

SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN

SKRIPSI

**Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**



Oleh :

VERONICA SURYANTI

NIM : 971414021

NIRM : 970051120501120019

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2003**

SKRIPSI

SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN

Oleh :

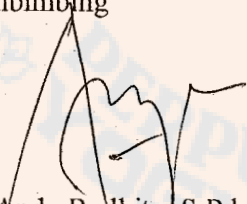
VERONICA SURYANTI

NIM : 971414021

NIRM: 970051120501120019

Telah disetujui oleh:

Pembimbing


M. Andy Rudhito, S.Pd. M.Si

tanggal 2 Juli 2003...

SKRIPSI

SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN

Dipersiapkan dan ditulis oleh

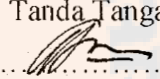
VERONICA SURYANTI

NIM : 971414021

NIRM : 970051120501120019

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 31 Juli 2003 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T	
Anggota	: 1. M. Andy Rudhito, S.Pd. M.Si	
	2. Wanty Widjaja, M.Ed	
	3. Dr. St. Suwarsono	

Yogyakarta, 31 Juli 2003

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma



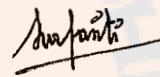
Slamet Soewandi, M.Pd

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 31 Juli 2003

Penulis



Veronica Suryanti

ABSTRAK

Dengan konsep matriks transisi keadaan, sistem waktu diskret linear homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$, $k \geq 0$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$ atau $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,l)\mathbf{x}(l)$, $k \geq l$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(l)$. Dengan menggunakan konsep matriks fundamental, sistem waktu diskret linear homogen mempunyai penyelesaian $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0)$, $k \geq 0$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$ atau $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1}\mathbf{x}(l)$, $k \geq l$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(l)$.

Hubungan antara penyelesaian matriks fundamental $\mathbf{X}(k)$ dari sistem waktu diskret linear homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ dan matriks transisi keadaan adalah $\Phi(k,l) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1}$, $k \geq l$.

Sistem waktu diskret linear homogen digunakan untuk membahas keadaan sistem sosial masyarakat berkaitan dengan jumlah populasinya.

ABSTRACT

With 'state transition matrix's concept, the homogeneous linear discrete-time system $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ has a solution $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$, $k \geq 0$; where $\mathbf{x}(0)$ is an initial state or $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,l)\mathbf{x}(l)$, $k \geq l$; where $\mathbf{x}(l)$ is an initial state. With the concept of fundamental matrix, that homogeneous linear discrete-time system has a solution $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0)$, $k \geq 0$ when the initial state is $\mathbf{x}(0)$, or $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1}\mathbf{x}(l)$, $k \geq l$ when the initial state is $\mathbf{x}(l)$.

The relation of fundamental matrix of solution $\mathbf{X}(k)$ from homogeneous linear discrete-time system $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ and state transition matrix of homogeneous linear discrete-time system are $\Phi(k,l) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1}$, $k \geq l$.

Homogeneous linear discrete time-system be need to interpretate the behaviour of societies system corresponding with them total population.

KATA PENGANTAR

Puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa karena rahmat dan kasih-Nya skripsi dengan judul “Sistem Waktu Diskret Linear Homogen” dapat penulis selesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa terwujudnya skripsi ini karena adanya bimbingan, dorongan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu dari hati yang tulus penulis mengucapkan banyak terima kasih, kepada:

1. M. Andy Rudhito, S.Pd. M.Si selaku dosen pembimbing yang telah rela meluangkan waktu, tenaga, serta pikiran untuk membimbing penulis dengan penuh kasih sayang selama proses penyusunan skripsi.
2. Drs. Thomas Sugiarto, M.T selaku dosen pembimbing akademik dan Kepala Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan saran dalam perencanaan studi selama penulis menempuh kuliah di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
3. Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama perkuliahan dan berkegiatan di Universitas Sanata Dharma.
4. Staf Sekretariat JPMIPA Universitas Sanata Dharma yang dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
5. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan kerjasamanya.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

6. Kedua orang tua tercinta yang selalu memberi kesempatan dan kepercayaan kepada penulis.
7. Kakak-kakak tercinta yang selalu memberi dukungan dengan penuh kasih sayang kepada penulis.
8. Rekan-rekan mahasiswa yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan selama berkegiatan di Universitas Sanata Dharma, khususnya rekan-rekan Program Studi Pendidikan Matematika angkatan '97.
9. Sahabat-sahabat tercinta : Novi, Yuni, Nana, Goneng, Menik, Upik, Winda, Rini, Enggal, Poer, Atik, Onrus, Win, dan Adi atas segala dukungan dan doa bagi penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi sejak persiapan hingga selesai.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Demi penyempurnaannya penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari pembaca.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 31 Juli 2003

Penulis

DAFTAR ISI



	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Batasan Masalah	3
D. Tujuan Penulisan	3
E. Sistematika Penulisan	4
F. Metode Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
A. Matriks dan Vektor	5
1. Konsep dasar Matriks	5
2. Matriks dan Sistem Persamaan Linear	12
3. Vektor di bidang (R^2) dan di ruang (R^3)	14

4. Kombinasi Linear dan Bebas Linear di Ruang Vektor V	22
B. Persamaan Diferensi	23
BAB III SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN	38
A. Sistem Waktu Diskret Linear dengan Input	38
B. Sistem Waktu Diskret Linear Homogen	44
1. Penyelesaian Sistem waktu Diskret Linear Homogen	45
2. Himpunan Dasar Penyelesaian	47
BAB IV BEBERAPA PENERAPAN SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN	55
A. Struktur Sosial Natchez Indian	55
B. Masalah Pertumbuhan Populasi	64
BAB V PENUTUP	67
A. Kesimpulan	67
B. Saran	68
DAFTAR PUSTAKA	70

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian yang keadaannya berubah terhadap waktu, dalam arti bahwa keadaannya berubah dari waktu yang satu ke waktu yang lain. Misalnya pada suatu pertumbuhan populasi penduduk suatu daerah. Pada umumnya kejadian-kejadian tersebut dapat dimodelkan secara matematis dengan persamaan diferensi apabila cara pengamatannya menggunakan waktu diskret. Jika waktunya diskret berarti pengamatannya tertentu seperti harian, bulanan, atau tahunan. Kejadian-kejadian tersebut bisa melibatkan satu atau banyak variabel. Apabila kejadian itu melibatkan beberapa persamaan dengan banyak variabel, maka kejadian tersebut akan menjadi suatu sistem persamaan.

Sistem ini dapat ditunjukkan pada model populasi kelompok (*Cohort Population Model*) yang dibagi dalam beberapa kelompok umur dengan rentang umur yang sama yaitu 5 tahun. Itu berarti kelompok umur ke-1 terdiri dari semua anggota populasi yang berumur antara 0 tahun sampai 5 tahun, kelompok umur ke-2 terdiri semua anggota populasi yang berumur antara 5 tahun antara 10 tahun, kelompok umur ke-3 terdiri dari semua anggota populasi yang berumur antara 10 tahun sampai 15 tahun dan seterusnya. Model populasi kelompok tersebut merupakan sistem waktu diskret dengan lama 1 periode berkaitan dengan rentang kelompok. Dengan asumsi bahwa distribusi populasi laki-laki dan perempuan sama, maka cukup dibentuk model matematika untuk menemukan populasi perempuan saja.

Andaikan $x_i(k)$ menyatakan jumlah anggota populasi perempuan kelompok umur ke- i pada periode k , i dari 0 sampai n , dengan kelompok 0 menunjukkan kelompok umur terendah dan kelompok n kelompok umur tertinggi. Sifat-sifat sistem ini dapat dilihat dengan memperhatikan perubahan jumlah anggota populasi selama satu periode. Terlepas dari kemungkinan kematian pada suatu waktu, dapat ditentukan perubahan jumlah anggota populasi kelompok umur ke- $(i + 1)$ setelah diketahui jumlah anggota populasi kelompok umur ke- i . Proses tersebut dapat digambarkan dengan persamaan berikut:

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

di mana β_i merupakan laju kelangsungan hidup kelompok umur ke- i selama satu periode.

Bila diuraikan, misal $i = 0$ (berarti kelompok umur ke-0) menjadi

$$x_{0+1}(k+1) = \beta_0 x_0(k)$$

Jika $i = 1$ (kelompok umur ke-1) menjadi

$$x_2(k+1) = \beta_1 x_1(k)$$

Jika $i = 2$ (kelompok umur ke-2) menjadi

$$x_3(k+1) = \beta_2 x_2(k),$$

demikian seterusnya.

Sistem di atas dapat dinyatakan dengan notasi matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}.$$

Sistem di atas merupakan contoh sistem waktu diskret homogen, seperti yang menjadi topik skripsi ini.

B. Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, muncul permasalahan yang akan diangkat oleh penulis dalam skripsi, yaitu:

1. Apa yang dimaksud dengan sistem waktu diskret linear homogen?
2. Bagaimana penyelesaian sistem waktu diskret linear homogen ?
3. Bagaimana penerapan sistem waktu diskret linear homogen ?

C. Batasan Masalah

Sistem waktu diskret linear dibagi menjadi 2 macam berdasarkan ada tidaknya input dalam sistem yaitu sistem waktu diskret linear homogen dan non homogen. Sistem waktu diskret linear homogen dibedakan menjadi dua menurut koefisiennya yaitu sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien konstan dan sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien tidak konstan. Penulisan skripsi ini dibatasi pada sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien konstan. Sedangkan untuk sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien tidak konstan hanya diberikan sebatas pengertian yang disertai contoh saja.

D. Tujuan Penulisan

Ada beberapa tujuan penulisan yang ingin dicapai dalam skripsi ini, yaitu:

1. Memahami pengertian sistem waktu diskret linear homogen.

2. Mampu menyelesaikan sistem waktu diskret linear homogen.
3. Memberikan beberapa penerapan sistem waktu diskret linear homogen.

E. Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terbagi dalam lima bab, Bab I merupakan pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

Dalam Bab II, akan dibahas materi-materi prasyarat, yang digunakan dalam pembahasan bab-bab selanjutnya. Pada subbab pertama, akan dibicarakan matriks dan vektor. Pada subbab kedua, dibahas tentang persamaan diferensi.

Pada Bab III, akan dibahas sistem waktu diskret linear homogen, yang meliputi pengertian sistem waktu diskret linear homogen, dan penyelesaian sistem waktu diskret linear homogen.

Bab III di atas dilanjutkan dengan Bab IV yang berisi tentang penerapan Sistem waktu diskret linear homogen, yaitu masalah struktur sosial masyarakat dan masalah pertumbuhan populasi penduduk.

Bab terakhir, yaitu Bab V, berisi kesimpulan dan saran.

F. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan penulis adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari buku-buku yang relevan, kemudian hasilnya dijabarkan dan disusun kembali menjadi suatu karya tulis. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan penulis tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini akan dibahas materi-materi prasyarat yang mendasari topik utama. Pada subbab pertama akan dibahas tentang matriks dan vektor yang meliputi definisi, beberapa operasi yang berlaku pada matriks dan vektor, serta sistem persamaan linear. Pada subbab kedua akan dibahas persamaan diferensi yang meliputi definisi, beserta contoh-contoh yang mendukung pemahaman persamaan diferensi.

A. Matriks dan Vektor

1. Konsep Dasar Matriks

Definisi 2.1 (Matriks)

Matriks didefinisikan sebagai jajaran elemen berbentuk segi empat yang terdiri dari baris dan kolom. Matriks biasanya dinotasikan dengan huruf kapital tebal, misal $\mathbf{A}$. Bentuk umum matriks yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

terdiri dari elemen a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$ menyatakan elemen baris ke- i ; $j = 1, 2, \dots, n$ menyatakan kolom ke- j). Bentuk matriks di atas biasa ditulis $\mathbf{A} = (a_{ij})$, dan $\mathbf{A}$ disebut matriks berukuran $m \times n$.

Definisi 2.2 (Matriks bujur sangkar)

Matriks bujur sangkar yaitu matriks yang memiliki jumlah baris sama dengan jumlah kolom. Andaikan jumlah baris dan kolom adalah n , matriks itu disebut matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, yang ditulis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Elemen dari matriks bisa berupa bilangan real, nilai fungsi real, juga variabel. Matriks yang mempunyai satu baris saja disebut *matriks baris* dan matriks yang mempunyai satu kolom saja disebut *matriks kolom*, atau disebut juga *vektor*. Notasi untuk vektor biasanya huruf kecil dengan cetakan tebal, misalkan vektor $\mathbf{x}$ dengan bentuk:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Elemen suatu vektor sering disebut dengan istilah *komponen*.

Contoh 2.1

1. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -5 \\ 7 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, adalah matriks bujur sangkar 4×4

yang elemennya berupa bilangan real.

2. Matriks Φ yang didefinisikan oleh

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t+1 & 5 \\ t & t^2 & 3t \\ 1 & 0 & 2t-1 \end{bmatrix}, \text{ adalah matriks bujur sangkar } 3 \times 3 \text{ yang berupa}$$

nilai fungsi real yang terdefinisi untuk semua bilangan real t .

Contoh 2. 2

1. Matriks kolom

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ adalah matriks kolom } 5 \times 1 \text{ dengan komponen bilangan real.}$$

2. Matriks kolom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \text{ adalah matriks kolom } 4 \times 1 \text{ dengan komponen empat variabel}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 .

Definisi 2.3 (Kesamaan dua matriks)

Dua matriks $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$ yang masing-masing berukuran $m \times n$ dikatakan sama jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j . Dalam hal ini ditulis $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Contoh 2.3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \text{ merupakan matriks yang sama karena}$$

ukurannya sama dan elemen yang seletak sama.

Definisi 2.5 (Jumlah dua matriks)

Misalkan $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$ merupakan dua matriks berukuran sama $m \times n$.

Jumlah matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ ditulis $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan elemennya merupakan jumlah elemen yang seletak dari kedua matriks.

Dalam hal ini ditulis

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Notasi ini mempertegas bahwa elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ adalah $a_{ij} + b_{ij}$ yang diperoleh sebagai jumlah elemen seletak dari masing-masing matriks.

Contoh 2.4

$$\text{Diketahui } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hasil jumlah matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2. 6 (Perkalian matriks dengan bilangan/ perkalian skalar matriks)

Diketahui matriks $\mathbf{A}$ dan c merupakan bilangan. Matriks $c\mathbf{A}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen dari matriks $\mathbf{A}$ dengan c . Dalam hal ini ditulis

$$c\mathbf{A} = (ca_{ij}).$$

Contoh 2. 5

Diketahui matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -7 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{maka matriks } 3\mathbf{A} = 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -7 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 18 \\ -21 & 12 & -3 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.7 (Perkalian Matriks)

Andaikan $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matriks berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matriks berukuran $n \times p$. Hasil perkalian matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ didefinisikan $\mathbf{C} = (c_{ij})$ matriks berukuran $m \times p$, di mana

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad (\forall i, j), i = 1, 2, \dots, m;$$

$j = 1, 2, \dots, p$. Ditulis $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Contoh 2.6

Diketahui matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \text{ maka } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suatu matriks bujur sangkar $n \times n$ dengan bilangan 1 terletak pada diagonal utama sedangkan bilangan 0 terletak di luar diagonal utama, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan lain sebagainya}$$

dinamakan *matriks satuan* (*identity matrix*) dan dinyatakan dengan $\mathbf{I}$. Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks kuadrat $n \times n$ dan $\mathbf{I}$ matriks satuan, dengan definisi perkalian matriks diperoleh $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ yaitu matriks itu sendiri.

Definisi 2.8 (Matriks yang mempunyai invers)

Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$ mempunyai invers jika ada matriks $\mathbf{B}$ sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Matriks $\mathbf{B}$ disebut matriks invers dari $\mathbf{A}$.

Contoh 2.7

$$\text{Matriks } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{karena } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\text{dan } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Teorema 2.1 (Ketunggalan invers)

Jika B dan C keduanya adalah invers matriks A , maka $B = C$.

Bukti:

Karena B adalah invers A , maka $BA = I$.

Dengan mengalikan kedua ruas dari sebelah kanan dengan C maka akan memberikan :

$$(BA)C = IC = C \text{ tetapi } (BA)C = B(AC) = BI = B ;$$

sehingga $B = C$. $\square$

Jadi matriks yang mempunyai invers, invers matriks tersebut adalah tunggal. Invers matriks A biasanya ditulis A^{-1} .

Definisi 2.9 (Matriks singular)

Suatu matriks $n \times n$ dikatakan singular jika tidak memiliki invers perkalian.

Definisi 2.10 (Transpos dari suatu matriks)

Transpos dari suatu matriks A berorde $m \times n$ adalah matriks B berorde $n \times m$ yang didefinisikan oleh:

$$b_{ji} = a_{ij}$$

untuk $j = 1, \dots, n$ dan $i = 1, \dots, m$. Transpos dari A dinyatakan oleh A^T .

Contoh 2. 8

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Transpos dari A ditulis A^T , yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Matriks dan Sistem Persamaan Linear

Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriks bujur sangkar $n \times n$ dan x vektor $n \times 1$. Hasil kali Ax dengan A matriks $n \times n$ dan x vektor $n \times 1$ adalah vektor $n \times 1$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Ax adalah vektor, jika dinyatakan dengan y ditulis

$$y = Ax \quad (2.1)$$

di mana $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bentuk persamaan di atas bisa diringkas menjadi:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Bentuk (2.2) disebut *sistem persamaan linear $n \times n$* . Sistem persamaan linear (2.2) ekuivalen dengan bentuk (2.1).

Contoh 2.9

Diketahui

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 5 & 3 & -8 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hasil kali $\mathbf{Ax}$ yaitu

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 \\ -3x_1 + 6x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.11 (Sistem persamaan linear homogen)

Sistem persamaan linear disebut homogen jika $y_1, y_2, \dots, y_n$ di (2. 2) sama dengan nol. Oleh karena itu, sistem persamaan linear homogen mempunyai bentuk umum:

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ 0 = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2. 3).$$

Penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear adalah sederetan n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sedemikian sehingga setiap persamaan dalam sistem tersebut terpenuhi jika disubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Setiap sistem persamaan linear homogen selalu mempunyai penyelesaian trivial, yaitu $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Jika ada penyelesaian yang lain maka penyelesaiannya disebut penyelesaian non trivial.

Teorema 2.2

Andaikan $\mathbf{A}$ matriks $n \times n$. Maka persamaan homogen $\mathbf{Ax} = 0$, mempunyai penyelesaian non trivial jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ matriks singular.

Bukti: lihat (Luenberger, 1979: 68). Bukti menggunakan konsep determinan.

3. Vektor di Bidang (R^2) dan di Ruang (R^3)

Definisi 2. 12 (vektor di bidang)

Vektor (aljabar) $\mathbf{v}$ di bidang R^2 adalah pasangan terurut (a, b) dengan a dan b merupakan bilangan real, ditulis $\mathbf{v} = (a, b)$; nilai a dan b disebut komponen atau koordinat dari vektor.

Vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3; arah panah menentukan arah vektor, dan panjang panah menentukan besarnya. Ekor dari panah tersebut disebut *titik pangkal* vektor, dan ujung panah disebut *titik ujung*. Ketika mendiskusikan vektor akan disebut bilangan sebagai skalar. Semua skalar itu adalah bilangan real dan dinyatakan dengan huruf kecil miring (misalnya k).

Jika sebagaimana pada gambar (a), titik pangkal suatu vektor $\mathbf{v}$ adalah A dan B titik ujungnya, maka ditulis $\mathbf{v} = \vec{AB}$.



Untuk menyesuaikan dengan istilah yang akan dipakai, vektor (aljabar) juga ditulis sebagai :

$$\mathbf{v} = (a, b) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Dalam pemakaian selanjutnya tidak akan dibedakan antara vektor geometri dan vektor aljabar. Keduanya secara singkat disebut sebagai vektor. Secara aljabar dua vektor $\mathbf{v}_1 = (a_1, a_2)$ dan $\mathbf{v}_2 = (b_1, b_2)$ disebut sama jika dan hanya jika $a_1 = b_1$ dan $a_2 = b_2$. Hal ini juga sama dengan kesamaan dua matriks.

Definisi 2.13 (Penjumlahan dua vektor)

Jumlah $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dari dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ adalah vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Contoh 2. 10

Jumlah vektor $\mathbf{u} = (3, -4)$ dan vektor $\mathbf{v} = (-5, 12)$ yaitu:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (3, -4) + (-5, 12) = (-2, 8) \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Definisi 2.14 (Perkalian vektor dengan skalar)

Perkalian skalar dari vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dengan skalar (bilangan real) s , ditulis $s\mathbf{u}$ adalah vektor

$$s\mathbf{u} = (su_1, su_2).$$

Contoh 2. 11

Misalkan $\mathbf{u} = (3, -4)$. Perkalian skalar $\mathbf{u}$ dengan bilangan $s = 2$ adalah vektor $s\mathbf{u} = 2(3, -4) = (6, -8)$.

Vektor nol $\mathbf{0} = (0, 0)$ memegang peranan seperti bilangan nol dalam penjumlahan bilangan real, artinya untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ berlaku

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

Karena vektor merupakan matriks yang khusus, maka sifat-sifat yang berlaku pada matriks juga berlaku pada vektor.

Teorema 2.3 (Sifat penjumlahan vektor dan perkalian skalar)

Misalkan diketahui vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ di bidang(R^2) dan r, s merupakan dua bilangan real. Maka berlaku sifat berikut :

- (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Sifat Komutatif)
- (b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Sifat Asosiatif)
- (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ (Unsur Identitas)
- (d) $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (Elemen Invers)
- (e) $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ (Distributif)
- (f) $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$
- (g) $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$
- (h) $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

Sifat vektor di bidang tersebut sesuai dengan sifat penjumlahan dan perkalian skalar pada matriks. Untuk selanjutnya himpunan yang dilengkapi dengan operasi tambah dan perkalian skalar serta mempunyai sifat seperti teorema di atas dikenal dengan *ruang vektor* V .

Seperti pada bidang, semua titik di ruang dapat disajikan sebagai tiga bilangan terurut (x, y, z) dan sebaliknya tiga bilangan terurut dapat disajikan sebagai suatu titik di ruang.

Operasi penjumlahan dua vektor dan perkalian vektor dengan skalar di ruang didefinisikan seperti pada bidang.

Misalkan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Jumlah kedua vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ adalah vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Misalkan s merupakan bilangan real. Perkalian skalar vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dengan skalar s , ditulis $s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, sa_3)$.

Vektor di ruang dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar tersebut membentuk ruang vektor, artinya sifat berikut dipenuhi:

Teorema 2.4 (R^3 sebagai ruang vektor)

Misalkan $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan tiga vektor di R^3 dan r, s dua bilangan real, maka berlaku:

- (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Sifat Komutatif)
- (b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Sifat Asosiatif)
- (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ (Unsur Identitas)
- (d) $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (Elemen Invers)
- (e) $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ (Distributif)
- (f) $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$
- (g) $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$
- (h) $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

Definisi 2.15 (Ruang n -Euclidis/ R^n)

Ruang R^n adalah himpunan dari semua kumpulan terurut $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Misalkan n bilangan asli. **Kumpulan terurut** terdiri dari n bilangan yang ditulis sebagai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sebagai contoh, kumpulan terurut yang terdiri dari 4 bilangan adalah $(1, -2, 3, 4)$.

Elemen dari R^n disebut *titik* atau *vektor*. Vektor biasanya ditulis dengan huruf kecil dicetak tebal. Komponen ke- i dari $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut

koordinat ke- i dari vektor $\mathbf{x}$. Sesuai dengan notasi matriks, vektor juga ditulis sebagai :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 2$ titik atau vektor tersebut terletak pada bidang, sedangkan untuk $n = 3$ terletak pada ruang. Untuk $n > 3$ vektor tersebut tidak dapat digambarkan. Tetapi karena operasi yang akan didefinisikan untuk sebarang R^n merupakan perluasan dari R^2 dan R^3 , bidang dan ruang dapat digunakan sebagai model.

Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ merupakan dua vektor di R^n , jumlah dari kedua vektor tersebut ditulis $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n). \quad (1)$$

Jadi, penjumlahan dua vektor di R^n dilakukan per komponen seperti pada R^2 dan R^3 .

Perkalian skalar vektor dari $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dengan bilangan real s ditulis $s\mathbf{u}$ adalah vektor

$$s\mathbf{u} = (su_1, su_2, \dots, su_n). \quad (2)$$

Penjumlahan dan perkalian skalar untuk vektor-vektor dalam R^n tak lain adalah penjumlahan dan perkalian skalar yang biasa dari matriks. Lebih umum, misalkan $R^{m \times n}$ menyatakan himpunan semua matriks $m \times n$ dengan elemen-elemen bilangan real. Misalkan $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$, jumlah $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ didefinisikan sebagai matriks $\mathbf{C} = (c_{ij})$ yang berukuran $m \times n$, di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Misalkan diberikan skalar α , akan didefinisikan αA sebagai matriks $m \times n$ dimana elemen ke- ij adalah αa_{ij} . Operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada $R^{m \times n}$ mengikuti aturan-aturan ilmu hitung tertentu. Aturan-aturan ini membentuk aksioma-aksioma yang digunakan untuk mendefinisikan konsep ruang vektor di bawah ini.

Definisi 2.16 (Ruang vektor)

Misalkan V adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi jumlah dan perkalian skalar dengan bilangan real. Artinya, diberikan dua elemen $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam V dan bilangan real s , kemudian jumlah $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ dan perkalian skalar $s\mathbf{x}$ didefinisikan dan terletak di V juga. V dengan dua operasi ini disebut ruang vektor jika kedua operasi tersebut memenuhi sifat berikut:

Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ dan $r, s \in R$ dipenuhi

- (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (Sifat komutatif)
- (b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (Sifat asosiatif)
- (c) ada elemen $\mathbf{0}$ di V sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (Unsur identitas)
- (d) ada elemen $-\mathbf{x} \in V$ sehingga $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (Elemen invers)
- (e) $r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y}$ (Distributif)
- (f) $(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$
- (g) $r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$
- (h) $1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

Jika u merupakan unsur di V , adanya elemen invers untuk u dijamin oleh aksioma di bagian (d). Operasi (1) dan (2) yang didefinisikan pada R^n memenuhi semua sifat dari ruang vektor. Selain R^n masih terdapat contoh-contoh lain, seperti berikut ini.

Contoh 2. 11

Misalkan Y merupakan kumpulan dari semua fungsi bernilai real yang didefinisikan pada seluruh bilangan real R , dengan f dan g elemen dari Y . Hasil penjumlahan dua elemen tersebut ditulis $f + g$ yang didefinisikan sebagai:

$$(f + g)(k) = f(k) + g(k).$$

Hasil perkalian skalar elemen f dengan bilangan real s , ditulis sf , didefinisikan sebagai:

$$(sf)(k) = sf(k).$$

Kedua operasi tersebut memenuhi sifat ruang vektor.

Sebagai bukti:

$$\begin{aligned} (s(f + g))(k) &= s(f + g)(k) && \text{(definisi perkalian skalar)} \\ &= s\{f(k) + g(k)\} && \text{(definisi penjumlahan)} \\ &= sf(k) + sg(k) && \text{(sifat distributif dari bilangan real)} \\ &= (sf + sg)(k). \end{aligned}$$

Dengan demikian sifat (e) dari aksioma ruang vektor dipenuhi. Sifat lainnya dapat dibuktikan secara analog, sehingga disimpulkan bahwa Y dengan dua operasi di atas merupakan ruang vektor.

4. Kombinasi Linear dan Bebas Linear di Ruang Vektor V

Definisi 2.17 (kombinasi linear)

Jika $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V , dan $c_1, c_2, \dots, c_m$ adalah skalar-skalar, maka jumlah berbentuk

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_m \mathbf{u}_m$$

disebut kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$.

Contoh 2.12

Diketahui tiga vektor berukuran 3×1

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

dan tiga bilangan real 2, 4, 5, dan -3 maka

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3 &= 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ adalah kombinasi linear dari} \end{aligned}$$

vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Definisi 2.18 (vektor bebas linear di V)

Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ di ruang V disebut bebas linear jika persamaan

$$s_1 \mathbf{u}_1 + \dots + s_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

hanya dipenuhi oleh bilangan $s_1 = \dots = s_k = 0$. Jika tidak demikian, maka disebut bergantung linear.

Contoh 2. 14

Vektor-vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah bebas linear karena

$$c_1 (1, 1) + c_2 (1, 2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

dari sistem persamaan linear tersebut, dengan eliminasi akan didapat satu-satunya penyelesaian yaitu $c_1 = c_2 = 0$.

Contoh 2. 15

Tiga vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ adalah bergantung linear karena

ada bilangan nol 2, 3, dan -1 sedemikian sehingga

$$2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + (-1)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

B. Persamaan Diferensi

Definisi 2.19 (Persamaan Diferensi Linear berorde- n)

Persamaan diferensi linear berorde- n adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = g(k) \quad (2.4)$$

untuk fungsi $g(k)$ dan $a_i(k)$ yang diketahui, dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Koefisien $a_i(k)$ di dalam persamaan ini disebut koefisien persamaan diferensi linear.

Jika koefisien ini tidak bergantung terhadap waktu k , persamaan diferensi dikatakan memiliki koefisien konstan (*time invariant*). Jika koefisien ini tergantung pada waktu k , maka persamaan diferensi dikatakan memiliki koefisien tidak konstan (*time-varying*).

Diperhatikan persamaan diferensi linear orde-1 berikut:

Persamaan diferensi linear orde-1 mempunyai bentuk

$$a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = g(k) \quad (2.5).$$

Karena $a_1(k) \neq 0$, kedua ruas dapat dibagi $a_1(k)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{a_1(k)}{a_1(k)} y(k+1) + \frac{a_0(k)}{a_1(k)} y(k) &= \frac{g(k)}{a_1(k)} \\ \Leftrightarrow y(k+1) &= -\frac{a_0(k)}{a_1(k)} y(k) + \frac{g(k)}{a_1(k)}. \end{aligned}$$

Bila $a_0(k)$, $a_1(k)$, $g(k)$ konstan maka bisa ditulis:

$$y(k+1) = ay(k) + b, \quad (2.6),$$

dengan $a = -\frac{a_0(k)}{a_1(k)}$ dan $b = \frac{g(k)}{a_1(k)}$ koefisien konstan; $a, b \in R$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Bentuk (2.6) disebut bentuk baku persamaan diferensi linear Orde-1 dengan koefisien konstan.



Contoh 2.16

Persamaan diferensi $y(k+1) = 2y(k) + 3$ adalah persamaan diferensi linear orde-1 dengan $a = 2$ dan $b = 3$ merupakan koefisien konstan.

Definisi 2.17 (Penyelesaian Persamaan Diferensi)

Suatu fungsi $y(k)$ disebut sebagai penyelesaian persamaan diferensi, apabila fungsi tersebut mereduksi persamaan diferensi menjadi suatu identitas.

Contoh 2.17

Fungsi $y(k) = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ merupakan penyelesaian persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{karena } y(k+1) - 2y(k) &= 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} - 2^{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Andaikan setiap fungsi yang nilainya pada bilangan bulat positif $k + \{0\}$ diberikan dengan

$$y(k) = 3 \cdot 2^k, \quad y(k) = 4 \cdot 2^k, \quad y(k) = 1/2 \cdot 2^k,$$

ternyata semua fungsi ini juga penyelesaian dari persamaan diferensi tersebut, sehingga fungsi $y(k) = C 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ dengan C konstanta sembarang juga penyelesaian karena bila fungsi $y(k) = C 2^k$ disubstitusikan ke persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

maka diperoleh:

$$y(k+1) - 2y(k) = C 2^{k+1} - 2 C 2^k$$

$$= C(2^{k+1} - 2^{k+1})$$

$$= 0.$$

Penyelesaian yang diberikan oleh fungsi $y(k) = 2^k$, dan fungsi-fungsi yang didefinisikan $y(k) = 3 \cdot 2^k$, $y(k) = 4 \cdot 2^k$, $y(k) = 1/2 \cdot 2^k$ disebut *penyelesaian khusus* dari persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$ sedangkan penyelesaian yang diberikan oleh fungsi $y(k) = C \cdot 2^k$ disebut *penyelesaian umum* persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$.

Dari contoh soal di atas, tampak bahwa suatu persamaan diferensi dapat mempunyai penyelesaian yang banyaknya tak hingga. Sekarang bagaimana penyelesaian persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$ jika diberikan $y(0) = 1$. Hal ini disebut *syarat awal*. Jika dimasukkan $k = 0$ ke dalam persamaan $y(k) = C \cdot 2^k$ diperoleh $y(0) = C \cdot 2^0 \Leftrightarrow C = 1$ sehingga persamaan $y(k) = C \cdot 2^k$ menjadi $y(k) = 2^k$, ini merupakan penyelesaian khusus dari persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$ yang memenuhi syarat awal $y(0) = 1$.

Berikut akan dibuktikan teorema dasar yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari persamaan diferensi yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Teorema 2.5 (Teorema eksistensi dan ketunggalan)

Andaikan diketahui persamaan diferensi linear orde- n

$$y(k+n) + f[y(k+n-1), y(k+n-2), \dots, y(k), k] = 0 \quad (2.7)$$

di mana f adalah fungsi yang terdefinisi untuk $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots; k_0 = 0, 1, 2, \dots, n$, maka persamaan ini punya satu dan hanya satu penyelesaian $y(k_0), y(k_0 + 1), \dots, y(k_0 + n - 1)$.

Bukti:

Andaikan nilai $y(k_0), y(k_0 + 1), \dots, y(k_0 + n - 1)$ ditentukan. Persamaan diferensi (2.7) dengan $k = k_0$ dapat diselesaikan tunggal untuk $y(k_0 + n)$ secara sederhana dengan mereduksi fungsi. Dengan demikian jika $y(k_0 + n)$ diketahui, maka persamaan diferensi (2.7) dengan $k = k_0 + 1$ dapat diselesaikan untuk $y(k_0 + n + 1)$ dan begitu seterusnya untuk semua nilai k . $\square$

Contoh 2.18

Diketahui persamaan diferensi $y(k + 1) - 2y(k) = 0$.

Penyelesaian umum persamaan diferensi $y(k + 1) - 2y(k) = 0$ adalah $y(k) = C2^k$.

(i) Misalkan diberikan syarat awal $y(0) = 7$.

Dengan mensubstitusikan $k = 0$, dihasilkan $y(0) = C 2^0 \Leftrightarrow 7 = C$. Jadi penyelesaian tunggal untuk persamaan diferensi $y(k + 1) - 2y(k) = 0$ dengan syarat awal $y(0) = 7$ adalah $y(k) = 2^k(7)$.

(ii) Misalkan diberikan syarat awal $y(2) = 4$.

Dengan mensubstitusikan $k = 2$ ke persamaan $y(k) = C 2^k$, diperoleh:

$$\begin{aligned} y(2) &= C 2^2 \Leftrightarrow 4 = C 2^2 \\ &\Leftrightarrow C = 1. \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian tunggal persamaan diferensi $y(k+1) - 2y(k) = 0$ dengan syarat awal $y(2) = 4$ adalah $y(k) = 2^k$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bagaimana mencari penyelesaian persamaan diferensi orde-1 dengan koefisien konstan.

Andaikan diketahui persamaan diferensi linear orde –1 dengan koefisien konstan

$$y(k+1) = ay(k) + b, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dengan mensubstitusikan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ke dalam persamaan diperoleh:

$$y(1) = ay(0) + b$$

$$y(2) = ay(1) + b$$

$$= a(ay(0) + b) + b$$

$$= a^2 y(0) + ab + b$$

$$= a^2 y(0) + b(1 + a)$$

$$y(3) = ay(2) + b$$

$$= a(a^2 y(0) + b(1+a)) + b$$

$$= a^3 y(0) + ab + a^2 b + b$$

$$= a^3 y(0) + b(1 + a + a^2),$$

demikian seterusnya, secara umum ditulis

$$y(k) = a^k y(0) + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-2} + a^{k-1}).$$

Jumlahan yang terletak di dalam kurung merupakan suatu deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasionya a .

Oleh karena itu

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a}, \text{ jika } a \neq 1 \text{ atau}$$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = k \quad \text{jika } a = 1.$$

Jadi diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensi orde-1 dengan koefisien konstan yaitu:

(i) Penyelesaian $y(k+1) = ay(k) + b$, untuk $a = 1$

$$\begin{aligned} y(k) &= a^k y(0) + b(1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-2} + a^{k-1}) \\ &= 1^k y(0) + b(1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1) \\ &= y(0) + bk \end{aligned}$$

karena $y(0)$ berupa konstanta maka bisa ditulis $y(k) = C + bk$.

(ii) Penyelesaian $y(k+1) = ay(k) + b$, untuk $a \neq 1$

$$\begin{aligned} y(k) &= a^k y(0) + b(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-2} + a^{k-1}) \\ &= a^k y(0) + b \frac{1-a^k}{1-a} \\ &= a^k y(0) + b \frac{1}{1-a} - b \frac{a^k}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a} + (y(0) - \frac{b}{1-a}) a^k \\ &= \frac{b}{1-a} + Da^k, \end{aligned}$$

di mana $D = y(0) - \frac{b}{1-a}$ berupa suatu konstanta.

Jadi persamaan diferensi linear orde-1 $y(k+1) = ay(k) + b$, dengan a, b koefisien konstan, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ mempunyai penyelesaian umum:

$$y(k) = C + bk, \quad \text{jika } a = 1 \tag{2.8}$$

$$\text{atau } y(k) = \frac{b}{1-a} + Da^k \quad \text{jika } a \neq 1. \tag{2.9}$$

Contoh 2.19

1. Diketahui persamaan diferensi $y(k+1) = y(k) + 5$.

Dari persamaan itu dapat diperoleh $a = 1$, $b = 5$ maka menurut persamaan (2.8) diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensi $y(k+1) = y(k) + 5$ yaitu $y(k) = C + bk$.

Misalkan diberikan syarat awal $y(0)=1$.

Dengan mensubstitusikan $k = 0$ ke persamaan diperoleh

$$y(0) = C + 5 \cdot 0 \Leftrightarrow C = 1.$$

Jadi diperoleh penyelesaian tunggal $y(k) = 1 + 5k$ yang memenuhi persamaan diferensi $y(k+1) = y(k) + 5$ dengan syarat awal $y(0) = 1$.

2. Diketahui persamaan diferensi $y(k+1) - 0,5y(k) = 2$.

Dari persamaan diferensi $y(k+1) - 0,5y(k) = 2 \Leftrightarrow y(k+1) = 0,5y(k) + 2$, diperoleh $a = 0,5$; $b = 2$ maka menurut persamaan (2.9) diperoleh penyelesaian umum:

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{b}{1-a} + Da^k \\ \Leftrightarrow y(k) &= \frac{2}{1-0,5} + D(0,5)^k \\ \Leftrightarrow y(k) &= 4 + D(0,5)^k. \end{aligned}$$

Misalkan diberikan syarat awal $y(2) = 12$. Untuk mencari penyelesaian tunggalnya, disubstitusikan $k = 2$ ke persamaan $y(k) = 4 + D(0,5)^k$, diperoleh:

$$\begin{aligned} y(2) &= 4 + D(0,5)^2 \\ \Leftrightarrow 12 &= 4 + D \cdot 0,25 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{12-4}{0,25}$$

$$\Leftrightarrow D = 32.$$

Jadi $y(k) = 4 + 32(0,5)^k$ adalah penyelesaian tunggal untuk persamaan diferensi $y(k+1) = 0,5y(k) + 2$ dengan syarat awal $y(2) = 12$.

Persamaan diferensi linear orde- n dikatakan homogen bila $g(k) = 0$ dalam persamaan(2.4) untuk semua k dalam himpunan di mana persamaan tersebut didefinisikan. Bila ditulis secara lengkap, *persamaan diferensi linear orde- n homogen* yaitu:

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = 0 \quad (2.10)$$

Persamaan diferensi linear orde-1 $y(k+1) = ay(k) + b$ dengan a dan b koefisien konstan dikatakan homogen bila $b = 0$, atau ditulis:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= ay(k) \\ \Leftrightarrow y(k+1) - ay(k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Untuk mencari penyelesaiannya digunakan proses rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= ay(k) \\ k=0 &\Rightarrow y(1) = ay(0) \\ k=1 &\Rightarrow y(2) = ay(1) = a(ay(0)) = a^2y(0) \\ k=2 &\Rightarrow y(3) = ay(2) = aa^2y(0) = a^3y(0), \end{aligned}$$

demikian seterusnya, sehingga diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensi linear orde-1 homogen $y(k+1) - ay(k) = 0$ yaitu:

$$y(k) = a^k C, \quad (2.12)$$

di mana C konstanta sembarang.

Contoh 2.20

Diketahui persamaan diferensi $y(k+1) - 3y(k) = 0$.

Dari persamaan diferensi $y(k+1) - 3y(k) = 0$ diperoleh $a = 3$;

jadi diperoleh penyelesaian umum: $y(k) = 3^k C$, dengan C konstanta sembarang.

(i) Misalkan diberikan syarat awal $y(0) = 7$.

Dengan mensubstitusikan $k = 0$ ke $y(k) = 3^k C$ diperoleh:

$$y(0) = 3^0 C$$

$$\Leftrightarrow C = 7,$$

sehingga $y(k) = 3^k(7)$;

adalah penyelesaian tunggal persamaan diferensi $y(k+1) - 3y(k) = 0$ dengan syarat awal $y(0) = 7$.

(ii) Misalkan diberikan syarat awal $y(1) = -5$.

Untuk mencari penyelesaian khusus yang tunggal, harus dihitung konstanta C terlebih dahulu dari $y(k) = 3^k C$.

Dengan mensubstitusikan $k = 1$ ke $y(k) = 3^k C$ diperoleh

$$y(1) = 3^1 C$$

$$\Leftrightarrow -5 = 3C$$

$$\Leftrightarrow C = -5/3.$$

Jadi $y(k) = 3^k(-5/3)$ adalah penyelesaian tunggal persamaan diferensi $y(k+1) - 3y(k) = 0$ dengan syarat awal $y(1) = -5$.

Di bawah ini akan ditunjukkan suatu teorema yang menjamin bahwa kombinasi linear penyelesaian persamaan diferensi linear homogen juga merupakan penyelesaian persamaan diferensi linear homogen.

Teorema 2.6

Jika $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$ adalah semua penyelesaian untuk persamaan homogen (2.10), maka kombinasi linear m penyelesaian

$$y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_m y_m(k)$$

di mana $c_1, c_2, \dots, c_m$ konstanta, juga penyelesaian dari persamaan (2.10).

Bukti:

Akan dibuktikan untuk $m = 2$. Untuk $m > 2$ dapat dibuktikan dengan jalan yang sama. Jika $y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$ disubstitusikan ke dalam ruas kiri persamaan (2.10) diperoleh:

$$a_n(k)[c_1 y_1(k+n) + c_2 y_2(k+n)] + a_{n-1}(k)[c_1 y_1(k+n-1) + c_2 y_2(k+n-1)] + \dots + a_0(k)[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)],$$

ini dapat ditulis sebagai

$$c_1 \{a_n(k)y_1(k+n) + a_{n-1}(k)y_1(k+n-1) + \dots + a_0(k)y_1(k)\} + c_2 \{a_n(k)y_2(k+n) + a_{n-1}(k)y_2(k+n-1) + \dots + a_0(k)y_2(k)\} = 0$$

karena masing-masing pernyataan dalam kurung sama dengan nol. $\square$

Contoh 2.21

Diketahui persamaan diferensi linear homogen $y(k+1) - 3y(k) = 0$.

Fungsi y_1 yang didefinisikan oleh $y_1(k) = 3^k$ merupakan penyelesaian persamaan di atas karena:

$$\begin{aligned} y_1(k+1) - 3y_1(k) &= 3^{k+1} - 3 \cdot 3^k \\ &= 3^{k+1} - 3^{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fungsi y_2 yang didefinisikan oleh $y_2(k) = 2 \cdot 3^k$ juga penyelesaian persamaan diferensi karena

$$\begin{aligned} y_2(k+1) - 3y_2(k) &= 2 \cdot 3^{k+1} - 3 \cdot 2 \cdot 3^k \\ &= 2 \cdot 3^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa kombinasi linear $c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$, dengan $y_1(k) = 3^k$, $y_2(k) = 2 \cdot 3^k$ dan c_1, c_2 sembarang konstanta juga penyelesaian persamaan diferensi linear homogen $y(k+1) - 3y(k) = 0$.

Dengan mensubstitusikan $c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$ ke persamaan diferensi linear homogen $y(k+1) - 3y(k) = 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned} &[c_1 y_1(k+1) + c_2 y_2(k+1)] - 3[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)] \\ &= c_1 [y_1(k+1) - 3y_1(k)] + c_2 [y_2(k+1) - 3y_2(k)] \\ &= c_1 [3^{k+1} - 3 \cdot 3^k] + c_2 [2 \cdot 3^{k+1} - 3 \cdot 2 \cdot 3^k] \\ &= c_1 [3^{k+1} - 3^{k+1}] + c_2 [2 \cdot 3^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}] \\ &= c_1(0) + c_2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berarti benar bahwa kombinasi linear $c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$ merupakan penyelesaian persamaan diferensi linear homogen tersebut.

Andaikan diketahui persamaan diferensi linear homogen:

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = 0$$

Karena $a_n(k) \neq 0$, maka persamaan homogen itu dapat dibagi dengan $a_n(k)$ menjadi:

$$y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = 0 \quad (2.13)$$

$k=0, 1, 2, \dots$

Andaikan ada himpunan n penyelesaian yang berbeda

$\bar{y}_1(k), \bar{y}_2(k), \dots, \bar{y}_n(k)$. $\bar{y}_1(k)$ didefinisikan sebagai penyelesaian dengan syarat awal $\bar{y}_1(0) = 1, \bar{y}_1(1) = 0, \bar{y}_1(2) = 0, \dots, \bar{y}_1(n-1) = 0$. Dan secara umum, $\bar{y}_i(k)$ dihubungkan dengan syarat awal yang semuanya bernilai nol kecuali $\bar{y}_i(k) = 1$ untuk $k = i-1$. Himpunan n penyelesaian yang berbeda ini disebut himpunan dasar penyelesaian (*fundamental set of solution*). Anggota himpunan dasar penyelesaian disebut penyelesaian dasar.

Teorema 2.7

Andaikan fungsi $y(k)$ suatu penyelesaian persamaan diferensi linear homogen (2.13), fungsi $y(k)$ dapat dinyatakan sebagai n penyelesaian dasar dalam bentuk:

$$y(k) = c_1 \bar{y}_1(k) + c_2 \bar{y}_2(k) + \dots + c_n \bar{y}_n(k) \text{ di mana } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ konstanta.}$$

Bukti:

Andaikan $y(k)$ penyelesaian persamaan diferensi linear homogen (2.13), dengan syarat awalnya didefinisikan $c_i = y(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Penyelesaian juga dipenuhi $z(k)$ yang didefinisikan sebagai :

$$z(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_n y_n(k),$$

yang mempunyai n syarat awal yang sama dengan penyelesaian $y(k)$ dan dengan teorema eksistensi dan ketunggalan diperoleh $z(k) = y(k)$.

Contoh 2.22

Andaikan diberikan persamaan diferensi linear homogen

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0.$$

Akan ditentukan himpunan dasar penyelesaiannya. Karena berorde- 2 berarti ada 2 syarat awal tertentu atau ada 2 himpunan dasar ditemukan.

Dengan pemeriksaan diperoleh bahwa fungsi $y_1(k) = 1$ dan $y_2(k) = k$ keduanya merupakan penyelesaian.

Ada 2 penyelesaian dasar yang dapat diperoleh:

fungsi $\bar{y}_1(k) = 1 - k$ dan fungsi $\bar{y}_2(k) = k$.

Oleh karena itu penyelesaian mempunyai bentuk

$$y(k) = c_1 \bar{y}_1(k) + c_2 \bar{y}_2(k) = c_1(1 - k) + c_2(k) = c_1 + (c_2 - c_1)k$$

atau karena c_1, c_2 suatu konstanta maka bisa ditulis $y(k) = c + dk$, di mana c dan d dapat ditentukan.

Himpunan dasar penyelesaian $\bar{y}_1(k), \bar{y}_2(k), \dots, \bar{y}_n(k)$ yang memenuhi persamaan diferensi homogen (2-13) adalah himpunan yang bebas linear di dalam ruang V , karena $\bar{y}_1(k)$ hanya mempunyai satu yang nilainya tidak nol yaitu untuk $k=i-1$, maka hanya ada satu cara untuk memperoleh:

$$c_1 \bar{y}_1(k) + c_2 \bar{y}_2(k) + \dots + c_n \bar{y}_n(k) = 0 \text{ untuk } k = i-1, \text{ yaitu untuk } c_i = 0.$$

Perluasan dari teorema (2-5) yaitu bahwa suatu himpunan n penyelesaian bebas linear dari persamaan homogen penting dalam menentukan penyelesaian dasar. Pembuktian tidak diberikan di sini karena diperlukan konsep lebih lanjut.

Teorema 2.8

Andaikan $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$ adalah himpunan fungsi yang bebas linear untuk penyelesaian persamaan homogen (2-13). Setiap penyelesaian $y(k)$ untuk persamaan homogen (2-13) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_n y_n(k)$$

untuk suatu konstanta $c_1, c_2, \dots, c_n$.

BAB III

SISTEM WAKTU DISKRET LINEAR HOMOGEN

Dalam bab ini, akan dibahas masalah penyelesaian sistem waktu diskret. Konsep untuk waktu diskret, yang direpresentasikan dengan persamaan diferensi akan digabungkan dengan aljabar matriks dan vektor. Untuk masalah variabel tunggal cukup dengan persamaan diferensi tetapi untuk menyelesaikan masalah multivariabel dibutuhkan sistem persamaan diferensi. Dasar pendekatan sistem waktu diskret ini adalah sistem persamaan diferensi orde-1.

A. Sistem Waktu Diskret Linear dengan Input

Definisi 3.1 (Sistem persamaan diferensi orde- 1)

Sistem n persamaan diferensi orde -1 dalam variabel-variabel $x_1(k)$, $x_2(k)$, ..., $x_n(k)$ yang masing-masing merupakan fungsi dari indeks k yang menunjukkan fungsi terhadap waktu k , memiliki bentuk umum berikut:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

di mana fungsi-fungsi $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ mendefinisikan sistem. Variabel $x_i(k), i = 1, 2, \dots, n$ disebut variabel keadaan (state variable) dan nilainya belum diketahui.

Fungsi-fungsi f_i ini bisa dalam bentuk sederhana atau kompleks tergantung sistem nyata yang dimodelkan. Jika sistem terdefinisi untuk $k=0, 1, 2, \dots$, maka nilai-nilai $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ disebut *syarat awal*. Jika syarat awal diketahui maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (3.1) akan diperoleh nilai-nilai dari $x_1(1), x_2(1), \dots, x_n(1)$. Hasil selanjutnya disubstitusikan lagi diperoleh $x_1(2), x_2(2), \dots, x_n(2)$. Proses rekursif ini dapat dilanjutkan untuk mencari penyelesaian tunggal dengan syarat awal yang sudah diketahui. Pada setiap waktu k dalam proses rekursif, himpunan variabel-variabel $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ memberikan syarat awal untuk tahap berikutnya.

Definisi 3. 2 (Sistem waktu diskret linear dengan input)

Sistem waktu diskret linear dengan input adalah sistem yang memiliki bentuk umum:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_{11}(k)x_1(k) + a_{12}(k)x_2(k) + \dots + a_{1n}(k)x_n(k) + b_{11}(k)u_1(k) + \dots + b_{1m}(k)u_m(k) \\ x_2(k+1) &= a_{21}(k)x_1(k) + a_{22}(k)x_2(k) + \dots + a_{2n}(k)x_n(k) + b_{21}(k)u_1(k) + \dots + b_{2m}(k)u_m(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= a_{n1}(k)x_1(k) + a_{n2}(k)x_2(k) + \dots + a_{nn}(k)x_n(k) + b_{n1}(k)u_1(k) + \dots + b_{nm}(k)u_m(k) \end{aligned}$$

di mana $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ merupakan variabel keadaan dari sistem dan bernilai real. Nilai-nilai $a_{ij}(k), i = 1, 2, 3, \dots, n$ disebut parameter / koefisien sistem, variabel-variabel $u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)$ adalah variabel input sistem.

Jika parameter ini tidak bergantung pada waktu k , maka sistem dikatakan mempunyai *koefisien konstan*, berarti waktunya tetap (*time-invariant*).

Bila sistem tersebut dinyatakan dengan notasi matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k) & \cdots & a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \cdots & b_{1m}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \cdots & b_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \cdots & b_{nm}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

Sistem waktu diskret linear dengan input tersebut dapat dituliskan secara ringkas sebagai :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k),$$

dengan $\mathbf{A}(k)$ matriks $n \times n$ yang terdiri dari koefisien $a_{ij}(k)$, matriks $\mathbf{B}(k)$ matriks $n \times m$ yang terdiri dari koefisien $b_{ij}(k)$. Matriks $\mathbf{B}(k)$ disebut *matriks distribusi* karena mendistribusikan input ke dalam sistem. Dalam masalah khusus, misal $m = 1$ maka matriks $\mathbf{B}(k)$ menjadi vektor dimensi- n , yang dinotasikan dengan $\mathbf{b}(k)$.

Berikut di bawah ini akan diberikan contoh sistem waktu diskret linear dengan input:

Contoh 3.1

Andaikan di suatu negara terdapat pengelolaan terhadap kebutuhan rumah-tangga, misalnya mesin cuci. Diasumsikan bahwa pembelian mesin cuci itu baru dan digunakan sampai rusak. Pada suatu waktu misalkan ada distribusi berbagai umur mesin cuci seluruh negara itu. Akan diberikan sistem persamaan yang dipakai dalam pendistribusian ini.

Andaikan digunakan formulasi waktu diskret dengan periode satu tahun. Asumsi dasar yang dipakai untuk mengembangkan model ini yaitu bahwa peluang untuk mesin cuci berumur i masih bisa dipakai paling sedikit 1 tahun sebesar β_i . Peluang ini relatif tinggi untuk mesin yang masih baru dan rendah untuk mesin yang sudah tua. Diasumsikan bahwa tidak ada mesin yang masih bisa dipakai untuk umur $n + 1$ tahun.

Dengan asumsi ini mesin cuci dapat dibagi ke dalam kelompok-kelompok umur. Andaikan $x_i(k)$ menyatakan jumlah mesin cuci umur i tahun selama periode k , maka keadaan itu bisa dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Jumlah mesin cuci yang berumur kurang dari 1 tahun sama dengan jumlah pembelian $u(k)$ tahun tersebut yaitu $x_0(k+1) = u(k)$.

Sistem persamaan ini bisa dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Bila dinyatakan dengan bentuk umum menjadi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

Dalam hal ini $\mathbf{b}u(k)$ merupakan input sistem dimana $\mathbf{b}$ merupakan vektor.

Definisi 3. 3 (vektor keadaan)

Andaikan diketahui suatu sistem waktu diskret linear dengan input,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

maka $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$ disebut vektor keadaan (state vector) dari sistem.

Vektor keadaan mendiskripsikan secara lengkap bagaimana keadaan sistem pada waktu k .

Definisi 3. 4 (ruang keadaan)

Ruang keadaan (state space) adalah ruang vektor dimensi- n di mana vektor keadaan sistem terdefinisi.

Contoh 3. 2

Andaikan diketahui suatu sistem waktu diskret linear dengan input

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

dengan matriks $\mathbf{A}(k)$ terdiri dari koefisien $a_{ij}(k)$ yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan vektor } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bila sistem dituliskan secara lengkap menjadi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Dalam hal ini vektor keadaan $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ dengan ruang keadaannya ruang

Euclides R^2 .

Selanjutnya akan dibahas bagaimana persamaan diferensi yang sudah dibicarakan di bab II dapat dibawa ke bentuk sistem waktu diskret linear .

Diketahui persamaan diferensi linear orde- n

$$y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_0(k)y(k) = u(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Akan dibangun sistem yang sesuai. Untuk itu perlu didefinisikan variabel-variabel keadaan yang menunjukkan nilai $y(k)$.

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= y(k+n-1) \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh bahwa :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \end{aligned}$$

Definisi vektor keadaan $\mathbf{x}(k)$ yang memiliki komponen $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ seperti di atas, menghasilkan sistem waktu diskret linear dengan input:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(k) & -a_1(k) & -a_2(k) & \dots & -a_{n-2}(k) & -a_{n-1}(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

dengan $y(k) = x_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Matriks dengan elemen seperti di atas sering disebut matriks kompanion (*companion matrices*) dalam sistem waktu diskret.

Contoh 3.3

Diketahui persamaan diferensi orde-2 yaitu $y(k+2) + 2y(k+1) + 3y(k) = u(k)$

Persamaan ini akan diubah ke bentuk vektor keadaan. Untuk itu didefinisikan dahulu variabel-variabel keadaan sebagai berikut :

$$x_1(k) = y(k) \quad x_2(k) = y(k+1).$$

Dari definisi itu diperoleh bahwa $x_2(k+1) = y(k+2)$

Bentuk persamaan diferensi $y(k+2) + 2y(k+1) + 3y(k) = u(k)$ di atas ekuivalen dengan $y(k+2) = -2y(k+1) - 3y(k) + u(k)$.

Dengan variabel-variabel keadaan $x_1(k)$, $x_2(k)$ sistem dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -2x_2(k) - 3x_1(k) + u(k) \end{aligned}$$

atau dinyatakan dengan bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k).$$

B. Sistem Waktu Diskret Linear Homogen

Definisi 3.5 (Sistem waktu diskret linear homogen)

Sistem waktu diskret linear $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ disebut homogen jika $\mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$. Jika dituliskan dengan vektor keadaan maka sistem waktu diskret linear homogen ditulis sebagai

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k). \quad (3.2)$$

Bila dituliskan secara lengkap menjadi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k) & \cdots & a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Matriks $\mathbf{A}(k)$ terdiri dari koefisien $a_{ij}(k)$. Jika nilai-nilai $a_{ij}(k)$ ini tidak bergantung pada waktu k , maka sistem disebut sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien konstan (*time-invariant system*) yang dinyatakan dengan notasi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (3.2 \text{ a})$$

$$\text{dengan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika nilai-nilai $a_{ij}(k)$ bergantung pada waktu k maka sistem disebut sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien tidak konstan (*time-varying system*), yang dinyatakan dengan notasi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.2 \text{ b})$$

$$\text{dengan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k) & \cdots & a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian Sistem Waktu Diskret Linear Homogen

Sistem homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$, dapat diselesaikan secara rekursif jika syarat awal ditentukan .

Dengan perulangan substitusi diperoleh

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}(1)\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0)$$

$\vdots$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2) \dots \mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0)$$

Bentuk di atas bisa dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\dots\mathbf{A}(0) \quad (3.3)$$

Matriks seperti ini akan disebut sebagai matriks transisi keadaan (*state transition matrix*) seperti dalam definisi berikut .

Definisi 3. 5 (Matriks transisi keadaan)

Matriks transisi keadaan dari sistem homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ adalah matriks :

$$\begin{aligned} \Phi(k,l) &= \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\dots\mathbf{A}(l) \\ \Phi(k,k) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad , k > l \quad (3.4)$$

Bentuk ini ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} \Phi(k+1,l) &= \mathbf{A}(k+1-1)\mathbf{A}(k+1-2)\dots\mathbf{A}(l) \\ &= \mathbf{A}(k)\mathbf{A}(k-1)\dots\mathbf{A}(l) \\ &= \mathbf{A}(k)\Phi(k,l) \\ \Phi(l,l) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad , k > l \quad (3.5)$$

Definisi umum di atas konsisten untuk menentukan nilai $\mathbf{x}(k)$ jika $\mathbf{x}(l)$ diketahui ($k \geq l$).

Dengan penerapan proses rekursif pada sistem homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ diperoleh

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,l)\mathbf{x}(l) .$$

Contoh 3.4

Diberikan sistem linear homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$

Matriks $\mathbf{A}$ tidak bergantung terhadap waktu k . Akan ditentukan matriks transisi keadaan :

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\cdots\mathbf{A}(0), k \geq 0$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$$

$$= \mathbf{A}^k$$

dengan demikian bentuk tersebut ekuivalen dengan:

$$\Phi(k,l) = \mathbf{A}^{k-l}, k \geq l.$$

2. Himpunan Dasar Penyelesaian

Matriks transisi keadaan tersebut di atas didefinisikan sebagai perkalian matriks karena dapat ditunjukkan bahwa bentuk tersebut menghasilkan penyelesaian untuk persamaan diferensi. Konsep matriks transisi keadaan dapat dibentuk dengan cara lain. Pendekatan itu berdasarkan himpunan dasar penyelesaian. Diasumsikan bahwa sistem matriks $\mathbf{A}(k)$ non-singular untuk $\forall k$.

Diberikan penyelesaian-penyelesaian untuk persamaan homogen (3.2), misalnya penyelesaian-penyelesaian itu adalah $\mathbf{x}^1(k), \mathbf{x}^2(k), \dots, \mathbf{x}^n(k)$. Setiap penyelesaian $\mathbf{x}^i(k)$ adalah fungsi vektor dimensi- n terhadap k , yang berarti bahwa setiap penyelesaian tersebut berupa barisan vektor yang memenuhi persamaan $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$. Masing-masing penyelesaian dimulai dengan vektor awal

sebagai syarat awal dan bentuk umumnya diperoleh dengan proses rekursif. Penyelesaian-penyelesaian ini saling bebas linear di dalam ruang V .

Andaikan $\mathbf{x}^1(k), \mathbf{x}^2(k), \dots, \mathbf{x}^n(k)$ adalah himpunan penyelesaian bebas linear untuk persamaan $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$, maka setiap $\mathbf{x}^i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$ memenuhi $\mathbf{x}^i(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}^i(k)$ yang disebut *himpunan dasar penyelesaian*.

Akan ditunjukkan bahwa setiap penyelesaian $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear. Untuk itu, vektor-vektor penyelesaian $\mathbf{x}^1(k), \mathbf{x}^2(k), \dots, \mathbf{x}^n(k)$ akan dinyatakan dalam n kolom matriks $n \times n$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{X}(k)$:

$$\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}^1(k) \mathbf{x}^2(k) \dots \mathbf{x}^n(k)] \quad (3.6)$$

Penyelesaian itu disebut *penyelesaian matriks fundamental*. Penyelesaian matriks fundamental ini memenuhi sistem homogen

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k) \quad (3.7)$$

karena masing-masing kolom $\mathbf{X}(k)$ adalah penyelesaian.

Teorema 3.1

Penyelesaian matriks fundamental $\mathbf{X}(k)$ non-singular untuk setiap nilai k .

Bukti:

Pemikiran di bawah ini berdasarkan pada penyelesaian yang bebas linear dan $\mathbf{A}(k)$ non-singular.

Andaikan $\mathbf{X}(k_0)$ singular untuk $\mathbf{X}(k)$, $k = k_0$ maka menurut teorema 2.2

$$\mathbf{X}(k_0) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

untuk n -vektor α yang bukan nol.

Ada dua persamaan yang diketahui:

$$\mathbf{X}(k_0 + 1) = \mathbf{A}(k_0)\mathbf{X}(k_0) \quad a)$$

$$\mathbf{X}(k_0)\alpha = 0 \quad b)$$

Jika persamaan $b)$ dikalikan dengan $\mathbf{A}(k_0)$ diperoleh

$$\mathbf{A}(k_0)\mathbf{X}(k_0)\alpha = 0 \quad b^*)$$

Dari persamaan $a)$ dan $b^*)$ diperoleh:

$$\mathbf{X}(k_0 + 1)\alpha = \mathbf{A}(k_0)\mathbf{X}(k_0)\alpha$$

Untuk $k = k_0 - 1$, persamaan $a)$ dan $b)$ menjadi

$$\mathbf{X}(k_0) = \mathbf{A}(k_0-1)\mathbf{X}(k_0-1) \quad a^{\#})$$

$$\mathbf{X}(k_0-1)\alpha = 0 \quad b^{\#})$$

Jika persamaan $a^{\#})$ dikalikan dengan $\mathbf{A}(k_0-1)^{-1}\alpha$ diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k_0)\alpha \mathbf{A}(k_0-1)^{-1} &= \mathbf{A}(k_0-1) \mathbf{A}(k_0-1)^{-1} \mathbf{X}(k_0-1)\alpha \\ &= \mathbf{I} \mathbf{X}(k_0-1)\alpha \\ &= \mathbf{X}(k_0-1)\alpha \quad a^{##}) \end{aligned}$$

Dari $a^{##})$ dan $b^{\#})$ di peroleh bahwa

$$\mathbf{X}(k_0-1)\alpha = \mathbf{X}(k_0)\alpha \mathbf{A}(k_0-1)^{-1} = 0$$

Bila dilanjutkan terus akan diperoleh $\mathbf{X}(k)\alpha = 0$ untuk $\forall k$, sehingga diperoleh

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1(k) + \alpha_2 \mathbf{x}^2(k) + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n(k) = 0$$

Pernyataan di atas kontradiksi dengan asumsi bahwa himpunan dasar penyelesaian adalah bebas linear. Jadi $\mathbf{X}(k_0)$ non-singular. $\square$



Teorema 3.2

Diberikan sistem homogen $\mathbf{A}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$. Andaikan $\mathbf{X}(k)$ penyelesaian matriks fundamental yang memenuhi sistem tersebut,, matriks transisi keadaan diberikan oleh pernyataan

$$\Phi(k,l) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1} \quad \text{untuk } k \geq l.$$

Bukti:

Dengan teorema (3.1) bahwa penyelesaian matriks fundamental $\mathbf{X}(k)$ non singular untuk setiap nilai k dapat diperoleh matriks transisi keadaan.

Andaikan diketahui penyelesaian $\mathbf{x}(k)$ untuk $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$. Barisan vektor $\bar{\mathbf{x}}(k)$ didefinisikan dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$;

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (i)$$

Pernyataan benar bahwa $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$.

Juga jika vektor α didefinisikan dengan:

$$\alpha = \mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (ii)$$

dari (i) dan (ii) diperoleh $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{X}(k)\alpha$

Dari pernyataan di atas maka $\bar{\mathbf{x}}(k)$ merupakan kombinasi linear penyelesaian. Bagaimanapun juga, karena mempunyai syarat awal $\mathbf{x}(0)$, dua penyelesaian $\bar{\mathbf{x}}(k)$ dan $\mathbf{x}(k)$ harus identik (dengan teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian) berarti $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$.

Penyelesaian $\mathbf{x}(k)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k) \mathbf{X}(0)^{-1} \mathbf{x}(0)$$

Prosedur ini dapat untuk menyatakan $\mathbf{x}(k)$ dengan $\mathbf{x}(l)$, maka $\mathbf{x}(k)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k) \mathbf{X}(l)^{-1} \mathbf{x}(l) \quad (*)$$

Sebelumnya sudah diketahui

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, l) \mathbf{x}(l) \quad (**)$$

Jadi dari persamaan (*) dan (**) diperoleh

$$\Phi(k, l) = \mathbf{X}(k) \mathbf{X}(l)^{-1} \quad \square$$

Dari Pernyataan di atas diperoleh: $\Phi(k, 0) = \mathbf{X}(k) \mathbf{X}(0)^{-1}$. Karena $\mathbf{X}(k)$ adalah penyelesaian matriks fundamental maka $\mathbf{X}(k) \mathbf{X}(0)^{-1}$ juga merupakan penyelesaian matriks fundamental dengan $\Phi(0, 0) = \mathbf{I}$

Bila dinyatakan dalam istilah n kolom, penyelesaian matriks fundamental terdiri dari n penyelesaian berbeda $\mathbf{x}^1(k), \mathbf{x}^2(k), \dots, \mathbf{x}^n(k)$ dengan syarat awal tertentu

$$\mathbf{x}^i(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

dengan 1 pada posisi koordinat ke- i . Himpunan dasar penyelesaian ini dapat digunakan untuk membentuk penyelesaian dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$. Penyelesaian

ini dinyatakan sebagai kombinasi linear dari penyelesaian fundamental yaitu $\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0)$.

Contoh 3.5 (*time-varying sistem/sistem nonconstant*)

Diberikan sistem linear homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad k \geq 0.$$

Himpunan dasar penyelesaian dapat ditentukan dengan memberikan 2 syarat awal yang bebas linear yaitu

$\mathbf{x}^1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ berupa matriks satuan substitusikan ke persamaan untuk $k = 0$

diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^1(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

substitusikan untuk $k = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^1(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

jika proses rekursif ini dilanjutkan terus akan diperoleh:

$$\mathbf{x}^1(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \geq 0$$

Penyelesaian yang lain dapat dicari dari syarat awal $\mathbf{x}^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Substitusi untuk $k = 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^2(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk $k = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^2(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk $k = 2$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^2(2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk $k = 3$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2(4) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^2(3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Demikian seterusnya, untuk $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\mathbf{x}^2(k)$ adalah barisan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$\mathbf{x}^2(k)$ di atas bisa dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x}^2(k) = \begin{bmatrix} k(k+1)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Dua penyelesaian yang berbentuk himpunan dasar penyelesaian itu bila dinyatakan dalam penyelesaian matriks fundamental:

$$\mathbf{X}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1(k) & \mathbf{x}^2(k) \end{bmatrix} \text{ yaitu:}$$

$$\mathbf{X}(k) = \begin{bmatrix} 1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jika diberikan sembarang vektor sebagai syarat awal, misal $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$,

maka penyelesaiannya:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0).$$

Karena $\mathbf{X}(0)$ identitas, maka penyelesaian umumnya bisa ditulis:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 k(k+1)/2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

BAB IV

BEBERAPA PENERAPAN SISTEM WAKTU DISKRET

LINEAR HOMOGEN

Sistem waktu diskret linear yang sudah dibahas di bab III akan diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seperti yang akan diberikan berikut.

A. Struktur Sosial Natchez Indian

Dalam suatu masyarakat secara eksplisit maupun implisit terdapat dalam segmen-segmen kelas. Kelas tertinggi merupakan pengontrol kemampuan dan pendistribusi bagi lingkungan tempat tinggalnya. Anggota-anggota kelas ditentukan oleh keturunan dan sering kelas tertinggi mempraktekkan endogami (perkawinan interklas).

Di seberang sungai Mississippi terdapat suku Natchez Indians. Untuk menciptakan struktur kelas terbuka dimana kekuatan dapat ditularkan antar atau dengan famili untuk mengabadikan kelas sosial dalam masyarakat, suku ini menganut sistem perkawinan yang sederhana dengan aturan-aturan tertentu. Masyarakat dibagi menjadi 2 kelas utama yaitu kelas *Rulers* (kaum penguasa) dan kelas *Commoners* (masyarakat biasa). Kelas *Commoners* disebut *Stinkard*. Kelas *Rulers* dibagi menjadi 3 subklas: *Suns*, *Nobles*, dan *Honored*. Anggota kelas *Rulers* dapat menikah hanya dengan *Commoners*, sedangkan kelas *Commoner* dapat menikah dengan kelas *Rulers* maupun kelas *Commoner* sendiri.

Keturunan perkawinan antara perempuan kelas *Rulers* dan laki-laki kelas *Commoners* memperoleh status kelas dari ibu, sedangkan keturunan dari perkawinan antara laki-laki kelas *Rulers* dengan perempuan kelas *Commoner* maka status kelasnya satu peringkat menjadi kelas di bawahnya. Dengan demikian anak dari laki-laki kelas *Sun* menjadi *Noble* dan seterusnya. Aturan perkawinan kelas *Rulers* dan *Commoner* ditunjukkan dengan tabel “aturan perkawinan Natchez” berikut:

	ayah				
		Sun	Noble	Honored	Stinkard
ibu	Sun				Sun
	Noble				Noble
	Honored				Honored
	Stinkard	Noble	Honored	Stinkard	Stinkard

Akan ditentukan:

1. bagaimana penyebaran distribusi kelas dari sistem ini (perilaku sistem).
2. jumlah total penduduk masing-masing kelas pada generasi ke- k .

Masalah di atas akan dimodelkan secara matematis ke dalam sistem waktu diskret linear homogen. Untuk tujuan ini akan dibangun suatu sistem dengan variabel-variabel keadaan sistem. Diasumsikan bahwa populasi dapat dibagi ke dalam generasi-generasi yang berbeda, dan dibutuhkan tiga asumsi yaitu:

- (a) Masing-masing kelas memiliki jumlah laki-laki dan perempuan sama dalam tiap generasi.

- (b) Masing-masing individu menikah sekali dan hanya sekali dan menikah dengan seorang pada generasi yang sama.
- (c) Setiap pasang suami istri tepat mempunyai seorang anak laki-laki dan perempuan.

Untuk mencari jumlah anggota populasi masing-masing kelas untuk generasi ke- k cukup dengan mencari populasi laki-laki saja karena jumlah laki-laki dan perempuan sama dalam masing-masing kelas.

Andaikan $x_i(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas i pada generasi ke- k , dengan $i = 1, 2, 3, 4$ dan:

Kelas-1 menyatakan kelas *Sun*

Kelas-2 menyatakan kelas *Noble*

Kelas-3 menyatakan kelas *Honored*

Kelas-4 menyatakan kelas *Stinkard*

Dengan memperhatikan tabel “aturan perkawinan Natchez” diketahui bahwa:

- (a) anak laki-laki kelas *Sun* diturunkan hanya dari setiap ibu kelas *Sun*, dan karena jumlah ibu kelas *Sun* sama dengan jumlah ayah kelas *Sun*, maka :

$x_1(k+1) = x_1(k)$; $x_1(k+1)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas *Sun* pada generasi- $k+1$

- (b) Anak laki-laki kelas *Noble* diturunkan dari ayah kelas *Sun* atau ibu kelas *Noble*, maka:

$$x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$$

- (c) Demikian juga anak laki-laki kelas *Honored* diturunkan dari setiap ayah kelas *Noble* atau ibu kelas *Honored* maka:

$$x_3(k+1) = x_2(k) + x_3(k)$$

- (d) Akhirnya anak laki-laki kelas *Stinkard* sama dengan jumlah total ayah kelas *Stinkard* dikurangi jumlah ayah kelas *Stinkard* yang menikah dengan ibu kelas *Sun* atau ibu kelas *Noble*, maka:

$$x_4(k+1) = -x_1(k) - x_2(k) + x_4(k).$$

Keempat persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \text{ yaitu:}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \text{ dengan matriks } \mathbf{A} \text{ adalah matriks berukuran}$$

4×4 dengan koefisien konstan sehingga sistem ini merupakan sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien konstan (*time-invariant system*).

Sudah diketahui pada bab III bahwa matriks transisi keadaan untuk sistem waktu diskret linear homogen yaitu:

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k \quad k \geq 0.$$

Matriks $\mathbf{A}$ bisa dinyatakan secara ekuivalen dengan bentuk $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{B}$, di mana

$$\mathbf{I} \text{ adalah matriks identitas dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ karena benar bahwa:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan ekspansi binomial, maka bisa dituliskan

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I} + \mathbf{B})^k = \mathbf{I}^k + \binom{k}{1} \mathbf{I}^{k-1} \mathbf{B} + \binom{k}{2} \mathbf{I}^{k-2} \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^k, \text{ di mana } \binom{k}{i} \text{ menyatakan}$$

koefisien binomial $k! / (k-i)!(i!)$. Ekspansi binomial ini valid karena $\mathbf{I}$ dan $\mathbf{B}$ komutatif, $\mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{I}$, dengan bukti sebagai berikut:

$$\mathbf{I} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \text{ dan tentu saja}$$

$\mathbf{B} \mathbf{I} = \mathbf{B}$ karena suatu matriks bila dikalikan dengan matriks identitas hasilnya matriks itu sendiri.

Bentuk $\mathbf{A}^k$ di atas dapat disederhanakan, dengan alasan bahwa

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tetapi } \mathbf{B}^3 = \mathbf{B}^2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga :

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I} + \mathbf{B})^k = \mathbf{I}^k + \binom{k}{1} \mathbf{I}^{k-1} \mathbf{B} + \binom{k}{2} \mathbf{I}^{k-2} \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^k, \text{ di mana } \binom{k}{i} \text{ menyatakan}$$

koefisien binomial $k! / (k-i)!(i!)$ menjadi :

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I} + \mathbf{B})^k = \mathbf{I} + k \mathbf{B} + \frac{k(k-1)}{2} \mathbf{B}^2 \text{ atau secara eksplisit:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -k & -k & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k(k-1)/2 & 0 & 0 & 0 \\ -k(k-1)/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ -k & -k & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k(k-1)/2 & 0 & 0 & 0 \\ -k(k-1)/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k(k-1)/2 & k & 1 & 0 \\ -k(k+1)/2 & -k & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vektor keadaan $\mathbf{x}(k)$ dapat ditentukan dengan menggunakan matriks transisi keadaan $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$ di mana $\mathbf{x}(0)$ merupakan syarat awal, maka diperoleh:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ kx_1(0) + x_2(0) \\ \frac{1}{2}k(k-1)x_1(0) + kx_2(0) + x_3(0) \\ -\frac{1}{2}k(k+1)x_1(0) - kx_2(0) + x_4(0) \end{bmatrix}.$$

Dari penyelesaian tersebut dapat ditentukan perilaku sistem. Pertama, ini dapat membuktikan secara langsung bahwa populasi total masyarakat adalah konstan dari generasi ke generasi.

Jika baik kelas *Sun* atau kelas *Noble* berkembang secara pesat maka jumlah stinkard akan menurun terhadap waktu, sehingga suatu saat Stinkard tidak akan cukup menikahi semua anggota kelas Rulers.

Selanjutnya masih menggunakan asumsi seperti dalam Natchez Indian di atas tetapi dengan menggunakan aturan perkawinan yang berbeda berikut:

Diketahui 2 kelas sosial yaitu kelas-A dan Kelas-B. Kelas-A terbagi ke dalam 3 sub kelas yaitu kelas-1, kelas-2, dan kelas-3. Kelas-B disebut kelas-4. Aturan perkawinannya yaitu: kelas-A hanya boleh menikah dengan kelas-B, sedang kelas-B boleh menikah dengan kelas-A maupun kelas-B. Jika perempuan kelas-A menikah dengan laki-laki kelas-B maka status anak mengikuti status ibu, sedangkan jika laki-laki kelas-A menikah dengan perempuan kelas-B maka status anak juga mengikuti status ibu. Aturan perkawinan itu digambarkan dalam tabel berikut:

	ibu				
ayah		1	2	3	4
	1				4
	2				4
	3				4
	4	1	2	3	4

Asumsi (a), (b), dan (c) dari contoh Natchez Indian dipenuhi.

Masalah yang akan diselesaikan sama dengan masalah sebelumnya.

Andaikan $x_i(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas- i pada generasi ke- k dengan $i = 1, 2, 3, 4$; jadi

$x_1(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas-1 pada generasi ke- k

$x_2(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas-1 pada generasi ke- k

$x_3(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas-1 pada generasi ke- k

$x_4(k)$ menyatakan jumlah laki-laki kelas-1 pada generasi ke- k .

Maka diperoleh sistem persamaan yang menunjukkan keadaan sistem yaitu:

$$x_1(k+1) = x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) - x_1(k) - x_2(k) - x_3(k)$$

Bila dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

Seperti sebelumnya, diketahui bahwa

$$\Phi(k,0) = A^k \quad k \geq 0$$

Demikian pula $A = I + B$,

$$\text{dimana } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^k &= (I + B)^k = I + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k & -k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & -k & -k & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari $x(k) = \Phi(k,0)x(0)$ diperoleh penyelesaian persamaan keadaan sistem

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & -k & -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ -kx_1(0) + (-k)x_2(0) - kx_3(0) + x_4(0) \end{bmatrix}$$

Dari penyelesaian tersebut dapat diketahui bahwa populasi total masyarakat adalah konstan dari generasi ke generasi. Jumlah populasi kelas-4 lama-lama tidak cukup menikahi kelas-1, kelas-2, kelas-3 jika terjadi pertumbuhan penduduk yang begitu pesat.

B. Masalah Pertumbuhan Populasi Penduduk

Andaikan negara A mempunyai populasi 100 juta penduduk pada tahun 2000. Populasi kota B yang menetap di negara A pada tahun 2000 berjumlah 10 juta. Andaikan setiap tahun 4 % populasi tahun sebelumnya dari kota B meninggalkan kotanya dan 2 % populasi tahun sebelumnya di luar kota B pindah ke kota B. Diasumsikan bahwa kenaikan populasi 1 % per tahun.

Akan ditentukan jumlah populasi kota B pada tahun $2000 + k$ (setelah tahun 2000).

Tahun 2000 dianggap sebagai tahun ke- 0 (syarat awal $x_1(0)$, $x_2(0)$). Andaikan populasi tahun ke- k kota B adalah $x_1(k)$ dan populasi tahun ke- k negara A di luar kota B yang masuk kota B adalah $x_2(k)$. Keadaan sistem tersebut dimodelkan dengan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= 1,01[(1-0,04)x_1(k) + 0,02x_2(k)] \\x_2(k+1) &= 1,01[0,04x_1(k) + (1-0,02)x_2(k)]\end{aligned}$$

dengan syarat awal:

$$x_1(0) = 10 \times 10^6, \quad x_2(0) = 90 \times 10^6.$$

Bila ditulis menggunakan notasi matriks $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k)$, menjadi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,01)(1-0,04) & (1,01)(0,02) \\ (1,01)(0,04) & (1,01)(1-0,02) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{b-1})$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1,01)(1-0,04) & (1,01)(0,02) \\ (1,01)(0,04) & (1,01)(1-0,02) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian sistem waktu diskret linear homogen (b-1) diberikan oleh:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$$

di mana $\Phi(k,0)$ matriks transisi keadaan sistem waktu diskret linear homogen

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k)$ sehingga

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k \quad k \geq 0$$

Matriks $\mathbf{A}$ bisa dinyatakan secara ekivalen dengan

bentuk $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{B}$, di mana $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas

$$\begin{aligned}\text{dengan } \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,9696 & 0,0202 \\ 0,0404 & 0,9898 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,0304 & 0,0202 \\ -0,0404 & 0,0102 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dengan demikian $A^k = (I + B)^k = I^k + \binom{k}{1} I^{k-1} B + \binom{k}{2} I^{k-2} B^2 + \dots + B^k$ di mana

$\binom{k}{i}$ menyatakan koefisien binomial $k! / (k-i)!(i!)$.

Sudah diketahui $x(k) = \Phi(k,0)x(0)$; jadi jumlah populasi kota B setelah tahun 2000 dapat diperoleh dari $x(k) = A^k x(0)$.

Misalkan akan dihitung populasi tahun 2002 maka diketahui $k=2$.

$$A^k = I + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2$$

$$\begin{aligned} A^2 &= I + 2B + B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0,0304 & 0,0202 \\ -0,0404 & 0,0102 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,0808 \times 10^{-4} & 8,2012 \times 10^{-4} \\ -1,60424 \times 10^{-3} & -7,1204 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,06090808 & 0,04122012 \\ -0,08240424 & 1,01968796 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sudah diketahui $x(k) = \Phi(k,0)x(0)$

$$\Leftrightarrow x(k) = A^k x(0) \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= \begin{bmatrix} 1,06090808 & 0,04122012 \\ -0,08240424 & 1,01968796 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \times 10^6 \\ 90 \times 10^6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1060980,8 + 37098108 \\ -0,08240424 + 91771916,4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 47707188,8 \\ 91771916,32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Maka diperoleh penyelesaian

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47707188,8 \\ 91771916,32 \end{bmatrix}. \text{ Jadi jumlah populasi kota B pada tahun 2002 } (k=2)$$

yaitu 47.707.188 penduduk.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan berikut:

1. Penyelesaian sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien konstan $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ adalah
 - (i) $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$ dengan matriks transisi keadaan $\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k$ $k \geq 0$ dan syarat awal $\mathbf{x}(0)$, atau
 - (ii) $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,l)\mathbf{x}(l)$ dengan $\Phi(k,l) = \mathbf{A}^{k-l}$, $k \geq l$ dan syarat awal $\mathbf{x}(l)$.
2. Penyelesaian sistem waktu diskret linear homogen dengan koefisien non konstan $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$:
 - (i) syarat awal $\mathbf{x}(0)$ adalah $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)$, dengan

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\dots\mathbf{A}(0), \quad k \geq 0$$
 - (ii) syarat awal $\mathbf{x}(l)$ adalah $\mathbf{x}(k) = \Phi(k,l)\mathbf{x}(l)$, dengan

$$\Phi(k,l) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\dots\mathbf{A}(l), \quad k \geq l$$
3. Sistem waktu diskret linear homogen $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$ juga dapat diselesaikan dengan matriks fundamental $\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}^1(k) \quad \mathbf{x}^2(k) \quad \dots \quad \mathbf{x}^n(k)]$ yaitu:
 - (i) syarat awalnya $\mathbf{x}(0)$ maka $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}(0)$

(ii) syarat awalnya $\mathbf{x}(l)$, maka $\mathbf{x}(k) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1}\mathbf{x}(l)$.

Penyelesaian matriks fundamental $\mathbf{X}(k)$ non singular untuk setiap nilai k .

4. Jika $\mathbf{X}(k)$ penyelesaian matriks fundamental dari sistem waktu diskret linear homogen $\mathbf{A}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k)$, maka matriks transisi keadaannya adalah

$$\Phi(k, l) = \mathbf{X}(k)\mathbf{X}(l)^{-1} \text{ untuk } k \geq l.$$

5. Pembahasan sistem waktu diskret linear homogen dapat diterapkan untuk mengetahui keadaan suatu sistem sosial masyarakat, misalnya menentukan keadaan populasi suatu kelas pada generasi ke- k dalam Natchez Indian.
6. Pada masalah pertumbuhan populasi penduduk suatu kota yang dipengaruhi faktor migrasi (perpindahan penduduk), sistem waktu diskret linear homogen digunakan untuk menentukan jumlah populasi penduduk kota tersebut setelah tahun tertentu yang sudah diketahui, tanpa memperhatikan faktor kematian dan kelahiran.

B. Saran

Berikut diberikan beberapa saran yang dapat dijadikan permasalahan lebih lanjut:

1. Masalah sistem waktu diskret linear homogen non konstan (time-varying) dan penerapannya.

2. Menyelesaikan sistem waktu diskret linear homogen dengan menggunakan metode lain, misalnya metode z-transform.



DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard .2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi Ketujuh, diterjemahkan Ir. Hari Suminto. Batam: Interaksara Batam Centre.
- Boyce, William E. & Richard C. DiPrima.1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. New York: Wiley & Sons, Inc.
- Budhi, Wono Setya. 1995. *Aljabar Linear*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Ellice, Robert J. Mc & Robert B & Carol. 1989. *Introduction to Discrete Mathematics*. New York: Random House.
- Gilbert, Gary G. & Donald, O. Koepler . 1983. *Applied Finite Mathematics*.Mc Grow Hill Book Company.
- Leon, Steven J. 1998. *Aljabar Linear dan aplikasinya*. Edisi Kelima, diterjemahkan Drs Alit Bondan, M.Kom. Jakarta: Erlangga.
- Luenberger, David G.1979. *Introduction to Dynamic System*. New York: John Wiley & Sons.
- Ross, Shepley L. 1980. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. New York: Prentice Hall .
- White, Paul A. 1966. *Linear Algebra*. California: Inc Belmont.

