dia mengijinkan aku untuk melihat keindahan itu.

Kupersembahkan untuk :
Orang tua dan adikku Daniel Pitoko Aji

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 31 Juli 2003

Penulis

Agustina Yuni Susarwati

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan YME yang selalu memberikan kasih dan karuniaNya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Metode Iterasi Titik Tetap untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear"**. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Hambatan dan rintangan banyak penulis alami selama penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan dari berbagai pihak maka penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan kesabarannya telah membimbing dan memberikan saran-saran kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T selaku dosen pembimbing akademik dan kepala program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan saran dalam perencanaan studi selama penulis menempuh kuliah dan dukungan atas penyusunan skripsi ini.
3. Bapak dan ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma.
4. Staf Sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma yang dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.

5. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan kerjasamanya selama ini.
6. Orangtuaku tercinta yang telah memberikan dukungan baik moril maupun materiil kepada penulis selama ini.
7. Asniar Aliyu, Ignatius Sutardi, Agustinus Budi, dan Andriyanto Prasetyo yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan doa pada penulis.
8. Teman-teman P'Mat angkatan 1997 yang telah memberikan dukungannya dan terima kasih atas persahabatannya selama menjalani masa kuliah, khususnya Veronica Suryanti terima kasih banyak untuk semuanya.
9. Sahabat-sahabatku : Yustina Eva NW, Agustinus Dwi M, Agus W, Sixtus Bani K, Sujiyanto dan Didiek atas segala dukungannya.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah ikut membantu dalam penyusun skripsi ini sejak persiapan sampai selesai.

Semoga segala bantuan, dorongan, perhatian, kasih, serta dukungan yang telah penulis terima akan mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan YME.

Penulis menyadari keterbatasan penulis dalam menyusun skripsi ini, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, Agustus 2003

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Sistem persamaan linear (SPL) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi titik tetap. Terdapat tiga metode iterasi titik tetap yaitu metode Jacobi, Gauss-Seidel, dan Successive Over-Relaxation (SOR). Penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ dihitung menggunakan rumus iterasi Jacobi $x_i^{(k)} = \dfrac{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, atau rumus iterasi Gauss-Seidel $x_i^{(k)} = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)-\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, atau rumus iterasi SOR $x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \dfrac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)})-\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)})+b_i\right)}{a_{ii}}$, di mana $x_i^{(k)}$ variabel ke-i pada iterasi ke-k, a_{ij} koefisien SPL, $x_j^{(k-1)}$ variabel ke-j pada iterasi ke-(k-1), b_i koefisien SPL, ω parameter.

Metode iterasi titik tetap konvergen bila dan hanya bila radius spektral dari matriks iterasi kurang dari 1 atau $(\rho(T)<1)$.

Perbedaan antara metode Jacobi, Gauss-Seidel, dan SOR terletak pada penentuan $x_i^{(k+1)}$ pada tiap-tiap iterasi. Rumus iterasi Gauss-Seidel digunakan untuk rumus iterasi SOR dengan menyertakan parameter ω yang berguna untuk kecepatan konvergensi.

Metode iterasi titik tetap dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah akuntansi biaya di bidang ekonomi, sedangkan masalah proses kimia di bidang kimia adalah contoh metode iterasi yang divergen.

ABSTRACT

A linear equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ can be solved with fixed-point iteration methods. There are three types of fixed-point iteration method namely Jacobi method, Gauss-Seidel method, and Successive Over-Relaxation (SOR) method. The solution of linear equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with an initial approximate $\mathbf{x}^{(0)}$ is calculated with Jacobi iteration formula $x_i^{(k)} = \dfrac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, or Gauss-Seidel iteration formula $x_i^{(k)} = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)-\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, or Successive Over-Relaxation iterative formula $x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \dfrac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)})-\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)})+b_i\right)}{a_{ii}}$ with $x_i^{(k)}$ is the i-th variable of the k-th iteration, a_{ij} coefficient of linear equation system, $x_j^{(k-1)}$ is the j-th variable of the (k-1)-th iteration, b_i coefficient of linear equation system, ω parameter.

Fixed-Point iteration method is convergent if and only if the spectral radius from iteration matrix is less than 1 or $(\rho(T) < 1)$.

The difference among Jacobi method, Gauss-Seidel method, and Successive Over-Relaxation method lies on the determination of $x_i^{(k+1)}$ in every iteration. Gauss-Seidel iteration formula is used for Successive Over-Relaxation (SOR) iteration formula by attaching the ω parameter which is useful for the convergence rapidity.

Fixed-Point iteration method is still can be used to solve the cost accounting problem in economic field, whereas the chemistry process problem in chemistry field is an example of divergent iteration method.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Sistem persamaan linier (SPL) merupakan himpunan berhingga dari persamaan linier. SPL yang mempunyai penyelesaian dinamakan SPL yang konsisten. Untuk dapat menentukan penyelesaian SPL secara eksak tidak selalu mudah, oleh karena itu kita akan cukup puas dengan hasil pendekatannya saja. Penyelesaian dengan menggunakan pendekatan atau aproksimasi dikembangkan oleh metode numerik. Secara umum dalam metode numerik ada dua metode untuk menyelesaikan SPL, yaitu metode langsung dan metode tidak langsung. Dalam metode tidak langsung atau metode iterasi dibutuhkan perhitungan yang panjang dan berulang-ulang untuk dapat menyelesaikan SPL. Perhitungan yang panjang dan berulang-ulang tersebut jika dikerjakan oleh manusia maka akan sangat menyulitkan, khususnya untuk SPL yang besar maka diperlukan komputer sebagai alat bantu hitung untuk menyelesaikan SPL.

B. Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, muncul permasalahan yang akan diangkat dalam penulisan skripsi ini. Permasalahan tersebut yaitu :

1. Metode-metode apa saja yang terdapat dalam metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier ?

2. Bagaimana penyelesaian suatu sistem persamaan linear dengan metode iterasi titik tetap ?
3. Dalam bidang apa saja metode iterasi titik tetap dapat dipergunakan?

C. Batasan masalah

Secara umum dalam metode numerik ada dua metode untuk menyelesaikan SPL, yaitu metode langsung dan metode tidak langsung. Metode yang dibahas di sini adalah metode tidak langsung atau metode iterasi titik tetap dengan tiga macam metode yaitu metode Jacobi, Gauss-Seidel, dan SOR. Konsep radius spektral digunakan untuk konvergensi metode iterasi. Pemilihan parameter yang optimal pada metode SOR tidak dibahas.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dengan penulisan skripsi ini adalah:

1. Mengetahui metode-metode apa saja yang terdapat dalam metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear.
2. Dapat menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan menggunakan metode-metode dalam metode iterasi titik tetap.
3. Mengetahui dan dapat menyelesaikan permasalahan dalam bidang nonmatematika dengan menggunakan berbagai metode dalam metode iterasi titik tetap.

E. Sistematika Penulisan

Bab I berisi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

Dalam Bab II, penulis akan menguraikan materi prasyarat yang nantinya akan digunakan untuk memahami konsep metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier. Materi prasyarat tersebut adalah limit fungsi, kekontinuan fungsi, barisan, sistem persamaan linier (SPL), matriks, ruang vektor, norma vektor dan matriks, serta nilai eigen dan vektor eigen.

Pada Bab III penulis mulai membahas metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear. Metode-metode tersebut yaitu metode Jacobi, metode Gauss-Seidel, dan metode Successive Over Relaxation (SOR). Setelah itu membahas konvergensi metode iterasi titik tetap. Program Matlab digunakan sebagai alat bantu perhitungan dari masing–masing metode.

Setelah bab III dilanjutkan dengan bab IV, yang berisi contoh penggunaan metode-metode dalam metode iterasi titik tetap pada ilmu nonmatematika yaitu dalam bidang ekonomi dan kimia.

Bab terakhir yaitu bab V berisi kesimpulan dan saran.

F. Metode Penulisan

Metode penulisan yang dipakai penulis dalam menyusun skripsi ini adalah studi pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas konsep dalam kalkulus dan aljabar linear yang nantinya akan digunakan untuk memahami konsep metode iterasi titik tetap.

A. Konsep Dasar dalam Kalkulus

Konsep-konsep yang akan dibahas dalam kalkulus yaitu konsep limit fungsi, kekontinuan fungsi, dan barisan.

Definisi 2.1 (Limit Fungsi)

Andaikan f(x) didefinisikan dan bernilai tunggal untuk semua nilai x di dekat $x = x_0$; *bilangan* L *adalah limit f(x) jika x mendekati* x_0 *dan dituliskan* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{L}$ *jika untuk setiap bilangan positif* $\varepsilon > 0$ *(bagaimanapun kecilnya) terdapat bilangan positif* $\delta > 0$ *yang berpadanan sedemikian hingga* $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ *bilamana* $0 < |x - x_0| < \delta$.

Contoh 2.1

Andaikan diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x - 5$. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$.

Akan dicari δ sedemikian sehingga $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$.

Sekarang $|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x+4||x-3|$ perlihatkan faktor yang kedua $|x-3|$ dapat dibuat kecil seperti yang kita inginkan, maka cukup dibatasi faktor $|x+4|$. Oleh karena itu dipilih $\delta \le 1$.

Maka $|x-3| < \delta$ membawakan

$$\begin{aligned} |x+4| &= |x-3+7| \\ &\le |x-3| + |7| \\ &< 1+7 = 8 \end{aligned}$$

Jika disyaratkan $\delta \le \varepsilon/8$ maka hasil kali $|x+4||x-3| < \varepsilon$.

Terbukti bahwa $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$.

Teorema 2.1 (Sifat-sifat Limit)

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di x_0. Maka:

1. $\lim_{x\to x_0} k = k$,
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$,
3. $\lim_{x\to x_0} kf(x) = k\lim_{x\to x_0} f(x)$,
4. $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
5. $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$,
6. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$, bila $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
7. $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)$,
8. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to x_0} g(x) \ne 0$,
9. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to x_0} g(x) \ne 0$.

Definisi 2.2 (Kekontinuan Fungsi)

Andaikan f(x) didefinisikan dan bernilai tunggal untuk semua nilai x di dekat $x = x_0$ seperti juga di $x = x_0$; fungsi f dikatakan kontinu di $x = x_0$ jika $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Syarat yang harus dipenuhi agar fungsi f kontinu di $x = x_0$:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ada.
2. $f(x_0)$ ada atau $f(x)$ didefinisikan di x_0.
3. $L = f(x_0)$

Contoh 2.2

Diketahui fungsi $f(x) = x + 5$. Akan diperlihatkan f kontinu pada $x = 5$.

Dengan definisi 2.2 dapat diperoleh :

1. $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} [x + 5] = 10$
2. $f(5) = x + 5 = 10$
3. $f(5) = \lim_{x \to 5} f(x) = 10$.

Karena definisi 2.2 terpenuhi maka $f(x) = x + 5$ kontinu di x = 5.

Definisi 2.3 (Barisan)

Suatu barisan adalah suatu himpunan dari bilangan-bilangan $x_1, x_2, \cdots$ di dalam suatu penyususunan tertentu dan setiap suku ditentukan menurut pola yang tetap yaitu $x_n = f(n)$.

Contoh 2.3

1, 4, 7, 10, … adalah barisan dengan $x_n = 1 + 3(n-1)$.

Definisi 2.4 (Konvergensi Barisan)

Suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *disebut mempunyai limit* L *bila untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *ada bilangan bulat positif* N *sedemikian sehingga* $|x_n - \mathrm{L}| < \varepsilon$ bila $n \geq \mathrm{N}$.

Bila barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mempunyai limit* L *maka barisan konvergen ke* L *dan ditulis* $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{L}$.

Contoh 2.4

Diketahui barisan $x_n = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Barisan tersebut konvergen karena :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Maka barisan $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{1}{2}$.

Contoh 2.5

Andaikan $x_n = c$ untuk semua n bilangan bulat positif dan c suatu konstanta, maka akan dibuktikan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke c.

Untuk semua n berlaku $|x_n - c| = 0$. Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$, pasti ada N bilangan bulat positif sehingga untuk semua $n \geq \mathrm{N}$ berlaku $|x_n - c| < \varepsilon$. Maka dapat diambil sebarang nilai untuk N bilangan bulat positif, sebab $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ untuk semua n bilangan bulat positif. Dengan demikian barisan $\{x_n\}$ konvergen ke c.

B. Konsep Dasar dalam Aljabar

Konsep-konsep dalam aljabar yang akan dibahas yaitu sistem persamaan linear (SPL), matriks, ruang vektor, norma matriks dan norma vektor, serta nilai eigen dan vektor eigen.

1. Sistem Persamaan Linear

Definisi 2.5 (Persamaan Linear)

Suatu persamaan linear dengan n variabel adalah persamaan yang dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ *dimana* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *dan* b *adalah bilangan-bilangan real dan* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *adalah variabel.*

Definisi 2.6 (Penyelesaian Persamaan Linear)

Penyelesaian dari persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ *adalah urutan dari n bilangan* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila disubstitusikan terhadap* $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots$, $x_n = s_n$.

Contoh 2.6

Diketahui persamaan linear $4x_1 - 2x_2 = 1$.

Penyelesaian persamaan linear tersebut adalah $x_1 = 1$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$.

Definisi 2.7 (Sistem Persamaan Linear)

Suatu sistem persamaan linear dari m persamaan linear dalam n variabel adalah suatu sistem berbentuk :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

di mana a_{ij} *dan* b_i *semuanya adalah bilangan-bilangan real dengan* $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ *tidak bersama-sama nol untuk* $i = 1, 2, \ldots, m$ *yang kemudian sistem persamaan linear dengan bentuk* (2.1) *disebut SPL* $m \times n$.

Definisi 2.8 (Penyelesaian Sistem Persamaan Linear)

Penyelesaian sistem persamaan linear $m \times n$ *adalah urutan n bilangan-bilangan* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *yang memenuhi semua persamaan dalam sistem.*

Contoh 2.7

Diketahui SPL $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$$2x_2 - 2x_3 = 6$$

Penyelesaian SPL tersebut adalah x_1 = -3, x_2 = 4, dan x_3 = 1.

Suatu sistem persamaan linear disebut *konsisten* jika suatu sistem persamaan linear tersebut mempunyai paling sedikit satu penyelesaian. Sedangkan jika suatu sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian maka sistem persamaan linear dinamakan *takkonsisten.*

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* (SPLH) jika semua konstanta pada ruas kanan sama dengan nol, dengan bentuk umum :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Sedangkan sistem persamaan linear dikataan *nonhomogen* (SPLNH) jika konstanta pada ruas kanan tidak semuanya sama dengan nol.

Setiap sistem persamaan linear homogen (SPLH) selalu mempunyai penyelesaian yaitu $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ yang disebut penyelesaian *trivial.* Jika di samping penyelesaian trivial ada penyelesaian yang lain maka penyelesaian tersebut disebut penyelesaian *taktrivial.*

Jika SPLH maka salah satu diantara pernyataan berikut benar :

- Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
- Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian taktrivial sebagai tambahan terhadap penyelasaian trivial.

2. Matriks

Pembahasan matriks dibatasi dengan matriks-matriks yang elemen-elemennya bilangan real.

Definisi 2.9 (Matriks)

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan real yang terdiri dari baris dan kolom.

Definisi 2.10 (Matriks $m \times n$)

Matriks berordo $m \times n$ adalah susunan dari bilangan-bilangan real yang terdiri atas m baris dan n kolom dimana $m, n \in Z^+$, $m > 0$, $n > 0$.

Bentuk umum matriks $m \times n$ adalah:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

a_{ij} disebut elemen matriks A dengan :

i adalah indeks pertama yang menunjukkan baris,

j adalah indeks kedua yang menunjukkan kolom.

Selanjutnya jika tidak menulis semua elemen-elemen matriks maka matriks ditulis dengan huruf-huruf besar miring misalnya A, B, C dan sebagainya.

Definisi 2.11 (Kesamaan Dua Matriks)

Dua matriks A dan B yang masing-masing berordo $m \times n$ dikatakan sama jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Definisi 2.12 (Penjumlahan Dua Matriks)

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

$$A + B = [\, a_{ij} + b_{ij} \,]$$

Contoh 2.8

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ maka $A + B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Definisi 2.13 (Perkalian Matriks Dengan Skalar)

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (product) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen dari A oleh c.

$$cA = [ca_{ij}]$$

Contoh 2.9

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ maka $4A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Definisi 2.14 (Perkalian Dua Matriks)

Jika A adalah matriks berordo $i \times k$ dan B adalah matriks berordo $k \times j$, maka hasil kali matriks A dan B adalah suatu matriks C berordo $i \times j$ dimana :

$$A_{i \times k} \times B_{k \times j} = C_{ij}$$

$$C_{ij} = [c_{ij}] \text{ dengan}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Contoh 2.10

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $AB = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Setelah membahas SPL dan matriks, suatu SPL $m \times n$ dapat dituliskan dengan satu persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di mana A adalah matriks $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, dan $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^m$. Selanjutnya akan dibahas kasus dengan m persamaan dalam n variabel yang akan dipergunakan pada bab selanjutnya.

Suatu SPL $m \times n$ dengan bentuk (2.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

SPL di atas dapat dituliskan sebagai persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di mana $A = (a_{ij})$ diketahui, $\mathbf{x}$ adalah matriks $n \times 1$ dari variabel-variabel, dan $\mathbf{b}$ suatu matriks $m \times 1$ yang mewakili ruas kanan dari SPL.

Dari SPL (2.1) diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dan hasil kali dari $A\mathbf{x}$ adalah

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

maka SPL (2.1) ekivalen dengan persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Contoh 2.11

Andaikan diketahui SPL berikut

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2.$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

SPL di atas dapat ditulis sebagai suatu persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Macam-macam bentuk matriks yang dibahas di sini yaitu :

1. Matriks persegi

   Adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh 2.12

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Matriks segitiga atas

   Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *disebut matriks segitiga atas jika* $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

   Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *disebut matriks segitiga atas tegas (strictly upper triangular) jika* $a_{ii} = 0$ *dan* $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Contoh 2.13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$, A adalah matriks segitiga atas sebab $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, B adalah matriks segitiga atas tegas sebab $b_{ii} = 0$ dan $b_{ij} = 0, \forall i > j$.

3. Matriks segitiga bawah

Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *disebut matriks segitiga bawah jika* $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *disebut matriks segitiga bawah tegas (strictly lower triangular) jika* $a_{ii} = 0$ *dan* $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Contoh 2.14

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, B adalah matriks segitiga bawah sebab $b_{ij} = 0, \forall i < j$.

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, D adalah matriks segitiga bawah tegas sebab $d_{ii} = 0$ dan $d_{ij} = 0, \forall i < j$.

4. Matriks diagonal

Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *disebut matriks diagonal jika* A *adalah matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah yaitu:* $a_{ij} = 0$ *untuk* $\forall i > j \wedge \forall i < j$.

Contoh 2.15

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Matriks identitas

Matriks diagonal $A = (a_{ij})$ *disebut matriks identitas jika elemen diagonalnya sama dengan satu.*

$$(a_{ij} = 1, \forall i = j \wedge a_{ij} = 0, \forall i \neq j)$$

Contoh 2.16

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suatu bilangan real a dikatakan mempunyai invers perkalian jika terdapat bilangan b sedemikian sehingga $ab = 1$. Berikut akan diperluas konsep invers perkalian pada matriks dengan definisi berikut :

Definisi 2.15 (Invers Matriks)

Suatu matriks A berordo $n \times n$ dikatakan taksingular (nonsingular) atau dapat dibalik (invertible) jika terdapat matriks B sedemikian sehingga $AB = BA = I$. Matriks B disebut invers perkalian dari A, ditulis dengan $B = A^{-1}$.

Definisi 2.16 (Matriks Singular)

Suatu matriks $n \times n$ dikatakan singular jika tidak memiliki invers perkalian.

Teorema 2.2

Jika matriks A mempunyai invers, maka invers dari A adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan invers dari A tidak tunggal.

Berarti selain A^{-1} ada matriks $B \neq A^{-1}$ yang juga merupakan invers dari A.

Maka: $A^{-1}A = I$

$(A^{-1}A)\,B = I\,B$

$A^{-1}\,(AB) = B$ (B invers A)

$A^{-1}I = B$

$A^{-1} = B$ (kontradiksi).

Jadi invers dari suatu matriks adalah tunggal. □

Teorema 2.3

Jika A dan B adalah dua matriks berordo $n \times n$ yang masing-masing mempunyai invers, maka:

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bukti :

i. A^{-1} adalah invers dari A maka $AA^{-1} = I$.

Menurut definisi, $AA^{-1} = I$ berarti A adalah invers dari matriks A^{-1}. Karena invers dari matriks A adalah tunggal, maka haruslah $(A^{-1})^{-1} = A$

$$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}I = (A^{-1})^{-1}\, A^{-1}A = ((A^{-1})^{-1}\, A^{-1})A = IA = A.$$

ii. $(AB)(AB)^{-1} = I$

Kemudian $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$

Dari (i), $(AB)(AB)^{-1} = I$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

Jadi $B^{-1}A^{-1}$ juga invers dari matriks AB karena invers dari suatu matriks tunggal maka haruslah $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Teorema 2.4

Jika matriks A berordo $n \times n$ mempunyai invers maka untuk sembarang matriks kolom $\mathbf{b}$ *berordo $n \times 1$, sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal yaitu matriks kolom $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ berordo $n \times 1$.*

Bukti :

i. Dibuktikan sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian.

Cukup diperlihatkan bahwa $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ memenuhi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu : $A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$. dengan demikian $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ii. Dibuktikan sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Misalkan x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, yang berarti $Ax_1 = Ax_2$ atau $A(x_1 - x_2) = O$ dengan O merupakan matriks nol.

Kemudian dengan mengalikan A^{-1} pada persamaan terakhir diperoleh $O = A^{-1}A(x_1 - x_2) = (A^{-1}\ A)\ (x_1 - x_2) = I(x_1 - x_2) = x_1 - x_2$. Dengan demikian $x_1 - x_2$ atau sistem persamaan linear hanya mempunyai satu penyelesaian. □

Definisi 2.17 (Transpos Matriks)

Jika diketahui suatu matriks $A = (a_{ij})_{mxn}$ *maka yang dimaksud dengan transpos dari A adalah matriks* $B = (b_{ji})_{nxm}$, *di mana* $b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ *atau* $b_{ji} = a_{ij}, \forall i, j$.

Transpos dari A ditulis A^t.

Contoh 2.17

Jika matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, maka $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Definisi 2.18 (Matriks Simetri)

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri jika $A = A^t$. *Jadi jika A matriks simetri maka* $a_{ij} = a_{ji}, \forall_{i \neq j}$.

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri miring jika $A = -A^t$.

Dari definisi di atas dapat dikatakan jika A matriks simetri maka $a_{ij} = a_{ji}, \forall_{i \neq j}$ dan jika A matriks simetri miring maka $a_{ij} = -a_{ji}, \forall_{i,j} \vee a_{ji} = -a_{ij}, \forall_{i,j}$.

Contoh 2.18

1. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ maka matriks A adalah matriks simetri sebab: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = A$.

2. Jika diketahui matriks $G = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ maka matriks G adalah matriks simetri miring sebab: $-G^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = G$.

Definisi 2.19 (Minor dan Kofaktor)

Andaikan matriks $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dan andaikan M_{ij} menyatakan matriks $(n-1)\times(n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris dan kolom yang mengandung a_{ij}. Didefinisikankan kofaktor A_{ij} dari a_{ij} dengan

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Definisi 2.20 (Determinan Matriks)

Determinan matriks persegi A dilambangkan dengan $|A|$ adalah suatu bilangan yang didapat dari elemen-elemen A dengan pengerjaan tertentu, yaitu:

1. Jika $A_{1\times 1} = [a]$ maka $\det A = |A| = a$.

2. Jika $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka det $A = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

3. Jika A_{nxn} maka det $A = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ dengan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh 2.19

Andaikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ maka det A adalah:

$$|A| = -a_{14}M_{14} + a_{24}M_{24} - a_{34}M_{34} + a_{44}M_{44}$$

$$= 0 + 0 - 5M_{34} + 0$$

$$= -5M_{34}$$

$$= -5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \left\{ 2\det \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - (-1)\det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 3\det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= -30.$$

3. Ruang Vektor

Vektor-vektor di bidang R^2 dan di ruang R^3 secara geometris dinyatakan sebagai segmen-segmen garis berarah. Misalkan sebarang vektor **v** pada bidang yang titik awalnya berada pada titik asal dengan koordinat (v_1, v_2) maka v_1 dan v_2

dinamakan komponen-komponen dari vektor **v**. Vektor **v** dapat ditulis dengan matriks kolom yaitu $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Walaupun visualisasi vektor secara geometrik tidak melebihi R^3, tetapi vektor-vektor dapat diperluas hingga melebihi R^3 secara aljabar. Gagasan mengenai vektor di R^2 dan R^3 dapat diperluas untuk vektor di ruang berdimensi-n, dengan n > 3. Vektor di ruang berdimensi-n ditulis dalam bentuk matriks n x 1, yang dapat dinyatakan juga sebagai transpos dari matriks n x 1 yaitu matriks berordo 1 x n.

Definisi 2.21 (Ruang Euklidis Berdimensi-n)

*Himpunan semua matriks berordo n x 1 dengan elemen-elemen bilangan real disebut ruang Euklidis berdimensi-*n, *dilambangkan dengan* R^n.

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n \in \Re \right\}$$

Atau dengan cara penulisan lain $R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \Re\}$.

Setiap elemen dari R^n disebut vektor yang dilambangkan dengan huruf kecil tebal, misalkan vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ maka x_1, x_2, …, x_n disebut komponen-komponen dari vektor **x**.

Definisi 2.22 (Kesamaan Dua Vektor)

Dua buah vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ *dan* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$ *dalam* R^n *dikatakan sama, yaitu* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *jika* $x_i = y_i$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definisi 2.23

Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam R^n *didefinisikan sebagai berikut : jika* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$ *adalah vektor-vektor dalam* R^n *dan* α *dalam* R, *maka*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)^t \quad \textit{dan} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)^t.$$

Definisi 2.24

Suatu vektor dalam R^n *yang semua komponennya sama dengan nol disebut vektor nol, dilambangkan dengan* $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)^t$. *Jika* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ *sebarang vektor dalam* R^n, *maka vektor* $(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)^t$ *disebut negatif dari* $\mathbf{x}$, *dilambangkan dengan* $-\mathbf{x}$.

Teorema 2.5

Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$, dan $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^t \in \mathrm{R}^n$ *dengan* c *dan* k *sebarang skalar dalam* R^n, *maka*

a. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

b. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.

c. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

d. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$.

e. $c(k\mathbf{x}) = (ck)\mathbf{x}$.

f. $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$.

g. $(c + k)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + k\mathbf{x}$.

h. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Bukti :

a. $$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)^t \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \cdots, y_n + x_n)^t \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t + (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \\ &= \mathbf{y} + \mathbf{x}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t + (z_1, z_2, \cdots, z_n)^t \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \cdots, y_n + z_n)^t \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \cdots, x_n + (y_n + z_n))^t \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \cdots, (x_n + y_n) + z_n)^t \\ &= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \cdots, (x_n + y_n))^t + (z_1, z_2, \cdots, z_n)^t \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t + (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (z_1, z_2, \cdots, z_n)^t \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\mathbf{x} + 0 &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (0, 0, \cdots, 0)^t \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \cdots, x_n + 0)^t \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \\ &= \mathbf{x}\end{aligned}$$

d. $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t+(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)^t$

$=(x_1-x_1, x_2-x_2, \cdots, x_n-x_n)^t$

$=(0, 0, \cdots, 0)^t$

$=\mathbf{0}$

e. $c(k\mathbf{x})=c\left(k(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t\right)$

$=c(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)^t$

$=(c(kx_1), c(kx_2), \cdots, c(kx_n))^t$

$=((ck)x_1, (ck)x_2, \cdots, (ck)x_n)^t$

$=\left((ck)(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t\right)$

$=(ck)\mathbf{x}$

f. $c(\mathbf{x}+\mathbf{y})=c\left((x_1, x_2, \cdots, x_n)^t+(y_1, y_2, \cdots, y_n)^t\right)$

$=c(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)^t$

$=(c(x_1+y_1), c(x_2+y_2), \cdots, c(x_n+y_n))^t$

$=(cx_1+cy_1, cx_2+cy_2, \cdots, cx_n+cy_n)^t$

$=(cx_1, cx_2, \cdots, cx_n)^t+(cy_1, cy_2, \cdots, cy_n)^t$

$=c(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t+c(y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$

$=c\mathbf{x}+c\mathbf{y}$

g. $(c+k)\mathbf{x}=(c+k)(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

$=((c+k)x_1, (c+k)x_2, \cdots, (c+k)x_n)^t$

$=(cx_1+kx_1, cx_2+kx_2, \cdots, cx_n+kx_n)^t$

$=(cx_1, cx_2, \cdots, cx_n)^t+(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)^t$

$=c(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t+k(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

$=c\mathbf{x}+k\mathbf{x}$

h. $1\mathbf{x} = 1(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$

$= (1x_1, 1x_2, \cdots, 1x_n)'$

$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$

$= \mathbf{x}$

Definisi 2.25

Andaikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ *adalah sebarang vektor dalam* R^n. *Perkalian dari* $\mathbf{x}$ *dan* $\mathbf{y}$ *dalam* R^n *didefinisikan dengan :*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n .$$

R^n dapat ditinjau sebagai himpunan semua matriks berordo n x 1 dengan elemen-elemen bilangan real, (lihat definisi 2.21). Penjumlahan dan perkalian skalar dari vektor-vektor dalam R^n tak lain adalah penjumlahan dan perkalian yang terdapat dalam matriks. Lebih umum, andaikan $\mathrm{R}^{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks m x n dengan elemen-elemen bilangan real. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, maka jumlahan $A + B$ didefinisikan sebagai matriks $C = (c_{ij})$ yang berordo m x n, di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Untuk sebarang skalar α didefinisikan αA sebagai suatu matriks $D = (d_{ij})$ yang berordo m x n, di mana elemen $d_{ij} = \alpha a_{ij}$. Dengan mendefinisikan operasi-operasi pada himpunan $\mathrm{R}^{m \times n}$ berarti telah membentuk suatu sistem matematika. Operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada $\mathrm{R}^{m \times n}$ mengikuti aturan-aturan ilmu hitung tertentu. Aturan-aturan ini membentuk aksioma-aksioma yang digunakan untuk mendefinisikan konsep ruang vektor.

Definisi 2.26 (Ruang Vektor)

Andaikan V adalah suatu himpunan tidak kosong dan pada V didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, yaitu aturan yang mengawankan setiap pasang elemen-elemen **x** *dan* **y** *dalam V dan setiap skalar* c *dengan tepat satu elemen* **x** + **y** *dalam V dan tepat satu elemen* c**x** *dalam V. Himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dikatakan membentuk suatu ruang vektor jika dipenuhi aksioma-aksioma berikut :*

A1. **x** + **y** = **y** + **x** untuk setiap **x** dan **y** di *V*.

A2. (**x** + **y**) + **z** = **x** + (**y** + **z**) untuk setiap **x**, **y**, **z** di *V*.

A3. Ada elemen **0** di V sehingga **x** + 0 = **x** untuk setiap **x** di *V*.

A4. Untuk setiap $\mathbf{x} \in V$, ada elemen -x di V sehingga **x** + (-**x**) = 0.

A5. c(**x** + **y**) = c**x** + c**y**, untuk setiap skalar c dan setiap **x**, **y** di *V*.

A6. (c + k)**x** = c**x** + k**x**, untuk setiap skalar c dan k dan setiap **x** di *V*.

A7. (ck)**x** = c(k**x**), untuk setiap skalar c dan k dan setiap **x** di *V*.

A8. 1**x** = **x**, untuk setiap **x** *di V*.

Ruang vektor yang didefinisikan di atas sering juga disebut *ruang vektor real*, karena skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan real.

Karena aksioma-aksioma dari ruang vektor merupakan abstraksi dari sifat-sifat vektor pada R^n, maka R^n merupakan salah satu contoh dari ruang vektor

Teorema 2.6

Jika V adalah ruang vektor dan **x**, **y** *sebarang vektor dalam V, maka*:

i. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

ii. Jika $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ (yaitu invers jumlahan dari **x** adalah tunggal)

iii. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Bukti :

i. Menurut aksioma A6 dan A8 :

$\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = (1 + 0)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = \mathbf{x} + 0\mathbf{x}$. Jadi

$-\mathbf{x} + \mathbf{x} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + 0\mathbf{x}$ (A2)

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$ (A1, A3, dan A4)

Terbukti $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ii. Andaikan $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Maka $-\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{0} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y}$

$= \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

Terbukti $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$.

iii. Menurut i dan A6 :

$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$.

Jadi $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (A8)

Menurut ii : $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. □

4. Norma Vektor dan Matriks

Dalam membahas metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan SPL, diperlukan pengertian jarak diantara dua vektor, barisan vektor konvergen.

Andaikan R^n menunjukkan himpunan semua vektor berdimensi-n dengan elemen bilangan real. Untuk mendefinisikan jarak dalam R^n diperlukan definisi suatu norma.

Definisi 2.27 (Norma Vektor)

Suatu norma vektor di R^n *adalah suatu fungsi,* $\|\cdot\|: R^n \to R$ *yang memenuhi:*

i. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\mathbf{x} \in R^n$ dan $\|\mathbf{x}\| = 0$ b.h.b $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)^t \equiv 0$,

ii. $\|\alpha\, \mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ untuk $\alpha \in R$ dan $\mathbf{x} \in R^n$,

iii. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.

Contoh 2.20

Untuk setiap $\mathbf{x} \in R^n$ didefinisikan fungsi $\|.\|: R^n \to R$ dengan $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Fungsi $\|.\|$ tersebut merupakan norma vektor karena :

i. Untuk setiap $\mathbf{x} \neq 0$, maka $|x_i| \geq 0$

dan akibatnya $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \geq 0$

Jika $\|\mathbf{x}\| = 0$, maka $x_i = 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in R^n$. Karena itu $\mathbf{x}$ haruslah matriks nol.

ii. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.

iii. Jika $\mathbf{x} \neq 0$, maka :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \max_{1\le i\le n}|(x+y)_i| \\ &\le \max_{1\le i\le n}|x_i||y_i| \\ &\le \max_{1\le i\le n}|x_i| + \max_{1\le i\le n}|y_i| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

Teorema 2.7 (Cauchy-Schwarz)

Untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$ *dalam* $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2}$$

Bukti :

1. Jika $\mathbf{y} = 0$ atau $\mathbf{x} = 0$ maka $0 \le 0$. Teorema 2.8 berlaku.

2. Andai $\mathbf{y} \neq 0$ dan $\mathbf{x} \neq 0$. Untuk $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \le \|\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

dan $2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{y}\|_2^2$.

Karena $\|\mathbf{x}\|_2 > 0$ dan $\|\mathbf{y}\|_2 > 0$, dapat diandaikan $\lambda = \dfrac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}$ sehingga memberikan

$$\left(2\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \le \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{y}\|_2^2}\|\mathbf{y}\|_2^2 = 2\|\mathbf{x}\|_2^2,$$

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 2\|\mathbf{x}\|_2^2\frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 2\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Jika x_i diganti dengan $-x_i$ dimana $x_i y_i < 0$ dan vektor **x** menghasilkan:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2}. \ \square$$

Definisi 2.28 (Jarak antara vektor)

Andaikan vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$ *dalam* R^2, *jarak antara vektor* **x** *dan* **y** *didefinisikan dengan* $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}$

Contoh 2.21

Andai vektor $\mathbf{x} = (1,1,1)^t$ dan $\mathbf{y} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$ maka jarak antara vektor **x** dan vektor **y** yaitu :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 &= \left[(1 - 1.2001)^2 + (1 - 0.99991)^2 + (1 - 0.92538)^2\right]^{1/2} \\ &= \left[(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2\right]^{1/2} \\ &= 0.21356, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty &= \max\{|1 - 1.2001|, |1 - 0.99991|, |1 - 0.92538|\} \\ &= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} \\ &= 0.2001. \end{aligned}$$

Definisi 2.28 (Barisan Vektor Konvergen)

Barisan vektor $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *dalam* R^n *dikatakan konvergen ke* $\mathbf{x}$ *dengan norma* $\|.\|$ *jika diberikan* $\varepsilon > 0$*, dimana ada bilangan bulat* $N(\varepsilon)$ *dengan:*

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon, \textit{ untuk } k \geq N(\varepsilon).$$

Teorema 2.8

Barisan vektor $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *dalam* R^n *konvergen ke* $\mathbf{x}$ *dengan* $\|\cdot\|_\infty$ *bila dan hanya bila* $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Andaikan barisan vektor $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergen ke $\mathbf{x}$ dengan, $\|\cdot\|_\infty$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat $N(\varepsilon)$ dimana untuk semua $k \geq N(\varepsilon)$,

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \left|x_i^{(k)} - x_i\right| = \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Hal ini berarti bahwa $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, dan $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ untuk setiap i.

$(\Leftarrow)$ Andaikan $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ maka barisan $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergen ke $\mathbf{x}$ dalam R^n. Untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan, ada $N_i(\varepsilon)$ untuk setiap i bilangan bulat dengan syarat

$$|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon \quad \text{untuk} \quad k \geq N_i(\varepsilon).$$

Didefinisikan $N(\varepsilon) = \max_{i=1,2,\ldots,n} N_i(\varepsilon)$. Jika $k \geq N(\varepsilon)$ maka

$$\max_{i=1,2,\dots,n} \left|x_i^{(k)} - x_i\right| = \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\right\|_\infty < \varepsilon .$$

Hal ini berarti bahwa $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ konvergen ke $\mathbf{x}$. □

Teorema 2.9

Untuk setiap **x** *dalam* R^n, $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Bukti :

Andaikan x_j mewakili **x** dengan $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = |x_j|$. Maka

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 = |x_j|^2 = x_j^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_j^2 = nx_j^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty^2 .$$

Sehingga $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$. □

Definisi 2.29 (Norma Matriks)

Suatu norma matriks pada himpunan semua matriks $n \times n$ adalah suatu fungsi $\|.\|: \mathrm{R}^{n\times n} \to \mathrm{R}$, *yang memenuhi untuk semua matriks A dan B berordo $n \times n$ dan untuk semua bilangan real α sedemikian sehingga :*

i. $\| A \| \ge 0$ dan $\| A \| = 0$ b.h.b $A = 0$

ii. $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \|$,

iii. $\| A + B \| \le \| A \| + \| B \|$.

Contoh 2.22

Andaikan A dalam R^{nxn}. Suatu fungsi $\|\cdot\| : R^{n \times n} \to R$ dengan $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq 0$

merupakan norma matriks karena memenuhi definisi 2.29 :

i. Untuk setiap $\mathbf{x} \neq 0$, maka $\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq 0$

dan akibatnya $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq 0$

Jika $\|A\| = 0$, maka $A\mathbf{x} = 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in R^n$.

Hal ini berarti bahwa $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j = 0$ untuk $j = 1, 2, \cdots, n$ karena itu A haruslah matriks nol.

ii. $\|\alpha A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\alpha A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = |\alpha| \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = |\alpha| \|A\|$

iii. Jika $\mathbf{x} \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \max_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \max_{x \neq 0} \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

Definisi 2.30

Andaikan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *adalah suatu norma, maka norma matriks* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ *didefinisikan dengan* $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$.

Teorema 2.10

Jika $A = (a_{ij})$ *adalah matriks n x n, maka* $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Bukti:

Andaikan x vektor kolom berdimensi-n dengan $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| = 1$. Karena Ax juga vektor kolom berdimensi-n,

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1 \le i \le n} |x_j|.$$

Karena $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$,

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Akibatnya,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \quad \ldots(1)$$

Tetapi, jika p bilangan bulat dengan

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

dan x adalah pilihan dengan

$$x_j = \begin{cases} 1, & jika\ a_{pj} \geq 0, \\ -1, & jika\ a_{pj} < 0 \end{cases}$$

maka $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1, \quad a_{pj}x_j = |a_{pj}|, \forall\ j = 1, 2, 3, \ldots, n.$

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Hal ini berarti bahwa

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

dengan, pertidaksamaan (1), memberikan

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \quad \square$$

5. Nilai Eigen dan Vaktor Eigen

Definisi 2.31 (Polinomial Karakteristik)

Jika A matriks persegi, polinomial didefinisikan dengan p(λ) = det(A – λI) disebut polinomial karakteristik dari matriks A.

Definisi 2.32 (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)

Andaikan p polinomial karakteristik dari matriks A, pembuat nol p disebut nilai eigen / nilai karakteristik dari matriks A. Jika λ adalah nilai eigen dari matriks A dan **x** ≠ 0 *memenuhi (A – λI)***x** = 0, **x** *disebut vektor eigen / vektor karateristik dari matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ..*

Contoh 2.23

Andaikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk menghitung nilai eigen dari A, dicari

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4).$$

Nilai eigen dari A adalah penyelesaian dari $p(\lambda) = 0$ yaitu: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}\,i$.

Definisi 2.33 (Radius Spektral)

Radius spektral $\rho(A)$ dari matriks A didefinisikan dengan $\rho(A) = \max |\lambda|$, di mana λ nilai eigen dari matriks A.

Teorema 2.11

Jika A matriks n x n maka :

i. $[\rho(A^t A)]^{1/2} = \| A \|_2$,

ii. $\rho(A) \leq \| A \|$.

Bukti:

i. Andaikan $\mu = [\rho(A^t A)]^{1/2}$. Maka untuk setiap $\mathbf{x} \in R^n$, $\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x} \leq \mu^2 \mathbf{x}^t \mathbf{x}$ lalu $\|A\|_2 \leq \mu$. Jika $\mathbf{u}$ adalah vektor eigen dari $A^t A$ sesuai dengan μ^2 maka $\mathbf{u}^t A^t A \mathbf{u} = \mu^2 \mathbf{u}^t \mathbf{u}$ ditunjukkan dengan persamaan $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$.

ii. Ambil λ nilai eigen A dengan vektor eigen $\mathbf{x}$ dimana $\|\mathbf{x}\| = 1$.

$|\lambda| = \|\lambda\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\| = \|A\|$.

$\rho(A) = \max|\lambda| \leq \|A\|$. □

Contoh 2.24

Andaikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

maka $A'A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Untuk menghitung $\rho(A'A)$, dibutuhkan nilai eigen dari $A'A$ yaitu:

$$0 = \det(A'A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42).$$

Nilai $\lambda = 0$ atau $\lambda = 7 \pm \sqrt{7}$,

dan $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A'A)} = \sqrt{\max\{0,\ 7-\sqrt{7},\ 7+\sqrt{7}\}} \approx 3{,}106$.

Definisi 2.34 (Matriks n x n konvergen)

Matriks A_{nxn} *konvergen jika* $\lim_{k\to\infty}(A^k)_{ij} = 0$, *untuk* i = 1, 2, 3, …, n *dan* $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Contoh 2.25

Andaikan matriks $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\quad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix},\quad A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix},$$

dan secara umum dapat ditulis

$$A^k = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}.$$

Karena $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$ dan $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{2^{k+1}} = 0$,

Berarti A adalah matriks konvergen. Karena $\rho(A) = {}^1/_2$ maka nilai eigen dari A adalah ${}^1/_2$.

Teorema berikut ini tidak akan dibuktikan karena pembuktiannya menggunakan konsep lebih lanjut dan hanya dipakai untuk pembuktian teorema ini saja.

Teorema 2.12

Pernyataan berikut adalah ekuivalen:

i. *A adalah matriks konvergen;*

ii. $\lim_{n\to\infty}\|A^n\| = 0$;

iii. $\rho(A) < 1$;

iv. $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x} = 0$, untuk setiap $\mathbf{x}$.

BAB III

METODE ITERASI TITIK TETAP UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Ada dua metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear secara numerik yaitu metode langsung dan metode tidak langsung. Pada skripsi ini akan dibahas metode tidak langsung atau metode iterasi titik tetap.

Sebelum membahas macam-macam metode iterasi titik tetap terlebih dahulu akan diuraikan definisi titik tetap.

Definisi 3.1 (Titik tetap)

Andaikan $x = g(x)$ *suatu persamaan. Penyelesaian persamaan ini adalah mencari suatu bilangan r yang tidak berubah oleh fungsi g. Bilangan r disebut sebagai suatu titik tetap dari g.*

Teorema-teorema berikut ini merupakan syarat untuk ada dan tunggalnya suatu titik tetap.

Teorema 3.1

Jika g kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ *dan* $g(x)$ *pada interval tertutup* $[a, b]$, *maka g memiliki titik tetap pada interval tertutup* $[a, b]$. *Andaikan dalam tambahan ada* $g'(x)$ *pada interval terbuka* (a, b) *dan ada bilangan possitif* $k < 1$ *dengan*

$$|g'(x)| \le k < 1, \; untuk\ semua \;\; x \in (a, b)$$

Maka titik tetap pada interval tertutup [a, b] adalah tunggal.

Bukti :

Jika $g(a) = a$ atau $g(b) = b$, maka ada titik tetap. Andaikan tidak; maka harus dibuktikan benar bahwa $g(a) > a$ dan $g(b) < b$. Didefinisikan $h(x) = g(x) - x$. Maka h kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan $h(a) = g(a) - a > 0$, $h(b) = g(b) - b < 0$. Dengan teorema Nilai Antara: "Jika f kontinu pada interval tertutup [a, b] dan K adalah bilangan diantara f(a) dan f(b), maka ada bilangan c pada interval terbuka (a, b) dengan f(c) = K". Berarti bahwa ada $p \in (a, b)$ untuk $h(p) = 0$. Kemudian, $h(p) - p = 0$ dan p disebut titik tetap dari g.

Andaikan, dalam penambahan pada pertidaksamaan $|g'(x)| \le k < 1$, $x \in (a, b)$ dan p dan q adalah dua titik tetap pada interval tertutup $[a, b]$ dengan $p \ne q$. Dengan teorema Nilai Rata-rata: "Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan f terdiferensial pada interval terbuka (a, b), maka ada bilangan c pada interval terbuka (a, b) dengan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\text{"}.$$

Ada bilangan ξ antara p dan q pada interval tertutup $[a, b]$, dengan

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi).$$

Maka

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \le k|p - q| < |p - q|,$$

berarti ada kontradiksi. Kontradiksi ini datang dari dugaan $p \neq q$. Oleh karena itu, $p = q$ dan titik tetap pada interval tertutup $[a, b]$ adalah tunggal. □

Teorema 3.2

Andaikan g kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan andaikan $g(x)$ pada interval terbuka $[a, b]$ untuk semua x pada interval tertutup $[a, b]$. Andaikan dalam tambahan ada g' pada interval terbuka (a, b) dengan

$$|g'(x)| \leq k < 1, \text{ untuk semua } x \in (a, b).$$

Jika p_0 sebarang bilangan pada interval tertutup $[a, b]$, maka barisan yang didefinisikan dengan

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

konvergen ke titik tetap yang tunggal p pada interval tertutup $[a, b]$.

Bukti :

Dengan teorema 3.1 ada titik tetap yang tunggal pada interval tertutup $[a, b]$. Karena g memetakan $[a, b]$ ke dalam dia sendiri, barisan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ yang didefinisikan untuk $n \geq 0$ dan $p_n \in [a, b]$ untuk semua n. Dengan pertidaksamaan $|g'(x)| \leq k < 1$, untuk semua $x \in (a, b)$ dan teorema Nilai Rata-rata: "Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan f terdiferensial pada interval terbuka (a, b), maka ada bilangan c pada interval terbuka (a, b) dengan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\text{"}.$$

Dapat diperoleh

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi)||p_{n-1} - p| \le k|p_{n-1} - p|, \text{ dengan } \xi \in (a, b).$$

Pertidaksamaan tersebut menghasilkan :

$$|p_n - p| \le k|p_{n-1} - p| \le k^2|p_{n-2} - p| \le \cdots \le k^n|p_0 - p|.$$

Karena $k < 1$,

$$\lim_{n\to\infty}|p_n - p| \le \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0,$$

dan barisan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke-p. □

A. Metode-metode Iterasi

Metode iterasi adalah suatu proses mengubah SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ke dalam SPL yang ekivalen $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ di mana T matriks dan $\mathbf{c}$ vektor. Metode ini dimulai dengan memilih aproksimasi awal atau pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ untuk suatu penyelesaian $\mathbf{x}$, yang dihitung dengan $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ dan kemudian membangun suatu urutan pendekatan terbaik terhadap penyelesaian eksak.

Selanjutnya akan dibahas tiga metode iterasi titik tetap yaitu metode Jacobi, metode Gauss-Seidel, dan metode SOR.

1. Metode Jacobi

Pembahasan dimulai dengan metode Jacobi. Metode ini digunakan terhadap SPL n x n dengan n persamaan dan n variabel.

Andaikan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan elemen diagonal utamanya merupakan bilangan tak nol.

Untuk memulai perhitungan, ditulis kembali SPL (3.1) dengan menggunakan penyelesaian persamaan pertama untuk x_1 dalam n variabel, kemudian dengan menyelesaikan persamaan kedua untuk x_2 dalam n variabel, dan seterusnya. Sehingga menghasilkan SPL sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_n + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

SPL (3.2) berbentuk $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$, ditulis dalam bentuk sederhana yaitu :

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ dengan} \left(a_{ii} \neq 0\right).$$

Secara umum x_i didefinisikan secara iterasi, yaitu $x_i^{(k)}$ untuk $k \geq 1$, dengan menggunakan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ sebagai berikut :

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i}{a_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

sampai didapatkan hasil dengan ketelitian yang diinginkan. Bila tidak didapat pilihan yang lebih baik maka sebagai pendekatan awal dapat dipilih $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^t$.

Metode Jacobi dalam bentuk $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ ditulis dengan pemisahan A dalam diagonal dan tanpa diagonal. Andaikan D matriks diagonal yang diagonal utamanya sama dengan matriks A, maka $-L$ adalah matriks segitiga bawah tegas bagian dari A, dan $-U$ adalah matriks segitiga atas tegas bagian dari A. Dengan notasi ini, A dipisahkan dalam:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D \qquad - \qquad L \qquad - \qquad U$$

Jika $A = D - L - U$ disubstitusikan pada persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka persamaan menjadi $(D - L - U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

Sehingga bentuk matriks dari iterasi Jacobi adalah:

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}. \qquad (3.4)$$

Algoritma (3.1) untuk metode Jacobi

Penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$:

Input : SPL n x n; matriks A dengan elemen $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$; $\mathbf{b}$ dengan elemen $b_i, 1 \leq i \leq n$; $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$ dengan elemen $XO_i, 1 \leq i \leq n$; TOL (toleransi): bilangan maksimum iterasi N.

Output : pendekatan penyelesaian $x_1, \ldots, x_n$.

Langkah-langkah perhitungan :

Langkah 1 : $k = 1$.

Langkah 2 : jika ($k \leq N$) kerjakan langkah 3-6.

Langkah 3 : untuk $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(a_{ij} XO_j\right) + b_i}{a_{ii}}.$$

Langkah 4 : jika $\|\mathbf{x} - \mathbf{XO}\| < TOL$ maka output $(x_1, \ldots, x_n)$;

(Prosedur lengkap sukses.)

Berhenti.

Langkah 5 : $k = k + 1$.

Langkah 6 : untuk $i = 1, \ldots, n$; $XO_i = x_i$.

Langkah 7 : output (maksimum iterasi tercapai);

(Prosedur lengkap tidak sukses.)

Berhenti.

Kriteria berhenti untuk langkah 4 adalah:

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty}.$$

Contoh 3.1

Jika diketahui sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.

Sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di atas diubah ke dalam iterasi Jacobi bentuk (3.3) menjadi :

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \phantom{0.25x_1^{(k-1)}} \; 0.25x_2^{(k-1)} + 0.25x_3^{(k-1)} \phantom{+0.25x_4^{(k-1)}} + 2.25 \\ x_2^{(k)} &= 0.25x_1^{(k-1)} \phantom{+0.25x_2^{(k-1)} + 0.25x_3^{(k-1)}} + 0.25x_4^{(k-1)} + 3.0 \\ x_3^{(k)} &= 0.25x_1^{(k-1)} \phantom{+0.25x_2^{(k-1)} + 0.25x_3^{(k-1)}} + 0.25x_4^{(k-1)} + 0 \\ x_4^{(k)} &= \phantom{0.25x_1^{(k-1)}} \; 0.25x_2^{(k-1)} + 0.25x_3^{(k-1)} \phantom{+0.25x_4^{(k-1)}} - 0.75 \end{aligned}$$

Iterasi pertama dengan $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.25x_2^{(0)} + 0.25x_3^{(0)} + 2.25 = 0 + 0 + 2.25 = 2.25 \\ x_2^{(1)} &= 0.25x_1^{(0)} + 0.25x_4^{(0)} + 3.0 = 0 + 0 + 3.0 = 3.0 \\ x_3^{(1)} &= 0.25x_1^{(0)} + 0.25x_4^{(0)} + 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \\ x_4^{(1)} &= 0.25x_2^{(0)} + 0.25x_3^{(0)} - 0.75 = 0 + 0 - 0.75 = -0.75 \end{aligned}$$

Iterasi kedua dengan $\mathbf{x}^{(1)} = (2.25, 3.0, 0, -0.75)$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} + 2.25 = 0.25(3.0) + 0.25(0) + 2.25 = 3.0 \\ x_2^{(2)} &= 0.25x_1^{(1)} + 0.25x_4^{(1)} + 3.0 = 0.25(2.25) + 0.25(-0.75) + 3.0 = 3.3750 \\ x_3^{(2)} &= 0.25x_1^{(1)} + 0.25x_4^{(1)} + 0 = 0.25(2.25) + 0.25(-0.75) + 0 = -0.3750 \\ x_4^{(2)} &= 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} - 0.75 = 0.25(3.0) + 0.25(0) - 0.75 = 0 \end{aligned}$$

Iterasi selanjutnya akan dicari dengan menggunakan komputer dengan program matlab.

Perhitungan dengan matlab:

```
function x = Jacobi_f(A, b, x0, tol, max)
% Penyelesaian sistem linear Ax = b dengan metode Jacobi

% Input:
        % A, matriks koefisien(n baris dengan n kolom)
        % b, vektor (n baris dengan 1 kolom)
        % x0, pendekatan awal (n baris dengan 1 kolom)
        % tol, toleransi
        % max, iterasi maksimum

% Output:
        % x, penyelesaian vektor (n baris dengan 1 kolom)

A= [ 4 -1 -1 0; -1 4 0 -1; -1 0 4 -1; 0 -1 -1 4  ]
b= [ 9; 12; 0; -3 ]
x0= [ 0; 0; 0; 0 ]
max = 10
tol = 0.0100
[n,m] = size(A);
xold = x0;
C = -A;
for i = 1:n
  C(i,i) = 0;
End
for i = 1:n
  C(i,:) = C(i,:)/A(i,i);
end
for i = 1:n
  d(i,1) = b(i)/A(i,i);
end
i = 1;
disp('    i        x1       x2       x3        x4 ');
while(i <= max)
  xnew = C * xold + d;
  if norm(xnew - xold) <= tol
     x = xnew;
     disp('metode Jacobi konvergen');
     return;
else
     xold = xnew;
  end
  disp([i   xnew']);
  i = i + 1;
end
disp('metode Jacobi tidak konvergen');
disp('hasil setelah angka iterasi maksimum');
x = xnew ;
```

A =

4	-1	-1	0
-1	4	0	-1
-1	0	4	-1
0	-1	-1	4

b =

9
12
0
-3

x0 =

0
0
0
0

max = 10

tol = 0.0100

i	x_1	x_2	x_3	x_4
1.0000	2.2500	3.0000	0	-0.7500
2.0000	3.0000	3.3750	0.3750	0
3.0000	3.1875	3.7500	0.7500	0.1875
4.0000	3.3750	3.8438	0.8438	0.3750
5.0000	3.4219	3.9375	0.9375	0.4219
6.0000	3.4688	3.9609	0.9609	0.4688
7.0000	3.4805	3.9844	0.9844	0.4805
8.0000	3.4922	3.9902	0.9902	0.4922

metode Jacobi konvergen

ans =

3.4951
3.9961
0.9961
0.4951

Iterasi konvergen pada perhitungan ke-8.

Penyelesaian eksak $\mathbf{x}^* = (3.5, 4, 1, 0.5)^t$.

Kriteria berhenti iterasi setelah 8 iterasi :

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(8)} - \mathbf{x}^{(7)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(8)}\right\|_\infty} = \frac{5.8 \times 10^{-3}}{3.9902} < 10^{-2}$$

Setelah membahas metode Jacobi di atas, selanjutnya akan dibahas sebuah modifikasi dari metode Jacobi yang berguna untuk mereduksi banyaknya iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan derajat ketelitian pendekatan penyelesaian yang lebih baik.

Sebelum membahas metode Gauss-Seidel terlebih dahulu akan diuraikan definisi berikut :

Definisi 3.2

Vektor sisa **r** *dari sistem persamaan linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *didefinisikan dengan* $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$.

2. Metode Gauss-Seidel

Seperti pada metode Jacobi, metode ini digunakan terhadap SPL n x n dengan n persamaan dan n variabel.

Andaikan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seperti pada persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

dengan elemen diagonal utamanya merupakan bilangan tak nol.

Untuk mulai perhitungan, ditulis kembali SPL (3.1) menggunakan penyelesaian persamaan pertama untuk x_1 dengan n variabel yang tidak diketahui. Sehingga dihasilkan SPL $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ seperti pada persamaan (3.2) sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_n + \frac{b_n}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (3.2) dicari pendekatan yang diharapkan lebih baik pada tiap-tiap iterasi, untuk menentukan $x_i^{(1)}$ pada tiap-tiap iterasi digunakan nilai-nilai $x_i^{(0)}$ terbaru yang sudah ada, $x_i^{(1)}$ dicari dengan :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(0)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(0)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(1)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(0)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(0)} + \frac{b_2}{a_{22}} \qquad (3.5) \\
&\vdots \\
x_n^{(1)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(1)} - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(1)} + \frac{b_n}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

Untuk iterasi kedua dan seterusnya diperoleh dengan cara yang sama seperti persamaan (3.5). Sehingga persamaan (3.5) ditulis dalam bentuk sederhana yaitu:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Secara umum x_i didefinisikan secara iterasi, yaitu $x_i^{(k)}$ untuk $k \geq 1$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ sebagai berikut :

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i}{a_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.6)$$

sampai didapatkan hasil dengan ketelitian yang diinginkan. Sama seperti pada metode Jacobi bila tidak didapat pilihan yang lebih baik maka sebagai pendekatan awal dapat dipilih $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^t$.

Hasil dari modifikasi persamaan (3.3) adalah persamaan (3.6), dan persamaan (3.6) disebut iterasi Gauss-Seidel.

Pada metode Gauss-Seidel untuk menentukan $x_i^{(k)}$ pada tiap-tiap iterasi digunakan nilai-nilai $x_i^{(k-1)}$ terbaru yang sudah ada dengan $k \geq 1$. Sehingga dasar pemikiran dari metode Gauss-Seidel yaitu bila hasil suatu iterasi merupakan jawaban yang lebih mendekati sesungguhnya maka tentulah akan lebih cepat konvergen bila jawaban yang baru saja didapat tersebut langsung digunakan dalam perhitungan nilai $x_i^{(k)}$ yang lain.

Metode Gauss-Seidel dapat ditulis dalam bentuk matriks dengan mengalikan persamaan (3.6) dengan a_{ii} pada kedua ruas persamaan kemudian dikumpulkan semua iterasi ke-k sehingga diperoleh

$$a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{ii}x_i^{(k)} = -a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k-1)} + b_i \,, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ditulis semua n persamaan menjadi:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1^{(k)} & = & -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1, \\
a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} & = & - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2, \\
\vdots \qquad \vdots & & \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} & = & b_n;
\end{array}$$

maka didapat bentuk matriks dari metode Gauss-Seidel yaitu:

$$(D - L)\mathbf{x}^{(k)} = U\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

sehingga iterasi Gauss-Seidel ditulis

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D - L)^{-1}\, U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1}\, \mathbf{b},\ \ k = 1, 2, \ldots \quad (3.7)$$

Untuk matriks D – L nonsingular dan $\left(a_{ii} \neq 0\right)$, $ii = 1, 2, \ldots,\ n$.

Algoritma (3.2) untuk metode Gauss-Seidel.

Penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$:

Input : SPL n x n; matriks A dengan elemen $a_{ij}, 1 \leq i,\ j \leq n$; **b** dengan elemen $b_i, 1 \leq i \leq n$; **XO** = $\mathbf{x}^{(0)}$ dengan elemen $XO_i, 1 \leq i \leq n$; TOL (toleransi): bilangan maksimum iterasi N.

Output : pendekatan penyelesaian $x_1, \ldots, x_n$.

Langkah-langkah perhitungan

Langkah 1 : $k = 1$.

Langkah 2 : jika ($k \leq N$) kerjakan langkah 3-6.

Langkah 3 : untuk $i = 1, \ldots, n$

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}XO_j\right) + b_i}{a_{ii}}.$$

Langkah 4 : jika $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{XO}\right\| < TOL$ maka output $(x_1, \ldots, x_n)$;

(Prosedur lengkap sukses.)

Berhenti.

Langkah 5 : $k = k + 1$.

Langkah 6 : untuk $i = 1, \ldots, n$; $XO_i = x_i$.

Langkah 7 : output (maksimum iterasi tercapai);

(Prosedur lengkap tidak sukses.)

Berhenti.

Kriteria berhenti untuk langkah 4 adalah:

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty}.$$

Contoh 3.2

Jika diketahui sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seperti pada contoh 3.1 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.

Sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di atas ditulis ke dalam iterasi Gauss-Seidel (3.6) sehingga menjadi SPL :

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \phantom{0.25x_1^{(k)}} \quad 0.25x_2^{(k-1)} + 0.25x_3^{(k-1)} \phantom{+0.25x_4^{(k-1)}} + 2.25 \\
x_2^{(k)} &= 0.25x_1^{(k)} \phantom{+0.25x_2^{(k-1)}+0.25x_3^{(k-1)}} + 0.25x_4^{(k-1)} + 3.0 \\
x_3^{(k)} &= 0.25x_1^{(k)} \phantom{+0.25x_2^{(k-1)}+0.25x_3^{(k-1)}} + 0.25x_4^{(k-1)} + 0 \\
x_4^{(k)} &= \phantom{0.25x_1^{(k)}} \quad 0.25x_2^{(k)} + 0.25x_3^{(k)} \phantom{+0.25x_4^{(k-1)}} - 0.75
\end{aligned}$$

Iterasi pertama dengan $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$

$$x_1^{(1)} = 0.25x_2^{(0)} + 0.25x_3^{(0)} + 2.25 = 0 + 0 + 2.25 = 2.25$$

$$x_2^{(1)} = 0.25x_1^{(1)} + 0.25x_4^{(0)} + 3.0 = 0.25(2.25) + 0 + 3.0 = 0.5625 + 3 = 3.5625$$

$$x_3^{(1)} = 0.25x_1^{(1)} + 0.25x_4^{(0)} + 0 = 0.25(2.25) + 0 + 0 = 0.5625$$

$$x_4^{(1)} = 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} - 0.75 = 0.25(3.5625) + 0.25(0.5625) - 0.75 = 0.2812$$

Iterasi kedua dengan $\mathbf{x}^{(1)} = (2.25, 3.5625, 0.5625, 0.2812)^t$

$$x_1^{(2)} = 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} + 2.25 = 0.25(3.5625) + 0.25(0.5625) + 2.25 = 3.2712$$

$$x_2^{(2)} = 0.25x_1^{(2)} + 0.25x_4^{(1)} + 3.0 = 0.25(3.2712) + 0.25(0.2812) + 3.0 = 3.8881$$

$$x_3^{(2)} = 0.25x_1^{(2)} + 0.25x_4^{(1)} + 0 = 0.25(3.2712) + 0.25(0.2812) + 0 = 0.8881$$

$$x_4^{(2)} = 0.25x_2^{(2)} + 0.25x_3^{(2)} - 0.75 = 0.25(3.8881) + 0.25(0.8881) - 0.75 = 0.4440$$

Penyelesaian dengan matlab:

```
function x = Seidel_f(A, b, x0, tol, max)
% Penyelesaian sistem linear Ax = b dengan metode Gauss-Seidel

% Input:
        % A, matriks koefisien(n baris dengan n kolom)
        % b, vektor(n baris dengan 1 kolom)
        % x0, pendekatan awal (n baris dengan 1 kolom)
        % tol, toeransi
        % max, iterasi maksimum

% Output:
        % x, penyelesaian vektor (n baris dengan 1 kolom)

A = [ 4 -1 -1 0; -1 4 0 -1; -1 0 4 -1; 0 -1 -1 4 ]
b = [ 9; 12; 0; -3 ]
x0 = [ 0; 0; 0; 0 ]
max = 6
tol = 0.0100
[n , m] = size(A);
x = x0;
C = -A;
for i = 1:n
   C(i,i) = 0;
end
for i = 1:n
   C(i,1:n) = C(i,1:n)/A(i,i);
end
```

```
for i = 1:n
   r(i,1) = b(i)/A(i,i);
end
i = 1;
disp('    i       x1        x2       x3      x4 ');
while(i <= max)
   xold = x;   % save solution from previous step
   for j = 1:n
      x(j) = C(j,:) * x + r(j);
   end
   if norm(xold - x) <= tol
      disp('metode Gauss-Seidel konvergen');
      return;
   end
   disp([i    x'])
   i = i + 1;
end
disp('metode Gauss-Seidel tidak konvergen');
```

```
A =
    4   -1   -1    0
   -1    4    0   -1
   -1    0    4   -1
    0   -1   -1    4

b =
    9
   12
    0
   -3

x0 =
    0
    0
    0
    0

max = 6

tol = 0.0100
```

i	x_1	x_2	x_3	x_4
1.0000	2.2500	3.5625	0.5625	0.2813
2.0000	3.2813	3.8906	0.8906	0.4453
3.0000	3.4453	3.9727	0.9727	0.4863
4.0000	3.4863	3.9932	0.9932	0.4966
5.0000	3.4966	3.9983	0.9983	0.4991

metode Gauss-Seidel konvergen


```
ans =
   3.4991
   3.9996
   0.9996
   0.4998
```

Konvergen pada iterasi ke-5, $\mathbf{x} = (3.4991,\ 3.9996,\ 0.9996,\ 0.4998)^t$.

Penyelesaian eksak $\mathbf{x}^* = (3.5,\ 4,\ 1,\ 0.5)^t$.

Kriteria berhenti iterasi setelah 5 iterasi :

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(5)}\right\|_\infty} = \frac{5.1\,x\,10^{-3}}{3.9983} < 10^{-2}$$

Dengan membandingkan contoh 3.1 dan 3.2 pada tiap-tiap iterasi, dapat dilihat bahwa metode Gauss-Seidel menghasilkan penyelesaian dalam lima iterasi, sedangkan delapan iterasi diperlukan untuk menghasilkan penyelesaian dengan metode Jacobi.

3. Metode SOR (Successive Over-Relaxation)

Dalam iterasi pada metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel, vektor sisa dihubungkan dengan setiap perhitungan dari pendekatan penyelesaian eksak. Objek dari metode SOR adalah untuk menghasilkan barisan dari pendekatan penyelesaian yang akan menjadikan vektor sisa akan cepat konvergen ke nol. Andaikan vektor sisa

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = \left(r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \cdots, r_{ni}^{(k)}\right)^t$$

berarti vektor sisa untuk metode Gauss-Seidel berkorespondensi dengan pendekatan penyelesaian eksak $x_i^{(k)}$ yang didefinisikan dengan

$$\mathbf{x}_i^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \cdots, x_n^{(k-1)}\right)^t.$$

Komponen ke-m dari $\mathbf{r}_i^{(k)}$ adalah

$$\mathbf{r}_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} \qquad (3.8)$$

atau, ekivalen dengan

$$\mathbf{r}_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} - a_{mi} x_i^{(k-1)} \quad \text{untuk } m = 1,2,\ldots,n.$$

Yang utama untuk komponen ke-i, $\mathbf{r}_i^{(k)}$ adalah

$$\mathbf{r}_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}$$

lalu

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + \mathbf{r}_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad (3.9)$$

Dipanggil $x_i^{(k)}$ dari metode Gauss-Seidel yaitu

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right] \qquad (3.10)$$

kemudian persamaan (3.9) dapat ditulis

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + \mathbf{r}_{ii}^{(k)} = a_{ii} x_i^{(k)}.$$

Akibatnya metode Gauss-Seidel dengan pilihan $x_i^{(k)}$ ditulis

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (3.11)$$

Hubungan antara vektor sisa dan metode Gauss-Seidel adalah vektor sisa $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ dihubungkan dengan $\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \cdots, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \cdots, x_n^{(k-1)}\right)^t$.

Dengan persamaan (3.8), komponen ke-i dari $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ adalah

$$
\begin{aligned}
r_{i,i+1}^{(k)} &= b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \\
&= b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k)}
\end{aligned}
$$

Persamaan (3.10) berarti bahwa $\mathbf{r}_{i,i+1}^{(k)} = 0$. Oleh karena itu dalam metode Gauss-Seidel komponen ke-i dari $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ adalah nol.

Modifikasi iterasi Gauss-Seidel dari persamaan (3.11) memberikan persamaan berikut

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (3.12)$$

untuk pemilihan ω positif yang tepat akan menghasilkan penyelesaian eksak yang konvergen secara lebih cepat. Metode dengan persamaan (3.12) disebut metode relaksasi. Untuk pilihan $1 < \omega < 2$ dinamakan metode SOR (*successive over-relaxation*).

Sebelum menggambarkan metode SOR, dibutuhkan persamaan (3.9) dan (3.12). Persamaan tersebut dapat diformulasikan untuk perhitungan iterasi

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i\right)}{a_{ii}} \qquad (3.13).$$

Untuk menentukan bentuk matriks dari metode SOR ditulis kembali persamaan :

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i$$

lalu

$$(D-\omega L)\mathbf{x}^{(k)} = [(1-\omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega\mathbf{b} \quad \text{atau}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b} \qquad (3.14)$$

Persamaan (3.14) adalah iterasi SOR dalam bentuk matriks.

Algoritma (3.3) untuk metode SOR.

Penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$:

Input : SPL n x n; matriks A dengan elemen $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$; $\mathbf{b}$ dengan elemen $b_i, 1 \le i \le n$; $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$ dengan elemen $XO_i, 1 \le i \le n$; TOL (toleransi); bilangan maksimum iterasi N.

Output : pendekatan penyelesaian $x_1, \ldots, x_n$.

Langkah-langkah perhitungan

Langkah 1 : $k = 1$.

Langkah 2 : jika ($k \le N$) kerjakan langkah 3-6.

Langkah 3 : untuk $i = 1, \ldots, n$

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)XO_i - \frac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum a_{ij}XO_j + b_i\right)}{a_{ii}}.$$

Langkah 4 : jika $\|\mathbf{x} - \mathbf{XO}\| < TOL$ maka output ($x_1, \ldots, x_n$);

(Prosedur lengkap sukses.)

Berhenti.

Langkah 5 : $k = k + 1$.

Langkah 6 : untuk $i = 1, \ldots, n$; $XO_i = x_i$.

Langkah 7 : output (maksimum iterasi tercapai);

(Prosedur lengkap tidak sukses.)

Berhenti.

Kriteria berhenti untuk langkah 4 adalah:

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty}.$$

Contoh 3.3

Diberikan sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -29 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di atas diubah dalam bentuk:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x_2 + 2$$

$$x_2 = \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{5}{6}x_3 - \tfrac{29}{6}$$

$$x_3 = \tfrac{5}{11}x_2 + \tfrac{43}{11}$$

Dengan metode SOR:

$$x_1^{(k)} = (1-\omega)x_1^{(k-1)} + \omega(\tfrac{1}{2}x_2^{(k-1)} + 2)$$

$$x_2^{(k)} = (1-\omega)x_2^{(k-1)} + \omega(\tfrac{1}{3}x_1^{(k)} + \tfrac{5}{6}x_3^{(k-1)} - \tfrac{29}{6})$$

$$x_3^{(k)} = (1-\omega)x_3^{(k-1)} + \omega(\tfrac{5}{11}x_2^{(k)} + \tfrac{43}{11})$$

Iterasi pertama, dengan $\omega = 1.2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

$$x_1^{(1)} = (1-1.2)x_1^{(0)} + 1.2(\tfrac{1}{2}x_2^{(0)} + 2) = 0 + 0 + 2.4 = 2.4$$

$$x_2^{(1)} = (1-1.2)x_2^{(0)} + 1.2(\tfrac{1}{3}x_1^{(1)} + \tfrac{5}{6}x_3^{(0)} - \tfrac{29}{6}) = 0 + 0.96 + 0 - 5.8 = -4.84$$

$$x_3^{(1)} = (1-1.2)x_3^{(0)} + 1.2(\tfrac{5}{11}x_2^{(1)} + \tfrac{43}{11}) = 0 - 2.64 + 4.69 = 2.05$$

Penyelesaian dengan matlab:

```
function x = SOR_f(A, b, x0, w, tol, max)
% Penyelesaian sistem linear Ax = b dengan metode SOR

% Input:
        % A, matriks koefisien (n baris dengan n kolom)
        % b, vektor (n baris dengan 1 kolom)
        % x0, pendekatan awal (n baris 1 kolom)
        % tol, toleransi
        % max, iterasi maksimum

% Output:
        % x, penyelesaian vektor (n baris dengan 1 kolom)

A = [ 4 -2 0; -2 6 -5; 0 -5 11 ]
b = [ 8; -29; 43 ]
x0 = [ 0; 0; 0 ]
max = 7
tol = 0.0100
w = 1.2
[n , m] = size(A);
x = x0;
C = -A;
for i = 1:n
   C(i,i) = 0;
end
for i = 1:n
   C(i,1:n) = C(i,1:n)/A(i,i);
end
for i = 1:n
   r(i,1) = b(i)/A(i,i);
end
i = 1;
disp('    i        x1        x2        x3    ');
while(i <= max)
   xold = x;    % save solution from previous step
   for j = 1:n
      x(j)= (1-w) * xold(j) + w * (C(j,:) * x + r(j));
   end
```



```
    if norm(xold - x) <= tol
        disp('metode SOR konvergen');
        return;
    end
    disp([i    x'])
    i = i + 1;
end
disp('metode Sor tidak konvergen');

A =
     4   -2    0
    -2    6   -5
     0   -5   11

b =
     8
   -29
    43

x0 =
     0
     0
     0

max =  7

tol = 0.0100

w = 1.2000

        i        x1        x2        x3
    1.0000    2.4000   -4.8400    2.0509
    2.0000   -0.9840   -3.1747    2.5491
    3.0000    0.6920   -2.3392    2.9052
    4.0000    0.8581   -2.0838    2.9733
    5.0000    0.9781   -2.0187    2.9951
    6.0000    0.9931   -2.0039    2.9989

metode SOR konvergen

ans =
    0.9991
   -2.0007
    2.9998
```

Konvergen pada iterasi ke-6, penyelesaian eksak $\mathbf{x}^* = (1,\ -2,\ 3)^t$.

Kriteria berhenti iterasi setelah 6 iterasi :

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(5)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(6)}\right\|_\infty} = \frac{3.8\ x\ 10^{-3}}{2.99893} < 10^{-2}$$

B. Konvergensi Metode Iterasi

Pertanyaan yang mungkin akan timbul adalah bagaimana bila hasil dari iterasi tidak menunjukkan kekonvergenan. Memang dalam beberapa soal dengan ketiga metode di atas akan mengalami kegagalan dalam usaha untuk menyelesaikan suatu SPL tidak perduli berapa kali iterasi yang dilakukan. Hasil iterasi seperti ini disebut berdivergensi. Sedangkan bila dalam iterasi tertentu hasil iterasi tersebut menunjukkan pendekatan pada suatu nilai tertentu maka hasil iterasi ini disebut berkonvergensi.

Untuk menyelesaikan suatu SPL dengan menggunakan metode Jacobi, metode Gauss-Seidel, dan metode SOR penting sekali masalah konvergensi maka di bawah ini akan dibahas teorema kekonvergensi untuk metode iterasi.

Teorema 3.3

Jika $\rho(T) < 1$ dengan $\rho(T)$ radius spektral maka $(I - T)^{-1}$ ada dan

$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \ldots$

Bukti :

Untuk setiap λ nilai eigen dari T, $1 - \lambda$ nilai eigen dari $I - T$.

Karena $|\lambda| \leq \rho(T) < 1$, menyebabkan tidak ada nilai eigen dari $I - T$ bernilai nol dan akibatnya $I - T$ nonsingular.

Andaikan $S_m = I + T + T^2 + T^3 + \ldots + T^m$.

Maka $(I - T)S_m = I - T^{m+1}$ dan karena T konvergen dan dari teorema 2.12 berarti bahwa

$$\lim_{m\to\infty}(I-T)S_m = \lim_{m\to\infty}(I-T^{m+1}) = I$$

$$\lim_{m\to\infty} S_m = (I-T)^{-1}$$

Teorema 3.4

Barisan $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *yang didefinisikan dengan* $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$, $k \geq 1$ *dan* $\mathbf{c} \neq 0$ *dan pendekatan awal* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$ *konvergen ke penyelesaian tunggal* $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ *bila dan hanya bila* $\rho(T) < 1$.

Bukti :

($\Leftarrow$) Perhatikan bahwa jika $\rho(T) < 1$ maka barisan $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ yang didefinisikan dengan $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$, $k \geq 1$ dan $\mathbf{c} \neq 0$ dengan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$ konvergen ke penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
\text{Dibuktikan } \mathbf{x}^{(k)} &= T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \\
&= T(T\mathbf{x}^{(k-2)} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} \\
&= T^2\mathbf{x}^{(k-2)} + (T+1)\mathbf{c} \\
&\;\;\vdots \\
&= T^k\mathbf{x}^{(0)} + (T^{(k-1)} + \ldots + T + 1)\mathbf{c}
\end{aligned}$$

Jika $\rho(T) < 1$, maka hasil dari $T^k\mathbf{x}^{(0)}$ adalah $\lim_{k\to\infty} T^k\mathbf{x}^{(0)} = 0$.

Karena $\lim_{k\to\infty} T^k\mathbf{x}^{(0)} = 0$ dan dari teorema 3.3 diperoleh :

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^k\mathbf{x}^{(0)} + \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k-1} T^j\Big)\mathbf{c} = 0 + (I-T)^{-1}\mathbf{c} = (I-T)^{-1}\mathbf{c}.$$

Karena $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ berarti bahwa $(I - T)\mathbf{x} = \mathbf{c}$, barisan $\{x^{(k)}\}$ konvergen ke penyelesaian tunggal dari persamaan vektor $\mathbf{x} = (I - T)^{-1}\mathbf{c}$.

($\Rightarrow$) Jika barisan $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ yang didefinisikan dengan $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$, $k \geq 1$ dan $\mathbf{c} \neq 0$ dan pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$ konvergen ke penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ maka $\rho(T) < 1$.

Untuk setiap $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k-1)}) = \ldots = T^k(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)})$.

Andaikan $\mathbf{z}$ vektor dalam R^ndan didefinisikan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$. Maka

$$\lim_{k\to\infty} T^k\mathbf{z} = \lim_{k\to\infty} T^k(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} = 0.$$

Dari teorema 2.12 dan $\lim_{k\to\infty} T^k\mathbf{z} = 0$ hal ini berarti ekuivalen dengan $\rho(\mathrm{T}) < 1$. □

BAB IV

PENERAPAN

A. Masalah Akuntansi Biaya (Cost Accounting Problem).

Suatu perusahaan mempunyai lima bagian (divisi) yaitu: 1. Penelitian, 2. Pengembangan, 3. Produksi, 4. Akuntansi, dan 5. Komputasi.

Andaikan i menyatakan divisi-divisi perusahaan, dengan i = 1, 2, 3, 4, 5. D_i menyatakan biaya langsung total pada divisi i.

Biaya langsung total masing-masing divisi yaitu :

1. Penelitian : D_1 = \$2.000.000
2. Pengembangan : D_2 = \$3.000.000
3. Produksi : D_3 = \$6.000.000
4. Akuntansi : D_4 = \$500.000
5. Komputasi : D_5 = \$300.000

Divisi Penelitian mempunyai biaya langsung total \$2.000.000. Divisi ini menyerahkan 40% biayanya pada divisi lainnya untuk pelayanan yaitu: 20% kepada divisi Pengembangan, 10% kepada divisi Produksi, dan 10% kepada divisi Komputasi. Karena 40 % biayanya diserahkan pada divisi lain maka prosentase biaya yang dimiliki divisi pengembangan atau biaya yang tidak diserahkan pada divisi lainnya yaitu 60 %.

Divisi Pengembangan mempunyai biaya langsung total \$3.000.000. Divisi ini menyerahkan 40% biayanya pada divisi lainnya untuk pelayanan yaitu: 20% kepada divisi Penelitian, 20% kepada divisi Produksi. Karena 40 % biayanya diserahkan pada divisi lain maka prosentase biaya yang dimiliki divisi pengembangan yaitu 60 %.

Divisi Produksi mempunyai biaya langsung total $6.000.000. Divisi ini menyerahkan 20% biayanya pada divisi Pengembangan untuk pelayanan. Karena 20 % biayanya diserahkan pada divisi lain maka prosentase biaya yang dimiliki divisi produksi yaitu 80 %.

Divisi Akuntansi mempunyai biaya langsung total $500.000. Divisi ini menyerahkan 90% biayanya pada divisi lainnya untuk pelayanan yaitu: 10% kepada divisi Penelitian, 20% kepada divisi Pengembangan, 50% kepada divisi Produksi, dan 10% kepada divisi Komputasi. Karena 90 % biayanya diserahkan pada divisi lain maka prosentase biaya yang dimiliki divisi akuntansi yaitu 10 %.

Divisi Komputasi merupakan operasi pelayanan, karena itu semua biayanya diserahkan kepada divisi lainnya.

Tabel (4.1) berikut memperlihatkan bagian dari biaya langsung total yang diserahkan oleh masing-masing divisi dan divisi yang menerimanya.

Diserahkan kepada	Diserahkan oleh				
	1	2	3	4	5
1	0,60	0,20	0	0,10	0,30
2	0,20	0,60	0,20	0,20	0,20
3	0,10	0,20	0,80	0,50	0,20
4	0	0	0	0,10	0,30
5	0,10	0	0	0,10	0

Tabel (4.1)

Akan dicari biaya bersih operasi pada setiap bagian.

Andaikan T_i adalah biaya total operasi divisi ke-i. Biaya total operasi (T_i) yaitu biaya langsung total (D_i) ditambah dengan bagian yang diberikan kepada divisi tersebut dari biaya langsung total divisi lainnya. Sedangkan biaya langsung total (D_i) yaitu biaya yang langsung dimiliki oleh tiap-tiap divisi.

Dari tabel (4.1) dapat diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = D_1 + 0{,}2T_2 + 0{,}1T_4 + 0{,}3T_5 \\ T_2 = D_2 + 0{,}2T_1 + 0{,}2T_3 + 0{,}2T_4 + 0{,}2T_5 \\ T_3 = D_3 + 0{,}1T_1 + 0{,}2T_2 + 0{,}5T_4 + 0{,}2T_5 \\ T_4 = D_4 + 0{,}3T_5 \\ T_5 = D_5 + 0{,}1T_1 + 0{,}1T_5 \end{array}\right\} \quad (4.1)$$

Bila kita gunakan \$ 1 juta sebagai satuan uang.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 + 0{,}2T_2 + 0{,}1T_4 + 0{,}3T_5 \\ T_2 = 3 + 0{,}2T_1 + 0{,}2T_3 + 0{,}2T_4 + 0{,}2T_5 \\ T_3 = 6 + 0{,}1T_1 + 0{,}2T_2 + 0{,}5T_4 + 0{,}2T_5 \\ T_4 = 0{,}5 + 0{,}3T_5 \\ T_5 = 0{,}3 + 0{,}1T_1 + 0{,}1T_5 \end{array}\right\} \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} T_1 & -\,0{,}2T_2 & & -\,0{,}1T_4 & -\,0{,}3T_5 & = 2 \\ -0{,}2T_1 & +\,T_2 & -\,0{,}2T_3 & -\,0{,}2T_4 & -\,0{,}2T_5 & = 3 \\ 0{,}1T_1 & -\,0{,}2T_2 & +\,T_3 & -\,0{,}5T_4 & -\,0{,}2T_5 & = 6 \\ & & & T_4 & -\,0{,}3T_5 & = 0{,}5 \\ -0{,}1T_1 & & & -\,0{,}1T_4 & +\,T_5 & = 0{,}3 \end{array}\right\} \quad (4.3)$$

SPL bentuk (4.3) ditulis dengan persamaan matriks yang ekivalen $AT = D$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0 & -0.1 & -0.3 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 & -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 \\ -0.1 & 0 & 0 & -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Untuk menyelesaikan persamaan matriks $AT = D$ ditulis menjadi persamaan yang ekivalen $T = BT + C$.

$$\begin{pmatrix} T_1^{(k)} \\ T_2^{(k)} \\ T_3^{(k)} \\ T_4^{(k)} \\ T_5^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{(k-1)} \\ T_2^{(k-1)} \\ T_3^{(k-1)} \\ T_4^{(k-1)} \\ T_5^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Dicari nilai eigen matriks B.

$$\text{Matriks } B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perhitungan nilai eigen dengan matlab :

```
>> B = [ 0 0.2 0 0.1 0.3; 0.2 0 0.2 0.2 0.2; 0.1 0.2 0 0.5 0.2; 0 0 0 0 0.3; 0.1 0 0 0.1 0 ]
B =
         0    0.2000         0    0.1000    0.3000
    0.2000         0    0.2000    0.2000    0.2000
    0.1000    0.2000         0    0.5000    0.2000
         0         0         0         0    0.3000
    0.1000         0         0    0.1000         0
```

```
>> eig(B)
ans =
   0.4036
   0.0583 + 0.0957i
   0.0583 - 0.0957i
  -0.2601 + 0.0581i
  -0.2601 - 0.0581i
```

Ternyata $\rho(B) < 1$, jadi iterasi konvergen.

Untuk mencari biaya total operasi digunakan metode Jacobi dengan matlab yaitu :

```
function T = Jacobi_f(A, D, T0, tol, max)
% Penyelesaian sistem linear AT = D dengan metode Jacobi
% Input:
    % A, matriks koefisien(n baris dengan n kolom)
    % D, vektor (n baris dengan 1 kolom)
    % T0, pendekatan awal (n baris dengan 1 kolom)
    % tol, toleransi
    % max, iterasi maksimum

% Output:
    % T, penyelesaian vektor (n baris dengan 1 kolom)

A= [ 1 -0.2 0 -0.1 -0.3;-0.2 1 -0.2 -0.2 -0.2;-0.1 -0.2 1 -0.5 -0.2;0 0 0 1 -0.3;-0.1 0 0 -0.1 1 ]
D= [ 2; 3; 6; 0.5; 0.3 ]
T0= [ 0; 0; 0; 0; 0 ]
max = 8
tol = 0.01
[n,m] = size(A);
Told = T0;
C = -A;
for i = 1:n
   C(i,i) = 0;
end
for i = 1:n
   C(i,:) = C(i,:)/A(i,i);
end
for i = 1:n
   d(i,1) = D(i)/A(i,i);
end
i = 1;
disp('    i      T1      T2      T3      T4      T5');
```

```
while(i <= max)
   Tnew = C * Told + d;
   if norm(Tnew - Told) <= tol
      T = Tnew;
      disp('metode Jacobi konvergen');
      return;
   else
      Told = Tnew;
   end
   disp([i   Tnew']);
   i = i + 1;
end
disp('metode Jacobi tidak konvergen');
disp('hasil setelah angka iterasi maksimum');
T = Tnew ;

A =
   1.0000   -0.2000        0   -0.1000   -0.3000
  -0.2000    1.0000  -0.2000   -0.2000   -0.2000
  -0.1000   -0.2000   1.0000   -0.5000   -0.2000
        0         0        0    1.0000   -0.3000
  -0.1000         0        0   -0.1000    1.0000


D =
   2.0000
   3.0000
   6.0000
   0.5000
   0.3000

t0 =
    0
    0
    0
    0
    0

max = 10

tol = 0.0100
```

i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
1.0000	2.0000	3.0000	6.0000	0.5000	0.3000
2.0000	2.7400	4.7600	7.1100	0.5900	0.5500
3.0000	3.1760	5.1980	7.6310	0.6650	0.6330
4.0000	3.2960	5.4210	7.8163	0.6899	0.6841
5.0000	3.3584	5.4973	7.8956	0.7052	0.6986
6.0000	3.3796	5.5316	7.9276	0.7096	0.7064
7.0000	3.3892	5.5446	7.9403	0.7119	0.7089

```
metode Jacobi konvergen

ans =
   3.3928
   5.5501
   7.9456
   0.7127
   0.7101
```

Didapat $T_1 = 3.3928$, $T_2 = 5.5501$, $T_3 = 7.9456$, $T_4 = 0.7127$, dan $T_5 = 0.7101$.

Setelah biaya total operasi diketahui maka dapat dicari biaya bersih operasi pada setiap bagian.

Andaikan N_i adalah biaya bersih operasi pada divisi ke-i. Biaya bersih operasi yaitu prosentase biaya yang tidak diserahkan pada divisi lain dikali dengan biaya total operasi tiap divisi.

Dari tabel 4.1 maka persamaan untuk biaya bersih yaitu :

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 0{,}6T_1 \\ N_2 &= 0{,}6T_2 \\ N_3 &= 0{,}8T_3 \\ N_4 &= 0{,}1T_4 \\ N_5 &= 0T_5 \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Dengan demikian biaya bersih masing-masing divisi yaitu :

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 60\% \times 3{,}3928 \\ N_2 &= 60\% \times 5{,}5501 \\ N_3 &= 80\% \times 7{,}9456 \\ N_4 &= 10\% \times 0{,}7127 \\ N_5 &= 0\% \times 0{,}7101 \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Bila kita gunakan \$ 1 juta sebagai satuan uang maka biaya bersih masing-masing divisi yaitu : 1. Penelitian : N_1 = \$2.035.680

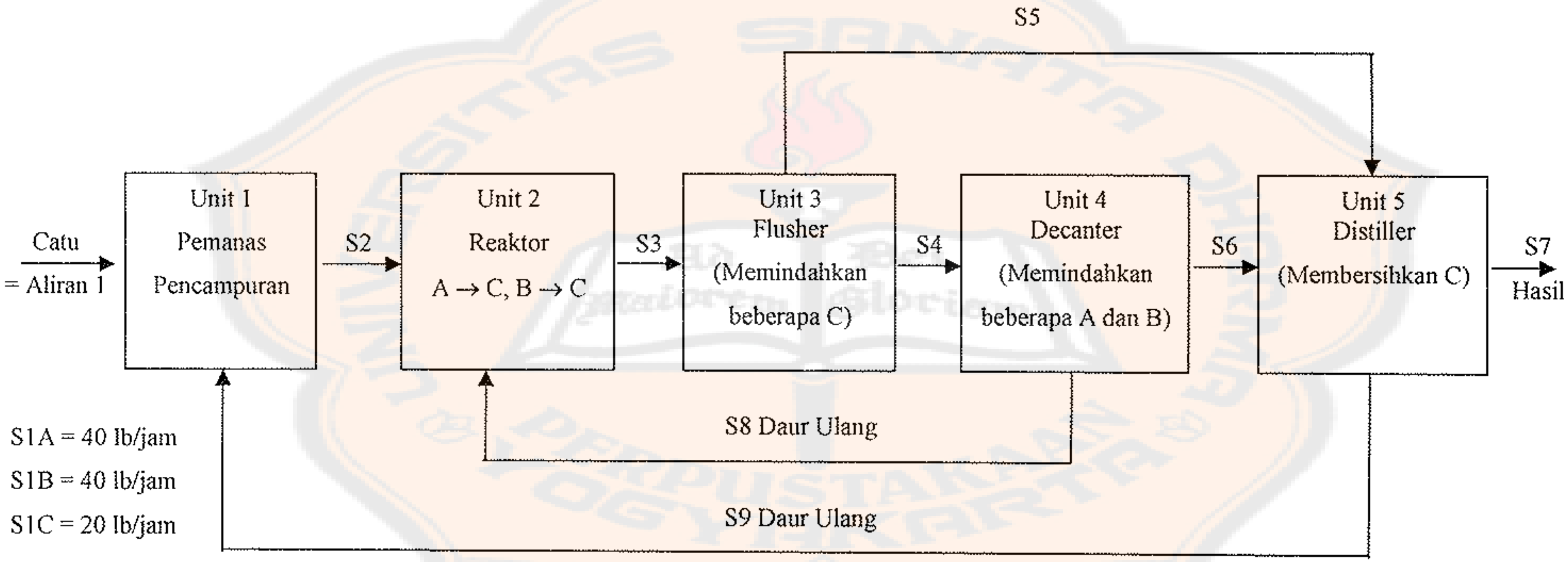
2. Pengembangan : N_2 = \$3.330.060

3. Produksi : N_3 = \$6.358.480

4. Akuntansi : N_4 = \$71.270

5. Komputasi : N_5 = \$0.

B. Proses Kimia



Gambar 4.1. Diagram alir dari peralatan kimia yang dapat dinyatakan oleh sistem persamaan linear

Gambar 4.1 menggambarkan peralatan proses kimia hipotesis kontinu. Sistem menerima suatu *catu*, atau masukan (input), yang dinyatakan sebagai aliran (stream) 1, yang terdiri dari 40 lb/jam campuran zat A, 40 lb/jam campuran zat B dan 20 lb/jam campuran C. Fungsi alat ini yaitu untuk mengubah sebagian A dan sebagian B menjadi C, dan secara bertahap memisahkan komponen sehingga semua hasilnya adalah C. Situasi ini diidealkan sehingga menggambarkan proses yang digunakan dalam industri kimia.

Pemisahan ketiga komponen ini didasarkan pada perbedaan titik uap mereka: C mempunyai titik uap yang lebih rendah daripada A atau B. Jika campuran dari ketiganya dididihkan, maka uapnya akan mengandung bagian yang lebih tinggi komponen C daripada dalam cairannya. Demikian juga terjadi hal yang sama, jika suatu tempat yang mengandung tiga komponen dalam kedua fase cairan dan uap didinginkan, cairan tersebut akan mempunyai perbandingan bagian komponen A dan B yang lebih tinggi daripada uapnya.

Dengan keterangan di atas maka dapat dibahas cara kerja peralatan ini dan menuliskan persamaan yang berlaku di dalamnya.

Unit 1 adalah *pemanas-pencampur*. Pemanas diperlukan supaya campuran naik sampai pada titik kerja reaktor ke mana selanjutnya bahan akan masuk. Campuran ini memasuki aliran masukan yang diketahui, dan bahan akan dikembalikan dari unit 5. Andaikan lb/jam dari A dalam aliran 2 sebagai S_2A, lb/jam dari B dalam aliran 2 sebagai S_2B, dan seterusnya, maka akan diperoleh tiga persamaan yang menyatakan keluaran (output) dari unit 1. Untuk setiap komponen yang keluar dari unit merupakan jumlah dari dua input. Aliran catu diketahui dan tiga komponen aliran 9 adalah tiga variabel yang ingin dicari, persamaan tersebut yaitu:

$$S_2A = S_9A + 40$$

$$S_2B = S_9B + 40$$

$$S_2C = S_9C + 20$$

Unit 2 adalah *reaktor*. Fungsinya untuk mengubah beberapa masukan A menjadi C dan beberapa masukan B menjadi C. Secara numerik, reaktor ini mengubah setengah dari masukan B menjadi C, dan 35/90 dari masukan A menjadi C. Dalam kedua hal, bahan yang tidak diubah menjadi C meninggalkan unit ini dengan tidak berubah. Masukan pada unit ini terdiri dari jumlah aliran 2 dan 8, sehingga persamaan untuk aliran 3 yaitu

$$S_3A = 55/90(S_2A + S_8A)$$

$$S_3B = 0.5(S_2B + S_8B)$$

$$S_3C = 0.5(S_2B + S_8B) + 35/90(S_2A + S_8A) + S_2C + S_8C$$

Unit 3 adalah *flasher*. Panas ditambahkan, menyebabkan beberapa campuran di dalam unit diuapkan; uap ini relatif lebih "kaya" bahan C karena titik didihnya lebih rendah dari A atau B. Bagian yang kaya C ini dikirimkan terus ke unit 5.

$$S_5A / S_4A = 0.1$$

$$S_5B / S_4B = 1/6$$

$$S_5C / S_4C = 6/5$$

Jumlah aliran 4 dan 5 harus sama dengan aliran 3, yaitu, $S_3A = S_4A + S_5A$, dan seterusnya, maka tiga persamaan untuk aliran 4 dan tiga persamaan untuk aliran 5 yaitu

$$S_4A = {}^{10}\!/_{11}S_3A$$
$$S_4B = {}^{6}\!/_{7}S_3B$$
$$S_4C = {}^{5}\!/_{11}S_3C$$
$$S_5A = {}^{1}\!/_{11}S_3A$$
$$S_5B = {}^{1}\!/_{7}S_3B$$
$$S_5C = {}^{6}\!/_{11}S_3C$$

Unit 4 disebut *decanter*. "Decant" berarti "menuangkan": masukan (input) campuran didinginkan, menghasilkan cairan yang mempunyai bagian A dan B yang tinggi. Sebagian dari cairan yang kaya dengan A dan B ini dikirim balik ke unit 2.

$$S_6A / S_8A = 1.5$$
$$S_6B / S_8B = 2$$
$$S_6C / S_8C = 4$$

Jumlah aliran 6 dan 8 adalah sama dengan aliran 4, sehingga diperoleh persamaan

$$S_6A = {}^{3}\!/_{5}S_4A$$
$$S_6B = {}^{2}\!/_{3}S_4B$$
$$S_6C = {}^{4}\!/_{5}S_4C$$
$$S_8A = {}^{2}\!/_{5}S_4A$$
$$S_8B = {}^{1}\!/_{3}S_4B$$
$$S_8C = {}^{1}\!/_{5}S_4C$$

Unit 5 adalah *distiller*. Tujuan operasi dari unit ini sama dengan flasher pada unit 3: yaitu suatu penyimpan dan kondensasi memberikan keluaran yang mengandung bagian C yang lebih tinggi daripada inputnya. Bagian yang kaya C ini, aliran 7 adalah hasilnya; sisanya di kirim balik ke unit 1. Perbandingan tersebut adalah:

$$S_7A / S_9A = 1/6$$

$$S_7B / S_9B = 1/4$$

$$S_7C / S_9C = 9$$

Kombinasi dari perbandingan di atas dengan kenyataan bahwa $S_7A + S_9A = S_5A + S_6A$, dan seterusnya sehingga diperoleh persamaan

$$S_7A = 1/7(S_5A + S_6A)$$

$$S_7B = 1/5(S_5B + S_6B)$$

$$S_7C = 9/10(S_5C + S_6C)$$

$$S_9A = 6/7(S_5A + S_6A)$$

$$S_9B = 4/5(S_5B + S_6B)$$

$$S_9C = 1/10(S_4C + S_6C)$$

Dari uraian di atas terdapat 24 persamaan dan 24 variabel, satu variabel untuk setiap tiga komponen dalam masing-masing dari kedelapan aliran selain masukan (input). Diambil pada saat proses telah beroperasi cukup lama untuk mencapai keadaan mantap (steady-state), yaitu kecepatan aliran setiap komponen dalam masing-masing aliran tidak berubah terhadap waktu. Maka akan dicari harga variabel dengan menyelesaikan SPL.

Sejauh ini, pembahasan dari proses kimia tersebut menggunakan nama variabel yang sesuai dengan perincian proses untuk memudahkan pembahasan. Untuk penyelesaian dengan menggunakan komputer akan menggunakan variabel x_1 sampai x_{24} sesuai pada keluarannya. Cara sederhana penulisan untuk peralatan proses kimia adalah dengan matriks koefisien.

Andaikan A matriks, ditulis dengan matlab:

```
>> A= [ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0;
        0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;
        0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
        -0.61 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.61 0 0 0 0 0;
        0 -0.5 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.5 0 0 0 0;
        -0.389 -0.5 -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.389 -0.5 -1 0 0 0;
        0 0 0 -0.91 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 -0.857 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 -0.454 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 -0.091 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 -0.143 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 -0.545 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 -0.6 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 -0.75 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 -0.8 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.143 0 0 -0.143 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.2 0 0 -0.2 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.9 0 0 -0.9 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 -0.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 -0.33 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 -0.2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.857 0 0 -0.857 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.8 0 0 -0.8 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.1 0 0 -0.1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ]
```

Nilai eigen matriks A yaitu:

```
>> eig(A)
ans =
   1.0000
   1.0000
   1.0000
   1.5992 + 0.5090i
   1.5992 - 0.5090i
   1.3663 + 0.2845i
   1.3663 - 0.2845i
   0.3585
   0.1315
   0.9544 + 0.5110i
```

```
0.9544 - 0.5110i
0.8350 + 0.7102i
0.8350 - 0.7102i
1.5924 + 0.4699i
1.5924 - 0.4699i
0.1662
0.8246 + 0.7131i
0.8246 - 0.7131i
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
```

Ternyata $\rho(A) > 1$, Menurut teorema konvergensi metode iterasi, metode iterasi konvergen bila dan hanya bila $\rho(A) < 1$. Setelah dihitung ternyata $\rho(A) > 1$ jadi metode iterasi tidak konvergen atau hasil iterasi berdivergensi.

Proses kimia di atas merupakan contoh metode iterasi tidak konvergen atau divergen. Perhatikan iterasi Jacobi divergen dari SPL di atas berikut:

```
function x = Jacobi_f(A, b, x0, tol, max)
% Penyelesaian sistem linear Ax = b dengan metode Jacobi

% Input:
% A, matriks koefisien(n baris dengan n kolom)
% b, vektor (n baris dengan 1 kolom)
% x0, pendekatan awal (n baris dengan 1 kolom)
% tol, toleransi
% max, iterasi maksimum

% Output:
% x, penyelesaian vektor (n baris dengan 1 kolom)
A= [ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0;
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
-0.61 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.61 0 0 0 0 0;
0 -0.5 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.5 0 0 0 0;
-0.389 -0.5 -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.389 -0.5 -1 0 0 0;
0 0 0 -0.91 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 -0.857 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 -0.454 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 -0.091 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 -0.143 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```



```
0 0 0 0 0 -0.545 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -0.6 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 -0.75 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 -0.8 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.143 0 0 -0.143 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.2 0 0 -0.2 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.9 0 0 -0.9 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -0.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 -0.33 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 -0.2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.857 0 0 -0.857 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.8 0 0 -0.8 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.1 0 0 -0.1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ]
b= [ 40; 40; 20; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
   0; 0; 0;0 ; 0; 0; 0; 0; 0 ]
x0= [ 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
   0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 ]
max = 4
tol = 0.0100
[n,m] = size(A);
xold = x0;
C = -A;
for i = 1:n
   C(i,i) = 0;
end
for i = 1:n
   C(i,:) = C(i,:)/A(i,i);
end
for i = 1:n
   d(i,1) = b(i)/A(i,i);
end
i = 1;
disp(' i x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x15 x16 x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24');
while(i <= max)
   xnew = C * xold + d;
   if norm(xnew - xold) <= tol
      x = xnew;
      disp('metode Jacobi konvergen');
      return;
else
      xold = xnew;
   end
   disp([i   xnew']);
   i = i + 1;
end
disp('metode Jacobi tidak konvergen');
```

```
disp('hasil setelah angka iterasi maksimum');
x = xnew ;

A =
  Columns 1 through 7
   1.0000        0        0        0        0        0        0
        0   1.0000        0        0        0        0        0
        0        0   1.0000        0        0        0        0
  -0.6100        0        0   1.0000        0        0        0
        0  -0.5000        0        0   1.0000        0        0
  -0.3890  -0.5000  -1.0000        0        0   1.0000        0
        0        0        0  -0.9100        0        0   1.0000
        0        0        0        0  -0.8570        0        0
        0        0        0        0        0  -0.4540        0
        0        0        0  -0.0910        0        0        0
        0        0        0        0  -0.1430        0        0
        0        0        0        0        0  -0.5450        0
        0        0        0        0        0        0  -0.6000
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0  -0.4000
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0

 Columns 8 through 14
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
   1.0000        0        0        0        0        0        0
        0   1.0000        0        0        0        0        0
        0        0   1.0000        0        0        0        0
        0        0        0   1.0000        0        0        0
        0        0        0        0   1.0000        0        0
        0        0        0        0        0   1.0000        0
  -0.7500        0        0        0        0        0   1.0000
        0  -0.8000        0        0        0        0        0
        0        0  -0.1430        0        0  -0.1430        0
        0        0        0  -0.2000        0        0  -0.2000
        0        0        0        0  -0.9000        0        0
        0        0        0        0        0        0        0
  -0.3300        0        0        0        0        0        0
        0  -0.2000        0        0        0        0        0
        0        0  -0.8570        0        0  -0.8570        0
        0        0        0  -0.8000        0        0  -0.8000
        0        0        0        0  -0.1000        0        0
```

```
  Columns 15 through 21
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0   -0.6100         0         0
        0         0         0         0         0   -0.5000         0
        0         0         0         0   -0.3890   -0.5000   -1.0000
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
   1.0000         0         0         0         0         0         0
        0    1.0000         0         0         0         0         0
        0         0    1.0000         0         0         0         0
  -0.9000         0         0    1.0000         0         0         0
        0         0         0         0    1.0000         0         0
        0         0         0         0         0    1.0000         0
        0         0         0         0         0         0    1.0000
        0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0
  -0.1000         0         0         0         0         0         0

  Columns 22 through 24
  -1.0000         0         0
        0   -1.0000         0
        0         0   -1.0000
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
        0         0         0
   1.0000         0         0
        0    1.0000         0
        0         0    1.0000

b =
    40
    40
    20
     0
     0
     0
```



```
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0

x0 =
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0

max = 4

tol = 0.0100

 i x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x15 x16 x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24

  Columns 1 through 13
     1    40    40    20     0     0     0     0     0     0     0     0     0
  Columns 14 through 25
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
```

```
Columns 1 through 7
 2.0000   40.0000   40.0000   20.0000   24.4000   20.0000   55.5600
Columns 8 through 14
     0         0         0         0         0         0         0
Columns 15 through 21
     0         0         0         0         0         0         0
Columns 22 through 25
     0         0         0         0

Columns 1 through 7
 3.0000   40.0000   40.0000   20.0000   24.4000   20.0000   55.5600
Columns 8 through 14
22.2040   17.1400   25.2242    2.2204    2.8600   30.2802         0
Columns 15 through 21
     0         0         0         0         0         0         0
Columns 22 through 25
     0         0         0         0

Columns 1 through 7
 4.0000   40.0000   40.0000   20.0000   24.4000   20.0000   55.5600
Columns 8 through 14
22.2040   17.1400   25.2242    2.2204    2.8600   30.2802   13.3224
Columns 15 through 21
12.8550   20.1794    0.3175    0.5720   27.2522    8.8816    5.6562
Columns 22 through 25
 5.0448    1.9029    2.2880    3.0280


metode Jacobi tidak konvergen
hasil setelah angka iterasi maksimum

ans =
  40.0000
  40.0000
  20.0000
  24.4000
  20.0000
  55.5600
  22.2040
  17.1400
  25.2242
   2.2204
   2.8600
  30.2802
  13.3224
  12.8550
  20.1794
   0.3175
   0.5720
  27.2522
   8.8816
   5.6562
   5.0448
   1.9029
   2.2880
   3.0280
```

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Setelah dibahas metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan SPL maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diselesaikan menggunakan metode Jacobi, penyelesaian SPL tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus iterasi Jacobi $x_i^{(k)} = \dfrac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, di mana $x_i^{(k)}$ variabel ke-i pada iterasi ke-k, a_{ij} koefisien SPL, $x_j^{(k-1)}$ variabel ke-j pada iterasi ke-(k-1), b_i koefisien SPL.
2. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diselesaikan menggunakan metode Gauss-Seidel, penyelesaian SPL tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus iterasi Gauss-Seidel $x_i^{(k)} = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)-\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}}$, di mana $x_i^{(k)}$ variabel ke-i pada iterasi ke-k, a_{ij} koefisien SPL, $x_j^{(k-1)}$ variabel ke-j pada iterasi ke-(k-1), b_i koefisien SPL.
3. SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diselesaikan menggunakan metode SOR, penyelesaian SPL tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus iterasi SOR

$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \dfrac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i\right)}{a_{ii}}$, di mana $x_i^{(k)}$ variabel ke-i pada iterasi ke-k, a_{ij} koefisien SPL, $x_j^{(k-1)}$ variabel ke-j pada iterasi ke-(k-1), b_i koefisien SPL, ω parameter.

4. Metode iterasi konvergen bila dan hanya bila radius spektral dari matriks iterasi kurang dari satu atau $(\rho(T) < 1)$.
5. Jika pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ dari penyelesaian eksak diketahui, dan jika $\mathbf{x}^{(0)}$ digunakan sebagai nilai awal dalam iterasi, maka akan ada kesempatan yang baik untuk memperoleh penyelesaian eksak. Apabila pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)}$ yang baik tidak diketahui maka dapat digunakan $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^t$.
6. Metode iterasi titik tetap dapat digunakan untuk mencari biaya bersih operasi pada setiap bagian (divisi) pada suatu perusahaan.

B. Saran

Berikut ini diberikan beberapa hal yang dapat dijadikan permasalahan untuk bahan kajian lebih lanjut :

1. Selain menggunakan konsep radius spektral, konsep diagonal dominan yang tidak dibahas di sini dapat digunakan sebagai kriteria konvergensi metode iterasi titik tetap untuk menyelesaikan SPL.
2. Konsep definit positif dapat digunakan untuk menentukan pilihan parameter ω yang optimal pada metode SOR.

3. Selain ketiga metode yang sudah dibahas di atas, ada metode iterasi yang lain misalnya metode gradien konjugasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard.1988. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.

Burden, Faires. 1993. *Numerical Analyisis*, 5th ed. Boston: PWS Publishing company.

Chapra and Canale. 1985. *Numerical Methods for Engineers*, Mc Graw – Hill Book Company.

Dorn and Mc Cracken. 1986. *Studi Kasus Metode Numerik dengan Fortran IV.*, Diterjemahkan Farida Muchtadi. Jakarta: Erlangga.

Fausett, Laurene V. 1999. *Applied Numerical Analysis Using Matlab*. New Jersey: Prentice Hall.

Isaacson , Keller. 1966. *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley and Sons.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Diterjemahkan Alit Bondan. Jakarta: Erlangga.

Mathews, John H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering* Second edition. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Ortega, James M. 1972. *Numerical Analysis*. Second Course. New York.

Purcell. 1989. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jilid 1. Edisi 4. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R. 1986. *Kalkulus Lanjutan*. Diterjemahkan Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.