PENERAPAN GRUP PADA PENGAJARAN MATEMATIKA

SEKOLAH MENENGAH

SKRIPSI

Oleh

WAHYU WIDYASTUTI

NIM : 971414019

NIRM : 970051120501120017

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2002

PENERAPAN GRUP PADA PENGAJARAN MATEMATIKA SEKOLAH MENENGAH

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

WAHYU WIDYASTUTI

NIM : 971414019

NIRM : 970051120501120017

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2002

HALAMAN PERSETUJUAN

S K R I P S I

PENERAPAN GRUP PADA PENGAJARAN MATEMATIKA SEKOLAH MENENGAH

Disusun oleh:

WAHYU WIDYASTUTI

NIM : 971414019

NIRM : 970051120501120017

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Dr. F. Susilo, S.J. tanggal 13/9 '02

Pembimbing II

M. Andy Rudhito, S.Pd tanggal 14/9 '02

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

PENERAPAN GRUP PADA PENGAJARAN MATEMATIKA SEKOLAH MENENGAH

Dipersiapkan dan disusun oleh:

WAHYU WIDYASTUTI

NIM : 971414019

NIRM : 970051120501120017

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 12 Agustus 2002 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, MSi	
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, MT	
Anggota	Dr. F. Susilo, S.J.	
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd	
Anggota	Wanty Widjaja, MEd.	

Yogyakarta, 12 Agustus 2002
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

HALAMAN PERSEMBAHAN

"Jikalau seorang amat kecil, hendaklah ia datang kepada-Ku."

(Amsal 9 : 4)

Kupersembahkan untuk yang tercinta

Bapak dan ibuku

SKRIPSI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 Agustus 2002

Penulis

Wahyu Widyastuti

ABSTRAK

Wahyu Widyastuti (2002), Penerapan Grup pada Pengajaran Matematika Sekolah Menengah. Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Skripsi ini berkaitan dengan teori-teori dalam grup yang akan diterapkan pada beberapa materi matematika di sekolah menengah. Penerapan ini berupa hubungan antara sifat-sifat grup pada penyelesaian persamaan sederhana, isomorfisma grup dengan sifat-sifat operasi bilangan dan isomorfisma grup dengan trigonometri.

Sifat grup bahwa : "Jika diketahui $(G,*)$, $\forall a,b \in G$, maka masing-masing persamaan $a*x = b$ dan $y*a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G, yaitu $x = a^{-1}*b$ dan $y = b*a^{-1}$ ", ini dapat digunakan untuk mengetahui tunggal atau tidaknya penyelesaian persamaan sederhana dalam semesta pembicaraannya. Sifat-sifat operasi perkalian pada bilangan real tak nol dapat dijelaskan dan divisualisasikan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup bilangan real tak nol terhadap operasi perkalian dengan grup dilatasi, sifat-sifat operasi penjumlahan bilangan kompleks dapat dijelaskan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan dengan grup translasi, sedangkan untuk sifat-sifat operasi perkalian bilangan kompleks bukan nol dapat dijelaskan dan divisualisasikan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup bilangan kompleks bukan nol terhadap operasi perkalian dengan grup kesebangunan spiral. Melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dengan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian dapat dijelaskan suatu alasan yang melatarbelakangi cara penulisan bilangan dengan pangkat tak sebenarnya. Sifat-sifat logaritma dapat dijelaskan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup bilangan real positif terhadap operasi perkalian dengan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan, dan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup matriks $M^{1}_{2\times 2}(R)$ terhadap operasi perkalian matriks dengan grup rotasi dapat dijelaskan identitas-identitas trigonometri untuk jumlah dua sudut dan sudut negatif.

ABSTRACT

Wahyu Widyastuti (2002), Application of Groups in Mathematics Learning in High School. Mathematics and science Department, Faculty of Teaching and Education, Sanata Dharma University.

This graduating project is related to the theories in a groups which will be applied to some subject matters in mathematics in high school. This application contents of the relation between group characteristics in solution of the equations, isomorphism groups and characteristics of number operation and also between isomorphism groups and trigonometric.

The groups characteristic: " if $(G,*)$, $\forall a,b \in G$, then each of the equations $a*x = b$ and $y*a = b$ has a unique solution in G. In the first, $x = a^{-1}*b$; in the second, $y = b*a^{-1}$ ". This group characteristic can be used to fine whether the solution of the simple equation in whole subjects is just one or not. The characteristic of multiplication operation of nonzero real number can be explained and visualized by isomorphism characteristic between the multiplication group of nonzero real number and group of size transformations. The characteristic of addition operation of complex number can be explained by isomorphism characteristic between the addition group of complex number and group translations. Therefore the characteristic of multiplication operation of nonzero complex number can be explained and visualized by isomorphism characteristic between the multiplication group of nonzero complex number and group of spiral similarities. Isomorphism characteristic between the addition groups of multiples and the multiplicative group of powers can be explained a reason which formed to background of writing way that unnatural powers. The characteristics of logarithm can be explained by isomorphism characteristic between the multiplicative group of positive real number and the addition group of real number, and also by isomorphism characteristic between the matrix multiplicative group of matrix $M^1_{2\times 2}(R)$ and the group of rotations the trigonometric identity for addition of two angles and negative angle.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis kepada Tuhan yang telah memberikan segala limpah karunia selama penulis menyelesaikan skripsi ini, terlebih karena Dia telah memberikan kasih serta uluran tangan-Nya melalui orang-orang yang telah begitu banyak memberikan semangat dan dorongan baik material maupun spiritual sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini penulis susun untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika.

Ucapan terimakasih dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada :

1. Dr. F. Susilo, S.J. selaku pembimbing I yang telah memberi kritik dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
2. M. Andy Rudhito, S.Pd yang telah membimbing penulis dengan penuh kesabaran dan dukungan dalm proses penyelesaian sampai dengan selesainya skripsi ini.
3. Bapak / Ibu Dosen yang telah membekali ilmu sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Sanata Dharma.
4. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng yang telah membantu dalam menyelesaikan segala administrasi yang penulis perlukan selama ini.
5. Bapak dan ibu tercinta serta adik-adik yang tidak bosan-bosannya memberikan spirit sampai terselesaikannya skripsi ini.

6. Kakakku, yang selalu memberikan pengertian dan nasehat yang sangat berarti bagi penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.
7. Rekan-rekan se-angkatan yang telah memberikan perhatian, dorongan dan semangat sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman kost yang telah memberikan dorongan dan semangat sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. semua pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut andil dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Ucapan terimakasih yang penulis sampaikan ini belumlah seimbang bila dibandingkan dengan segala pengorbanan yang telah Bapak, Ibu dan rekan-rekan berikan selama ini. Namun karena keterbatasan penulis, maka penulis tidak dapat memberikan sesuatu yang berharga kepada Bapak, Ibu dan rekan. Mungkin hanya tulisan ini sebagai ungkapan terimakasih yang dapat penulis berikan kepada Bapak, Ibu dan rekan semua.

Akhirnya, penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu kritik dan saran membangun sangat penulis harapkan demi kebaikan penulis dimasa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dalam kuliah struktur aljabar mahasiswa calon guru sekolah menengah telah mempelajari grup, field, ring dan sebagainya. Ada anggapan bahwa apa yang telah dipelajari tersebut tidak dibutuhkan dan tidak ada hubungannya dengan materi matematika sekolah menengah. Berdasarkan artikel dalam mathematics teacher (February 1975 dan March 1975) yang berjudul "*Applications of Groups and Isomorphic Groups to Topics in the Standard Curriculum, Grades 9-11: Part I and Part II* ", mengemukakan beberapa hubungan antara grup dan beberapa materi matematika sekolah menengah. Untuk itu perlu dibahas bagaimana penerapan grup pada beberapa materi matematika sekolah menengah.

B. Perumusan Masalah

Pokok perumusan masalah yang akan ditulis disini adalah :

1. Bagaimana penerapan sifat-sifat grup pada penyelesaian persamaan sederhana ?
2. Bagaimana penerapan isomorfisma grup pada sifat-sifat operasi bilangan?
3. Bagaimana penerapan isomorfisma grup pada trigonometri ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dalam skripsi ini adalah mengetahui penerapan grup pada beberapa materi matematika di sekolah menengah, yang berupa hubungan antara grup dengan beberapa materi matematika di sekolah menengah tersebut.

D. Manfaat Penulisan

Dengan mempelajari penerapan sifat-sifat grup pada penyelesaian persamaan sederhana, penerapan isomorfisma grup pada sifat-sifat operasi bilangan, dan penerapan isomorfisma grup pada trigonometri, mahasiswa calon guru sekolah menengah diharapkan dapat dengan jelas mengetahui hubungan antara grup dengan beberapa materi matematika sekolah menengah.

E. Metode Penulisan

Penulisan skripsi mengggunakan metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari dan membahas artikel dan buku-buku pendukung yang berkaitan dengan grup dan materi matematika di sekolah menengah.

F. Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini pembahasan teori grup dibatasi pada definisi grup, subgrup, homomorfisma dan isomorfisma. Sedangkan materi-materi matematika di sekolah menengah yang mempunyai hubungan dengan grup, penulis tidak membahasnya dan pembaca dianggap sudah mengetahui dan memahami materi-materi matematika di sekolah menengah tersebut.

G. Sistematika Pembahasan

Dalam bab pertama dibahas tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penulisan, pembatasan masalah dan juga tentang sistematika pembahasan. Untuk memahami grup dan isomorfisma grup, perlu dibahas terlebih dahulu mengenai pemetaan dan operasi biner, seperti yang akan dibahas dalam bab II. Secara khusus sifat-sifat pemetaan akan banyak digunakan untuk membahas suatu grup tertentu, yaitu grup transformasi. Kemudian dilanjutkan dalam bab ketiga yang akan membahas definisi dan teorema-teorema grup, subgrup, homomorfisma dan isomorfisma grup, yang disertai dengan beberapa contoh yang akan digunakan dalam bab IV. Penerapan grup pada beberapa topik dalam materi matematika di sekolah menengah akan dibahas dalam bab IV. Beberapa penerapan grup pada materi matematika sekolah menengah yang akan dibahas dalam bab ini adalah : penerapan sifat-sifat grup pada penyelesaian persamaan sederhana, penerapan isomorfisma grup pada sifat-sifat operasi bilangan, dan penerapan isomorfisma grup pada trigonometri. Akhirnya akan disampaikan beberapa kesimpulan.

BAB II

PEMETAAN DAN OPERASI BINER

A. Pemetaan

Sekarang didefinisikan salah satu konsep yang amat penting dalam matematika, yaitu pemetaan.

Bila f suatu relasi dari S ke T dan $(x,y) \in f$ maka y adalah kawan dari x di dalam T dan disajikan dengan $y = f(x)$. Himpunan S disebut daerah asal (*domain*) relasi f dan himpunan T disebut daerah kawan (*kodomain*). Daerah hasil (*range*) dari relasi f adalah himpunan semua $y \in T$ yang mempunyai kawan di S.

Definisi II.1

Andaikan S dan T dua himpunan yang tidak kosong. *Pemetaan* (*fungsi*) dari himpunan S ke T adalah relasi f yang memenuhi :

1. Semua anggota himpunan S mempunyai kawan di T.

   $[(\forall\, x \in S)\ (\exists\, y \in T)\ ((x,y) \in f)]$.

2. Kawan setiap anggota S di T tunggal.

   $[(\forall x \in S)\ ((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)]$.

Untuk selanjutnya pemetaan f dari S ke T disajikan dengan notasi : $f : S \rightarrow T$. Dan suatu pemetaan dapat diberi notasi f, g, h, dan sebagainya.

Contoh 2.1

1. Misal $S = \{a,b,c\}$, $T = \{1,2,3\}$. Maka f yang didefinisikan dengan

   $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 3$, merupakan pemetaan dari S ke T.

2. Andaikan pemetaan $f: R \to R$, yang ditentukan sebagai berikut :

   $(\forall x \in R)$ $(f(x) = 3x+2)$, akan ditunjukkan bahwa f merupakan suatu pemetaan,

   (1) Ambil sebarang $x \in R$, maka $3x \in R$, sehingga $(3x+2) \in R$.

   Jadi $(\forall x \in R)$ $(\exists\, y = 3x+2 \in R)$ $(y = f(x))$.

   (2) Andaikan $x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 = x_2$ maka $3x_1 = 3x_2$.

   Sehingga didapat $3x_1+2 = 3x_2+2$, maka $f(x_1) = f(x_2)$.

   Jadi $(\forall x_1, x_2 \in R)$ $(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$.

   Jadi f suatu pemetaan.

3. Andaikan $g : R \to R$, yang didefinisikan sebagai berikut :

   $(\forall x \in R)$ $(g(x) = x^2 + 5)$, akan ditunjukkan bahwa g merupakan suatu pemetaan,

   (1) Andaikan sebarang $x \in R$, maka $x^2 \in R$, sehingga $(x^2+5) \in R$.

   Jadi $(\forall x \in R)$ $(\exists\, y = x^2+5 \in R)$ $(y = g(x))$.

   (2) Andaikan $x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 = x_2$, maka $x_1^2 = x_2^2$.

   Dari sini didapat : $x_1^2 + 5 = x_2^2 + 5$, sehingga $g(x_1) = g(x_2)$.

   Jadi $(\forall x_1, x_2 \in R)$ $(x_1 = x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2))$.

   Jadi g suatu pemetaan.

4. Andaikan $h : R \to R$ dengan definisi : $(\forall x \in R)\ (h(x) = x^3)$.

   Untuk mengetahui apakah h suatu pemetaan bisa dilihat di bawah ini,

   (1) Ambil sebarang $x \in R$, maka $x^3 \in R$.

   Jadi $(\forall x \in R)\ (\exists\, y = x^3 \in R)\ (y = h(x))$.

   (2) Andaikan $x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 = x_2$.

   Maka $x_1^{\,3} = x_2^{\,3}$, sehingga $h(x_1) = h(x_2)$.

   Jadi $(\forall x_1, x_2 \in R)\ (x_1 = x_2 \Rightarrow h(x_1) = h(x_2))$.

   Jadi h suatu pemetaan.

5. Andaikan $f : R \to R$ yang didefinisikan dengan, $(\forall x \in R)\ (f(x) = 2^x)$.

   Untuk mengetahui apakah f suatu pemetaan bisa dilihat di bawah ini,

   (1) Ambil sebarang $x \in R$, maka $2^x \in R$.

   Jadi $(\forall x \in R)\ (\exists\, y = 2^x \in R)\ (y = f(x))$.

   (2) Andaikan $x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 = x_2$.

   Maka $2^{x_1} = 2^{x_2}$, sehingga $f(x_1) = f(x_2)$.

   Jadi $(\forall x_1, x_2 \in R)\ (x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

   Jadi f suatu pemetaan.

Definisi II.2

Andaikan $f : S \to T$ suatu pemetaan. Yang dimaksud dengan *invers* dari pemetaan f adalah relasi $f^{-1} : T \to S$ sedemikian sehingga $(y,x) \in f^{-1}$ bila dan hanya bila $(x,y) \in f$.

$$\left[f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}\right]$$

Definisi II.3

Suatu *pemetaan identitas* pada himpunan S adalah suatu pemetaan dari himpunan S ke himpunan S yang setiap anggota himpunan S itu mempunyai kawan dirinya sendiri.

Hal ini dinotasikan dengan $i : S \rightarrow S$ dengan definisi $i(x) = x$, $\forall x \in S$.

Pada pemetaan $f : S \rightarrow T$, suatu anggota $t \in T$ mungkin mempunyai lebih dari satu kawan di S. Apabila setiap $t \in T$ tepat mempunyai satu kawan di S atau sama sekali tidak mempunyai kawan di S maka f disebut pemetaan yang injektif.

Definisi II.4

Pemetaan f dikatakan *injektif* dari S ke T jika setiap anggota T yang mempunyai kawan di S, kawannya itu tunggal.

$[f : S \rightarrow T \textit{ injektif} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in S)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)]$.

Contoh 2.2

1. Pemetaan $f : R \rightarrow R$, di mana untuk setiap $x \in R$ didefinisikan $f(x) = 3x+2$ merupakan pemetaan injektif. Karena jika diambil sebarang $a,b \in R$ sedemikian hingga $a \neq b$, maka $3a \neq 3b$, sehingga $3a+2 \neq 3b+2$ atau $f(a) \neq f(b)$.

   Maka f adalah pemetaan injektif.

2. Pemetaan $g : R \rightarrow R$, di mana untuk setiap $x \in R$ didefinisikan $g(x) = x^2+5$ bukan merupakan pemetaan injektif.

   Pemetaan g bukan pemetan injektif karena terdapat dua bilangan anggota R yang tidak sama tetapi mempunyai nilai fungsi yang sama. Misalkan, ambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = -1$ maka $1 \neq -1$, tetapi $g(1)$ dan $g(-1)$ mempunyai nilai yang sama yaitu 6.

Demikian juga, pemetaan $f : S \rightarrow T$ mungkin tidak menghabiskan himpunan T, yaitu ada $t \in T$ yang tidak mempunyai kawan di S.

Apabila T dihabiskan yaitu setiap $t \in T$ sekurang-kurangnya mempunyai satu kawan di S, maka f dikatakan surjektif.

Definisi II.5

Pemetaan $f : S \rightarrow T$ dikatakan *surjektif* jika semua anggota T mempunyai kawan di S.

[$f : S \rightarrow T$ *surjektif* $\Leftrightarrow (\forall\, y \in T)\ (\exists\, x \in S)\ (y = f(x))$].

Contoh 2.3

1. Pemetaan $h : R \rightarrow R$ dengan $h(x) = x^3$, $\forall\ x \in R$, merupakan pemetaan surjektif, karena $(\forall\, y \in R)\ (\exists\, x = \sqrt[3]{y}\ )\ (y = f(x))$.

2. Pemetaan $f : R \rightarrow R$ dengan $f(\mathrm{x}) = 2^x$, $\forall\ x \in R$, bukan merupakan pemetaan surjektif, karena terdapat $y = -1 \in R$, sehingga $\forall\ x \in R$, $2^x \neq -1$.

Bila suatu pemetaan sekaligus injektif dan surjektif maka pemetaan itu disebut pemetaan bijektif.

Definisi II.6

Pemetaan f dikatakan *bijektif* bila f *surjektif* dan *injektif.*

$[f : S \rightarrow T \text{ bijektif } \Leftrightarrow f \text{ injektif} \wedge f \text{ surjektif}]$.

Pemetaan bijektif sering disebut juga dengan *korespondensi satu-satu.*

Contoh 2.4

Jika $h : R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan $h(x) = 2^x$, $\forall\, x \in R$,maka

- Pemetaan h injektif , sebab jika $x_1, x_2 \in R$ dengan $2^{x_1} = 2^{x_2}$, maka

  $\log 2^{x_1} = \log 2^{x_2}$

  $x_1 \log 2 = x_2 \log 2$

  $x_1 = x_2$

- Pemetaan tidak surjektif (contoh 2.3.2)
- Karena h tidak surjektif maka h tidak bijektif .

Contoh 2.5

Jika $f : R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 3x+2$, $\forall\, x \in R$, maka

- Pemetaan f injektif (contoh 2.2.1)
- Pemetaan f surjektif, sebab $(\forall\, y \in R)(\, \exists x = (y-2)/3)\ (3((y-2)/3) + 2 = f(x))$.
- Karena f injektif dan f surjektif maka f bijektif.

Dari dua buah pemetaan $f : S \to T$ dan $g : T \to U$, dapat disusun suatu pemetaan baru.

Definisi II.7

Jika $f : S \to T$ dan $g : T \to U$, maka *komposisi* dari f dan g adalah pemetaan $g\, o f : S \to U$ didefinisikan dengan $(g\, o f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in S$.

Perhatikan bahwa pada $(g \;\; o \;\; f)\;(x)$, yang dikerjakan pertama adalah pemetaan f kemudian dilanjutkan dengan pemetaan g.

Contoh 2.6

1. Jika $S = \{x,y,z\}$, $T = \{1,2,3\}$, dan $U = \{a,b,c\}$ didefinisikan $\alpha : S \to T$ dengan $\alpha(x) = 2$, $\alpha(y) = 1$, $\alpha(z) = 3$,sedangkan $\beta : T \to U$ dengan $\beta(1) = b$,$\beta(2) = c$, $\beta(3) = a$, maka :

   $(\beta\, o \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(2) = c$

   $(\beta\, o\, \alpha)(y) = \beta(\alpha(y)) = \beta(1) = b$

   $(\beta\, o\, \alpha)(z) = \beta(\alpha(z)) = \beta(3) = a$

2. Jika $\alpha : R \to R$ dan $\beta : R \to R$, yang didefinisikan dengan $\alpha(x) = x^2+2$ dan $\beta(x) = x-1$, $\forall x \in R$,

   maka $(\alpha\, o\, \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x-1) = (x-1)^2+2 = x^2-2x+3$

   dan $(\beta\, o\alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(x^2+2) = x^2+1$

Di bawah ini akan diperlihatkan teorema-teorema yang berkaitan dengan komposisi pemetaan yang sekaligus merupakan sifat-sifat penting dari komposisi pemetaan tersebut. Bukti dari teorema–teorema di bawah ini dapat dilihat dalam buku "Teori Himpunan" (Y. Marpaung, 1997).

Teorema II.1 (sifat assosiatif komposisi pemetaan)

Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$, $h : C \to D$ merupakan suatu pemetaan, maka berlaku :

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Teorema II.2

Andaikan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ masing-masing injektif. Maka $g \circ f$ injektif.

Teorema II.3

Bila pemetaan $f : A \to B$ surjektif dan pemetaan $g : B \to C$ surjektif, maka $g \circ f$ surjektif.

Setelah memperhatikan teorema II.2 dan teorema II.3 dapat disimpulkan bahwa jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ masing-masing bijektif, maka $g \circ f$ bijektif.

Teorema II.4

Andaikan f pemetaan dari A ke B. Relasi f^{-1} merupakan pemetaan dari B ke A bila dan hanya bila f bijektif.

Berdasarkan teorema II.4 diatas dapat disimpulkan bahwa bila f bijektif , maka f akan mempunyai f^{-1} yang juga bijektif.

B. Operasi Biner

Dalam himpunan bilangan bulat, penjumlahan dan perkalian dua anggota himpunan tersebut akan menghasilkan bilangan bulat. Penjumlahan dan perkalian di sini dikenal dengan operasi. Untuk pembahasan grup dalam bab berikutnya diperlukan suatu operasi , yaitu operasi biner yang didefinisikan berikut ini,

Definisi II.7

Diberikan suatu himpunan $S \neq \varnothing$. Suatu *operasi biner* "*" pada himpunan S adalah suatu pemetaan dari $S{\times}S$ ke S .

Dari definisi di atas dapat dituliskan sebagai berikut : $* : S \times S \rightarrow S$.

Karena operasi biner merupakan suatu pemetaan, maka operasi ini harus memenuhi 2 syarat, yaitu :

1. Semua anggota himpunan $S \times S$ mempunyai kawan di S.

   $[(\forall\ (a,b)\in S \times S\ )\ (\exists\ c\in S)\ (((a,b),c)\in f)]$.

Syarat pertama ini dikenal dengan istilah ketertutupan, yaitu jika suatu operasi biner "*" didefinisikan pada S, maka hasil operasinya adalah anggota S.

2. Kawan setiap anggota $S \times S$ di S tunggal.

   $[(\forall(a,b)\in S \times S)(((a,b),c_1)\in f \wedge ((a,b),c_2)\in f \Rightarrow c_1 = c_2)]$.

   Syarat kedua ini dikenal dengan istilah ketunggalan.

Jadi operasi biner harus memenuhi sifat ketertutupan dan ketunggalan, dengan perkataan lain harus well-defined.

Definisi II.8

Diberikan suatu operasi biner "*" pada himpunan S, maka:

1. Operasi biner "*" dikatakan bersifat komutatif jika $a*b = b*a$, $\forall a,b\in S$.
2. Operasi biner "*" dikatakan bersifat asosiatif ,

   jika $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a,b,c\in S$.
3. Suatu e elemen S disebut *elemen identitas* terhadap operasi "*",

   jika $a*e = e*a = a$, $\forall a\in S$.
4. Suatu elemen $b\in S$ disebut *invers* dari a terhadap operasi "*",

   jika $a*b = b*a = e$.

Untuk selanjutnya "operasi biner *" hanya akan dituliskan dengan "*".

BAB III

GRUP

Dalam bab ini akan dibahas mengenai definisi-definisi dan teorema-teorema dari grup, subgrup dan homomorfisma,serta isomorfisma grup, disertai dengan beberapa contoh yang akan digunakan dalam penerapan grup pada materi matematika sekolah menengah.

A. Grup

Pada subbab pertama ini akan dibahas mengenai definisi grup dan teorema dasar grup yang akan mendasari subbab berikutnya.

Definisi III.1

Himpunan $G \neq \varnothing$ dan dilengkapi dengan operasi "*" disebut grup jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi :

1. *Asosiatif*, yaitu untuk setiap a,b,c anggota G,

   berlaku $(a*b)*c = a*(b*c)$, $[(\forall\, a,b,c \in G)\ (a*b)*c = a*(b*c)]$.

2. G memuat *elemen identitas*, yaitu ada elemen e dalam G sedemikian hingga untuk setiap a dalam G berlaku $e*a = a*e = a$,

   $[(\exists\, e \in G)\ (\forall\, a \in G)\ e*a = a*e = a]$.

3. Setiap elemen G mempunyai *invers*, yaitu untuk setiap a dalam G dapat ditemukan a^{-1} dalam G, sedemikian hingga $a^{-1}*a = a*a^{-1} = e$,

   $[(\forall a \in G)\ (\exists\, a^{-1} \in G)\ a^{-1}*a = a*a^{-1} = e]$.

Teorema-teorema Dasar Grup (TDG)

Diketahui $(G, *)$ grup, maka :

a. Elemen identitas dari G adalah tunggal.

b. Invers dari suatu elemen anggota G adalah tunggal.

c. Jika $a,b,c \in G$ dan $a*b = a*c$, maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri).

d. Jika $a,b,c \in G$ dan $b*a = c*a$, maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan).

e. Jika $a,b \in G$, maka masing-masing persamaan $a*x = b$ dan $y*a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G, yaitu $x = a^{-1}*b$ dan $y = b*a^{-1}$.

Bukti :

a. Untuk memperlihatkan ketunggalan dari identitas, dimisalkan ada dua elemen e dan e_1 anggota G. Maka $e * x = x * e = x$ dan

$e_1 * x = x * e_1 = x$ untuk sebarang $x \in G$. Karena $e_1 \in G$ dan e elemen identitas dalam G , maka $e * e_1 = e_1$. Di lain pihak e_1 elemen identitas dalam G, dan karena $e \in G$, maka $e * e_1 = e$.

Sehingga didapat $e_1 = e * e_1 = e$. Jadi terbukti bahwa identitas dari suatu grup G tunggal.

b. Misalkan selain a^{-1} ada invers lainnya dari a, andaikan b. Ini berarti bahwa $b*a = e$. Karena $a^{-1}*a = e$ maka $b*a = a^{-1}*a$, dan didapat $b = a^{-1}$.

Jadi invers dari suatu elemen anggota G adalah tunggal.

c. Bila $a,b,c \in G$ dan $a*b = a*c$ maka $a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(a*c)$ atau $(a^{-1}*a)*b = (a^{-1}*a) *c$ sehingga didapat $e*b = e*c$ atau $b = c$.

d. Bila $a,b \in G$ dan $b*a = c*a$ maka $(b*a)*a^{-1} = (c*a)*a^{-1}$ atau $b* (a*a^{-1}) = c* (a*a^{-1})$ sehingga didapat $b*e = c*e$ atau $b = c$.

e. Pertama memperlihatkan bahwa ada sekurang-kurangnya satu penyelesaian yaitu $a^{-1}*b$.

Perhatikan $a*x = b$

$$a*(a^{-1}*b) = (a*a^{-1})*b, \text{ (sifat assosiatif)}$$
$$= e*b \quad \text{, (definisi dari } a^{-1})$$
$$= b \quad \text{, (sifat dari } e)$$

Dengan demikian $x = a^{-1}*b$ adalah penyelesaian dari $a*x = b$.

Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan $y = b*a^{-1}$ adalah penyelesaian dari $y*a = b$.

Untuk memperlihatkan ketunggalan dari x, andaikan ada dua penyelesaian, yaitu x_1 dan x_2, maka $a*x_1 = b$ dan $a*x_2 = b$.

Sehingga didapat $a*x_1 = a*x_2$,

Maka $x_1 = x_2$, (menurut TDG (c)).

Ketunggalan dari y ditunjukkan dengan cara yang sama.

Contoh 3.1

Akan ditunjukkan $(R,+)$ merupakan grup, terhadap operasi penjumlahan biasa.

- Operasi + well-defined

a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota $R{\times}R$ mempunyai kawan di R.

Ambil sebarang $(a,b) \in R{\times}R$, maka $a+b = m \in R$.

Jadi $(\forall(a,b) \in R{\times}R)\ a+b = m \in R$

b)Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota $R \times R$ di R tunggal.

Ambil $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in R \times R$

sedemikian hingga $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$

maka $a_1+b_1 = a_2+b_2$

Jadi $(\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in R \times R)\ (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$

$\Rightarrow \quad a_1+b_1 = a_2+b_2$

- Assosiatif

  Ambil sebarang $x,y,z \in R$, maka $(x+y)+z = x+(y+z)$

  Jadi $(\forall x,y,z \in R)\ (x+y)+z = x+(y+z)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari penjumlahan biasa adalah 0, sebab jika diambil sebarang $x \in R$ maka berlaku $0+x = x+0 = x$.

- Invers

  Jika diambil sebarang $x \in R$, maka invers dari x adalah $-x$, sebab untuk $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

  Jadi $(\forall x \in R)\ (\exists -x \in R)\ x + (-x) = (-x)+x = 0$.

Jadi $(R,+)$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan biasa.

Contoh 3.2

Akan diperlihatkan $(R\text{-}\{0\}, \times)$ merupakan grup, terhadap operasi perkalian biasa.

- Operasi $\times$ well-defined

  a) Akan ditunjukan bahwa semua anggota $R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\}$ mempunyai kawan di $R\text{-}\{0\}$

  Ambil sebarang $(a,b) \in R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\}$, maka $a \times b = n \in R\text{-}\{0\}$

  Jadi $(\forall\ (a,b) \in R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\})\ a \times b \in R\text{-}\{0\}$.

  b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota $R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\}$ di $R\text{-}\{0\}$ tunggal .

  Ambil sebarang $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\}$

  sedemikian hingga $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

  Maka $\quad x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$

  Jadi $(\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R\text{-}\{0\} \times R\text{-}\{0\})\ (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

  $\Rightarrow x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$.

- Assosiatif

  Ambil sebarang $x,y,z \in R\text{-}\{0\}$, maka $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

  Jadi $(\forall\ x,y,z \in R\text{-}\{0\})\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari $R\text{-}\{0\}$ terhadap perkalian biasa adalah 1, sebab untuk sebarang $x \in R\text{-}\{0\}$ berlaku $1 \times x = x \times 1 = x$.

- Invers

  Jika diambil sebarang $x \in R$-{0}, maka invers dari x adalah $1/x$, sebab untuk $x \times 1/x = 1/x \times x = 1$.

  Jadi $(\forall\, x \in R\text{-}\{0\})\ (\exists\ 1/x \in R\text{-}\{0\})\ x \times 1/x = 1/x \times x = 1$.

Jadi (R-{0} , $\times$) merupakan grup terhadap operasi perkalian biasa.

Contoh 3.3

Akan diperlihatkan $(R^+, \times)$ merupakan grup, terhadap operasi perkalian biasa.

- Operasi $\times$ well-defined

  a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota $R^+ \times R^+$ mempunyai kawan di R^+

  Ambil sebarang $(x,y) \in R^+ \times R^+$, maka $x \times y = n \in R^+$

  Jadi $(\forall\ (x,y) \in R^+ \times R^+)\ x \times y = n \in R^+$.

  b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota $R^+ \times R^+$ di R^+ tunggal

  . Ambil sebarang $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R^+ \times R^+$

  sedemikian hingga $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

  Maka $\quad x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$

  Jadi $(\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R^+ \times R^+)\ (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

  $\Rightarrow x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$.

- Assosiatif

  Ambil sebarang $x,y,z \in R^+$, maka $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Jadi $(\forall\, x,y,z \in R^{+})\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari R^{+} terhadap perkalian biasa adalah 1, sebab untuk sebarang $x \in R^{+}$ berlaku $1 \times x = x \times 1 = x$.

- Invers

  Jika diambil sebarang $x \in R^{+}$,maka invers dari x adalah $1/x$, sebab untuk $x \times 1/x = 1/x \times x = 1$.

  Jadi $(\forall\, x \in R^{+})\ (\exists\ 1/x \in R^{+})\ x \times 1/x = 1/x \times x = 1$.

Jadi $(R^{+}, \times)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian biasa.

Contoh 3.4

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbf{C}, +)$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan dalam **C**, di mana **C** = $\{\ a + b\ i\ /\ a,b \in R,\ i^2 = -1\ \}$ dan didefinisikan operasi penjumlahan dalam **C** sebagai berikut : $\forall z_1 = a_1 + b_1\, i$ dan $z_2 = a_2 + b_2\, i \in \mathbf{C}$ dengan $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i\ ) + (a_2 + b_2\, i\ )$

$$= (\ a_1 + a) + (b_1 + b_2)\, i$$

- Operasi + dalam **C** well –defined

  a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ mempunyai kawan di **C**.

  Ambil sebarang $(z_1, z_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, dengan $z_1 = a_1 + b_1\, i$ dan

  $z_2 = a_2 + b_2\, i$

  $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\, i\ ) + (a_2 + b_2\, i\ )$

$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \in \mathbf{C}$

Jadi $(\forall\, (z_1, z_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C})\; z_1 + z_2 \in \mathbf{C}$.

b) Akan dibuktikan bahwa kawan setiap anggota $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ di $\mathbf{C}$ tunggal

Ambil sebarang $(z_1,z_2), (z_3,z_4) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, dengan $z_1 = a_1 + b_1\, i$, $z_2 = a_2 + b_2\, i$, dan $z_3 = a_3 + b_3\, i$, $z_4 = a_4 + b_4\, i$.

Sedemikian hingga $(z_1,z_2) = (z_3,z_4)$.

Maka $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i = (a_3 + a_4) + (b_3 + b_4)\, i$

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4$$

Jadi $(\forall\, (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C})\; (z_1,z_2) = (z_3,z_4)$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = z_3 + z_4$

- Assosiatif

Ambil sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$,

dengan $z_1 = a_1 + b_1\, i$, $z_2 = a_2 + b_2\, i$, dan $z_3 = a_3 + b_3\, i$.

Maka $(z_1 + z_2) + z_3 = ((a_1 + b_1\, i) + (a_2 + b_2\, i)) + (a_3 + b_3\, i)$

$$= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i) + (a_3 + b_3\, i)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\, i$$

$z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1 + b_1\, i) + ((a_2 + b_2\, i) + (a_3 + b_3\, i))$

$$= (a_1 + b_1\, i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\, i)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\, i$$

Jadi $(\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C})\; (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

- Elemen Identitas

Elemen identitas dari operasi penjumlahan dalam bilangan $\mathbf{C}$ adalah bilangan nol $0 + 0\, i$, sebab jika diambil sebarang $z \in \mathbf{C}$, dengan $z = a + b\,i$,

maka berlaku $(0 + 0\,i) + (a + b\,i) = (a + b\,i) + (0+0\,i)$

$= a + b$ i.

- Invers

  Jika diambil sebarang $z \in$ **C**, dengan $z = a + b\,i$ maka invers dari z adalah $-z = -a - b\,i$,sebab $z + (-z) = (a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0\,i$

  $(-z) + z = (-a - bi) + (a + bi) = 0 + 0\,i$

  Jadi ($\forall\, z \in$ **C**) ($\exists\, -z \in$ **C**) $z + (-z) = (-z) + z = 0 + 0\,i$

Jadi (**C**,+) merupakan grup terhadap operasi penjumlahan bilangan kompleks seperti didefinisikan di atas.

Contoh 3.5

Akan diperlihatkan (**C**-{0+0i},$\times$) merupakan grup terhadap perkalian bilangan kompleks, di mana **C** = { $a + b\,i$ / $a,b \in R$, $i^2 = -1$ } dan didefinisikan operasi perkalian dalam bilangan kompleks adalah sebagai berikut :

$\forall z_1 = a_1 + b_1 i$ dan $z_2 = a_2 + b_2\,i \in$ **C**-{0+0 i } dengan

$z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1 i\ ) \times (a_2 + b_2\,i\ ) = (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2) + ((a_1 \times b_2) + (a_2 \times b_1))\,i$

- Operasi $\times$ dalam **C**-{0+0i} well- defined

  a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota **C**-{0+0i}$\times$**C**-{0+0i} mempunyai kawan di **C**-{0+0 i }.

  Ambil sebarang $(z_1,z_2\ ) \in$ **C**-{0+0 i } $\times$ **C**-{0+0 i } , maka

  untuk $z_1 = a_1 + b_1\,i$, $z_2 = a_2 + b_2\,i$

  $z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1\,i\ ) \times (a_2 + b_2\,i\ )$

$= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2\, i + a_2 \times b_1\, i + (-b_1 \times b_2)$

$= (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2) + (a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)\, i \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$

Jadi ($\forall\, (z_1,z_2) \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\} \times \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$) $z_1 \times z_2 \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$.

b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota

$\mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\} \times \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$ di $\mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$ tunggal.

Ambil sebarang $(z_1,z_2),(z_3,z_4) \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0i\} \times \mathbf{C}\text{-}\{0+0i\}$ dengan

$z_1 = a_1 + b_1\, i$, $z_2 = a_2 + b_2\, i$ dan $z_3 = a_3 + b_3\, i$, $z_4 = a_4 + b_4\, i$,

sedemikian hingga $(z_1,z_2) = (z_3,z_4)$.

Maka $(a_1 + b_1\, i) \times (a_2 + b_2\, i) = (a_3 + b_3\, i) \times (a_4 + b_4\, i)$

$z_1 \times z_2 = z_3 \times z_4$

Jadi ($\forall\, (z_1,z_2), (z_3,z_4) \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\} \times \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$) $(z_1,z_2) = (z_3,z_4)$

$\Rightarrow z_1 \times z_2 = z_3 \times z_4$.

- Assosiatif

Ambil sebarang $z_1,z_2,z_3 \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\} \times \mathbf{C}\text{-}\{0+0\, i\}$ dengan

$z_1 = a_1 + b_1\, i$, $z_2 = a_2 + b_2\, i$, $z_3 = a_3 + b_3\, i$

$(z_1 \times z_2) \times z_3 = ((a_1 + b_1\, i) \times (a_2 + b_2\, i)) \times (a_3 + b_3\, i)$

$= a_3 \times (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2) + a_3 \times (a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)\, i)$

$+ b_3 \times (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2)\, i + (-b_3 \times (a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1))$

$= (a_3 \times a_1 \times a_2 - a_3 \times b_1 \times b_2 - b_3 \times a_1 \times b_2 - b_3 \times a_2 \times b_1)$

$+ (a_3 \times a_1 \times b_2 + a_3 \times a_2 \times b_1 + b_3 \times a_1 \times a_2 - b_3 \times b_1 \times b_2)\, i$

$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (a_1 + b_1\, i) \times ((a_2 + b_2\, i) \times (a_3 + b_3\, i))$

$= (a_1 + b_1\, i) \times ((a_2 \times a_3 - b_2 \times b_3) + (a_2 \times b_3 + b_2 \times a_3)\, i)$

$= a_1 \times (a_2 \times a_3 - b_2 \times b_3) + a_1 \times (a_2 \times b_3 + b_2 \times a_3)\, i$

$+ b_1 \times (a_2 \times a_3 - b_2 \times b_3)\, i + (-b_1 \times (a_2 \times b_3 + b_2 \times a_3))$

$= (a_1 \times a_2 \times a_3 - a_1 \times b_2 \times b_3 - b_1 \times a_2 \times b_3$

$- b_1 \times b_2 \times a_3) + (a_1 \times a_2 \times b_3 + a_1 \times b_2 \times a_3$

$+ b_1 \times a_2 \times a_3 - b_1 \times b_2 \times b_3)\, i$

$(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$

Jadi $(\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\,i\})\ (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari operasi perkalian bilangan kompleks adalah bilangan satuan $1+0i$, sebab jika diambil sebarang $z \in \mathbf{C}\text{-}\{0+0\,i\}$ untuk $z = a + b\,i$ maka berlaku

  $(1 + 0\,i) \times (a_1 + b_1\,i) = (a_1 + b_1\,i) \times (1 + 0\,i) = a_1 + b_1\,i$.

- Invers

  Ambil sebarang $x \in \mathbf{C}$, dan misalkan x^{-1} adalah invers dari x maka $x \times x^{-1} = 1$

  $$x^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) i$$

  Jadi $(\forall\, x \in \mathbf{C})\ (\exists\, x^{-1} \in \mathbf{C})\ x \times x^{-1} = 1$.

Jadi $(\mathbf{C}\text{-}\{0+0\,i\}, \times)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian bilangan kompleks.

Contoh 3.6

Akan diperlihatkan (E,+) merupakan grup terhadap operasi penjumlahan biasa, di mana E = aZ = {an / $n \in Z$ }.

Misal : jika a = 3 ,maka 3Z = {3n / $n \in Z$} = {…,-6,-3,0,3,6,…}.

Dengan Z adalah bilangan bulat dan $a \in R$-{0} .

- Operasi + well-defined

a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota E×E mempunyai kawan di E.

Ambil sebarang $(x_1,x_2) \in$ E×E, dengan $x_1 = ap$, $x_2 = ar$ untuk $a \in R$-{0} dan $p,r \in Z$.

$$x_1 + x_2 = ap + ar$$
$$= a(p + r)$$
$$= ah \in E$$

$h = p + r \in Z$

Jadi $(\forall (x_1,x_2) \in E\times E)\ x_1 + x_2 \in E$.

b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota E×E di E tunggal.

Ambil sebarang (x_1,x_2), $(x_3,x_4) \in$ E×E dengan $x_1 = ap$, $x_2 = ar$, $x_3 = ah$, $x_4 = aq$,

sedemikian hingga $(x_1,x_2) = (x_3,x_4)$

maka $ap + ar = ar + aq$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

Jadi $(\forall (x_1,x_2), (x_3,x_4) \in E\times E)\ (x_1,x_2) = (x_3,x_4) \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

- Assosiatif

  Ambil sebarang $x_1,x_2,x_3 \in$E, maka $x_1 = ap$, $x_2 = ar$ dan $x_3 = aq$ untuk

  $a \in R$-{0} , $p,r,q \in Z$.

  maka $(x_1 + x_2) + x_3 = (ap + ar) + aq$

  $= ap + (ar + aq)$

  $= x_1 + (x_2 + x_3)$

  Jadi $(\forall\, x_1,x_2,x_3 \in E)\ (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari E terhadap operasi penjumlahan biasa adalah 0, sebab jika diambil sebarang $x \in$E untuk $x = ap$ dengan $p \in Z$ maka berlaku $0 + ap = ap + 0 = ap$.

- Invers

  Jika diambil sebarang $x \in$E, dengan $x = ap$, untuk $a \in R$-{0},$p \in Z$. Maka invers dari x adalah $-x = -ap$, dengan $a \in R$ -{0}, $-p \in Z$,

  sebab $x + (-x) = ap + (-ap)$

  $(-x) + x = (-ap) + ap$

  Jadi $(\forall\, x \in E)\ (\exists\, -x = -ap \in E)\ x + (-x) = (-x) \cdot x = 0$.

Jadi (E,+) merupakan grup terhadap operasi penjumlahan biasa.

Contoh 3.7

Akan diselidiki bahwa (F,$\times$) merupakan grup terhadap operasi perkalian biasa, dimana $F = a^Z = \{ a^n / n \in Z\}$.

Misal : jika $a = 2$ maka $2^Z = \{2^n / n \in Z\} = \{\ldots,1/8,1/4,1/2,1,2,4,\ldots\}$.

Dengan Z adalah bilangan bulat dan $a \in R$-$\{0\}$.

- Operasi $\times$ well-defined

a) Operasi Tertutup

Ambil sebarang $(x_1, x_2) \in F \times F$, dengan $x_1 = a^p$, $x_2 = a^r$ untuk $a \in R$-$\{0\}$, $p, r \in Z$.

Maka $x_1 \times x_2 = a^p \times a^r$

$= a^{p+r}$

$= a^h \quad , h = p + r \in Z$

Jadi $(\forall\ (x_1,x_2) \in F \times F)\ x_1 \times x_2 \in F$.

b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota F×F di F tunggal.

Ambil sebarang $(x_1,x_2), (x_3,x_4) \in F \times F$ dengan $x_1 = a^p$, $x_2 = a^r$, $x_3 = a^h$, $x_4 = a^q$,

sedemikian hingga $(x_1,x_2) = (x_3,x_4)$

maka $\quad a^p \times a^r = a^h \times a^q$

$x_1 \times x_2 = x_3 \times x_4$

Jadi $(\forall (x_1,x_2), (x_3,x_4) \in F \times F\ )\ (x_1,x_2) = (x_3,x_4) \Rightarrow x_1 \times x_2 = x_3 \times x_4$

- Assosiatif

Ambil sebarang $x_1, x_2, x_3 \in F$ maka $x_1 = a^p$, $x_2 = a^r$ dan $x_3 = a^q$ dengan $a \in R$-$\{0\}$, $p, q, r \in Z$.

Maka $(x_1 \times x_2) \times x_3 = (a^p \times a^r) \times a^q$

$= a^p \times (a^r \times a^q)$

$= x_1 \times (x_2 \times x_3)$

Jadi $(\forall x_1, x_2, x_3 \in F)\ (x_1 \times x_2) \times x_3 = x_1 \times (x_2 \times x_3)$.

- Elemen Identitas

  Elemen identitas dari F terhadap operasi perkalian biasa adalah $a^0 = 1$ dimana $a \in R$-$\{0\}$dan $0 \in Z$, sebab jika diambil sebarang $x \in F$ untuk $x = a^p$, dengan $p \in Z$ berlaku $1 \times a^p = a^p \times 1 = a^p$.

- Invers

  Jika diambil sebarang $x \in F$, dengan $x = a^p$, untuk $a \in R$-$\{0\}$, $p \in Z$.

  Maka invers dari x adalah $x^{-1} = a^{-p}$,$a \in R$-$\{0\}$, $-p \in Z$,

  sebab $x \times x^{-1} = a^p \times a^{-p} = a^0 = 1$

  $x^{-1} \times x = a^{-p} \times a^p = a^0 = 1$

  Jadi $(\forall x \in F)\ (\exists x^{-1} = a^{-p} \in F)\ x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$.

Jadi $(F, \times)$ merupakan grup terhadap opersi perkalian biasa.

Contoh 3.8

Definisi dari

$$M^1_{2\times2}(R) = \{M_{2\times2} \in M_{2\times2}(R) / M_{2\times2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \forall a,b,c,d \in [-1,1], ad - bc \neq 0\}$$

Dan akan dibuktikan bahwa $M^1_{2\times2}(R)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks,

dengan definisi $\forall A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M^1_{2\times2}(R)$

$$A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix},$$

- Operasi $\times$ matriks well-defined

a) Akan ditunjukkan bahwa semua anggota $M^1_{2\times2}(R)\times M^1_{2\times2}(R)$ mempunyai kawan di $M^1_{2\times2}(R)$.

Ambil sebarang (A_1, A_2)$\in M^1_{2\times2}(R)\times M^1_{2\times2}(R)$, untuk

$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

$A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$, dengan $ae+bg$, $af+bh$, $ce+dg$, $cf+dh \in [-1,1]$ dan

$(ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \neq 0$

Maka $A_1 \times A_2 \in M^1_{2\times2}(R)$

Jadi ($\forall$ (A_1,A_2)$\in M^1_{2\times2}(R)\times M^1_{2\times2}(R)$) $A_1 \times A_2 \in M^1_{2\times2}(R)$

b) Akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota $M^1_{2\times2}(R)\times M^1_{2\times2}(R)$ di $M^1_{2\times2}(R)$ tunggal.

Ambil sebarang (A_1,A_2), (A_3, A_4) $\in M^1_{2\times2}(R)\times M^1_{2\times2}(R)$ dengan

$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

sedemikian hingga (A_1,A_2) = (A_3,A_4)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} im+jo & in+jp \\ km+lo & kn+lp \end{pmatrix}$$

Menurut definisi kesamaan matriks $a = i$, $b = j$, $c=k$, $d=l$, $e=m$,

$f=n$, $g=o$, $h=p$, maka $A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$.

Jadi $((\forall\ (A_1,A_2), (A_3,A_4) \in M^1_{2\times 2}(R) \times M^1_{2\times 2}(R)\ )$

$((A_1,A_2) = (A_3,A_4) \Rightarrow A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4)$

- Assosiatif

Ambil sebarang $A_1, A_2, A_3 \in M^1_{2\times 2}(R)$, $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$, maka

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgi+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgi+cfl+dhl \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$$

$$A_1 \times (A_2 \times A_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgi+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgi+cfl+dhl \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$$

Jadi $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$

- Elemen identitas

Elemen identitas dari operasi perkalian dalam $M^1_{2\times 2}(R)$ adalah

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$,sebab jika diambil sebarang

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$ maka berlaku $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Invers

A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$ maka invers dari A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{|ad - bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\frac{1}{|ad - bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ dc - dc & -bc + ad \end{pmatrix}}{|ad - bc|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \times A = \left(\frac{1}{|ad - bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\left(M^1_{2\times 2}(R), \times\right)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks.

Untuk selanjutnya "operasi ×" hanya akan dituliskan dengan tanda".".

Contoh 3.9

Akan diperlihatkan bahwa $(\mathscr{T}, o)$ transformasi merupakan grup terhadap operasi komposisi. Sebelumnya akan dijelaskan sedikit mengenai definisi dari transformasi $\mathscr{T}$,

$\mathscr{T}$: $\{T : R^2 \to R^2 \mid T\ pemetaan\ bijektif\}$

Dan karena diperlihatkan $(\mathscr{T}, o)$ merupakan grup terhadap operasi komposisi maka dalam pembuktiannya dapat menggunakan pendekatan definisi dan teorema-teorema dalam komposisi,

- Sifat tertutup

  Berdasarkan teorema II.2 dan teorema II.3, jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ masing-masing bijektif, maka gof bijektif . Sehingga jika diambil sebarang $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$, maka $T_1 o T_2 = T_3$ dengan $T_3 \in \mathscr{T}$.

- Asssosiatif

  Berdasarkan teorema II.1, jika $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ merupakan suatu pemetaan maka berlaku $(hog)of = ho(gof)$. Sehingga jika diambil sebarang T_1, T_2, $T_3 \in \mathscr{T}$, maka berlaku $(T_1 o T_2) o T_3 = T_1 o (T_2 o T_3)$.

- Elemen identitas

  Elemen identitas dari $\mathscr{T}$ adalah $I \in \mathscr{T}$, sehingga jika diambil sebarang $T \in \mathscr{T}$ maka $I o T = T o I = T$.

- Invers

  Berdasarkan teorema II.4 maka dapat disimpulkan bahwa bila f bijektif maka f akan mempunyai invers f^{1} yang juga bijektif . Jadi jika diambil sebarang $T_1 \in \mathscr{T}$ maka terdapat invers T_1 yaitu $T_1^{-1} \in \mathscr{T}$, sehingga $T_1 o T_1^{-1} = T_1^{-1} o T_1 = \mathrm{I}$.

Jadi transformasi $(\mathscr{T}, o)$ merupakan grup terhadap operasi komposisi.

B. Subgrup

Jika himpunan bagian dari suatu grup membentuk grup terhadap operasi yang sama dengan grupnya, maka himpunan bagian tersebut merupakan subgrup menurut definisi di bawah ini,

Definisi III.2

Andaikan $(G, *)$ grup, $H \subset G$ dengan $H \neq \varnothing$. H disebut subgrup dari G jika $(H, *)$ merupakan grup.

Lemma III.1

Dimisalkan G adalah grup dengan operasi "$*$" dan dimisalkan H adalah subgrup dari G,

a. Jika e_H adalah elemen identitas dari H dan e_G adalah elemen identitas dari G maka $e_H = e_G$.

b. Jika $a \in H$, maka invers a dalam H adalah invers yang sama dalam G.

Bukti:

(a). Jika e_H adalah elemen identitas dari H maka $e_H * e_H = e_H$, dan e_H^{-1} juga anggota dari G, maka :

$e_H^{-1} * e_H * e_H = e_H^{-1} * e_H$

$(e_H^{-1} * e_H) * e_H = e_G$

$e_H * e_H = e_G$

$e_H = e_G$.

(b). Andaikan $a \in H$, misalkan a^{-1} menyatakan invers a dalam G dan misalkan c menyatakan invers a dalam H, maka :

$a * c = c * a = e_H$

menurut hasil (a) di atas, $a * c = c * a = e_G$

mengingat TDG.d, invers dari a dalam G dimisalkan $x = a^{-1}$,

maka $a * x = e_G \ldots(1)$

$a * c = e_G \ldots(2)$

Dari (1) dan (2) didapat $a * c = a * x$

$c = x$

$c = a^{-1}$.

Teorema III.1

Andaikan $(G, *)$ grup, $H \subset G$. H adalah subgrup dari G bila dan hanya bila:

a. $H \neq \varnothing$

b. Jika $a,b \in H$, maka $a * b \in H$

c. Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui H subgrup dari G maka $e_G \in H$ (menurut lemma III.I) .

Jadi $H \neq \emptyset$. Aksioma (b) dan (c) dari grup dipenuhi dalam H, karena H merupakan grup terhadap operasi "$*$".

($\Leftarrow$) - Sifat tertutup H dipenuhi dari (b)

- Sifat assosiatif dipenuhi karena $H \subseteq G$ dan $(G, *)$ grup

- Elemen identitas

Jika diambil sebarang $a \in H$ maka menurut (c) di atas $a^{-1} \in H$ sedemikian sehingga ,

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \in H$

Jadi ada elemen identitas untuk setiap elemen dalam H.

- Invers dipenuhi dari (c) di atas, yaitu jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

Jadi H grup, karena $H \subseteq G$ maka H subgrup dari G.

Contoh 3.10

Pada contoh 3.9 telah diketahui definisi dari transformasi ($\mathscr{T}$), dan ($\mathscr{T}$,o) merupakan grup terhadap operasi komposisi. Dan definisi dari

$T^2 = \left\{ T: R^2 \to R^2 \middle| T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}, a, b \in R, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$ karena definisi dari T^2 tergantung dari nilai-nilai $a, b \in R$ maka anggota-anggota T^2 akan dituliskan dengan $T_{a,b}$, sesuai dengan a, b dalam definisi translasinya.

Di sini akan diperlihatkan T^2 merupakan subgrup dari $(\mathcal{T}, o)$,

a) terlebih dahulu akan diperlihatkan $T^2 \subset \mathcal{T}$ maka harus dibuktikan bahwa T^2 merupakan pemetaan bijektif ,

- ambil sebarang $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ maka $\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \in R^2, \forall a, b \in R$

  Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \right)\left(\exists \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \right)\left(\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

- andaikan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ dan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ yang berarti $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ sehingga didapat $\begin{pmatrix} x_1 + a \\ y_2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + a \\ y_2 + b \end{pmatrix}, a, b \in R$ maka

  $T_{a,b}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

  Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2 \right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{a,b}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

Jadi T^2 merupakan suatu pemetaan.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa pemetaan T^2 merupakan pemetaan bijektif,

- T^2 merupakan pemetaan surjektif, karena

$$\left(\forall\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\exists\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - a \\ y^1 - b \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} x^1 - a + a \\ y^1 - b + b \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

- dan T^2 merupakan pemetaan injektif, karena jika diambil

sebarang $\begin{pmatrix} x_1^1 \\ y_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} \in R^2$ sehingga

$T_{a,b}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \forall a, b \in R$ maka

$\begin{pmatrix} x_1 + a \\ y_1 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + a \\ y_2 + b \end{pmatrix}$ didapat $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Jadi T^2 merupakan suatu pemetaan yang bijektif

Jadi $T^2 \subset \mathscr{T}$.

Dengan mengggunakan teorema III.1, akan ditunjukkan bahwa T^2 subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$,

b) memperlihatkan $T^2 \neq \varnothing$

Karena T^2 merupakan transformasi maka dalam T^2 terdapat $T_{0,0}$ sehingga

$T_{0,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 \\ y + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, untuk $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$

Jadi I = $T_{0,0}$

Jadi $T^2 \neq \varnothing$, sebab $\exists$ I = $T_{0,0} \in T^2$.

c) Sifat tertutup dari T^2

Ambil sebarang 2 translasi dalam T^2 , T_{a_1,b_1}, T_{a_2,b_2} dengan

$$T_{a_1,b_1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a_1 \\ y+b_1 \end{pmatrix}, \text{ dan } T_{a_2,b_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a_2 \\ y+b_2 \end{pmatrix} \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$$

Maka $(T_{a_1,b_1} o T_{a_2,b_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{a_1,b_1}\left(T_{a_2,b_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_{a_1,b_1}\begin{pmatrix} x+a_2 \\ y+b_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (x+a_2)+a_1 \\ (y+b_2)+b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+(a_2+a_1) \\ y+(b_2+b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a_3 \\ y+b_3 \end{pmatrix}, a_3, b_3 \in R, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi $(T_{a_1,b_1} o T_{a_2,b_2}) = T_{a_3,b_3}$, dengan $T_{a_3,b_3} \in T^2$

d) Elemen invers

Jika diambil sebarang $T_{a,b} \in T^2$ dengan $T_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ maka invers dari

$T_{a,b}$ adalah $T^{-1}_{a,b} = T_{-a,-b}$, $\forall -a, -b \in R$, sebab

$$(T_{a,b} o T^{-1}_{a,b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{a,b}\left(T^{-1}_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_{a,b}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{0,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(T^{-1}_{a,b} o T_{a,b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}_{a,b}\left(T_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T^{-1}_{a,b}\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} = T_{a,b}\begin{pmatrix} x+a-a \\ y+b-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{0,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi $T_{a,b} o T^{-1}_{a,b} = T^{-1}_{a,b} o T_{a,b} = T_{0,0}$ dengan $T^{-1}_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

Jadi T^2 merupakan subgrup dari $(\mathcal{T}, o)$.

Contoh 3.11

Pada contoh 3.9 telah diketahui definisi dari transformasi ($\mathscr{T}$), dan ($\mathscr{T}$,o) merupakan grup terhadap operasi komposisi. Dan definisi dari

$D^2 = \left\{ D: R^2 \to R^2 \,\middle|\, D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}, k \in R - \{0\}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$ karena definisi dari D^2 tergantung dari nilai-nilai $k \in R$-{0} maka anggota-anggota D^2 akan dituliskan dengan D_k, sesuai dengan k dalam definisi dilatasi.

Di sini akan diperlihatkan D^2 merupakan subgrup dari ($\mathscr{T}$,o),

a) terlebih dahulu akan diperlihatkan $D^2 \subset \mathscr{T}$ maka harus dibuktikan bahwa D^2 merupakan pemetaan bijektif ,

- ambil sebarang $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ maka $\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \in R^2, \forall k \in R - \{0\}$

  Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \right) \left(\exists \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

- andaikan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ dan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ yang berarti $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ sehingga didapat $\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}, k \in R - \{0\}$ maka

  $D_k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

  Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2 \right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

Jadi D^2 merupakan suatu pemetaan.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa pemetaan D^2 merupakan pemetaan bijektif,

- D^2 merupakan pemetaan surjektif, karena

$$\left(\forall\begin{pmatrix}x^1\\y^1\end{pmatrix}\in R^2\right)\left(\exists\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{k}.\begin{pmatrix}x^1\\y^1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{k}..x^1.k\\\frac{1}{k}.y^1.k\end{pmatrix}=D_k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

- dan D^2 merupakan pemetaan injektif, karena jika diambil sebarang

$\begin{pmatrix}x_1^1\\y_1^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2^1\\y_2^1\end{pmatrix}\in R^2$ sehingga $D_k\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=D_k\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\forall k\in R-\{0\}$ maka

$\begin{pmatrix}k.x_1\\k.y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k.x_2\\k.y_2\end{pmatrix}$ didapat $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

Jadi D^2 merupakan suatu pemetaan yang bijektif

Jadi D$^2 \subset \mathscr{T}$

Dengan mengggunakan teorema III.1, akan ditunjukkan bahwa D^2 subgrup dari ($\mathscr{T}$,*o*),

b) memperlihatkan D$^2 \neq \varnothing$

Karena D^2 merupakan transformasi maka dalam D^2 terdapat $D_1 \in$ D^2

sehingga $D_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.x\\1.y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, untuk $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2$

Jadi I = D_1

Jadi D$^2 \neq \varnothing$, sebab $\exists$ I = $D_1 \in$ D^2.

c) Sifat tertutup dari D^2

Ambil sebarang 2 dilatasi dalam D^2, D_k, D_l dengan $D_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$, dan

$D_l\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l.x \\ l.y \end{pmatrix} \forall k, l \in R - \{0\}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$

Maka $(D_k o\, D_l)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_k\left(D_l\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = D_k\begin{pmatrix} l.x \\ l.y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} k.(l.x) \\ k.(l.y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k.l).x \\ (k.l)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.x \\ m.y \end{pmatrix}, k.l = m \in R - \{0\}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$

Jadi $(D_k o\, D_l) = D_m$, dengan $D_m \in D^2$

d) Elemen invers

Jika diambil sebarang $D_k \in D^2$ dengan $D_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ maka

invers dari D_k adalah $D_k^{-1} = D_{1/k}, \forall\, {}^1\!/_k \in R - \{0\}$, sebab

$(D_k o\, D_k^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_k\left(D_k^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = D_k\left({}^1\!/_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$= \left(k\left({}^1\!/_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \left(\left(k.\,{}^1\!/_k\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(D_k^{-1} o\, D_k)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_k^{-1}\left(D_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = D_k^{-1}\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix} = {}^1\!/_k\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$

Jadi $D_k o\, D_k^{-1} = D_k^{-1} o\, D_k = D_1$ dengan $D_k^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left({}^1\!/_k\right)x \\ \left({}^1\!/_k\right)y \end{pmatrix}$

Jadi D^2 merupakan subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$.

Contoh 3.12

Pada contoh 3.9 telah diketahui definisi dari transformasi ($\mathscr{T}$), dan ($\mathscr{T}$,o) merupakan grup terhadap operasi komposisi. Dan definisi dari

$$P^2 \quad = \quad \left\{ P : R^2 \to R^2 \;\middle|\; P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0° \le \phi < 360°, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$$

karena rotasi ini berpusat pada O(0,0) dan tergantung dari besarnya ϕ maka anggota-anggota P^2 akan dituliskan dengan $P_{0,\phi}$ sesuai dengan ϕ dalam definisi rotasinya.

Di sini akan diperlihatkan P^2 merupakan subgrup dari ($\mathscr{T}$,o),

a) terlebih dahulu akan diperlihatkan $P^2 \subset \mathscr{T}$ maka harus dibuktikan bahwa P^2 merupakan pemetaan bijektif ,

- ambil sebarang $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ maka

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix} \in R^2, 0° \le \phi < 360°$$

Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\exists \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

- andaikan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ dan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ yang berarti $x_1 = x_2$,

$y_1 = y_2$ sehingga didapat $P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi - y_1\sin\phi \\ x_1\sin\phi + y_1\cos\phi \end{pmatrix}$ karena $x_1 = x_2$

dan $y_1 = y_2$ sehingga didapat

$$\begin{pmatrix} x_1\cos\phi - y_1\sin\phi \\ x_1\sin\phi + y_1\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\cos\phi - y_2\sin\phi \\ x_2\sin\phi + y_2\cos\phi \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } \left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Jadi P^2 merupakan suatu pemetaan.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa pemetaan P^2 merupakan pemetaan bijektif,

- P^2 merupakan pemetaan surjektif, karena

$$\left(\forall \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos^2\phi + \sin^2\phi}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- dan P^2 merupakan pemetaan injektif, karena jika diambil sebarang

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ y_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} \in R^2 \text{ sehingga } P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0° \le \phi < 360°$$

maka $P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dan didapat

$$\begin{pmatrix} x_1\cos\phi - y_1\sin\phi \\ x_1\sin\phi + y_1\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\cos\phi - y_2\sin\phi \\ x_2\sin\phi + y_2\cos\phi \end{pmatrix} \text{ sehingga}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sehingga didapat $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Jadi P^2 merupakan suatu pemetaan yang bijektif

Jadi $P^2 \subset \mathscr{T}$

Dengan mengggunakan teorema III.1, akan ditunjukkan bahwa P^2 subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$,

b) memperlihatkan $P^2 \neq \varnothing$

Karena P^2 merupakan transformasi maka dalam P^2 terdapat $P_{0,0°}$ sehingga

$$P_{0,0°}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0° & -\sin 0° \\ \sin 0° & \cos 0° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ , untuk } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi I = $P_{0,0°}$

Jadi $P^2 \neq \varnothing$, sebab $\exists$ I = $P_{0,0°} \in P^2$.

c) Sifat tertutup dari P^2

Ambil sebarang 2 rotasi dalam P^2, $P_{0,\phi}, P_{0,\varphi}$ dengan

$$P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ dan}$$

$$P_{0,\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2, 0° \le \phi < 360°, 0° \le \varphi < 360°$$

Maka $\left(P_{0,\phi} o P_{0,\varphi}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\left(P_{0,\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = P_{0,\phi}\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\varphi) & -\sin(\phi+\varphi) \\ \sin(\phi+\varphi) & \cos(\phi+\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,(\phi+\varphi)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,\psi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ 0° \le \psi < 360°$$

Jadi $(P_{0,\phi} o P_{0,\varphi}) = P_{0,\psi}$,dengan $P_{0,\psi} \in \text{P}^2$

d) Elemen invers

Jika diambil sebarang $P_{0,\phi} \in \text{P}^2$ dengan

$P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ maka invers dari $P_{0,\phi}$ adalah $P_{0,\phi}^{-1} = P_{0,-\phi}$,

sebab $(P_{0,\phi} o P_{0,-\phi}^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,\phi}\left(P_{0,\phi}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = P_{0,\phi}\left(\begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,0^\circ}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(P_{0,-\phi}^{-1} o P_{0,\phi})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,-\phi}^{-1}\left(P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = P_{0,-\phi}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{0,0^\circ}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi $P_{0,\phi} o P_{0,-\phi}^{-1} = P_{0,-\phi}^{-1} o P_{0,\phi} = P_{0,0^\circ}$ dengan

$$P_{0,-\phi}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi P^2 merupakan subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$.

Contoh 3.13

Pada contoh 3.9 telah diketahui definisi dari transformasi ($\mathscr{T}$), dan ($\mathscr{T}$,o) merupakan grup terhadap operasi komposisi. Dan definisi dari

$$S^2 \quad = \quad \left\{ S_{k,\varphi} : R^2 \to R^2 \;\middle|\; S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi \end{pmatrix}, k \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°, \forall \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$$

karena definisi dari S^2 tergantung dari nilai-nilai k dan φ maka anggota-anggota S^2 akan dituliskan dengan $S_{k,\varphi}$, sesuai dengan k dan φ dalam definisi kesebangunan spiralnya.

Di sini akan diperlihatkan S^2 merupakan subgrup dari ($\mathscr{T}$,o),

a) terlebih dahulu akan diperlihatkan $S^2 \subset \mathscr{T}$ maka harus dibuktikan bahwa S^2 merupakan pemetaan bijektif ,

- ambil sebarang $\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2$ maka

  $$\begin{pmatrix} r^1 \\ \phi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi \end{pmatrix} \in R^2, k \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°$$

  Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2 \right)\left(\exists \begin{pmatrix} r^1 \\ \phi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi \end{pmatrix} \right)\left(\begin{pmatrix} r^1 \\ \phi^1 \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \right)$

- andaikan $\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in R^2$ dan $\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ yang berarti $r_1 = r_2$, $\phi_1 = \phi_2$ sehingga didapat $\begin{pmatrix} r_1.k \\ \phi_1 + \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2.k \\ \phi_2 + \varphi \end{pmatrix}, k \geq 0, 0° \leq \phi < 360°$

  maka $S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$

Jadi $\left(\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\right)$

Jadi S^2 merupakan suatu pemetaan.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa pemetaan S^2 merupakan pemetaan bijektif,

- S^2 merupakan pemetaan surjektif, karena

$$\left(\forall \begin{pmatrix} r^1 \\ \phi^1 \end{pmatrix} \in R^2\right)\left(\exists \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^1 . \frac{1}{k} \\ \phi^1 - \varphi \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} r^1 . \frac{1}{k} . k \\ \phi^1 - \varphi + \varphi \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}\right)$$

- dan S^2 merupakan pemetaan injektif, karena jika diambil

sebarang $\begin{pmatrix} r_1^1 \\ \phi_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2^1 \\ \phi_2^1 \end{pmatrix} \in R^2$ sehingga

$S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, k \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°$. maka $\begin{pmatrix} r_1 . k \\ \phi_1 + \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 . k \\ \phi_2 + \varphi \end{pmatrix}$

didapat $\begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$

Jadi S^2 merupakan suatu pemetaan yang bijektif

Jadi $S^2 \subset \mathscr{T}$.

Dengan mengggunakan teorema III.1, akan ditunjukkan bahwa S^2 subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$,

b) memperlihatkan $S^2 \neq \varnothing$

Karena S^2 merupakan transformasi maka dalam S^2 terdapat $S_{1,0°} \in S^2$

sehingga $S_{1,0°}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.1 \\ \phi + 0° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$, untuk $\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2$

Jadi I = $S_{1,0°}$

Jadi $S^2 \neq \varnothing$, sebab $\exists$ I = $S_{1,0°} \in S^2$.

c) Sifat tertutup dari S^2

Ambil sebarang 2 kesebangunan spiral dalam S^2, $S_{k,\varphi_1}, S_{l,\varphi_2}$ dengan

$S_{k,\varphi_1}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi_1 \end{pmatrix}$, dan

$S_{l,\varphi_2}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.l \\ \phi + \varphi_2 \end{pmatrix}, k,l \geq 0, 0° \leq \varphi_1 < 360°, 0° \leq \varphi_2 < 360°, \forall \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R$

Maka $\left(S_{k,\varphi_1} o S_{l,\varphi_2}\right)\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = S_{k,\varphi_1}\left(S_{l,\varphi_2}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}\right) = S_{k,\varphi_1}\begin{pmatrix} r.l \\ \phi + \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.l.k \\ \phi + \varphi_2 + \varphi_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} r.m \\ \phi + \psi \end{pmatrix}, m \geq 0, 0° \leq \psi < 360°.$$

Jadi $\left(S_{k,\varphi_1} o S_{l,\varphi_2}\right) = S_{m,\psi}$,dengan $S_{m,\psi} \in S^2$

d) Elemen invers

Jika diambil sebarang $S_{k,\varphi} \in S^2$ dengan $S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi \end{pmatrix}$ maka invers dari

$S_{k,\varphi}$ adalah $S^{-1}_{k,\varphi} = S_{1/k, -\varphi+360°}$, $\forall\ 1/k \geq 0, 0° \leq -\varphi + 360° < 360°$, sebab

$\left(S_{k,\varphi} o S^{-1}_{k,\varphi}\right)\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = S_{k,\varphi}\left(S^{-1}_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}\right) = S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r.1/k \\ \phi - \varphi + 360° \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} r.1/k.k \\ \phi - \varphi + 360° + \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = S_{1,0°}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$$

$\left(S^{-1}_{k,\varphi} o S_{k,\varphi}\right)\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = S^{-1}_{k,\varphi}\left(S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}\right) = S^{-1}_{k,\phi}\begin{pmatrix} r.k \\ \phi + \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k.1/k \\ \phi + \varphi - \varphi + 360° \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = S_{1,0°} \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$$

Jadi $S_{k,\varphi} o S_{k,\varphi}^{-1} = S_{k,\varphi}^{-1} o S_{k,\varphi} = S_{1,0°}$ dengan $S_{k,\varphi}^{-1} \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.\frac{1}{k} \\ \phi - \varphi + 360° \end{pmatrix}$

Jadi S^2 merupakan subgrup dari $(\mathscr{T}, o)$.

C. Homomorfisma

Di sini akan didefinisikan pemetaan dari suatu grup ke grup yang lain.

Definisi III.3

Andaikan $(G, *)$ grup dan $(K,\#)$ grup. Pemetaan $\theta : G \to K$ disebut homomorfisma , jika $\theta(a * b) = \theta(a) \# \theta(b)$, $\forall a,b \in G$.

Definisi III.4

Andaikan $(G, *)$ grup dan $(K,\#)$ grup dan pemetaan $\theta : (G, *) \to (K,\#)$ homomorfisma ,

a. Jika θ merupakan pemetaan surjektif maka θ disebut *Epimorfisma.*

b. Jika θ merupakan pemetaan injektif maka θ disebut *Monomorfisma.*

c. Jika θ sekaligus Epimorfisma dan Monomorfisma maka θ disebut *Isomorfisma*. Apabila ada isomorfisma $\theta : (G,*) \to (K,\#)$ maka G dikatakan *isomorfis* dengan K, dan ditulis $(G, *) \approx (K,\#)$.

d. Jika θ isomorfisma dari G ke G maka θ disebut *Automorfisma.*

Teorema III.2

Diberikan grup $(G, *)$ dan $(K,\#)$ jika $\theta : (G, *) \rightarrow (K,\#)$ homomorfisma maka berlaku :

a. $\theta(e_G) = e_K$.

b. $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$, $\forall\ a \in G$.

c. $\theta(a^n) = (\theta(a))^n$, $\forall\ n \in Z$, $\forall\ a \in G$.

d. $\theta(G)$ subgrup dalam K.

e. Jika θ pemetaan injektif, maka $G \approx \theta(G)$.

Bukti:

a. Diketahui $(G, *)$ grup dan e_G elemen identitas dalam G,

maka $e_G * e_G = e_G$,

sehingga $\theta(e_G) = \theta(e_G * e_G)$

$= \theta(e_G) \# \theta(e_G)$, karena θ pemetaan G ke K homomorfisma

Padahal $\theta(e_G) \in K$ dan e_K adalah elemen identitas dari K maka,

$\theta(e_G) = \theta(e_G) \# e_K$

$\theta(e_G) \# \theta(e_G) = \theta(e_G) \# e_K$, dengan hukum kanselasi kiri maka

$\theta(e_G) = e_K$.

b. Ambil sebarang $a \in G$ maka $(\exists\ a^{-1}) \in G$ sehingga

$a * a^{-1} = e_G$

$\theta(a * a^{-1}) = \theta(e_G)$, karena θ pemetaan dari G ke K.

$\theta(a) \# \theta(a^{-1}) = e_K$, karena θ homomorfisma dan menurut (a).

Perhatikan bahwa $\theta(a) \in K$ dan $(K,\#)$ grup maka $(\exists\ (\theta(a))^{-1} \in K)$ sehingga,

$\theta(a) \# (\theta(a))^{-1} = e_K$

$\theta(a) \# (\theta(a))^{-1} = \theta(a) \# \theta(a^{-1})$, dengan hukum kanselasi kiri maka

$(\theta(a))^{-1} = \theta(a^{-1})$

c. Dibuktikan dengan induksi matematis,

- dibuktikan pernyataan benar untuk n = 0,

$\theta(a^0) = \theta(e_G)$

$= e_K$

$= (\theta((a))^0$

Jadi pernyataan benar untuk n = 0

- dibuktikan pernyataan benar untuk n = 1,2,3,...

andaikan pernyataan benar untuk n = k , akan dibuktikan untuk n = k+1 pernyataan tersebut benar.

Andaikan pernyataan benar untuk n = k maka

$\theta(a^k) = \theta(a))^k$, sehingga

$\theta(a^{k+1}) = \theta(a^k * a)$

$= \theta(a^k) \# \theta(a)$

$= (\theta(a))^k \# \theta(a)$

$= (\theta(a))^{k+1}$

- dibuktikan pernyataan benar untuk n = -1,-2,-3,...

Andaikan benar untuk –n = k atau n = -k, yaitu

$$\theta(a^{-k}) = \theta \underbrace{(a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1})}_{\text{k suku}}$$

$$= \theta((a^{-1})^{k}),$$

Dibuktikan benar untuk –n = k+1 atau n = -(k+1),

$$\theta(a^{-(k+1)}) = \theta \underbrace{(a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1})}_{\text{(k+1) suku}}$$

$$= \theta \underbrace{(a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1})}_{\text{k suku}} \# \theta(a^{-1})$$

$$= (\theta(a))^{-k} \# \theta(a)^{-1}$$

$$= (\theta(a))^{-(k+1)}$$

Jadi pernyataan benar untuk n = -(k+1) atau –n = k+1

Dari hasil langkah-langkah induksi matematis di atas dapat disimpulkan $\theta(a^{n}) = (\theta(a))^{n}$, $\forall$ n$\in Z$.

d. Diketahui $(G, *)$ grup dan $\theta : G \to K$

- Dibuktikan $\theta(G) \neq \varnothing$

  $\theta(G)$: $\{y \in K | (\exists a \in G) y = \theta(a)\}$

  menurut (a) $\theta(e_G) = e_K$.

  K grup maka $e_K \in K$, sehingga $e \in \theta(G)$.

  Jadi $\theta(G) \neq \varnothing$.

- Dibuktikan $\theta(G)$ tertutup, ambil $x,y \in \theta(G)$ maka $(\exists\ a,b \in G)$ sehingga berlaku $x = \theta(a)$ dan $y = \theta(b)$.

  Sehingga $x \# y = \theta(a) \# \theta(b)$

$= \theta(a * b)$.

Jadi $(\exists\ (a * b) \in G)$ sehingga berlaku $x \# y = \theta(a * b)$

yang berarti $x \# y \in \theta(G)$,

Jadi $\theta(G)$ tertutup.

- Dalam $\theta(G)$ terdapat invers, jika diambil sebarang $x \in \theta(G)$ maka ada $a \in G$ sehingga $x = \theta(a)$.

Karena $x \in K$ maka $x^{-1} \in K$,

$x^{-1} = \theta(a)^{-1} = \theta(a^{-1})$, dengan $a^{-1} \in G$

Jadi $(\exists\ a^{-1} \in G)$ sehingga berlaku $x^{-1} = \theta(a^{-1})$

Jadi $x^{-1} \in \theta(G)$.

Dari penjelasan di atas terbukti bahwa $\theta(G)$ subgrup dari G.

e. $\theta(G)$ bayangan (daerah hasil) dari G sehingga pemetaan $\theta : G \to \theta(G)$ surjektif.

Karena $\theta : G \to K$ injektif dan $\theta(G) \subseteq K$ maka pemetaan $\theta : G \to \theta(G)$ juga injektif.

Karena $\theta : G \to \theta(G)$ homomorfisma yang injektif dan surjektif, maka $\theta : G \to \theta(G)$ isomorfisma sehingga $G \approx \theta(G)$.

Contoh 3.14

Pada contoh 3.2 diketahui bahwa $(R\text{-}\{0\},\times)$ merupakan grup dan menurut contoh 3.11 D^2 juga merupakan grup, maka akan diperlihatkan bahwa

θ : R-{0}→ D^2 dengan definisi θ (k) = D_k, $k \in R$-{0}, $D_k \in D^2$ merupakan isomorfisma grup.

Akan diperlihatkan dahulu bahwa θ merupakan pemetaan, akan ditunjukkan bahwa semua anggota R-{0} mempunyai kawan di D^2, diambil sebarang

$l \in R$-{0} maka $D_l \in D^2$ sedemikian hingga $D_l = \theta(l)$.

Jadi $(\forall l \in R-\{0\})(\exists D_l \in D^2)\ D_l = \theta(l)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota R-{0}di D^2 tunggal,

diambil sebarang $k,l \in R$-{0} sedemikian hingga $k = l$ maka $D_l = D_k$ sehingga

$\theta(k) = \theta(l)$. Jadi $(\forall k,l \in R-\{0\})(k = l \Rightarrow \theta(k) = \theta(l))$.

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma ,

diambil sebarang $k,l \in R$-{0} maka $\theta(k \times l) = D_{(k \times l)}$.

Menurut definisi D^2,

$$D_{(k \times l)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k \times l).x \\ (k \times l).y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.(l \times x) \\ k.(l \times y) \end{pmatrix} = (D_k o\, D_l)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi, $\theta(k \times l) = D_k o\, D_l = \theta(k) o\, \theta(l)$

Dan akan diperlihatkan bahwa θ injektif,

diambil sebarang $k,l \in R$-{0} sedemikian hingga $\theta(k) = \theta(l)$, atau $D_k = D_l$

Menurut definisi, $D_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$

$$D_l\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l.x \\ l.y \end{pmatrix}$$

sehingga jika $D_k = D_l$ maka $\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l.x \\ l.y \end{pmatrix}$ dan didapat $k = l$.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang $D_k \in D^2$ maka ada $k \in R$-{0} sehingga $\theta(k) = D_k$

$((\forall D_k \in D^2) | (\exists k \in R - \{0\}) \theta(k) = D_k)$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $\theta : R\text{-}\{0\} \to D^2$ isomorfisma.

Contoh 3.15

Pada contoh 3.4 diketahui bahwa (**C**,+)merupakan grup dan menurut contoh 3.10 T^2 juga merupakan grup, maka akan diperlihatkan bahwa $\theta : \mathbf{C} \to T^2$ dengan definisi $\theta(a + b\,i) = T_{a,b}$, $\forall a,b \in R$ merupakan isomorfisma grup.

Akan diperlihatkan dahulu bahwa θ merupakan pemetaan,

akan ditunjukkan bahwa semua anggota **C** mempunyai kawan di T^2,

diambil sebarang $z = a + b\,i \in \mathbf{C}$ maka $T_{a,b} \in T^2$ sedemikian hingga

$T_{a,b} = \theta(a+b\,i)$.

Jadi $(\forall z = a + bi \in \mathbf{C})$ $(\exists T_{a,b} \in T^2)$ $T_{a,b} = \theta(a + bi)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota **C** di T^2 tunggal,

diambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ sedemikian hingga $z_1 = z_2$,

maka $a_1 + b_1\,i = a_2 + b_2\,i$, karena $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

sehingga $T_{a_1,b_1} = T_{a_2,b_2}$ dan didapat $\theta(a_1 + b_1\,i) = \theta(a_2 + b_2\,i)$.

Jadi $(\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C})$ $(z_1 = z_2 \Rightarrow \theta(z_1) = \theta(z_2))$

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma ,

diambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, maka

$$\theta(z_1 + z_2) = \theta((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = \theta((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i).$$

$$= T_{(a_1+a_2),(b_1+b_2)}$$

Menurut definisi T^2,

$$T_{(a_1+a_2),(b_1+b_2)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (a_1 + a_2) \\ y + (b_1 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + a_1) + a_2 \\ (y + b_1) + b_2 \end{pmatrix} = (T_{a_1,b_1} o T_{a_2,b_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2.$$

Jadi, $\theta(z_1 \times z_2) = T_{a_1,b_1} o T_{a_2,b_2} = \theta(z_1) o \theta(z_2)$

Dan akan diperlihatkan bahwa θ injektif,

diambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ sedemikian hingga $\theta(z_1) = \theta(z_2)$, atau $T_{a_1,b_1} = T_{a_2,b_2}$

maka $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

sehingga didapat $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2$$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang $T_{a,b} \in T^2$, maka ada $a, b \in R$ sehingga terdapat $z = a + b\,i \in \mathbf{C}$

sehingga $\theta(a + bi) = T_{a,b}$

$((\forall T_{a,b} \in T^2) | (\exists z = a + bi \in \mathbf{C})\, \theta(a + bi) = T_{a,b}$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $\theta : \mathbf{C} \rightarrow T^2$ isomorfisma.

Contoh 3.16

Pada contoh 3.5 Diketahui bahwa (**C**-{0+0i},×)merupakan grup dan menurut contoh 3.15 S^2 juga merupakan grup, maka akan diperlihatkan bahwa θ : **C**-{0+0i}→ S^2 dengan definisi $\theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = S_{k,\varphi}$, $k \geq 0$, $S_{k,\varphi} \in S^2$,$0° \leq \varphi < 360°$ merupakan isomorfisma grup.

Akan diperlihatkan dahulu bahwa θ merupakan pemetaan,

akan ditunjukkan bahwa semua anggota C-{0+0i} mempunyai kawan di S^2, diambil sebarang $k \geq 0$, dan $0° \leq \varphi < 360°$ maka $S_{k,\varphi} \in S^2$ sedemikian hingga $S_{k,\varphi} = \theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi)$

Jadi $(\forall k \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°)\ (\exists S_{k,\varphi} \in S^2)\ S_{k,\varphi} = \theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi)$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota **C**-{0+0i}di S^2 tunggal,

diambil sebarang $k, l \geq 0$, dan $0° \leq \varphi < 360°$, $0° \leq \psi < 360°$ sedemikian hingga $k = l$ dan $\varphi = \psi$ maka $S_{k,\varphi} = S_{l,\psi}$

sehingga $\theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = \theta(l\cos\psi + il\sin\psi)$

Jadi $(\forall k, l \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°, 0° \leq \psi < 360°)$

$(k = l \wedge \varphi = \psi \Rightarrow \theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = \theta(k\cos\psi + ik\sin\psi))$.

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma ,

diambil sebarang $k, l \geq 0$, dan $0° \leq \varphi < 360°$, $0° \leq \psi < 360°$ maka

$\theta((k\cos\varphi + ik\sin\varphi)(l\cos\psi + il\sin\psi) = S_{kl,(\varphi+\psi)}$.

Menurut definisi S^2,

$$S_{kl,(\varphi+\psi)}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(k.l) \\ \phi+(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r.l)k \\ (\phi+\varphi)+\psi \end{pmatrix} = (S_{k,\varphi} o\, S_{l,\psi})\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2$$

Jadi, $\theta((k\cos\varphi + ik\sin\varphi)(l\cos\psi + il\sin\psi)) =$

$\theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi)\; o\; \theta(k\cos\psi + ik\sin\psi)$.

Dan akan diperlihatkan bahwa θ injektif,

diambil sebarang $k,l \geq 0$, dan $0° \leq \varphi < 360°$, $0° \leq \psi < 360°$ sedemikian hingga $\theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = \theta(k\cos\psi + ik\sin\psi)$ atau $S_{k,\varphi} = S_{l,\psi}$

Menurut definisi, $S_{k,\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.k \\ \phi+\varphi \end{pmatrix}$

$$S_{l,\psi}\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.l \\ \phi+\psi \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \in R^2$$

sehingga jika $S_{k,\varphi} = S_{l,\psi}$ maka $\begin{pmatrix} r.k \\ \phi+\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.l \\ \phi+\psi \end{pmatrix}$ dan didapat $k = l$ dan $\varphi = \phi$.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang $S_{k,\varphi} \in S^2$ maka ada $k \geq 0$, dan $0° \leq \varphi < 360°$ sehingga $\theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = S_{k,\varphi}$

$((\forall S_{k,\varphi} \in S^2) | (\exists k \geq 0, 0° \leq \varphi < 360°)\; \theta(k\cos\varphi + ik\sin\varphi) = S_{k,\varphi})$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa θ : C-{0+0i}$\rightarrow$ S^2 isomorfisma.

Contoh 3.17

Pada contoh 3.7 diketahui bahwa (F, $\times$) merupakan grup dan pada contoh 3.6 (E,+) juga merupakan grup, maka akan diperlihatkan bahwa pemetaan θ : E $\rightarrow$ F dengan definisi $\theta\ (am) = a^{m}, m \in Z$ dan $a \in R$-{0}, $am \in$E merupakan isomorfisma grup.

Pertama akan diperlihatkan bahwa θ merupakan pemetaan,

akan ditunjukkan bahwa semua anggota E mempunyai kawan di F,

diambil sebarang $am \in$E maka $a^{m} \in$F sedemikian hingga $a^{m} = \theta(am)$

Jadi $(\forall\, am \in E)\ (\exists a^{m} \in F)\ \ a^{m} = \theta(am)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap kawan E di F tunggal, diambil sebarang x_1, $x_2 \in$E dengan $x_1 = am$, dan $x_2 = an$ sedemikian hingga $x_1 = x_2$ maka $a^m = a^n$, karena $x_1 = x_2$ sehingga $m = n$

Dan didapat $a^m = a^n$ atau $\theta(x_1) = \theta(x_2)$

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma,

jika diambil $x,y \in$E, dengan $x = am$ dan $y = an$

maka $\theta(x + y) = \theta(am + an) = \theta(a(m + n)) = a^{(m+n)}$

$= a^{m} \times a^{n} = \theta(am) \times \theta(an)$

$= \theta(x) \times \theta(y)$

Jadi $\theta(x + y) = \theta(x) \times \theta(y)$, $\forall\, x,y \in$E

Kemudian diperlihatkan bahwa θ injektif, diambil sebarang $x,y \in$E dengan $x = am$ dan $y = an$,

sedemikian hingga $\theta(x) = \theta(y)$

maka $\theta(am) = \theta(an)$

didapat $a^m = a^n$, didapat $m = n$

sehingga $am = an$ atau $x = y$

Jadi $(\forall\, x,y \in E \mid \theta(x) = \theta(y) \Rightarrow x = y)$ atau θ injektif.

Selanjutnya diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang $w \in F$ dengan $w = a^m$, untuk $m \in Z$ dan $a \in R\text{-}\{0\}$ sehingga ada $v = am \in E$ sehingga $\theta(v) = w$.

Jadi $((\forall\, w \in F \mid (\exists\, v \in E)\ \theta(v) = w))$

Jadi θ surjektif.

Dari uraian di atas maka terbukti bahwa $\theta : E \rightarrow F$ isomorfisma.

Contoh 3.18

Pada contoh 3.1 diketahui bahwa $(R,+)$ merupakan grup dan menurut contoh 3.3 diperlihatkan $(R^+, \times)$ juga merupakan grup, maka akan diperlihatkan bahwa

$\theta : R^+ \rightarrow R$ dengan definisi $\theta(x) = {}^{10}\log x, \forall x \in R^+$ merupakan isomorfisma grup.

Akan diperlihatkan dahulu bahwa θ merupakan pemetaan,

akan ditunjukkan bahwa semua anggota R^+ mempunyai kawan di R ,

diambil sebarang $x \in R^+$ maka ${}^{10}\log x \in R$ sedemikian hingga ${}^{10}\log x = \theta(x)$.

Jadi $(\forall x \in R^+)\ (\exists\, {}^{10}\log x \in R)\ {}^{10}\log x = \theta(x)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota R^+ di R tunggal,

diambil sebarang $x_1, x_2 \in R^+$ sedemikian hingga $x_1 = x_2$

maka ${}^{10}\log x_1 = {}^{10}\log x_2$ sehingga $\theta(x_1) = \theta(x_2)$.

Jadi $(\forall x_1, x_2 \in R^+)\ (x_1 = x_2 \Rightarrow \theta(x_1) = \theta(x_2))$

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma ,

diambil sebarang $x_1, x_2 \in R^+$, maka

$\theta(x_1 \times x_2) = {}^{10}\log(x_1 \times x_2) = {}^{10}\log x_1 + {}^{10}\log x_2 = \theta(x_1) + \theta(x_2)$

Dan akan diperlihatkan bahwa θ injektif,

diambil sebarang $x_1, x_2 \in R^+$ sedemikian hingga $\theta(x_1) = \theta(x_2)$, atau ${}^{10}\log x_1 = {}^{10}\log x_2$

maka $x_1 = x_2$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang ${}^{10}\log x \in R$, maka ada x sehingga $\theta(x) = {}^{10}\log x$.

Jadi $((\forall {}^{10}\log x \in R) | (\exists x \in R^+) \theta(x) = {}^{10}\log x)$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $\theta : R^+ \to R$ isomorfisma.

Contoh 3.19

Pada contoh 3.8 diketahui bahwa $(M^1_{2\times 2}(R), \times)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks dan menurut contoh 3.12 P^2 merupakan subgrup dari $(\mathcal{T}, o)$, sehingga (P^2, o) merupakan grup terhadap operasi komposisi. Maka di sini akan diperlihatkan bahwa $\theta : M^1_{2\times 2}(R) \to \mathrm{P}^2$ dengan definisi

$\theta\ (\mathrm{A}) = P_{0,\phi}, \forall \mathrm{A} \in M^1_{2\times 2}(R), P_{0,\phi} \in \mathrm{P}^2$,$0° \leq \phi < 360°$ merupakan isomorfisma grup.

Akan diperlihatkan dahulu bahwa θ merupakan pemetaan, akan ditunjukkan bahwa semua anggota $M^1_{2\times2}(R)$ mempunyai kawan di P^2,

diambil sebarang $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^1_{2\times2}(R)$, maka $P_{0,\phi} \in P^2$ sedemikian hingga

$$P_{0,\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \sin\phi \end{pmatrix} = \theta(A),\ 0° \le \phi < 360°$$

Jadi $(\forall A \in M^1_{2\times2}(R)(\exists P_{0,\phi} \in P^2)(P_{0,\phi} = \theta(A))$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kawan setiap anggota $M^1_{2\times2}(R)$ di P^2 tunggal,

diambil sebarang $A_1, A_2 \in M^1_{2\times2}(R)$ dengan $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$,

sedemikian hingga $A_1 = A_2$ maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$P_{0,\phi_1} = P_{0,\phi_2}$$

maka $\theta(A_1) = \theta(A_2)$

Jadi $(\forall A_1, A_2 \in M^1_{2\times2}(R)(A_1 = A_2 \Rightarrow \theta(A_1) = \theta(A_2))$.

Kemudian akan diperlihatkan θ homomorfisma ,

diambil sebarang $A_1, A_2 \in M^1_{2\times2}(R)$ maka $\theta(A_1 \times A_2) = P_{0,\phi_1} \circ P_{0,\phi_2}$.

Menurut definisi P^2,

$$P_{0,\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2, 0° \le \phi < 360°$$

$$= A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

maka $A_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A_1 \times A_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1\left(A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A_1\left(P_{0,\phi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$$= P_{0,\phi_1}\left(P_{0,\phi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = P_{0,\phi_1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} o P_{0,\phi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi $\theta(A_1 \times A_2) = P_{0,\phi_1} o P_{0,\phi_2} = \theta(A_1) o \theta(A_2)$

Dan akan diperlihatkan bahwa θ injektif,

diambil sebarang $A_1, A_2 \in M^1_{2\times 2}(R)$ sedemikian hingga $\theta(A_1) = \theta(A_2)$

atau $P_{0,\phi_1} = P_{0,\phi_2}$,maka $\phi_1 = \phi_2, 0° \leq \phi_1 < 360°$

karena $P_{0,\phi_1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P_{0,\phi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sehingga $A_1 = A_2$.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa θ juga surjektif,

diambil sebarang $P_{0,\phi} \in P^2$,maka ada $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)$

sehingga $\theta(A_1) = P_{0,\phi_1}$

Jadi $\left((\forall P_{0,\phi_1} \in P^2) \middle| \left(\exists A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \in M^1_{2\times 2}(R)\right) \theta(A_1) = P_{0,\phi_1}\right)$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $\theta : M^1_{2\times 2}(R) \to P^2$ isomorfisma.

BAB IV

PENERAPAN

Dalam bab III telah dibahas tentang grup dan sifat-sifatnya, serta beberapa grup khusus, maka sesuai dengan tujuan skripsi ini akan diperlihatkan hubungan antara grup dengan beberapa topik dalam matematika di sekolah menengah.

A. Penerapan pada penyelesaian persamaan sederhana

Penerapan 1 : Sifat-sifat dari grup dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal , dengan a,b sebarang anggota himpunan S dan x juga ada dalam himpunan S .

Menurut teorema dasar grup (e) , bila sebuah himpunan S yang dilengkapi dengan operasi "*" dan membentuk suatu grup maka terdapat penyelesaian tunggal dalam S untuk setiap persamaan $a*x = b$ dan $y*a = b$, $\forall\ a,b \in S$, karena adanya invers untuk setiap elemen a dalam S.

Sehingga bila dihubungkan dengan teorema di atas, jika suatu himpunan membentuk grup terhadap operasi "+", maka setiap persamaan $a + x =$ b mempunyai penyelesaian tunggal. Misalnya dalam himpunan bilangan bulat Z, persamaan $a + x = b$ akan selalu mempunyai penyelesaian tunggal dalam Z, $\forall\ a,b \in Z$, karena diketahui himpunan bilangan bulat Z membentuk grup terhadap operasi "+".

Begitu pula dalam himpunan bilangan real R, dan himpunan bilangan rasional Q, persamaan $a + x = b$ juga akan mempunyai penyelesaian tunggal. Lain halnya dengan himpunan bilangan irasional, persamaan $a + x = b$ belum tentu mempunyai penyelesaian tunggal dalam himpunan bilangan irasional, karena himpunan bilangan irasional tidak membentuk grup terhadap operasi "+".

Jadi jelaslah bahwa kita bisa melihat dalam suatu himpunan bilangan, persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal dalam himpunan bilangan tersebut bila himpunan bilangan tersebut membentuk grup terhadap operasi penjumlahan.

Penerapan 2 : Penyelesaian tidak tunggal dari persamaan sederhana perkalian $ax = b$ dapat diperlihatkan menggunakan grup.

Seperti halnya *penerapan* 1, dalam himpunan bilangan real bukan nol R-$\{0\}$, persamaan $ax = b$ selalu mempunyai penyelesaian tunggal, karena himpunan bilangan R-$\{0\}$ membentuk suatu grup terhadap operasi perkalian. Sedangkan penyelesaian persamaan $ax = b$, $\forall a,b \in R$ belum tentu tunggal karena himpunan bilangan real R tidak membentuk suatu grup terhadap operasi perkalian.

Hal ini disebabkan tidak semua bilangan real mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu 0. Berikut akan diperlihatkan persamaan sederhana perkalian $ax = b$ yang penyelesaiannya belum tentu tunggal,

(i) bila $a = 0$ dan $b = 0$ maka

$0x = 0$, persamaan ini merupakan persamaan yang mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

(ii) bila $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka

$0x = b$, ini merupakan persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian.

(iii) bila $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka

$ax = 0$, persamaan akan mempunyai penyelesaian tunggal yaitu 0.

Karena diketahui bahwa himpunan bilangan real terhadap operasi perkalian bukan merupakan grup maka persamaan $ax = b$, $\forall\ a,b \in R$ belum tentu mempunyai penyelesaian tunggal.

Jadi jika dalam suatu himpunan bilangan membentuk grup terhadap operasi perkalian, maka persamaan $ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal dalam himpunan bilangan tersebut.

Penerapan 3 : Dengan menggunakan grup, menyelesaikan sistem persamaan linear dapat dihubungkan dengan penyelesian dari persamaan sederhana.

Sistem persamaan linear yang umum dijumpai di sekolah menengah adalah persamaan yang berbentuk ,

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}\right\}$$

Dalam pengertian matriks, sistem persamaan di atas menjadi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini grup yang diperlukan adalah grup matriks invertible 2×2 terhadap operasi perkalian yang berbentuk, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$.

Persamaan matriks di atas terdiri dari 2 sistem persamaan linear, yaitu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{....(1)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \text{....(2)}$$

Perhatikan bahwa persamaan (1) di atas berbentuk AX = B, dan menyelesaikan persamaan ini sama halnya dengan menyelesaikan persamaan sederhana perkalian $ax = b$ (pada *penerapan* 2). Begitu pula dengan ketunggalan penyelesaiannya, yaitu AX =B mempunyai penyelesaian tunggal bila dan hanya bila A mempunyai invers. Karena kita bekerja dengan matriks, dan matriks A mempunyai invers bila determinan matriks A ≠ 0, maka sistem persamaan linear AX = B mempunyai penyelesaian tunggal bila $ad - bc \neq 0$, dan sistem persamaan linear tersebut belum tentu mempunyai penyelesaian tunggal,

1) bila determinan A = $ad - bc = 0$ dan B merupakan matriks nol , maka persamaan akan mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

2) bila determinan A = $ad - bc = 0$ dan B bukan merupakan matriks nol, maka persamaan AX = B akan mempunyai dua kemungkinan penyelesaian,

   (i) bila salah satu persamaan linear dalam masing-masing sistem merupakan kelipatan dari persamaan yang lain, maka persamaan AX =B akan mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

   (ii) bila terdapat sistem dengan salah satu persamaan linearnya bukan merupakan kelipatan dari persamaan yang lain, maka persamaan AX =B tidak akan mempunyai penyelesaian.

3) bila determinan A = $ad - bc \neq 0$ dan B merupakan matriks nol , maka persamaan akan mempunyai penyelesaian tunggal yaitu nol.

B. Penerapan pada operasi bilangan

Penerapan 4 : Sifat dalam perkalian bilangan R-{0} dapat dijelaskan dan divisualisasikan melalui dilatasi, karena grup bilangan real bukan nol terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup dilatasi

Jika dua grup membentuk isomorfisma grup, maka sifat-sifat dalam grup yang satu dapat dijelaskan atau diilustrasikan dengan menggunakan sifat-sifat dalam grup yang lain. Karena telah diketahui bahwa grup bilangan real bukan nol terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup dilatasi (contoh 3.14), maka sifat-sifat dari perkalian R-{0} dapat diterangkan dengan menggunakan pendekatan dilatasi. Misalkan jika kita mengalikan suatu bilangan dengan 2, kemudian hasilnya dikalikan dengan 3, maka akan sama dengan mengalikan bilangan itu dengan 6. Hal ini sama dengan mengerjakan dilatasi dua kali, pertama bilangan itu didilatasikan dengan koefisien 2, kemudian dilanjutkan dilatasi kedua dengan koefisien 3, yang hasilnya akan sama dengan mendilatasikan bilangan itu dengan koefisien 6.

Selain hal di atas sifat dari perkalian yang dapat dijelaskan dengan dilatasi adalah perkalian dua bilangan negatif akan menghasilkan suatu bilangan yang positif. Perhatikan bahwa untuk sebarang $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ berlaku,

$$D_{-k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k.x \\ -k.y \end{pmatrix}, k \in R-\{0\}, \forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \ldots(1)$$

$$\left(P_{0,180^\circ} \, o \, D_k\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(P_{0,180^\circ}\left(D_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right), P_{0,180^\circ} \in \mathrm{P}^2, k \in R-\{0\}, \forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$$

$$= \left(P_{0,180^\circ}\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k.x \\ -k.y \end{pmatrix} \ldots(2)$$

dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $D_{-k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(P_{0.180^\circ} \, o \, D_k\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $k \in R-\{0\}, \forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$, sehingga $D_{-k} = P_{0,180^\circ} o \, D_k, k \in R-\{0\}$. Diketahui bahwa grup bilangan real bukan nol R-$\{0\}$ terhadap operasi perkalian dan grup dilatasi membentuk isomorfisma grup dengan definisi $\theta(k) = D_k, k \in R-\{0\}$, $D_k \in \mathrm{D}^2$, sehingga untuk setiap $k \in R$-$\{0\}$ akan dikawankan dengan $D_k \in D^2$. Berikut akan diperlihatkan bahwa $D_{-k} o D_{-l} = D_{k\times l}, -k, -l \in R-\{0\}$ dengan $k > 0, l > 0$.

Karena $D_{-k} = P_{0,180^\circ} o D_k$, maka

$$D_{-k} o D_{-l} = ((P_{0,180^\circ} o D_k) o (P_{0,180^\circ} o D_l)) = (((P_{0,180^\circ} o D_k) o P_{0,180^\circ}) o D_l)$$

$$= (((D_k o P_{0,180^\circ}) o P_{0,180^\circ}) o D_l) = ((D_k o (P_{0,180^\circ} o P_{0,180^\circ})) o D_l)$$

$$= ((D_k o P_{0,360^\circ}) o D_l) = D_k o D_l = D_{k\times l}$$

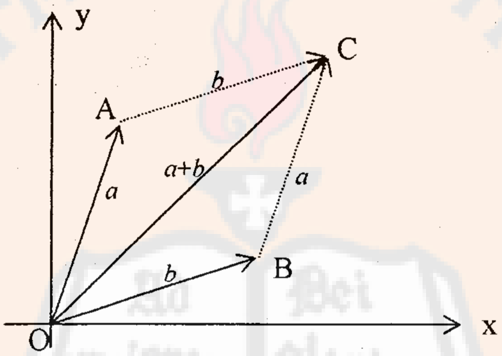
dengan kata lain jika suatu bilangan negatif $-k$, dengan $k > 0$, dikalikan dengan bilangan negatif $-l$, untuk $l > 0$, maka sama dengan mengerjakan dilatasi dengan koefisien $k \times l$, yang akan dikawankan dengan $k \times l \in R$-{0}, dengan $k \times l > 0$. Hal ini berarti bahwa jika suatu bilangan negatif dikalikan dengan bilangan negatif akan menghasilkan bilangan positif.

Sebagai contoh, -3 × -2, karena grup himpunan bilangan real bukan nol terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup dilatasi, maka -3 × -2 dikawankan dengan $D_{-3} o D_{-2} = D_{2\times 3} = D_6$, di mana $D_6 \in D^2$ akan dikawankan dengan $6 \in R$-{0}, sehingga -3 × -2 = 6.

Jadi jika kita kesulitan dalam memahami sifat-sifat dalam perkalian bilangan R-{0} maka sifat-sifat yang ada dalam dilatasi dapat digunakan untuk menjelaskan sifat dalam perkalian bilangan R-{0} tersebut.

Penerapan 5 : Grup bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup translasi, sehingga sifat dalam penjumlahan bilangan kompleks dapat divisualisasikan melalui translasi.

Penjumlahan dari dua vektor translasi yang berasal dari titik pangkal yang sama akan memenuhi suatu hukum jajaran genjang,



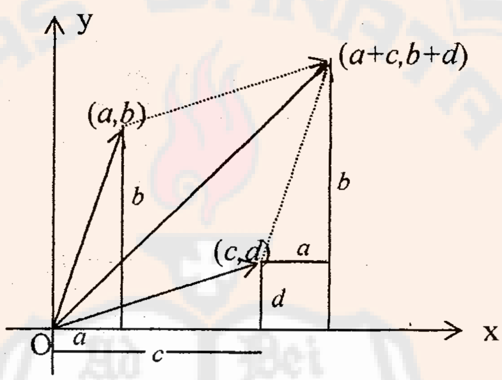
Gambar 1

di mana $\underline{OA} = \underline{BC}$ dan $\underline{OB} = \underline{AC}$ sehingga $\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OA} + \underline{AC} = \underline{OC}$

Sama halnya dengan *penerapan* 4, karena grup bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup translasi maka aturan dari penjumlahan dua vektor translasi (hukum jajaran genjang) dapat digunakan untuk memperlihatkan hasil penjumlahan 2 bilangan kompleks.

Diketahui bilangan $a + b\ i$ dapat dinyatakan dengan pasangan terurut (a,b) dan ini dapat dilukiskan dalam bidang koordinat kartesius serta dapat dinyatakan sebagai suatu vektor dengan titik pangkal O dan titik ujung (a,b).

Begitu pula untuk bilangan kompleks $c + d\,i$ dapat dinyatakan sebagai vektor dengan titik pangkal O dan titik ujung (c,d). Karena kedua vektor dari bilangan kompleks ini berasal dari titik pangkal yang sama , yaitu O maka penjumlahan dua vektor ini dapat diperlihatkan menggunakan hukum jajaran genjang, dan titik ujung dari vektor diagonal jajaran genjang tersebut menyatakan hasil penjumlahan dari bilangan kompleks $a + b\,i$ dan $c + d\,i$,



Gambar 2

di mana $z_1 = a + b$ i dan $z_2 = c + d$ i , sehingga $z_1 + z_2 = (a + b\text{ i}) + (c + d\text{ i})$

$$= (a + c) + (c + d)i$$

Jadi jelaslah karena grup bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup translasi, maka aturan penjumlahan dua vektor translasi dapat berlaku pula dalam penjumlahan dua bilangan kompleks yang dinyatakan dengan suatu vektor.

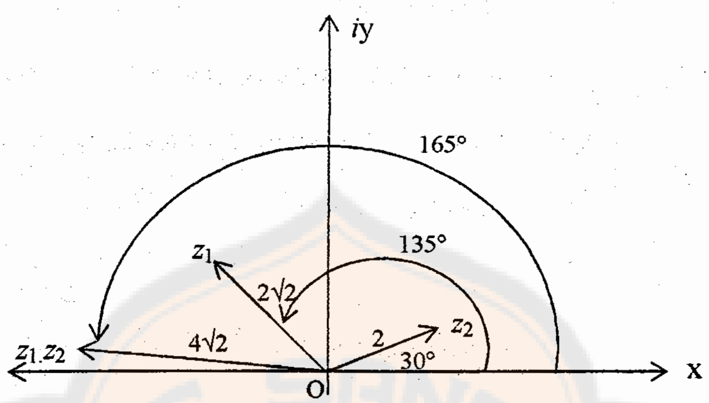
Penerapan 6 : Grup bilangan kompleks bukan nol terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup kesebangunan spiral, sehingga sifat dalam perkalian bilangan kompleks bukan nol dapat dijelaskan melalui kesebangunan spiral.

Seperti halnya *penerapan* 4, karena grup bilangan kompleks bukan nol terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup kesebangunan spiral maka sifat-sifat dari perkalian bilangan kompleks bukan nol dapat dijelaskan dengan menggunakan pendekatan kesebangunan spiral.

Telah diketahui bahwa suatu bilangan kompleks memiliki bentuk polar, yaitu $r\ (cos\ \phi + i\ sin\ \phi)$ di mana r merupakan modulus dari bilangan kompleks tersebut dan sudut ϕ merupakan argumentnya.

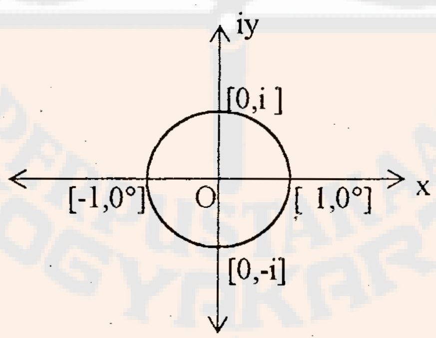
Seperti jika mengalikan bilangan kompleks bukan nol, $z_1 = -2 + 2\,i$ dan $z_2 = \sqrt{3} + i$, maka $z_1 \times z_2 = (-2 + 2\,i)\ (\sqrt{3} + i) = (-2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} - 2)\ i$ di mana bentuk polarnya adalah $z_1 \times z_2 = 4\sqrt{2}\ (\cos 165° + i \sin 165°)$, hal ini sama dengan mengerjakan kesebangunan spiral dua kali berturut-turut, persamaan pertama $[2\sqrt{2}, 135°]$ yang diambil dari bentuk polar z_1 dan dilanjutkan persamaan kedua $[2, 30°]$, sehingga $[2\sqrt{2}, 135°]\ o\ [2, 30°] = [4\sqrt{2}, 165°]$.

Dan karena ini bekerja dalam bentuk polar, maka perkalian dari bilangan kompleks bukan nol ini dapat digambarkan dalam bidang koordinat polar,



Gambar 3

Begitu pula dengan sifat perkalian bilangan kompleks bukan nol, yaitu $i^2 = -1$ dapat diperlihatkan kebenarannya dengan aturan yang ada dalam kesebangunan spiral. Karena untuk i persamaan spiralnya [1,90°] maka untuk i^2 berkorespondensi dengan rotasi 180° yang diidentifikasikan dengan perkalian oleh bilangan real -1, sehingga $i^2 = -1$,



Gambar 4

Jadi untuk mengerjakan perkalian bilangan kompleks bukan nol dan menjelaskan suatu sifat dalam perkalian bilangan kompleks bukan nol bisa menggunakan sifat yang ada dalam kesebangunan spiral.

Penerapan 7 : Grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian, hal ini bisa digunakan untuk menjelaskan cara penulisan $x^0 = 1$ dan $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ untuk $x \neq 0$ dan $x \neq 1$ dalam pangkat bilangan bulat.

Pada contoh 3.17 telah terlihat bahwa grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian membentuk isomorfisma grup, dengan definisi $\theta(am) = a^m$, $a \in R - \{0\}$,$\forall m \in Z$. Karena kedua grup tersebut isomorfis, maka untuk setiap sifat kelipatan bilangan bulat akan bersesuaian dengan sifat pangkat bilangan bulat.

Cara penulisan dari pangkat bilangan bulat untuk $x \neq 0$ dan $x \neq 1$ yang menarik adalah $x^0 = 1$ dan $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, dan cara penulisan tersebut dapat dijelaskan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian sebagai berikut,

- Karena grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian maka $\theta(e_E) = e_F$, sehingga $\theta(x.0) = x^0 = 1$.
- Begitu pula dengan sifat invers dari θ ,

  $\theta(x^{-1}) = (\theta(x))^{-1}$, $\forall x \in E$ sehingga $\theta(-mx) = x^{-m}$ ... (1)

$(\theta(x))^{-1} = (x^m)^{-1} = \frac{1}{x^m} \ldots (2)$

dan didapat $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

Dengan demikian dapat dijelaskan suatu alasan cara penulisan

$x^0 = 1$ dan $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, karena grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan isomorfis dengan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian.

Penerapan 8 : Sifat-sifat logaritma dapat dijelaskan melalui isomorfisma antara grup bilangan real positif terhadap operasi perkalian dan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan.

Menurut contoh.18 grup bilangan real positif terhadap operasi perkalian isomorfis dengan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan dengan definisi $\theta(x) = {}^{10}\log x$, $\forall x \in R^+$. Melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup perkalian bilangan real positif terhadap operasi perkalian dengan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan didapat sifat-sifat di bawah ini,

- θ homomorfisma,

  maka $\theta(x.y) = \theta(x) + \theta(y)$, $x,y \in R^+$ sehingga didapat sifat dari logaritma bahwa, ${}^{10}\log xy = {}^{10}\log x + {}^{10}\log y$

- memenuhi sifat $\theta(e_{R^+}) = e_R$

  sehingga $\theta(1) = {}^{10}\log 1 = 0$ dari sini diketahui bahwa ${}^{10}\log 1 = 0$

- begitu juga dengan inversnya, akan memenuhi $\theta(y^{-1}) = (\theta(y))^{-1}$, $\forall y \in R^+$

  maka $\theta\left(\frac{1}{y}\right) = {}^{10}\log \frac{1}{y}$ ...(1)

  $(\theta(y))^{-1} = \left({}^{10}\log y\right)^{-1} = -{}^{10}\log y$ ...(2)

  sehingga didapat ${}^{10}\log \frac{1}{y} = -{}^{10}\log y$.

- selain sifat-sifat di atas $\theta(x^n) = (\theta(x))^n$, $\forall x \in R^+$, $n \in$ bilangan real, didapat

  $\theta(x^n) = {}^{10}\log x^n$ ...(3)

  $(\theta(x))^n = ({}^{10}\log x)^n$, karena ${}^{10}\log x$ maka $x = 10^{{}^{10}\log x}$

  sehingga

  $({}^{10}\log x)^n = \left({}^{10}\log 10^{{}^{10}\log x}\right)^n = {}^{10}\log 10^{({}^{10}\log x)n} = n\,{}^{10}\log x$

  dan diperoleh $({}^{10}\log x)^n = n\,{}^{10}\log x$ ...(4).

  Dari (3) dan (4) didapat ${}^{10}\log x^n = n\,{}^{10}\log x$

Jadi sifat-sifat dari logaritma dapat dijelaskan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup bilangan real positif terhadap operasi perkalian dan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan.

C. Penerapan pada trigonometri

Penerapan 9: Identitas $\cos(\phi_1+\phi_2)\equiv\cos\phi.\cos\phi_2-\sin\phi_1.\sin\phi_2$ dan $\sin(\phi_1+\phi_2)\equiv\sin\phi_1.\cos\phi_2+\cos\phi_1.\sin\phi_2$, serta $\cos(-\phi)\equiv\cos\phi$ dan $\sin(-\phi)\equiv-\sin\phi$ dapat dijelaskan melalui sifat-sifat isomorfisma antara grup matriks $M^1_{2\times2}(R)$ terhadap operasi perkalian matriks dan grup rotasi.

Rotasi sebesar ϕ pada transformasi $R^2\to R^2$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\forall\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2$. Dan diketahui bahwa grup matriks $M^1_{2\times2}(R)$ terhadap operasi perkalian matriks isomorfis dengan grup rotasi (contoh 3.19), dengan θ : $M^1_{2\times2}(R)\to \mathrm{P}^2$ yang didefinisikan sebagai berikut,

$\theta(\mathrm{A})=P_{0,\phi},\forall\mathrm{A}\in M^1_{2\times2}(R), 0°\le\phi<360°$, sehingga

θ homomorfisma, dan didapat $\theta(\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_2)=\theta(\mathrm{A}_1)o\,\theta(\mathrm{A}_2)=P_{0,\phi_1}o\,P_{0,\phi_2}$

Menurut definisi di P^2, $P_{0,\phi}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\forall\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2$,

maka $P_{0,\phi}=\mathrm{A},\forall\mathrm{A}\in M^1_{2\times2}(R), 0°\le\phi<360°$.

Dalam P^2, $\begin{pmatrix}x^1\\ y^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x.\cos\phi_1-y.\sin\phi_1\\ x.\sin\phi_1+y.\cos\phi_1\end{pmatrix}$ bila diikuti dengan rotasi sebesar ϕ_2,

maka $\begin{pmatrix}x^1\\ y^1\end{pmatrix}$ ditransformasikan ke $\begin{pmatrix}x^{11}\\ y^{11}\end{pmatrix}$ dengan rotasi selanjutnya akan didapat,

$$\begin{pmatrix} x^{11} \\ y^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} x^{1} \\ y^{1} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \right) o \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi_2.\cos\phi_1 - \sin\phi_2.\sin\phi_1 & \cos\phi_2.(-\sin\phi_1) + (-\sin\phi_2).\cos\phi_1 \\ \sin\phi_2.\cos\phi_1 + \cos\phi_2.\sin\phi_1 & \sin\phi_2.(-\sin\phi_1) + \cos\phi_2.\cos\phi_1 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika dengan kata lain, dipandang bahwa $\begin{pmatrix} x^{11} \\ y^{11} \end{pmatrix}$ merupakan transformasi dari $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pada satu rotasi sebesar ($\phi_1 + \phi_2$) didapat,

$$\begin{pmatrix} x^{11} \\ y^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga dari transformasi dua rotasi tersebut didapat identitas cos ($\phi_1 + \phi_2$) dan sin($\phi_1 + \phi_2$), di mana $\cos(\phi_1+\phi_2) \equiv \cos\phi.\cos\phi_2 - \sin\phi_1.\sin\phi_2$ dan $\sin(\phi_1+\phi_2) \equiv \sin\phi_1.\cos\phi_2 + \cos\phi_1.\sin\phi_2$.

Selain hal di atas, identitas dalam trigonometri $\cos(-\phi) \equiv \cos\phi$, dan $\sin(-\phi) \equiv -\sin\phi$ dapat juga dijelaskan di sini. Karena θ isomorfisma maka θ akan memenuhi sifat $\theta(A^{-1}) = (\theta(A))^{-1}, \forall A \in M^{1}_{2\cdot 2}(R)$.

Sehingga $\theta\left(\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ ...(1) dan

$$\left(\theta\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \text{...(2)}$$

Maka dari (1) dan(2) didapat $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix}$

sehingga diperoleh $\cos(-\phi) \equiv \cos\phi$ dan $\sin(-\phi) \equiv -\sin\phi$

Jadi karena grup matriks $M^1_{2\times 2}(R)$ terhadap operasi perkalian matriks isomorfis dengan grup rotasi, maka dari sini dapat dijelaskan identitas-identitas dalam trigonometri, $\cos(\phi_1 + \phi_2) \equiv \cos\phi.\cos\phi_2 - \sin\phi_1.\sin\phi_2$, $\sin(\phi_1 + \phi_2) \equiv \sin\phi_1.\cos\phi_2 + \cos\phi_1.\sin\phi_2$, dan $\cos(-\phi) \equiv \cos\phi$, serta $\sin(-\phi) \equiv -\sin\phi$.

BAB V

KESIMPULAN

Sangat besar manfaat grup dalam mempelajari materi matematika di sekolah menengah. Hal ini dapat terlihat dalam penerapannya.

1. Sifat-sifat grup dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu persamaan sederhana mempunyai penyelesaian tunggal atau tidak dalam semesta pembicaraannya.
2. Sifat-sifat operasi perkalian pada bilangan real tak nol dapat dijelaskan dan divisualisasikan dengan menggunakan isomorfisma antara grup bilangan real tak nol terhadap operasi perkalian dengan grup dilatasi, seperti sifat perkalian dua bilangan negatif dapat dijelaskan dan divisualisasikan melalui dilatasi. Dengan menggunakan isomorfisma antara grup bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan dengan grup translasi, sifat-sifat operasi penjumlahan bilangan kompleks dapat divisualisasikan melalui translasi. Begitu juga dengan memakai isomorfisma antara grup bilangan kompleks bukan nol terhadap operasi perkalian dengan grup kesebangunan spiral, sifat-sifat perkalian bilangan kompleks bukan nol dapat divisualisasikan dan dijelaskan melalui kesebangunan spiral.
3. Cara penulisan bilangan dengan pangkat tak sebenarnya, $x^0 = 1$ dan $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ untuk $x \neq 0$ dan $x \neq 1$ dapat dijelaskan dengan menggunakan isomorfisma antara grup kelipatan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dengan grup pangkat bilangan bulat terhadap operasi perkalian.

Begitu juga sifat-sifat logaritma dapat dijelaskan dengan memakai isomorfisma antara grup bilangan real positif terhadap operasi perkalian dengan grup bilangan real terhadap operasi penjumlahan.

4. Dengan menggunakan isomorfisma antara grup matriks $M^1_{2\times 2}(R)$ terhadap operasi perkalian matriks dan grup rotasi dapat dijelaskan identitas-identitas trigonometri untuk jumlah dua sudut, seperti $\cos(\phi_1 + \phi_2) \equiv \cos\phi.\cos\phi_2 - \sin\phi_1.\sin\phi_2$,
$\sin(\phi_1 + \phi_2) \equiv \sin\phi_1.\cos\phi_2 + \cos\phi_1.\sin\phi_2$, serta identitas-identitas trigonometri untuk sudut negatif, yaitu $\cos(-\phi) \equiv \cos\phi$, dan $\sin(-\phi) \equiv -\sin\phi$.

DAFTAR PUSTAKA

Durbin, John.R. (1985). *Modern Algebra An Introduction , Second Edition.* New York: John Wiley & Sons.

Fraleigh, J.B. (1989). *A First Course in Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company,Inc.

Marpaung.Y. (1997). *Pengantar Teori Himpunan.*Yogyakarta: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma.

Soehakso, R.M.J.T. (1980). *Himpunan, Relasi dan Fungsi*. Yogyakarta: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gajah Mada.

Susanta, B. (1990). *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gajah Mada.

Zalman Usiskin. (1975). *Applications of Groups and Isomorphic Groups To Topics In The Standard Curriculum, Grades 9-11: Part I.* Mathematics Teacher, Volume 68, Nomor 2, Halaman 99-106.

Zalman Usiskin. (1975). *Applications of Groups and Isomorphic Groups To Topics In The Standard Curriculum, Grades 9-11:Part II.* Mathematics Teacher, Volume 68, Nomor 3, Halaman 235-246.