HIMPUNAN JULIA PENUH

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

Tyasning Palupi Wijayanti

NIM : 971414023
NIRM : 970051120501120021

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2001

SKRIPSI

HIMPUNAN JULIA PENUH

Disusun oleh:

Tyasning Palupi Wijayanti

NIM : 971414023
NIRM : 970051120501120021

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Dr. Frans Susilo, SJ

Tanggal 11 – 8 – 2001

SKRIPSI

HIMPUNAN JULIA PENUH

Dipersiapkan dan disusun oleh:

Tyasning Palupi Wilayanti
NIM : 971414023
NIRM : 970051120501120021

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
Pada tanggal 7 Agustus 2001
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat:

Susunan Dewan Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. R. Rohandi, M. Ed	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	....
Anggota	: 1. Dr. Frans Susilo, SJ	....
	2. Drs. St. Susento, MSi	....
	3. Andi Rudhito, S.Pd	....

Yogyakarta, 7 Agustus 2001
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP,

Dr. A.M. Slamet Soewandi

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan untuk:

- Suyanti
- Teman - teman yang telah menemaniku selama ujian: Rini adikku, Widie Sunarti, Natalia Tanti, Veronika Suryanti, Domesia Novi, Wahyu Widiastuti dan Mbak Yekti prasetyorini.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana karya ilmiah.

Yogyakarta 4 - 9 - 2001

Tyasning Palupi Wijayanti

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas segala bimbingan dan rahmat yang telah dilimpahkanNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul " **Himpunan Julia Penuh**".

Skripsi ini disusun dalam rangka melengkapi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh banyak bimbingan, dorongan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu dalam kesempatan ini perkenankanlah penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Romo Frans Susilo,SJ yang telah banyak memberikan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
2. Bpk. Drs. St. Susento, Msi, selaku Kaprodi yang telah memberikan saran dan kritik pada penulis.
3. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng yang dengan sabar membantu penulis selama kuliah hingga menyelesaikan skripsi ini.
4. Staf Perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas segala bantuan dan fasilitas yang telah diberikan.
5. Bapak dan Mamak yang telah membantu penulis melalui doa dan dukung-annya.

6. Teman-teman angkatan`97 yang telah memberikan semangat dalam menghadapi ujian
7. Adik-adik angkatan' 2000 yang telah berkorban untuk bekerja sama dalam hal apapun.

Semoga baik budi yang tiada ternilai yang telah diberikan kepada penulis, akan mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan Yang Maha Kasih.

Penulis menyadari walaupun penyusunan skripsi ini telah diusahakan dengan sebaik mungkin, tetapi masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran dari berbagai pihak demi semakin baiknya penulisan ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya.

Yogyakarta, 11 Agustus 2001

Penulis

ABSTRAK

Himpunan semua titik $z \in C$ yang orbitnya terhadap suatu fungsi f adalah terbatas disebut himpunan Julia penuh dari f. Batas dari himpunan Julia penuh dari fungsi f disebut himpunan Julia dari fungsi f. Algoritma untuk menggambar pendekatan himpunan Julia penuh adalah sebagai berikut:

Kita tentukan suatu bilangan bulat positif N, dan suatu daerah D di bidang kompleks. Untuk setiap titik $z \in D$, iterasikan $N + 1$ titik–titik yang pertama dari orbit-nya. Bila diperoleh

$$\left| f^{n}(z) \right| > \text{maks}\{ |c|, 2 \}$$

untuk suatu $n \leq N$, iterasi dihentikan dan titik z itu diberi warna putih. Bila diperoleh

$$\left| f^{n}(z) \right| \leq \text{maks}\{ |c|, 2 \}$$

untuk semua $n \leq N$, maka titik z itu diberi warna hitam. Titik–titik berwarna hitam itu menggambarkan suatu pendekatan dari himpunan Julia penuh dari f.

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dinamika fungsi–fungsi peubah kompleks sebenarnya sudah banyak diteliti oleh para matematikawan. Visualisasinya secara mendetail ternyata sangat mentakjubkan, tetapi visualisasi tersebut baru dapat ditampilkan sesudah berkembangnya teknologi komputer. Salah satu hasilnya adalah himpunan Julia penuh, yang dahulu hanya dapat dipikirkan secara teoretis saja.

Dengan menggunakan komputer, seorang matematikawan dari Universitas Yale, yaitu Benoit Mandelbrot, berhasil melihat betapa indah dan mengagumkan himpunan Julia penuh itu. Oleh karena keindahan himpunan Julia penuh tersebut, penulis tertarik untuk mendalaminya dan mengambilnya sebagai topik skripsi.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah-masalah yang berkaitan dengan himpunan Julia penuh yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah :

1. Apakah yang dimaksud himpunan Julia penuh dan himpunan Julia itu ?
2. Definisi–definisi dan teorema–teorema apa sajakah yang mendasari algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh ?

3. Bagaimanakah algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh dari suatu pemetaan f ?

1.3 Tujuan Pembahasan

1. Memahami apakah yang dimaksud himpunan Julia penuh dan himpunan Julia itu.
2. Memahami definisi–definisi dan teorema–teorema yang mendasari algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh.
3. Memahami algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh dari suatu pemetaan f .

1.4 Ruang Lingkup Pembahasan

Dalam skripsi ini, pembahasan himpunan Julia penuh dibatasi hanya untuk fungsi $f_c : C \to C$ dengan $f_c(z) = z^2 + c$ di mana c adalah suatu parameter kompleks. Selain itu, algoritma untuk menggambar himpunan Julia tidak dibahas dalam skripsi ini.

1.5 Metode Penulisan

Penulisan skripsi ini dilaksanakan dengan metode studi pustaka.

1.6 Sistematika Pembahasan

Dalam bab II akan dibahas mengenai fungsi kompleks dan pada bab III akan dibahas mengenai iterasi dan orbit. Kemudian dalam bab IV dibahas pengertian himpunan Julia penuh dan himpunan Julia. Bab V membahas algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh. Sedangkan bab VI berisi kesimpulan.

BAB II

FUNGSI KOMPLEKS

Dalam bab II ini dibahas mengenai pengertian-pengertian bilangan kompleks, fungsi kompleks, dan barisan tak hingga.

2.1 Bilangan Kompleks

Definisi 1. **Bilangan kompleks** adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai

$$z = a + bi$$

di mana a dan b adalah bilangan-bilangan real, serta $i^2 = -1$. Dalam hal ini a dan bi berturut-turut disebut **bagian real** dan **bagian imajiner** dari z tersebut.

Contoh 1. $2 + 2i$, $-i$, dan $3 = 3 + 0i$ merupakan bilangan- bilangan kompleks.

Operasi-operasi penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks dide-finisikan sebagai berikut.

Definisi 2. Jika $z = a + bi$ dan $w = c + di$, maka

$$z + w = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Contoh 2. Jika $z = 2 + 2i$ dan $w = 0 + 3i$, maka

$$z + w = (2 + 0) + (2 + 3) i = 2 + 5i$$

$$z \cdot w = (2 \cdot 0 - 2 \cdot 3) + (2 \cdot 3 + 0 \cdot 2) i = -6 + 6i.$$

Definisi 3. Diberikan $z = a + bi$. **Modulus** dari z, ditulis sebagai $|z|$ adalah

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Contoh 3. Modulus dari $z = 4 + 3i$ adalah $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

Teorema 1. Untuk sembarang bilangan-bilangan kompleks $z = a + bi$ dan $w = c + di$, berlaku :

i) $|z|^2 = |z^2|$

ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$

iv) $|z| - |w| \leq |z - w|$.

Bukti:

i) $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$

$$= \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}$$

$$= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} = \sqrt{\left(a^2 - b^2\right)^2 + (2ab)^2}$$

$$= \left| \left(a^2 - b^2\right) + (2ab)i \right|$$

$$= \left| (a+bi)^2 \right| = \left| z^2 \right|.$$

ii) $|z \cdot w| = |(a+bi)(c+di)|$

$$= |(ac-bd)+(ad+bc)i|$$

$$= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)} \cdot \sqrt{\left(c^2+d^2\right)}$$

$$= |z| \cdot |w|.$$

iii) $(ad-bc)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \geq (ac+bd)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{c^2+d^2}\right) \geq 2(ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2 \geq a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(|a+bi| + |c+di| \right)^2 \geq |(a+bi)+(c+di)|^2$$

$$\Leftrightarrow \left(|z| + |w| \right)^2 \geq |z+w|^2$$

$$\Leftrightarrow |z| + |w| \geq |z+w|^2.$$

iv) $\sqrt{(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2} \geq \sqrt{(ac+bd)^2} = |ac+bd| \geq -(ac+bd)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2} \geq -(ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \geq -(ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \geq -(ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\right) \leq (ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 - \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + c^2 + d^2 \leq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \leq (a+c)^2 + (b+d)^2$$

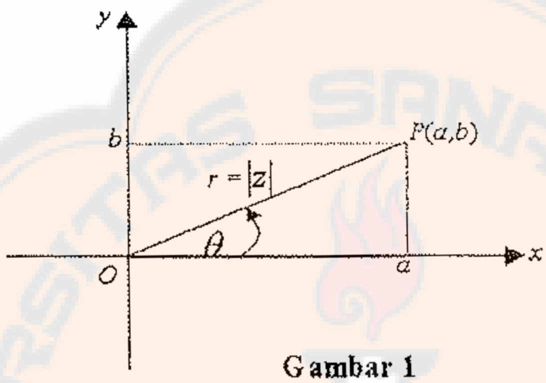
$$\Leftrightarrow \left(|a+bi| - |c+di|\right)^2 \leq |(a+c)+(b+d)i|^2$$

$$\Leftrightarrow (|z| - |w|)^2 \leq |z+w|^2$$

$$\Leftrightarrow |z| - |w| \leq |z+w| \quad \blacksquare$$

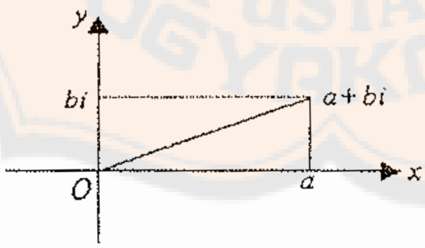
Sifat iii) dan sifat iv) di atas dikenal dengan nama **ketaksamaan segitiga**.

Bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut (a,b), sehingga z dapat direpresentasikan sebagai titik di bidang koordinat Kartesius. Akibatnya, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ menyatakan panjang ruas garis OP dari titik asal koordinat $O(0,0)$ ke titik $P(a,b)$. Lihat Gambar 1.



Gambar 1

Seringkali titik $P(a,b)$ dipandang sebagai bilangan kompleks $z = a + bi$ itu sendiri. Absis a dan ordinat b pada Gambar 1, masing-masing dipandang sebagai bagian real dan bagian imajiner dari z. Sumbu-x dan sumbu-y masing-masing dinamakan sumbu real dan sumbu imajiner. Di samping itu, bidang koordinat di atas disebut bidang kompleks. Lihat Gambar 2.



Gambar 2.

Jika sudut antara sumbu-x positif dan OP sebesar θ dan $|OP| = r$, maka berlaku

$$a = r\cos\theta \quad \text{dan } b = r\sin\theta .$$

Akibatnya bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat ditulis sebagai :

$$z = r\cos\theta + i\ r\sin\theta = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Deret Maclaurin bagi fungsi-fungsi e^t, cos t, dan sin t berturut-turut sebagai berikut:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots,$$

dengan $t \in R$. Jika pada deret Maclaurin bagi e^t di atas, t diganti dengan $i\theta$, dengan $\theta \in R$, maka diperoleh:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right) +$$

$$\left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots + \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} - \cdots\right) +$$

$$\left(i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k (i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta .$$

Dengan demikian bilangan kompleks z dapat pula ditulis sebagai

$$z = re^{i\theta} .$$

Teorema 2. Jika $z = r\,e^{i\theta}$, maka untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 2$ berlaku

$$z^n = r^n\,e^{in\theta} .$$

Bukti : Jika $n = 2$, maka berlaku

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(r\,e^{i\theta}\right)^2 = r^2\left(e^{i\theta}\right)^2 \\ &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + i\ 2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= r^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) = r^2\ e^{i2\theta} . \end{aligned}$$

Jadi teorema benar untuk $n = 2$. Andaikan teorema benar untuk $n = k$, yaitu:

$$z^k = r^k\ e^{ik\theta} .$$

Akan diperlihatkan bahwa teorema juga benar untuk $n = k+1$. Perhatikan:

$$\begin{aligned} z^{k+1} = z^k\ z &= r^k\ e^{ik\theta}\ r\,e^{i\theta} = r^{k+1}\ e^{ik\theta}\ e^{i\theta} \\ &= r^{k+1}\left(\cos k\theta + i\sin k\theta\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= r^{k+1}\left(\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta\right) \\ &= r^{k+1}\left(\cos\left(k\theta + \theta\right) + i\sin\left(k\theta + \theta\right)\right) \end{aligned}$$

$$= r^{k+1}\left(\cos\left(k\theta+\theta\right)+i\sin\left(k\theta+\theta\right)\right)$$

$$= r^{k+1}\left(\cos\left(k+1\right)\theta+i\sin\left(k+1\right)\theta\right)$$

$$= r^{k+1}\, e^{i(k+i)\theta}.\ \blacksquare$$

2.2 Fungsi Kompleks

Definisi 4. Misalkan C himpunan semua bilangan kompleks dan $D \subseteq C$. Fungsi $f : D \to C$ disebut **fungsi kompleks** .

Contoh 4. Jika $D \subseteq C$, maka fungsi $f : D \to C$ dengan $f(z) = z^2$ adalah fungsi kompleks.

Definisi 5. Pandang fungsi-fungsi kompleks $f : D \to C$ dan $g : E \to C$, dengan $g(E) \subseteq D \subseteq C$, maka **komposisi fungsi** $f \circ g$ adalah fungsi dari E ke C dengan rumus

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) \quad , \forall z \in E .$$

Contoh 5. Misalkan $C_+ = \{a+bi \mid a,b \in R, a \geq o\}$. Diketahui fungsi-fungsi kompleks $f : C_+ \to C$ dan $g : C_+ \to C$ dengan rumus $f(z) = z^2$ dan $g(z) = z+1$.

Perhatikan bahwa $\forall\, z = a+bi \in C_+$

$$g(z) = z+1 = (a+bi)+1 = (a+1)+bi ,$$

sehingga bagian real dari $g(z)$ adalah a +1, yang lebih besar atau sama dengan 1. Jadi

$$g(C_+) \subseteq C_+.$$

Komposisi $f \circ g$ adalah fungsi dengan rumus

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z+1) = (z+1)^2.$$

Dalam skripsi ini nanti digunakan notasi f^n dengan n bilangan bulat taknegatif. Untuk n = 0, f^0 didefinisikan sebagai fungsi identitas $f^0(z) = z$. Untuk n = 1, f^1 didefinisikan sebagai fungsi f itu sendiri. Sedangkan untuk $n \geq 2$, f^n didefinisikan sebagai komposisi fungsi $f \circ f^{n-1}$.

<u>**Contoh 6.**</u> Pandang fungsi $f(z) = z^2$. Akan dicari $f^4(z)$.

$$f(z) = z^2$$

$$f^2(z) = (f \circ f)(z) = f(f(z)) = f(z^2)^2 = (z^2)^2 = z^4$$

$$f^3(z) = (f \circ f^2)(z) = f(f^2(z)) = f(z^4) = (z^4)^2 = z^8$$

$$f^4(z) = (f \circ f^3)(z) = f(f^3(z)) = f(z^8) = (z^8)^2 = z^{16}.$$

2.3 Barisan Tak Hingga

<u>**Definisi 6.**</u> Misalkan N himpunan semua bilangan bulat positif dan B suatu himpunan bilangan. Fungsi $b : N \to B$ disebut **barisan tak hingga**. Jika $B = R$, maka

b disebut **barisan real**, sedangkan jika $B = C$, maka b disebut **barisan kompleks**.

Barisan tak hingga biasanya ditulis dalam bentuk

$$b(1), b(2), b(3), \ldots, b(n), \ldots$$

Untuk $n = 1, 2, 3, \ldots,$ $b(n)$ disebut **suku barisan ke-n**. Seringkali barisan tak hingga b ditulis dengan notasi (b_n).

<u>Contoh 7</u>. 3, 4, 5, 6, 7, . . . merupakan barisan real, yang berkaitan dengan fungsi $b: N \to R$ dengan rumus $b(n) = n + 2, \quad \forall n \in N$.

<u>Contoh 8</u>. Misalkan $a \in C$ dan $f: C \to C$ suatu fungsi kompleks. Maka

$$f^0(a), f^1(a), f^2(a), \ldots$$

merupakan barisan kompleks yang berkaitan dengan fungsi $b: N \to C$ dengan rumus

$$b(n) = f^{n-1}(a).$$

<u>**Definisi 7**</u>. Barisan real (b_n) dikatakan **divergen**, yang dinotasikan dengan

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

jika $\forall \alpha > 0, \exists M \in N \ni$ untuk $n \geq M$ berlaku $b_n > \alpha$.

<u>Contoh 9</u>. Pandang fungsi $f: C \to C$ dengan $f(z) = 2z$. Dengan induksi matematika diperlihatkan bahwa untuk setiap $n \in N$ berlaku

$$f^n(i) = 2^n i .$$

Untuk $n = 1$, tampak bahwa $f^1(i) = f(i) = 2i = 2^1 i$. Jadi rumus tersebut berlaku untuk $n = 1$. Andaikan rumus itu berlaku untuk $n = k$, yaitu

$$f^k(i) = 2^k i .$$

Maka

$$\begin{aligned} f^{k+1}(i) &= (f \circ f^k)(i) = f(f^k(i)) \\ &= f(2^k i) = 2 \cdot 2^k i = 2^{k+1} i \end{aligned}$$

yang memperlihatkan bahwa rumus di atas juga berlaku untuk $n = k+1$. Jadi rumus itu berlaku untuk setiap $n \in N$.

Akibatnya,

$$\lim_{n \to \infty} \left| f^{n-1}(i) \right| = \infty ,$$

karena untuk sembarang $\alpha > 0$ terdapat $M \in N$ dengan $M > 1 + {}^2\log \alpha$, sedemikian sehingga untuk $n \geq M$ berlaku $\left| f^{n-1}(i) \right| = 2^{n-1} > 2^{{}^2\log \alpha} = \alpha$. Di lain pihak, barisan $\left| f^0(0) \right|, \left| f^1(0) \right|, \left| f^2(0) \right|, \left| f^3(0) \right|, \ldots$ tidak divergen, karena untuk setiap $n \in N$, $\left| f^{n-1}(0) \right| = 0$.

BAB III

ITERASI DAN ORBIT

Dalam Bab III ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu diketahui untuk mempelajari bab- bab selanjutnya, yaitu iterasi dan orbit.

3.1 Iterasi

Definisi 8. Diberikan sebuah fungsi f dan misalkan $a \in DA_f$. **Iterasi tingkat ke-n** dari f untuk $x = a$ adalah $f^n(a)$, di mana $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Contoh 10. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$. Akan dicari $f^5(1)$. Dilakukan proses perhitungan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1^2 + 1 = 2 \\
f^2(1) &= f(f(1)) = f(2) = 2^2 + 1 = 5 \\
f^3(1) &= f(f^2(1)) = f(5) = 5^2 + 1 = 26 \\
f^4(1) &= f(f^3(1)) = f(26) = 26^2 + 1 = 677 \\
f^5(1) &= f(f^4(1)) = f(677) = 677^2 + 1 = 458330
\end{aligned}
$$

Contoh 11. Pandang fungsi kompleks $f(z) = z - i, z \in C$. Iterasi tingkat ke-20 dari $f(z)$ untuk $z = i$ adalah $f^{20}(z)$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
f(i) &= 0 \\
f^2(i) &= f(f(i)) = 0^2 - i = -i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^3(i) &= f(f^2(i)) = (-i)^2 - i = -1 - i \\
f^4(i) &= f(f^3(i)) = (-1-i)^2 - i = i \\
f^5(i) &= f(f^4(i)) = i^2 - i = -1 - i \\
f^6(i) &= f(f^5(i)) = (-1-i)^2 - i = i \\
f^7(i) &= f(f^6(i)) = i^2 - i = -1 - i \\
f^8(i) &= f(f^7(i)) = (-1-i)^2 - i = i \\
&\vdots \\
&\vdots \\
f^{19}(i) &= f(f^{18}(i)) = i^2 - i = -1 - i \\
f^{20}(i) &= f(f^{19}(i)) = (-1-i)^2 - i = i
\end{aligned}
$$

Karena terjadi perulangan, nilai komposisi fungsi $f^n(i)$ untuk $n \geq 4$, maka nilai fungsi $f^{20}(i) = i$.

3.2 Orbit

Konsep orbit erat hubungannya dengan konsep iterasi. Definisi orbit adalah sebagai berikut.

Definisi 9. Pandang fungsi f dan $a \in DA_f$. **Orbit dari a terhadap fungsi f** adalah barisan tak hingga : $a, f(a), f^2(a), f^3(a), f^4(a), f^5(a), \ldots, f^n(a), \ldots$

Contoh 12. Diketahui fungsi $f(z) = z^2 + 2i$. Akan dicari orbit dari $z = i$ terhadap fungsi f. Dilakukan proses iterasi sebagai berikut:

$$f(i) = i^2 + 2i = -1 + 2i$$
$$f^2(i) = (-1+2i)^2 + 2i = 1 - 4i - 4 + 2i = -3 - 2i$$
$$f^3(i) = (-2i-3)^2 + 2i = -4 + 12i + 9 + 2i = 5 + 14i$$
$$f^4(i) = (5+14i)^2 + 2i = 25 + 140i - 196 + 2i = 171 + 142i$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

Jadi orbit dari $z = i$ terhadap $f(z) = z^2 + 2i$ adalah

$$i, -1+2i, -3-2i, 5+14i, 171+142i, \ldots.$$

Definisi 10. Orbit dari a terhadap fungsi f dikatakan **terbatas** bila terdapat bilangan positif b sedemikian sehingga $|f^n(a)| < b$, $\forall n \in N$.

Contoh 13. Diberikan $f(z) = z^2 + 1$. Akan diselidiki apakah orbit dari $z = i$ terhadap fungsi f tersebut terbatas atau tidak. Dilakukan proses iterasi sebagai berikut:

$$f(i) = i^2 + 1 = 0$$
$$f^2(i) = 0^2 + 1 = 1$$
$$f^3(i) = 1^2 + 1 = 2$$
$$f^4(i) = 2^2 + 1 = 5$$
$$f^5(i) = 5^2 + 1 = 26$$
$$f^6(i) = 26^2 + 1 = 677$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

Sehingga orbit dari $z = i$ terhadap $f(z) = z^2 + 1$ adalah 1, 0, 2, 5, 26, 677, ...

Karena tidak dapat ditemukan bilangan positif b sedemikian sehingga $|f^n(i)| < b$ untuk $\forall\, n \in N$, maka orbit dari $z = i$ terhadap fungsi f tersebut tidak terbatas.

Contoh 14. Pandang $f(z) = z^2$. Akan diselidiki apakah orbit dari $z = i$ terhadap fungsi f tersebut terbatas atau tidak. Dilakukan proses iterasi sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1^2 = 1\\
&f^2(1) = 1^2 = 1\\
&f^3(1) = 1^2 = 1\\
&f^4(1) = 1^2 = 1\\
&\vdots\\
&f^n(1) = 1^2 = 1\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sehingga orbit dari $z = i$ terhadap $f(z) = z^2$ adalah 1, 1, 1, 1, 1, ... Orbit tersebut terbatas, karena ada $b = 2$ sedemikian sehingga $|f^n(i)| < 2$, $\forall n \in N$.

BAB IV

HIMPUNAN JULIA PENUH

Pada bab IV ini, akan dibahas mengenai himpunan Julia penuh dan himpunan Julia. Akan diberikan definisi-definisi dan dibuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk memahami himpunan Julia penuh dan himpunan Julia serta algoritmanya. Pembahasan ini dibatasi pada fungsi $f_c : C \to C$ dengan

$$f_c(z) = z^2 + c \ ,$$

di mana c adalah suatu parameter kompleks.

Misalnya S suatu himpunan pada bidang kompleks. Titik $z_0 \in C$ disebut **titik batas** dari S jika setiap kitaran dari z_0 memuat anggota S dan anggota S^c. Himpunan semua titik batas dari S itu dinamakan **batas** dari S.

Definisi 11. Himpunan semua titik $z \in C$ yang orbitnya terhadap f_c adalah terbatas disebut **himpunan Julia penuh** dari f_c. Batas dari himpunan Julia penuh dari f_c disebut **himpunan Julia** dari f_c.

Nama "Julia" dalam himpunan Julia penuh dan himpunan Julia berasal dari nama Gaston Julia (1893-1978), seorang perwira tentara Prancis yang terluka akibat perang melawan Jerman, pada Perang Dunia yang pertama di Eropa. Pada waktu itu Gaston Julia terluka kemudian diangkut ke rumah sakit dan akhirnya menjalani amputasi pada hidungnya. Sejak saat itu ia selalu memakai penutup hidung pada wajahnya. Selama berbaring dirumah sakit itulah Julia melakukan penelitian matematik, khususnya yang berkaitan dengan dinamika fungsi-fungsi kompleks yang analitik.

Pada waktu yang bersamaan, matematikawan Prancis lainnya, yaitu Piere Fatou (1878-1929), juga melakukan penelitian dalam bidang tersebut. Penelitian mereka sebenarnya menghasilkan temuan-temuan yang penting dan mengagumkan, tetapi pada masa itu kurang mendapat perhatian dan cepat dilupakan orang. Baru kurang lebih enam puluh tahun kemudian, karya-karya Julia dan Fatou itu seakan dibangkitkan kembali oleh Benoit Mandelbrot, seorang matematikawan Amerika yang sejak tahun 1977 banyak melakukan penelitian dalam bidang analisis kompleks.

<u>**Contoh 15**</u>. Diberikan fungsi kuadrat $f_0(z) = z^2$. Akan diselidiki himpunan Julia penuh dan himpunan Julia dari f_0. Ambil sembarang z bilangan kompleks yaitu $z = re^{i\theta}$. Orbit dari z terhadap fungsi f_0 adalah

$$re^{i\theta}, (re^{i\theta})^2, (re^{i\theta})^4, (re^{i\theta})^8, (re^{i\theta})^{16}, \ldots, (re^{i\theta})^{2^n}, \ldots$$

sehingga

$$\left|\left(re^{i\theta}\right)^{2^n}\right| = \left|r^{2^n} e^{i\theta 2^n}\right| = r^{2^n}\left|e^{i\theta 2^n}\right| = r^{2^n}\sqrt{\cos^2\left(2^n\theta\right)+\sin^2\left(2^n\theta\right)} = r^{2^n}.$$

Jika $r \le 1$, maka $r^{2^n} \le 1$. Jika $r > 1$, maka $r^{2^n} \to \infty$ untuk $n \to \infty$. Jadi untuk $r \le 1$ orbit dari z terbatas , sedang untuk $r > 1$ orbit dari z tak terbatas. Dengan demikian himpunan Julia penuh dari f_0 adalah $\{z \mid |z| \leq 1\}$, yaitu daerah lingkaran satuan. Batas daerah ini adalah lingkaran satuan $\{z \mid |z| = 1\}$. Jadi himpunan Julia dari f_0 adalah $\{z \mid |z| = 1\}$.

<u>**Teorema 3**</u>. Bila $|z| > \text{maks}\{|c|, 2\}$, maka $\lim_{n\to\infty} |f_c^n(z)| = \infty$.

Bukti: Andaikan $|z| > \text{maks}\{|c|, 2\}$. Kita cukup membuktikan bahwa

$$|f_c^n(z)| > (1+\lambda)^n |z|$$

untuk suatu $\lambda > 0$ dan setiap bilangan bulat positif n, dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga bilangan kompleks diperoleh:

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c|.$$

Karena

$$|z| > \text{maks}\{|c|, 2\} \geq |c|, \text{ maka } -|c| > -|z|,$$

sehingga

$$|f_c(z)| \geq |z|^2 - |c| > |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z|.$$

Dilain pihak, karena $|z| > \text{maks}\{|c|, 2\}$, maka $|z| = 2 + \lambda$ untuk suatu $\lambda > 0$, sehingga $|z| - 1 = 1 + \lambda$. Dengan demikian $|f_c(z)| > (1+\lambda)|z|$. Jadi teorema benar untuk $n = 1$. Selanjutnya, andaikan teorema benar untuk $n = k$, yaitu

$$\left|f_c^k(z)\right| > (1+\lambda)^k \, |z| \,.$$

Akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk $n = k + 1$. Dengan ketaksamaan segitiga bilangan kompleks diperoleh:

$$\left|f_c^{k+1}(z)\right| = \left|f_c(f_c^k(z))\right| = \left|(f_c^k(z))^2 + c\right| \geq \left|f_c^k(z)\right|^2 - |c|.$$

Karena $|z| > \text{maks}\,\{|c|, 2\} \geq |c|$, maka $-|c| > -|z|$ sehingga

$$\left|f_c^{k+1}(z)\right| \geq \left|f_c^k(z)\right|^2 - |c| > \left|f_c^k(z)\right|^2 - |z|.$$

Dilain pihak

$$\left|f_c^k(z)\right| > (1+\lambda)^k |z| > |z|,$$

sehingga $-|z| > -\left|f_c^k(z)\right|$, yang mengakibatkan

$$\left|f_c^k(z)\right|^2 - |z| > \left|f_c^k(z)\right|^2 - \left|f_c^k(z)\right|.$$

Jadi

$$\left|f_c^{k+1}(z)\right| > \left|f_c^k(z)\right|^2 - \left|f_c^k(z)\right| = \left(\left|f_c^k(z)\right| - 1\right)\left|f_c^k(z)\right|.$$

Perhatikan bahwa $\left|f_c^k(z)\right| > |z| = 2 + \lambda$, sehingga $\left|f_c^k(z)\right| - 1 > 1 + \lambda$. Jadi

$$\left|f_c^{k+1}(z)\right| > \left|f_c^k(z)\right|\left(\left|f_c^k(z)\right| - 1\right) > (1+\lambda)^k \, |z|(1+\lambda) = (1+\lambda)^{k+1} \, |z| \,. \blacksquare$$

Contoh 16. Diberikan fungsi f_c , dengan $c = 2 + i$. Akan diselidiki bagaimanakah perilaku orbit dari $z = 2i - 3$ dan $z = i$, untuk $n \to \infty$. Perhatikan bahwa

$$\text{maks}\{|c|, 2\} = \text{maks}\,\{\sqrt{5}, 2\} = \sqrt{5}.$$

Untuk $z = 2i - 3$, maka $|z| = \sqrt{13} > \sqrt{5}$. Jadi berdasar Teorema 3,

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_{2+i}^n \ (2i-3) \right| = \infty.$$

Untuk $z = i$, maka $|z| = 1 < \sqrt{5}$ sehingga berdasar Teorema 3 tidak dapat disimpulkan apa-apa tentang $\left| f_{2+i}^n (i) \right|$ untuk $n \to \infty$.

Teorema 4. Jika $\left| f_c^k(z) \right| > \text{maks}\left\{ |c|, 2 \right\}$ untuk suatu bilangan taknegatif k, maka

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_c^n \ (z) \right| = \infty.$$

Bukti: Misalkan $\left| f_c^k(z) \right| > \text{maks}\left\{ |c|, 2 \right\}$ dan $w = f_c^k(z)$. Berdasar Teorema 3, dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{p\to\infty} \left| f_c^p (w) \right| = \lim_{p\to\infty} \left| f_c^p \left(f_c^k (z) \right) \right| = \lim_{p\to\infty} \left| f_c^{p+k} (z) \right| = \infty.$$

Jadi

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_c^n \ (z) \right| = \infty. \ \blacksquare$$

Contoh 17. Pada Contoh 16 telah kita lihat bahwa $\lim_{n\to\infty} \left| f_{2+i}^n \ (2i-3) \right| = \infty$. Sedang untuk $z = i$ tidak dapat disimpulkan apa- apa mengenai $\lim_{n\to\infty} \left| f_{2+i}^n (i) \right|$. Pada contoh ini, hal itu akan diselidiki dengan memakai Teorema 4. Telah diketahui pada Contoh 16 bahwa $\text{maks}\left\{ |2+i|, 2 \right\} = \sqrt{5}$.

Untuk $z = i$,

$$f_{2+i}(i) = i^2 + (2+i) = -1 + 2 + i = i + 1,$$

$$f_{2+i}^2(i) = (i+1) + (2+i) = -1 + 2i + 1 + 2 + i = 3i + 2.$$

Karena $\left|f_{2+i}^2(i)\right| = |3i+2| = \sqrt{13} > \sqrt{5}$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_{2+i}^n(i)\right| = \infty.$$

Teorema 5. Jika $|c| > 2$, maka $\lim_{n\to\infty}\left|f_c^n(0)\right| = \infty$.

Bukti: Misalkan $|c| > 2$. Karena $f_c(0) = c$, maka

$$\left|f_c^2(0)\right| = \left|c^2 + c\right| = |c(c+1)| = |c|\,|c+1|.$$

Karena $|c+1| \geq |c| - 1$ dan $|c| > 2$, maka

$$\left|f_c^2(0)\right| = |c|\,|c+1| > 2\left(|c| - 1\right) = |c| + |c| - 2 > |c| + 2 - 2$$

$$= |c| = \text{maks}\left\{|c|, 2\right\}.$$

Jadi menurut Teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_c^n(z)\right| = \infty. \blacksquare$$

Contoh 18. Dari Contoh 16, diketahui bahwa $c = 2 + i$, sehingga $|c| = \sqrt{5} > 2$, maka dengan Teorema 5 diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_{2+i}^n(0)\right| = \infty.$$

BAB V

ALGORITMA UNTUK MENGGAMBAR HIMPUNAN JULIA PENUH

Pada bab ini akan dibahas mengenai algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh beserta contoh-contoh penerapannya. Dengan algoritma ini kita dapat menggambarkan pendekatan bagi himpunan Julia penuh pada suatu daerah di bidang kompleks yang ditentukan, dan menampilkannya di layar monitor komputer.

Teorema 4 merupakan dasar bagi penyusunan algoritma tersebut. Jika $|f_c^n(z)| > \text{maks}\{|c|, 2\}$ untuk suatu bilangan bulat taknegatif n, maka orbit dari z terhadap f adalah tidak terbatas, sehingga z bukan anggota himpunan Julia penuh.

Algoritma untuk menggambar pendekatan himpunan Julia penuh dari fungsi f_c adalah sebagai berikut :

Kita tentukan suatu bilangan bulat positif N, dan suatu daerah D di bidang kompleks. Untuk setiap titik $z \in D$ iterasikan $N+1$ titik-titik yang pertama dari orbitnya. Bila diperoleh

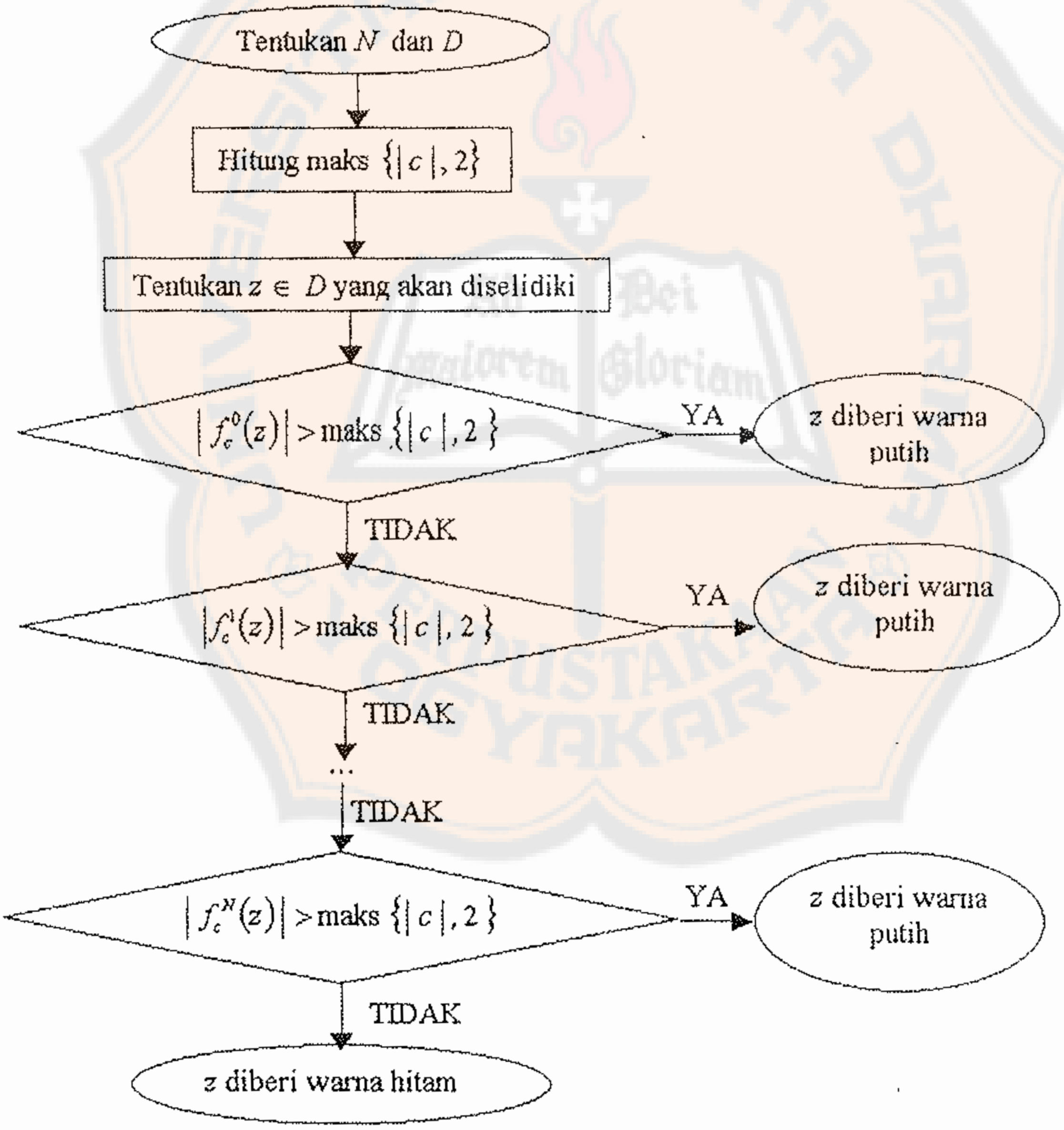
$$|f_c^n(z)| > \text{maks}\{|c|, 2\}$$

untuk suatu $n \le N$, iterasi dihentikan dan titik z itu diberi warna putih. Bila diperoleh

$$\left| f_c^n\ (z) \right| \leq \text{maks}\ \{ |c|\ , 2 \}$$

untuk semua $n \leq N$, maka titik z itu diberi warna hitam. Titik–titik berwarna hitam itu menggambarkan suatu pendekatan dari himpunan Julia penuh dari f_c .

Algoritma untuk menggambar himpunan Julia penuh dari f_c tersebut dapat disajikan dengan diagram alir berikut ini.



Dalam prakteknya algoritma ini hanya hanya menghasilkan gambar pendekatan saja, karena komputer hanya dapat menyelidiki orbit dari berhingga banyak titik–titik pada suatu daerah di bidang kompleks. Di samping itu, komputer juga hanya dapat melakukan iterasi sebanyak berhingga kali untuk menentukan sifat orbit dari titik yang diselidiki.

Contoh 19. Pandang fungsi $f_0(z) = z^2$. Penerapan algoritma himpunan Julia penuh disajikan untuk beberapa titik sebagai berikut. Misalnya ditentukan $N = 5$ dan

$$D = \{ x + yi \in C \,|\, x = \tfrac{1}{10} m,\ y = \tfrac{1}{10} n,\ \ m, n \in Z,\ -20 \le m, n \le 20 \}.$$

Perhatikan bahwa maks$\{ |c|, 2 \} = 2$. Diambil $z = 0$. Komputer mulai menghitung $f_0^0\ (0)$ yang hasilnya 0. Karena

$$|f_0^{\,0}\ (0)| < 2$$

maka iterasi di teruskan yaitu menghitung $f_0^1\ (0)$ yang hasilnya 0. Karena

$$|f_0^1\ (0)| < 2$$

maka iterasi berikutnya dihitung. Demikian seterusnya dilakukan sampai dengan iterasi tingkat ke-5. Ternyata

$$|f_0^n\ (0)| < 2 \quad \forall n \le 5,$$

sehingga titik $z = 0$ diberi warna hitam. Kemudian kita tentukan titik pada daerah D yang lain, misalnya $z = \frac{15}{10} i$. Komputer melakukan iterasi dari titik itu terhadap f_0. Karena

$$\left| f_0^{\,1}\left(\tfrac{15}{10}\, i\right)\right| = 2{,}25 > 2\ ,$$

maka iterasi dihentikan dan titik $z = \frac{15}{10}\, i$ diberi warna putih. Demikian seterusnya dilakukan langkah–langkah di atas sampai semua titik-titik dalam daerah D telah selesai diselidiki.

Contoh 20. Ilustrasi penerapan algoritma himpunan Julia penuh dari $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ untuk beberapa titik adalah sebagai berikut. Andaikan ditentukan $N = 10$ dan diambil daerah

$$D = \left\{ x + yi \in C \,\middle|\, x = \tfrac{1}{100}\, m\ ,\ y = \tfrac{1}{100} n\ ,\ m, n \in Z\ , -300 \le m, n \le 300 \right\}.$$

Karena $c = -2$ maka $\text{maks}\{\,|-2|, 2\,\} = 2$. Diambil $z = i$ pada daerah D. Komputer mulai menghitung iterasi $f_{-2}^{\,1}(i)$ yang hasilnya adalah –3. Karena

$$\left| f_{-2}^{\,1}(i) \right| = |-3| > 2$$

maka iterasi dihentikan dan titik z diberi warna putih. Kemudian kita ambil titik lain pada daerah D, misalnya $z = 0$. Komputer mulai melakukan iterasi dari titik tersebut terhadap f_{-2}. Karena

$$\left| f_{-2}^{\,1}(0) \right| = |-2| \le 2,$$

maka iterasi diteruskan, yaitu menghitung $f_{-2}^{\,2}(0)$ yang hasilnya adalah 2. Karena

$$\left| f_{-2}^{\,1}(0) \right| \le 2\ ,$$

maka iterasi berikutnya dihitung. Demikian seterusnya dilakukan iterasi sampai dengan tingkat ke-10. Ternyata

$$\left| f_{-2}^{\,n}(0) \right| \le 2 \,,\ \forall n \le 10 \,,$$

sehingga titik $z = 0$ diberi warna hitam. Demikian seterusnya sampai semua titik di daerah D telah selesai dikerjakan.

Perhatikan bahwa penentuan nilai N, yaitu maksimum dari banyaknya iterasi yang akan di kerjakan oleh komputer, sangat berpengaruh pada hasil algoritma. Hal ini disebabkan karena kemungkinan ada titik z sedemikian sehingga

$$\left| f_c^{\,n}(z) \right| \le \text{maks}\ \{ |c|, 2 \}$$

untuk semua $n \le N$, tetapi

$$\left| f_c^{\,k}(z) \right| > \text{maks}\ \{ |c|, 2 \}$$

untuk suatu $k > N$. Seharusnya titik z tersebut diberi warna putih, tetapi karena N merupakan maksimum iterasi, maka z menurut algoritma di atas diberi warna hitam.

Gambar-gambar pada halaman berikut ini merupakan visualisasi himpunan Julia penuh untuk berbagai nilai parameter c.