ARITMETIKA BILANGAN KABUR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

RR. SRI HASTININGRUM

NIM: 971414026
NIRM: 970051120501120024

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

ARITMETIKA BILANGAN KABUR

Oleh:

SRI HASTININGRUM

NIM: 971414026

NIRM: 970051120501120024

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Dr. Frans Susilo, SJ tanggal 2 Maret 2004

ARITMETIKA BILANGAN KABUR

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

SRI HASTININGRUM

NIM: 971414026

NIRM: 970051120501120024

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 24 Maret 2004
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	Dr. Frans Susilo, SJ	....
Anggota	Drs. Al. Haryono	....

Yogyakarta, 24 Maret 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

"There is a way when there is a will"

"Kekuatan tidak berasal dari kemenangan. Perjuangan membuat Anda mengembangkan kekuatan Anda. Saat mengalami kesulitan dan memutuskan untuk tidak menyerah, itulah kekuatan"

(Arnold Schwarzenegger)

Karya tulis ini, kupersembahkan untuk:

Bapak, Ibu, Mbak Ratna, Mas Surat, Mbak Nur, Mas Pram, Mas Tri, Mbak Siti, Mas Edi, Mas Nu, Santi, Eko, Rahmat, Lana, Arya, dan teman-teman yang telah menyertaiku dalam suka maupun duka.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 24 Maret 2004

Penulis

Sri Hastiningrum

ABSTRAK

Berdasar Teorema Dekomposisi, hasil operasi aritmetika bilangan kabur A dan B dengan potongan-α dari A dan B berturut-turut $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, dan $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, dapat didefinisikan sebagai bilangan kabur dengan potongan-α sebagai berikut:

a. $(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$

b. $(A-B)_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$

c. $(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)$, maks $(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$

d. $(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Berdasar Prinsip Perluasan, hasil operasi aritmetika bilangan kabur A dan B dapat didefinisikan sebagai bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan berturut-turut:

a. $\mu_{A+B}(z) = \sup\limits_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

b. $\mu_{A-B}(z) = \sup\limits_{z=x-y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

c. $\mu_{A \cdot B}(z) = \sup\limits_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

d. $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

untuk setiap $z \in \mathbb{R}$.

Definisi operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan adalah ekivalen dengan definisi operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan potongan-α berdasarkan Teorema Dekomposisi.

ABSTRACT

Based on the Decomposition Theorem, the result of arithmetic operations of fuzzy numbers A and B with the α-cuts $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ and $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ respectively, can be defined as the fuzzy number with α-cut as follows:

a. $(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$

b. $(A-B)_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$

c. $(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{ maks } (a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$

d. $(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$

for every $\alpha \in [0,1]$.

Based on the Extension Principle, the result of arithmetic operations of fuzzy numbers A and B can be defined as the fuzzy number with membership functions as follows:

a. $\mu_{A+B}(z) = \sup\limits_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

b. $\mu_{A-B}(z) = \sup\limits_{z=x-y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

c. $\mu_{A \cdot B}(z) = \sup\limits_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

d. $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

for every $z \in \mathbb{R}$.

The definition of the arithmetic operation of fuzzy numbers using the Extension Principle is equivalent to the definition of the arithmetic operation of fuzzy numbers using α-cut based on the Decomposition Theorem.

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia yang dilimpahkanNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati dan rasa tulus ikhlas, penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan sedalam-dalamnya kepada:

1. Dr. Frans Susilo, SJ selaku dosen pembimbing yang dengan kesabarannya telah membimbing, memberikan saran dan kritik kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
2. Drs. Th. Sugiarto, M.T. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan dosen pembimbing akademik yang telah memberikan dukungan atas penulisan skripsi ini.
3. Bapak, Ibu, dan Kakak-kakakku yang selalu memberikan dukungan moril, spiritual, material, kasih sayang, dan doa.
4. Teman-teman Program Studi Pendidikan Matematika, Pendidikan Fisika, dan Matematika yang telah memberikan dukungan moril, dan kebersamaannya.
5. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah memberikan sumbangsih, saran, kritik, serta dukungan selama kuliah sampai penulisan tugas akhir ini selesai.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak kekurangannya, untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun dari semua pihak. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 24 Maret 2004

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING ii

HALAMAN PENGESAHAN iii

HALAMAN PERSEMBAHAN iv

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA v

ABSTRAK vi

ABTRACT vii

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

BAB I. PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang 1

B. Rumusan Masalah 2

C. Pembatasan Masalah 2

D. Tujuan Penulisan 2

E. Metode Penulisan 2

F. Sistematika Penulisan 3

BAB II. HIMPUNAN TEGAS 4

A. Himpunan Tegas 4

B. Operasi Himpunan Tegas 11

BAB III. HIMPUNAN KABUR 21

A. Konsep-konsep Dasar 21

B. Operasi-operasi Dasar 30

C. Teorema Dekomposisi dan Prinsip Perluasan 37

BAB IV. ARITMETIKA BILANGAN KABUR 41

A. Bilangan Kabur 41

B. Operasi Aritmetika Pada Bilangan-bilangan Kabur 43

BAB V. KESIMPULAN 72

DAFTAR PUSTAKA 75

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Himpunan tegas yang diperkenalkan oleh G. Cantor (1843-1918) hanya berlaku untuk objek-objek tertentu yang dapat dibedakan dengan jelas. Objek dalam himpunan tegas hanya mempunyai dua kondisi yaitu anggota himpunan atau bukan anggota himpunan. Sebagai contoh, pada himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$ berlaku $1\in\mathbb{N}$, $2\in\mathbb{N}$, $3\in\mathbb{N}$, tetapi $0\notin\mathbb{N}$ dan $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Namun kenyataannya banyak himpunan yang tidak mempunyai batas yang tegas, seperti misalnya himpunan mobil-mobil mahal. Himpunan mobil-mobil mahal merupakan himpunan dengan objek-objek tertentu yang tidak dapat dibedakan dengan tegas karena pendeskripsian mobil mahal tergantung pada perkiraan dan penafsiran seseorang. Harga mobil Rp 100.000.000,00 mungkin sudah dianggap mahal bagi kalangan ekonomi bawah, tetapi bagi kalangan ekonomi menengah ke atas belum tentu mahal dan mungkin murah. Jadi tidak jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana yang bukan merupakan anggota himpunan.

Adanya permasalahan-permasalahan yang tidak dapat diselesaikan dengan himpunan tegas tersebut memunculkan konsep himpunan kabur (*fuzzy set*) oleh Lotfi A. Zadeh.

B. Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah

1. Apakah yang dimaksud dengan himpunan kabur ?
2. Apakah yang dimaksud dengan Teorema Dekomposisi dan Prinsip Perluasan ?
3. Apakah yang dimaksud dengan bilangan kabur ?
4. Bagaimanakah hasil operasi aritmetika yang berlaku pada bilangan kabur ?

C. Pembatasan Masalah

Persamaan kabur, kisi bilangan kabur dan aplikasi aritmetika kabur tidak dibahas.

D. Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui tentang himpunan kabur, Teorema Dekomposisi, Prinsip Perluasan, bilangan-bilangan kabur, dan hasil operasi pada bilangan-bilangan kabur.

E. Metode Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan metode studi pustaka.

F. Sistematika Penulisan

Dalam Bab I, yaitu Pendahuluan, diuraikan latar belakang penulisan aritmetika kabur, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan dan sistematika penulisan. Kemudian dilanjutkan dengan pembahasan himpunan tegas dan operasi himpunan tegas pada Bab II. Pembahasan himpunan kabur beserta Teorema Dekomposisi dan Prinsip Perluasan di Bab III, dilanjutkan aritmetika bilangan kabur pada Bab IV yang meliputi bilangan kabur dan operasi aritmetika pada bilangan kabur. Dan yang terakhir Bab V memuat kesimpulan.

BAB II

HIMPUNAN TEGAS

A. Himpunan Tegas

Himpunan tegas merupakan konsep dasar dari semua cabang matematika. Secara intuitif, sebuah himpunan tegas adalah suatu kumpulan dari obyek-obyek tertentu yang dapat dibedakan dengan jelas. Obyek-obyek ini disebut *elemen-elemen* atau *anggota-anggota* himpunan. Dan selanjutnya himpunan tegas disebut *himpunan*.

Berikut diberikan simbol-simbol yang umum dipergunakan dalam himpunan:

1. Huruf besar seperti $A,B,C,X,\ldots$ dan sebagainya menyatakan himpunan.
2. Huruf kecil seperti $a,b,c,x,\ldots$ dan sebagainya menyatakan anggota suatu himpunan.
3. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat.
4. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif atau bilangan asli.
5. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat tak negatif atau bilangan cacah.
6. $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
7. $\mathbb{N}_{0,n} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

8. $\mathbb{R}$: himpunan semua bilangan real.

9. $\mathbb{R}^+$: himpunan semua bilangan real non negatif.

10. $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b): interval tertutup, interval terbuka kiri, interval terbuka kanan, dan interval terbuka bilangan-bilangan real, antara a dan b.

11. $\wedge$ menyatakan "*dan*" sedangkan $\vee$ menyatakan "*atau*".

12. $\exists$ dan $\forall$ secara berturut-turut menyatakan " *ada*" dan "*untuk setiap*".

Himpunan kosong yaitu himpunan yang tidak mempunyai anggota. Dinotasikan dengan ϕ atau { }.

<u>Contoh 2.1</u>:

Misalkan $A = \{x \mid x$ bilangan asli yang kurang dari $0\}$. Maka A merupakan himpunan kosong karena tidak ada bilangan asli yang kurang dari 0.

Jadi $A = \phi$.

Jika suatu obyek x adalah anggota dari sebuah himpunan A, artinya A mengandung x sebagai salah satu dari anggota-anggotanya, maka ditulis $x \in A$, dan dibaca "*x anggota A*" atau "*x di dalam A*".

Jika suatu obyek x bukanlah anggota sebuah himpunan A, artinya A tidak mengandung x sebagai salah satu dari anggota-anggotanya, maka ditulis $x \notin A$, dan dibaca "*x bukan anggota A*" atau "*x tidak di dalam A*".

Contoh 2.2:

Misalkan $A = \{a,i,u,e,o\}$. Maka $a \in A$, i $\in A$, u $\in A$, e $\in A$, dan o $\in A$, tetapi untuk b $\notin A$, dan f $\notin A$.

Definisi 2.1:

Himpunan Semesta adalah himpunan yang anggota-anggotanya mencakup semua obyek yang sedang dibicarakan. Di luar himpunan semesta tidak ada himpunan lain selain himpunan kosong.

Contoh 2.3:

a. Jika yang sedang dibicarakan adalah bilangan cacah, maka himpunan semesta adalah himpunan bilangan cacah.

b. Jika yang sedang dibicarakan adalah himpunan bilangan bulat ganjil dan himpunan bilangan bulat genap, maka himpunan semesta adalah himpunan bilangan bulat.

Secara umum penulisan himpunan dapat disajikan dengan 3 metode, yaitu:

1. Metode Daftar

   Metode daftar merupakan metode menyatakan himpunan dengan menyebutkan semua anggotanya. Setiap anggota di daftar dengan menuliskan nama setiap anggota di antara tanda kurung { }. Jika himpunan tersebut berhingga. Ditulis:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\},$$

dengan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah anggota-anggota himpunan A. Tapi jika himpunan-himpunan tersebut tak berhingga ditulis:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

di mana anggota-anggota selanjutnya dianggap dapat ditentukan dengan memperhatikan aturan yang dapat disimpulkan dari penulisan nama beberapa anggota yang pertama tadi.

Contoh 2.4:

a. $A = \{1,3,5,7,9\}$

   Jumlah anggota himpunan A tidak banyak, maka semua anggota itu ditulis.

b. $B = \{1,2,3,4,\ldots,30\}$

   Himpunan B mempunyai 30 anggota, yaitu tiga puluh bilangan asli yang pertama.

c. $N_0 = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$

   Himpunan N_0 mempunyai tak berhingga banyak anggota, yaitu semua bilangan cacah.

2. Metode Aturan

Metode aturan merupakan metode menyatakan himpunan dengan mempergunakan lambang variabel anggota dan aturan yang harus dipenuhi oleh anggota-anggota himpunan, dan ditulis dengan:

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Keterangan: x menyatakan lambang variabel anggota dan $P(x)$ menyatakan aturan yang harus dipenuhi.

Contoh 2.5:

Contoh 2.4 dinyatakan dalam metode aturan menjadi:

a. $A = \{x \mid x$ adalah bilangan asli ganjil yang kurang dari sepuluh$\}$

b. $B = \{x \mid x$ adalah bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan tiga puluh $\}$

c. $C = \{ x \mid x$ adalah bilangan cacah $\}$

3. Metode Fungsi Karakteristik

Suatu himpunan A dalam semesta X dapat dibatasi dengan sebuah fungsi χ_A, yang disebut *fungsi karakteristik*, yang memetakan anggota-anggota X dengan anggota-anggota himpunan $\{0,1\}$, yaitu:

$$\chi_A : X \to \{0,1\}.$$

Fungsi ini menentukan anggota-anggota dari semesta X yang merupakan anggota dari himpunan itu dan yang bukan. Himpunan A yang dibatasi oleh fungsi karakteristik χ_A, didefinisikan oleh:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk} \quad x \in A \\ 0, & \text{untuk} \quad x \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.6:

Misalkan $X = \{a,b,c,d,e\}$ dan misalkan $A = \{a,b,e\}$, $B = \{c,d\}$ dan $C = \{a,d,e\}$. Maka: $\chi_A = \{(a,1),(b,1),(c,0),(d,0),(e,1)\}$,

$$\chi_B = \{(a,0),(b,0),(c,1),(d,1),(e,0)\}, \text{ dan}$$

$$\chi_C = \{(a,1),(b,0),(c,0),(d,1),(e,1)\}$$

Definisi 2.2:

Keluarga Himpunan adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah himpunan. Keluarga *himpunan* dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\{A_i | i \in I\},$$

di mana i disebut *indeks himpunan* dan I disebut *himpunan indeks*. Misalnya:

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

adalah keluarga himpunan.

Contoh 2.7:

Didefinisikan $D_n = \{ x \mid x \text{ adalah kelipatan } n\}$, di mana $n \in \mathbb{N}$. Maka

$D_1 = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$, $D_2 = \{2,4,6,8,10,12,\ldots\}$, $D_3 = \{3,6,9,12,15,18,\ldots\}$, ...

Himpunan indeksnya adalah $\mathbb{N}$.

Jadi keluarga himpunan tersebut adalah $D = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{D_1, D_2, D_3, \ldots\}$.

Definisi 2.3:

Jika setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B, maka himpunan A disebut *himpunan bagian* dari himpunan B, dan dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Definisi tersebut secara ringkas ditulis:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Contoh 2.8:

Diberikan $A = \{2,4,6\}$ dan $B = \{x \mid x \text{ adalah bilangan asli genap}\}$.

Maka himpunan A adalah himpunan bagian dari B, karena tiap-tiap bilangan 2, 4, dan 6 yang termasuk di A juga termasuk di B.

Definisi 2.4:

Jika setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B adalah anggota himpunan A, maka himpunan A dikatakan *sama* dengan himpunan B, dengan notasi $A=B$, dan ditulis:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Jika himpunan A dan himpunan B *tidak sama*, maka ditulis $A \neq B$.

Contoh 2.9:

a. $A = \{x \mid x$ bilangan cacah ganjil yang lebih besar dari 2 tapi kurang dari 9$\}$

   $B = \{ x \mid x$ bilangan prima yang kurang dari 11 dan tidak sama dengan 2$\}$

   Maka $A = B$ karena $A = \{3,5,7\}$ dan $B = \{3,5,7\}$ yaitu setiap anggota A juga merupakan anggota B dan sebaliknya.

b. $A = \{x \mid x$ bilangan cacah ganjil yang lebih besar dari 2 tapi kurang dari 9$\}$

   $B = \{ x \mid x$ *bilangan* prima yang kurang dari 11 $\}$

   Maka $A \neq B$, *karena* ada anggota B, yaitu 2, yang tidak termasuk di A.

Definisi 2.5:

Himpunan A disebut *himpunan bagian sejati* dari himpunan B, jika himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B dan himpunan A tidak sama dengan himpunan B, dan ditulis:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Contoh 2.10:

Diberikan: $A = \{x \mid x$ bilangan cacah ganjil yang kurang dari $10\}$ dan $B = \{x \mid x$ bilangan cacah$\}$. Maka $A \subset B$ karena setiap anggota A merupakan anggota B dan ada anggota B yaitu 4 yang tidak termasuk di A (A tidak sama dengan B).

Definisi 2.6:

Keluarga semua himpunan bagian dari himpunan A disebut *himpunan kuasa* dari A dan dinotasikan dengan $P(A)$.

Contoh 2.11:

Ditentukan $B = \{2,4,7\}$. Maka himpunan kuasa B, yaitu $P(B) = \{\phi, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,4\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\}$.

B. Operasi Himpunan Tegas

Operasi himpunan tegas yang akan dibahas adalah operasi komplemen, gabungan, irisan, selisih, dan perkalian dua himpunan.

Definisi 2.7:

Jika himpunan X adalah himpunan semesta, maka *komplemen dari himpunan* A adalah himpunan semua anggota semesta yang tidak termasuk dalam A, dinotasikan dengan $\overline{A}$, dan dapat dinyatakan dengan:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$$

Beberapa sifat mengenai himpunan-himpunan yang merupakan akibat dari definisi komplemen himpunan adalah

1. Komplemen dari komplemen himpunan A adalah himpunan A sendiri, yaitu $\overline{\overline{A}} = A$.
2. Komplemen himpunan kosong adalah himpunan semesta X dan komplemen himpunan semesta X adalah himpunan kosong, yaitu $\overline{\phi} = X$ dan $\overline{X} = \phi$.

Contoh 2.12:

Diberikan $A = \{x \mid x$ bilangan cacah ganjil yang kurang dari $10\}$ dalam himpunan semesta $X = \{\, x \mid x$ bilangan cacah$\}$.

Maka $\overline{A} = \{0,2,4,6,8,10,11,12,13,...\}$ dan $\overline{\overline{A}} = \{1,3,5,7,9\} = A$.

Definisi 2.8:

Gabungan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan semua anggota-anggota yang termasuk dalam himpunan A atau himpunan B atau keduanya. Gabungan himpunan A dan himpunan B dinotasikan dengan $A \cup B$, dan ditulis:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Operasi gabungan dapat *diperluas* untuk keluarga himpunan $\{A_i \mid i \in I\}$, yaitu

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) x \in A_i\}.$$

Contoh 2.13:

a. Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{5,6,7\}$, maka $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$

b. Misalkan $A_1 = \{1,10\}$, $A_2 = \{2,4,6,10\}$, $A_3 = \{3,6,9\}$, $A_4 = \{4,8\}$, $A_5 = \{5,6,10\}$ dan misalkan $I = \{2,3,5\}$. Maka $\bigcup_{i \in I} A_i = \{2,3,4,5,6,9,10\}$.

Definisi 2.9:

Irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan semua anggota yang menjadi anggota himpunan A dan himpunan B. Irisan himpunan A dan himpunan B dinotasikan dengan $A \cap B$, dan ditulis:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Operasi irisan diperluas untuk sebuah keluarga himpunan $\{A_i | i \in I\}$, yaitu

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | (\forall i \in I) x \in A_i\}$$

Contoh 2.14:

a. Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ dan $B = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

b. maka $A \cap B = \{5,6,7,8,9,10\}$

c. Misalkan $A_1 = \{1,10\}$, $A_2 = \{2,4,6,10\}$, $A_3 = \{3,6,9\}$, $A_4 = \{4.8\}$, $A_5 = \{5,6,10\}$ dan misalkan $I = \{2,3,5\}$. Maka $\bigcap_{i \in I} A_i = \{6\}$

Definisi 2.10:

Selisih himpunan B dan himpunan A adalah himpunan semua anggota himpunan B yang tidak termasuk dalam A, dengan notasi $B - A$, dan ditulis:

$$B - A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Contoh 2.15:

Andaikan $B = \{2,4,6,8,10\}$ dan $A = \{\, x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dan } x \text{ prima}\}$.

Maka $B - A = \{4,6,8,10\}$.

Definisi 2.11:

Jika kita mempertukarkan $\cap$ dengan $\cup$ dan himpunan semesta X dengan himpunan kosong ϕ dalam suatu pernyataan mengenai himpunan, maka pernyataan baru yang dihasilkan dinamakan *dual* dari pernyataan semula.

Prinsip Dualitas: Dual dari suatu teorema adalah teorema.

Contoh 2.16:

a. $A \cup B = B \cup A$ adalah dual dari $A \cap B = B \cap A$

b. $A \cup \overline{A} = X$ adalah dual dari $A \cap \overline{A} = \phi$

Teorema-teorema dasar dalam operasi himpunan tegas:

1. Hukum Negasi Rangkap $\quad \overline{\overline{A}} = A$
2. Hukum Komutatif $\quad A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$
3. Hukum Assosiatif $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. Hukum Distributif $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. Hukum Idempoten $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

6. Hukum Absorbsi $A \cup (A \cap B) = A$

   $A \cap (A \cup B) = A$

7. Hukum Identitas $A \cup \phi = A$ $\quad A \cap X = A$

   $A \cup X = X$ $\quad A \cap \phi = \phi$

8. Hukum Komplemen $A \cap \overline{A} = \phi$

   $A \cup \overline{A} = X$

9. Hukum De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

<u>Contoh 2.17:</u>

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

Dengan Prinsip Dualitas diperoleh: $A \cap B = B \cap A$.

<u>Definisi 2.12:</u>

Dua himpunan yang tidak mempunyai anggota yang sama disebut *saling lepas*. Dengan perkataan lain, himpunan A dan himpunan B saling lepas jika $A \cap B = \phi$.

<u>Contoh 2.18:</u>

Misalkan $A = \{x \mid x$ bilangan bulat positif $\}$ dan $B = \{x \mid x$ bilangan bulat negatif $\}$. Maka A dan B adalah dua himpunan yang saling lepas karena kedua himpunan tersebut tidak mempunyai anggota yang sama.

Definisi 2.13:

Andaikan A suatu himpunan, $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$ dan $\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\}$.

Keluarga himpunan $\pi(A)$ disebut *partisi dari himpunan A* bila dan hanya bila

a. $(\forall i \in I) A_i \neq \phi$

b. $(\forall i, j \in I)\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

c. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Contoh 2.19:

Diandaikan $A = Z$, $I = \{1,2,3,4\}$, dan $\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\}$ dengan

$A_1 = \{\, x \mid x$ bilangan bulat ganjil kurang dari $10\}$,

$A_2 = \{\, x \mid x$ bilangan bulat ganjil lebih dari $10\}$,

$A_3 = \{\, x \mid x$ bilangan bulat genap lebih dari $9\}$, dan

$A_4 = \{\, x \mid x$ bilangan bulat genap kurang dari $9\}$.

Maka $\pi(A)$ adalah partisi dari himpunan A, karena

a. $A_1 \neq \phi$, $A_2 \neq \phi$, $A_3 \neq \phi$, $A_4 \neq \phi$.

b. $A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap A_3 = \phi$, $A_1 \cap A_4 = \phi$, $A_2 \cap A_3 = \phi$, $A_2 \cap A_4 = \phi$, $A_3 \cap A_4 = \phi$.

c. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$.

Definisi 2.14:

Hasil kali Cartesius himpunan A dan B, dengan notasi $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan terurut (a,b) di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Secara formal ditulis

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Jika $A \neq B$, dan A dan B merupakan himpunan tidak kosong, maka $A \times B \neq B \times A$.

Operasi *hasil kali Cartesius* dapat diperluas untuk *sebuah keluarga himpunan* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, yaitu himpunan semua n-tupel terurut $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sedemikian sehingga $a_i \in A_i (i = 1,2,...,n)$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{1 \leq i \leq n} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i\ ,\ i = 1,2,...,n\}.$$

Contoh 2.20:

a. Andaikan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a,b\}$.

   Maka $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$.

b. Misalkan $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, dan $A_3 = \{g,h\}$. Maka:

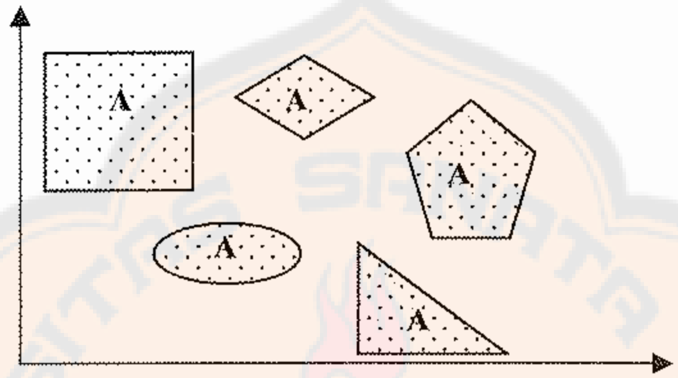
$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a,2,g),(a,2,h),(a,3,g),(a,3,h),(a,4,g),(a,4,h),(b,2,g),(b,2,h), (b,3,g),(b,3,h),(b,4,g),(b,4,h)\}.$$

Definisi 2.15:

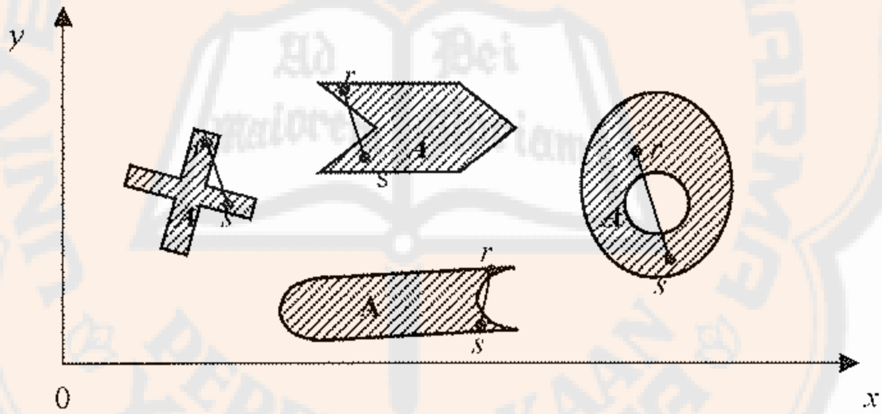
Suatu himpunan A dalam $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ disebut *konveks* jika dan hanya jika untuk setiap pasang titik r dan s dalam A, semua titik yang berada dalam segmen garis rs berada dalam A, yaitu $(\forall r,s \in A)$ $(\forall \lambda \in [0,1])$ $(\lambda r + (1-\lambda)s \in A)$.

Contoh 2.21:

a. Diberikan beberapa himpunan A dalam $\mathbb{R}^2$ yang konveks, yaitu $(\forall r, s \in A)$ $\overline{rs} \subset A$.



b. Diperlihatkan beberapa himpunan dalam $\mathbb{R}^2$ yang tidak konveks.



Karena ada r dan s dalam A dengan segmen garis $\overline{rs} \not\subset A$.

Definisi 2.16:

Misalkan R adalah himpunan yang terdiri dari bilangan-bilangan real $(R \subseteq \mathbb{R})$.

Suatu bilangan real r, sedemikian sehingga $x \leq r$ untuk setiap $x \in R$, disebut *batas atas* dari R.

Contoh 2.22:

Misalkan $R = \{x \mid x$ bilangan real, $-1 \leq x \leq 2\}$, maka bilangan real 2 adalah *batas atas* dari R sebab $(\forall x \in R)\ x \leq 2$.

Definisi 2. 17:

Misalkan R adalah himpunan yang terdiri dari bilangan-bilangan real $(R \subseteq \mathbb{R})$.

Suatu bilangan real s, sedemikian sehingga $x \geq s$ untuk setiap $x \in R$, disebut *batas bawah* dari R.

Contoh 2.23:

Misalkan $R = \{x \mid x$ bilangan real, $-1 \leq x \leq 2\}$, maka bilangan real -1 adalah *batas bawah* dari R sebab $(\forall x \in R)\ -1 \leq x$.

Definisi 2.18:

Bilangan real r disebut *supremum* dari $R \subseteq \mathbb{R}$ jika dan hanya jika

a. r adalah batas atas dari R.

b. Jika ada r' yang merupakan batas atas dari R, maka $r \leq r'$.

Jika r adalah *supremum* dari R, maka ditulis $r = sup\ R$.

Contoh 2.24:

Dalam contoh 2.22, bilangan real 2 merupakan supremum dari R, karena

a. $(\forall x \in R)\ x \leq 2$.

b. Jika r' adalah batas atas dari R, maka $2 \leq r'$.

Definisi 2.19:

Bilangan real s disebut *infimum* dari $R \subseteq \mathbb{R}$ jika dan hanya jika

a. s adalah batas bawah dari R.

b. Jika ada s' yang merupakan batas bawah dari R, maka $s \geq s'$

Jika s adalah *infimum* dari R, maka ditulis $s = \inf R$.

Contoh 2.25:

Dalam contoh 2.22, bilangan real -1 merupakan infimum dari R, karena

a. $(\forall x \in R)\ x \geq -1$.

b. Jika s' yang merupakan batas bawah dari R, maka $-1 \geq s'$.

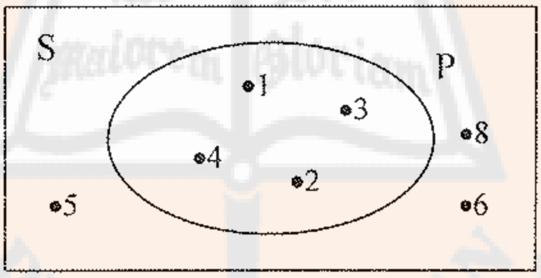
BAB III

HIMPUNAN KABUR

A. Konsep-Konsep Dasar

Konsep himpunan kabur berbeda dengan himpunan tegas. Perbedaannya terletak pada derajat keanggotaan suatu anggota. Dalam himpunan tegas, jika $x \in X$ maka derajat keanggotaannya 1 dan jika $x \notin X$ maka derajat keanggotaannya adalah 0. Sedangkan dalam himpunan kabur, setiap elemen dalam semesta dapat dipandang sebagai anggota himpunan dengan derajat keanggotaan tertentu dan paling tinggi 1.

Perhatikan gambar berikut ini:



Dalam himpunan tegas, bilangan-bilangan 5, 6, dan 8 mempunyai derajat keang-gotaan 0, karena bukan anggota P. Tetapi dalam himpunan kabur bilangan-bilangan 5, 6, dan 8 mungkin merupakan anggota P dengan derajat keanggotaan tertentu, misalnya 5 mempunyai derajat keanggotaan 0,6 berarti 5 merupakan anggota P dengan derajat keanggotaan 0,6.

Definisi 3.1:

Suatu *himpunan kabur* A dalam semesta X dicirikan oleh suatu fungsi keanggotaan μ_A yang nilainya berada dalam interval [0,1], yaitu:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1].$$

Nilai $\mu_A(x) \in [0,1]$ disebut *derajat keanggotaan* x dalam himpunan kabur A. Suatu *himpunan kabur* A dalam X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut dari $x \in X$ dan derajat keanggotaannya, yaitu:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}.$$

Contoh 3.1:

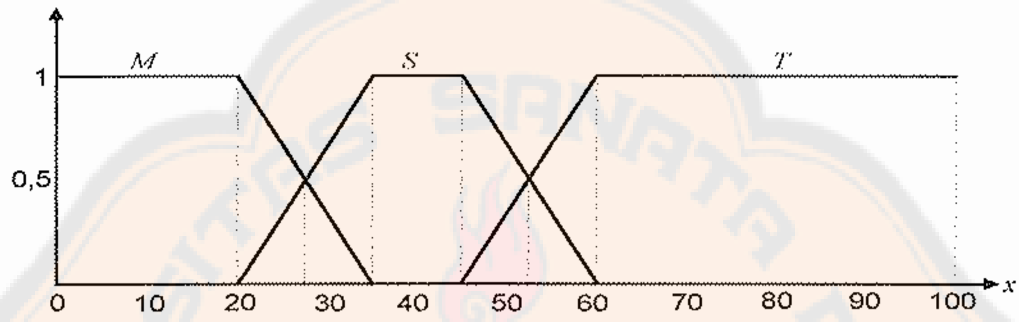
Diberikan himpunan semesta $X = [0,100]$ yang elemen-elemennya mewakili umur orang. Didefinisikan tiga buah himpunan kabur yaitu himpunan kabur muda (M), himpunan kabur setengah tua (S) dan himpunan kabur tua (T) sebagai berikut:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad x \leq 20 \\ \frac{35-x}{15} & \text{untuk} \quad 0 < x < 35 \\ 0 & \text{untuk} \quad x \geq 35 \end{cases}$$

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad x \leq 20 \quad \text{atau} \quad x \geq 60 \\ \frac{x-20}{15} & \text{untuk} \quad 20 < x < 35 \\ \frac{60-x}{15} & \text{untuk} \quad 45 < x < 60 \\ 1 & \text{untuk} \quad 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$\mu_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad x \leq 45 \\ \frac{x-45}{15} & \text{untuk} \quad 45 < x < 60 \\ 1 & \text{untuk} \quad x \geq 60 \end{cases}$$

X	0	20	35	45	60	80	100
$\mu_M(x)$	1	1	0	0	0	0	0
$\mu_S(x)$	0	0	1	1	0	0	0
$\mu_T(x)$	0	0	0	0	1	1	1



Gambar 3.1.

Definisi 3.2:

Potongan-α (*α-cut*) dari suatu himpunan kabur A adalah himpunan tegas A_α yang memuat semua anggota dalam semesta X yang mempunyai derajat keanggotaan dalam A yang lebih besar atau sama dengan α, ditulis:

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

dengan $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 3.2:

Himpunan kabur M didefinisikan seperti pada contoh 3.1. Untuk $\alpha \in [0,1]$ berlaku

$$M_\alpha = \{x \in X | \mu_M(x) \geq \alpha\} = \left\{x \in X \middle| \frac{35-x}{15} \geq \alpha\right\} = \{x \in X | 35 - x \geq 15\alpha\}$$

$$= \{x \in X | 35 - 15\alpha \geq x\} = [0, 35\text{-}15\alpha].$$

Definisi 3.3:

Potongan-α kuat (*strong α – cut*) dari suatu himpunan kabur A adalah himpunan tegas $A_{\alpha+}$ yang memuat semua anggota dalam semesta X yang mempunyai derajat keanggotaan dalam A yang lebih besar dari α, ditulis:

$$A_{\alpha+} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$$

dengan $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 3.3:

Himpunan kabur M didefinisikan seperti pada contoh 3.1. Untuk $\alpha \in [0,1]$ berlaku

$$M_{\alpha+} = \{x \in X | \mu_M(x) > \alpha\} = \left\{x \in X \middle| \frac{35-x}{15} > \alpha\right\} = \{x \in X | 35 - x > 15\alpha\}$$

$$= \{x \in X | 35 - 15\alpha > x\} = (0,\ 35\text{-}15\alpha).$$

Definisi 3.4:

Pendukung (*support*) dari suatu himpunan kabur A dalam himpunan semesta X adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota dalam X yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol dalam A, ditulis:

$$\text{Supp}\ (A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Pendukung dari A dapat dikaitkan dengan potongan-α kuat dari A, yaitu untuk $\alpha = 0$:

$$\text{Supp}\ (A) = A_{0+} = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Contoh 3.4:

Berdasarkan contoh 3.1,

Supp (M) = $M_{0+} = \{x \in X | \mu_M(x) > 0\}$ = (0, 35).

Supp (S) = $S_{0+} = \{x \in X | \mu_S(x) > 0\}$ = (20, 60).

Supp (T) = $T_{0+} = \{x \in X | \mu_T(x) > 0\}$ = (45, 100].

Definisi 3.5:

Himpunan kabur A disebut *kosong* jika pendukung dari A adalah himpunan Kosong.

Contoh 3.5:

Himpunan kabur P = {(24, 0), (25, 0), (26, 0), (27, 0), (28, 0)} dalam semesta X = {24,25,26,27,28} adalah kosong, karena Supp (P) = $P_{0+} = \{x \in X | \mu_P(x) > 0\}$ $= \phi$.

Definisi 3.6:

Tinggi himpunan kabur A adalah derajat keanggotaan terbesar dalam A, ditulis:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Tinggi himpunan kabur A dapat dipandang sebagai supremum dari α untuk $A_\alpha \neq \phi$, dengan $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 3. 6:

Dalam contoh 3.1,

$h(M) = \sup_{x \in [0,100]} \mu_M(x) = 1$, $h(S) = \sup_{x \in [0,100]} \mu_S(x) = 1$, dan $h(T) = \sup_{x \in [0,100]} \mu_T(x) = 1$.

Definisi 3.7:

Suatu himpunan kabur A disebut *normal* jika $h(A) = 1$, dan disebut *subnormal* jika $h(A) < 1$.

Contoh 3.7:

a. Himpunan kabur M, S, dan T pada contoh 3.1 adalah *normal*, karena $h(M) = h(T) = h(S) = 1$.

b. Andaikan himpunan kabur A dalam semesta $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ didefinisikan sebagai berikut: $A = \{(0, 0.8), (1, 0.7), (2, 0.5), (3, 0.4), (4, 0.3), (5, 0.1)\}$.

   Maka A adalah *subnormal*, karena $h(A) = 0.8 < 1$.

Definisi 3.8:

Suatu himpunan kabur A dalam semesta R^n disebut *konveks* jika dan hanya jika potongan-α nya adalah himpunan yang konveks untuk $\forall \alpha \in (0,1]$.

Berikut diberikan teorema mengenai himpunan kabur konveks dalam $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1:

Suatu himpunan kabur A dalam $\mathbb{R}$ adalah konveks jika dan hanya jika

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$, di mana "min" adalah operasi minimum.

Bukti:

($\Rightarrow$) Dimisalkan A adalah konveks.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan misalkan $\mu_A(x_1) = \alpha \leq \mu_A(x_2)$.

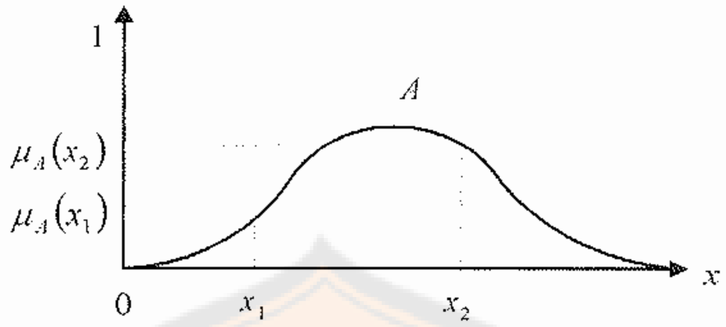
Maka $x_1, x_2 \in A_\alpha$, sehingga $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ untuk setiap $\lambda \in [0,1]$. Jadi $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = \mu_A(x_1) = \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$.

($\Leftarrow$) Diasumsikan bahwa A memenuhi $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$, untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$. Akan dibuktikan bahwa $\forall \alpha \in (0,1]$, A_α adalah konveks.

Ambil sebarang $\alpha \in (0,1]$, dan $x_1, x_2 \in A_\alpha$. Maka $\mu_A(x_1) \geq \alpha$ dan $\mu_A(x_2) \geq \alpha$, sehingga untuk setiap $\lambda \in [0,1]$, berlaku $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \geq \alpha$. Jadi $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$. Terbukti A_α adalah konveks untuk setiap $\alpha \in (0,1]$. Jadi A adalah konveks. ∎

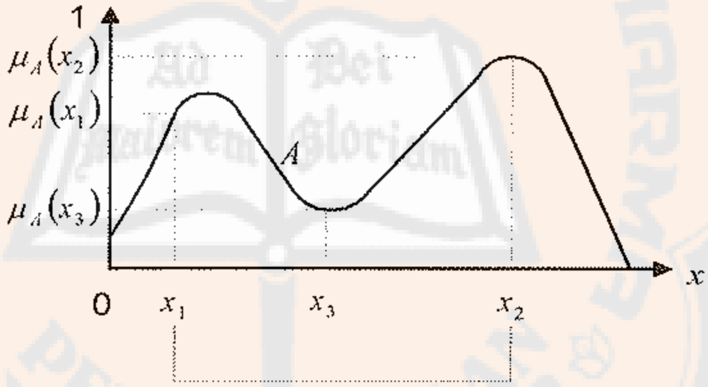
Contoh 3.8:

1. Himpunan kabur A dalam R^2 pada Gambar 3.2 adalah konveks, sebab untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$ berlaku $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$.



Gambar 3.2.

2. Himpunan kabur A dalam R^2 pada Gambar 3.3 adalah tidak konveks, sebab $\exists x_3 \in \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ sedemikian sehingga $\mu_A(x_3) < \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$ $= \mu_A(x_1)$.



Gambar 3.3.

Definisi 3.9:

Dua himpunan kabur A dan B dalam semesta X dikatakan *sama*, dengan lambang $A = B$, jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ untuk } \forall x \in X .$$

Contoh 3.9:

1. Didefinisikan $X = [0, 7]$.

   Diberikan suatu himpunan kabur P dan Q dalam semesta X sebagai berikut:

   $P = \{(2, 0.5), (4, 1), (6, 0.2)\}$

   $Q = \{(4, 1), (2, 0.5), (6, 0.2)\}$

   Karena $\mu_P(2) = \mu_Q(2) = 0.5$, $\mu_P(4) = \mu_Q(4) = 1$, dan $\mu_P(6) = \mu_Q(6) = 0.2$ maka himpunan kabur P dan Q adalah sama.

2. Dalam contoh 3.1, untuk $x = 20$, $\mu_M(20) = 1$ dan $\mu_T(20) = 0$.

   Karena ada $x = 20$ sedemikian sehingga $\mu_M(20) \neq \mu_T(20)$, maka himpunan kabur M dan T tidak sama.

Definisi 3.10:

Himpunan kabur A disebut *himpunan bagian* dari himpunan kabur B, dengan lambang $A \subseteq B$, jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ untuk } \forall x \in X.$$

Karena untuk $\forall x \in X$, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ berarti $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dan $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$, maka dua himpunan kabur A dan B dalam semesta X adalah *sama*, yaitu $A = B$, jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 3.10:

Diberikan $X = \{10, 11, \ldots, 16\}$ dan didefinisikan himpunan kabur A dan B dalam semesta X sebagai berikut:

$A = \{(10, 0.1), (11, 0.2), (12, 0.3), (13, 0.4), (14, 0.5), (15, 0.6), (16, 0.7)\}$.

$B = \{(10, 0.3), (11, 0.4), (12, 0.5), (13, 0.6), (14, 0.7), (15, 0.8), (16, 0.9)\}$.

Karena $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ untuk semua $x \in X$, maka $A \subseteq B$.

B. Operasi-Operasi Dasar

Operasi-operasi dasar yang dibahas meliputi operasi komplemen, irisan dan gabungan dua himpunan kabur.

Definisi 3.11:

Komplemen dari himpunan kabur A dalam semesta X adalah himpunan kabur $\overline{A}$ di X dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \text{ untuk } \forall x \in X .$$

Contoh 3.11

Dalam contoh 3.9.

$\overline{B} = \{(10,0.7),(11,0.6),(12,0.5),(13,0.4),(14,0.3),(15,0.2),(16,0.1)\}$

Definisi 3.12:

Anggota-anggota x dari semesta X yang memenuhi $\mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$ disebut *titik keseimbangan* pada himpunan kabur A.

Karena $\mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$, dan $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, maka diperoleh $\mu_A(x) = 0{,}5$. Jadi derajat keanggotaan dari titik keseimbangan adalah 0,5.

Contoh 3.12:

Dalam Contoh 3.10, titik keseimbangan pada himpunan kabur B adalah $x = 12$, karena $\mu_B(12) = 0{,}5$.

Definisi 3.13:

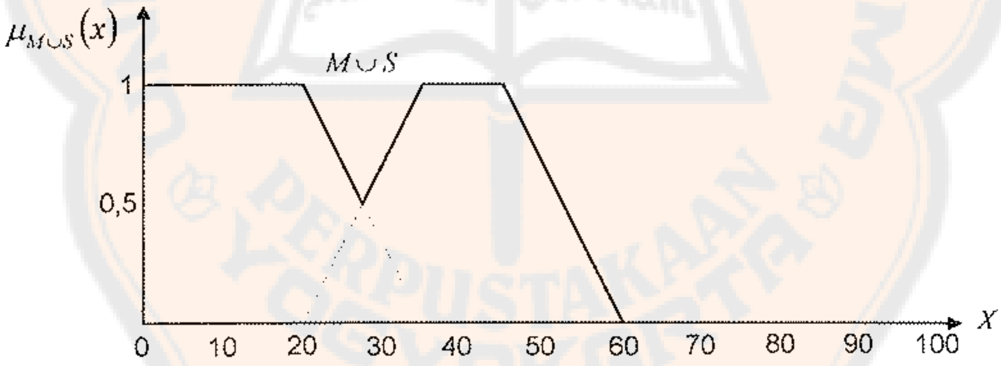
Gabungan dua himpunan kabur A dan B dalam semesta X, dinotasikan dengan $A \cup B$, adalah himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{ maks } [\mu_A(x), \mu_B(x)] \text{ untuk } \forall x \in X$$

di mana "maks" adalah operasi maksimum.

Contoh 3.13:

Dalam contoh 3.1, $\mu_{M \cup S}(x) =$ maks $[\mu_M(x), \mu_S(x)]$ yang diperlihatkan dalam Gambar 3.4:



Gambar 3.4.

Definisi 3.14:

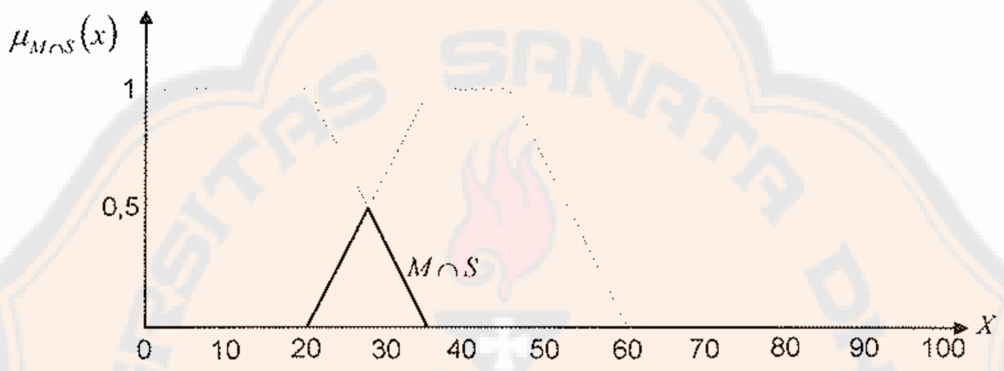
Irisan dua himpunan kabur A dan B dalam semesta X, dinotasikan dengan $A \cap B$, adalah himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \text{ untuk } \forall x \in X$$

di mana "min" adalah operasi minimum.

Contoh 3.14:

Dalam contoh 3.1, $\mu_{M\cap S}(x) = \min[\mu_M(x), \mu_S(x)]$ yang diperlihatkan dalam Gambar 3.5:



Gambar 3.5.

Teorema 3.2:

Untuk sebarang himpunan kabur A dan B dalam semesta X dan setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku:

(i) $A_{\alpha+} \subseteq A_\alpha$.

(ii) $(A\cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ dan $(A\cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

(iii) $(A\cap B)_{\alpha+} = A_{\alpha+} \cap B_{\alpha+}$ dan $(A\cup B)_{\alpha+} = A_{\alpha+} \cup B_{\alpha+}$.

Bukti:

(i) $A_{\alpha+} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$. Ambil sebarang $x \in A_{\alpha+}$, maka $\mu_A(x) > \alpha$, sehingga $\mu_A(x) \geq \alpha$, yaitu $x \in A_\alpha$. Jadi $A_{\alpha+} \subseteq A_\alpha$.

(ii) $(A \cap B)_\alpha = \{x \in X | \mu_{A \cap B}(x) \geq \alpha\}$

$= \{x \in X | \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \alpha\}$

$= \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha \wedge \mu_B(x) \geq \alpha\}$

$= \{x \in X | x \in A_\alpha \wedge x \in B_\alpha\}$

$= A_\alpha \cap B_\alpha$.

Jadi $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

$(A \cup B)_\alpha = \{x \in X | \mu_{A \cup B}(x) \geq \alpha\}$

$= \{x \in X |$ maks $[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \alpha\}$

$= \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha \vee \mu_B(x) \geq \alpha\}$

$= \{x \in X | x \in A_\alpha \vee x \in B_\alpha\}$

$= A_\alpha \cup B_\alpha$.

Jadi $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

(iii) $(A \cap B)_{\alpha+} = \{x \in X | \mu_{A \cap B}(x) > \alpha\}$

$= \{x \in X | \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] > \alpha\}$

$= \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha \wedge \mu_B(x) > \alpha\}$

$= \{x \in X | x \in A_{\alpha+} \wedge x \in B_{\alpha+}\}$

$= A_{\alpha+} \cap B_{\alpha+}$.

Jadi $(A \cap B)_{\alpha+} = A_{\alpha+} \cap B_{\alpha+}$.

$$(A \cup B)_{\alpha+} = \{x \in X | \mu_{A \cup B}(x) > \alpha\}$$

$$= \{x \in X | \text{ maks } [\mu_A(x), \mu_B(x)] > \alpha\}$$

$$= \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha \vee \mu_B(x) > \alpha\}$$

$$= \{x \in X | x \in A_{\alpha+} \vee x \in B_{\alpha+}\}$$

$$= A_{\alpha+} \cup B_{\alpha+}.$$

Jadi $(A \cup B)_{\alpha} = A_{\alpha+} \cup B_{\alpha+}$. ■

Teorema 3.3:

Untuk sebarang himpunan kabur A dan B dalam semesta X dan setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku:

(iv) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha} \subseteq B_{\alpha}$.

(v) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha+} \subseteq B_{\alpha+}$.

(vi) $A = B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha} = B_{\alpha}$.

(vii) $A = B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha+} = B_{\alpha+}$.

Bukti:

(iv) $(\Rightarrow)$ Andaikan ada $\alpha_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $A_{\alpha_0} \not\subseteq B_{\alpha_0}$, yaitu $(\exists x_0 \in X)$ $x_0 \in A_{\alpha_0}$ dan $x_0 \notin B_{\alpha_0}$. Berarti $\mu_A(x_0) \geq \alpha_0$ dan $\mu_B(x_0) < \alpha_0$. Jadi $\mu_B(x_0) < \mu_A(x_0)$ yang kontradiksi dengan $A \subseteq B$.

$(\Leftarrow)$ Diasumsikan bahwa $A \not\subseteq B$, yaitu $(\exists x_0 \in X)\mu_A(x_0) > \mu_B(x_0)$. Jika $\alpha = \mu_A(x_0)$, maka $x_0 \in A_\alpha$ dan $x_0 \notin B_\alpha$. Jadi $A_\alpha \not\subseteq B_\alpha$. Kontradiksi dengan $A_\alpha \subseteq B_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Jadi $A \subseteq B \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

(v) $(\Rightarrow)$ Andaikan ada $\alpha_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $A_{\alpha_0+} \not\subseteq B_{\alpha_0+}$, yaitu $(\exists x_0 \in X) x_0 \in A_{\alpha_0+}$ dan $x_0 \notin B_{\alpha_0+}$. Berarti $\mu_A(x_0) > \alpha_0$ dan $\mu_B(x_0) \leq \alpha_0$. Jadi $\mu_B(x_0) < \mu_A(x_0)$ yang kontradiksi dengan $A \subseteq B$.

$(\Leftarrow)$ Diasumsikan bahwa $A \not\subseteq B$, yaitu $(\exists x_0 \in X)\mu_A(x_0) > \mu_B(x_0)$. Misalkan $\mu_B(x_0) = \alpha_0$, maka $x_0 \in A_{\alpha_0^+}$ dan $x_0 \notin B_{\alpha_0^+}$. Jadi $A_{\alpha_0^+} \not\subseteq B_{\alpha_0^+}$, yang kontradiksi dengan $A_{\alpha+} \subseteq B_{\alpha+}$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Jadi $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha^+} \subseteq B_{\alpha^+}$.

(vi) $(\Rightarrow)$ Diketahui $A = B$, maka berlaku $A \subseteq B$, dan $B \subseteq A$. Berdasar (iv), karena $A \subseteq B$ maka $A_\alpha \subseteq B_\alpha$, dan karena $B \subseteq A$ maka $B_\alpha \subseteq A_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Jadi $A_\alpha = B_\alpha$. Terbukti bahwa jika $A = B$ maka $A_\alpha = B_\alpha$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $A_\alpha = B_\alpha$, yaitu $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ dan $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Berdasar (iv), karena $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ maka $A \subseteq B$, dan karena $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ maka $B \subseteq A$. Jadi $A = B$. Terbukti bahwa jika $A_\alpha = B_\alpha$ maka $A = B$.

Terbukti bahwa $A = B$ jika dan hanya jika $A_\alpha = B_\alpha$.

(vii) $(\Rightarrow)$ Diketahui $A = B$, maka berlaku $A \subseteq B$, dan $B \subseteq A$. Selanjutnya berdasar (v), karena $A \subseteq B$ maka $A_{\alpha^{+}} \subseteq B_{\alpha^{+}}$, dan karena $B \subseteq A$ maka $B_{\alpha^{+}} \subseteq A_{\alpha^{+}}$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Jadi $A_{\alpha^{+}} = B_{\alpha^{+}}$. Terbukti bahwa jika $A = B$ maka $A_{\alpha^{+}} = B_{\alpha^{+}}$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui bahwa $A_{\alpha^{+}} = B_{\alpha^{+}}$, yaitu $A_{\alpha^{+}} \subseteq B_{\alpha^{+}}$ dan $B_{\alpha^{+}} \subseteq A_{\alpha^{+}}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Berdasar (v), karena $A_{\alpha^{+}} \subseteq B_{\alpha^{+}}$ maka $A \subseteq B$, dan karena $B_{\alpha^{+}} \subseteq A_{\alpha^{+}}$ maka $B \subseteq A$. Jadi $A = B$. Terbukti bahwa jika $A_{\alpha^{+}} = B_{\alpha^{+}}$ maka $A = B$.

Terbukti bahwa $A = B$ jika dan hanya jika $A_{\alpha^{+}} = B_{\alpha^{+}}$. ∎

<u>Definisi 3.15:</u>

Jika A adalah himpunan kabur dalam semesta X dan B adalah himpunan kabur dalam semesta Y, maka *hasil kali Cartesius* himpunan kabur A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$, adalah himpunan kabur dalam semesta $X \times Y$ dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$.

<u>Contoh 3.15:</u>

Diberikan $X = [1,4]$ dan $Y = [2,5]$. Didefinisikan himpunan kabur A dan B berturut-turut dalam semesta X dan Y sebagai berikut: $A = \{(1,0.3),(2,0.6),(3,0.8)\}$ dan

$B = \{(2,1),(3,0.7),(4,0.2)\}$. Maka *hasil kali Cartesius* himpunan kabur A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$, adalah himpunan kabur dalam semesta $X \times Y$ dengan fungsi keanggotaan:

$\mu_{A\times B}(1,2) = \min[\mu_A(1), \mu_B(2)] = \min[0.3,1] = 0,3$.

$\mu_{A\times B}(1,3) = \min[\mu_A(1), \mu_B(3)] = \min[0.3,0.7] = 0,3$.

$\mu_{A\times B}(1,4) = \min[\mu_A(1), \mu_B(4)] = \min[0.3,0.2] = 0,2$.

$\mu_{A\times B}(2,2) = \min[\mu_A(2), \mu_B(2)] = \min[0.6,1] = 0,6$.

$\mu_{A\times B}(2,3) = \min[\mu_A(2), \mu_B(3)] = \min[0.6,0.7] = 0,6$.

$\mu_{A\times B}(2,4) = \min[\mu_A(2), \mu_B(4)] = \min[0.6,0.2] = 0,2$.

$\mu_{A\times B}(3,2) = \min[\mu_A(3), \mu_B(2)] = \min[0.8,1] = 0,8$.

$\mu_{A\times B}(3,3) = \min[\mu_A(3), \mu_B(3)] = \min[0.8,0.7] = 0,7$.

$\mu_{A\times B}(3,4) = \min[\mu_A(3), \mu_B(4)] = \min[0.8,0.2] = 0,2$.

C. Teorema Dekomposisi Dan Prinsip Perluasan

Definisi 3.16:

Didefinisikan himpunan kabur $\tilde{A}_\alpha$ dalam X dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x), \text{ untuk setiap } \alpha \in [0,1],$$

di mana $\chi_{A_\alpha}(x)$ adalah fungsi karakteristik dari himpunan tegas A_α, yaitu $\chi_{A_\alpha}(x)$ = 1 jika $x \in A_\alpha$ dan $\chi_{A_\alpha}(x) = 0$ jika $x \in X - A_\alpha$.

Teorema 3.4 (Teorema Dekomposisi):

Jika A adalah suatu himpunan kabur dalam X dan $\widetilde{A}_\alpha$ adalah himpunan kabur yang didefinisikan dalam Definisi 3.16, maka

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{A}_\alpha .$$

Bukti:

Ambil sebarang $x \in X$, dan misalkan $a = \mu_A(x)$. Maka

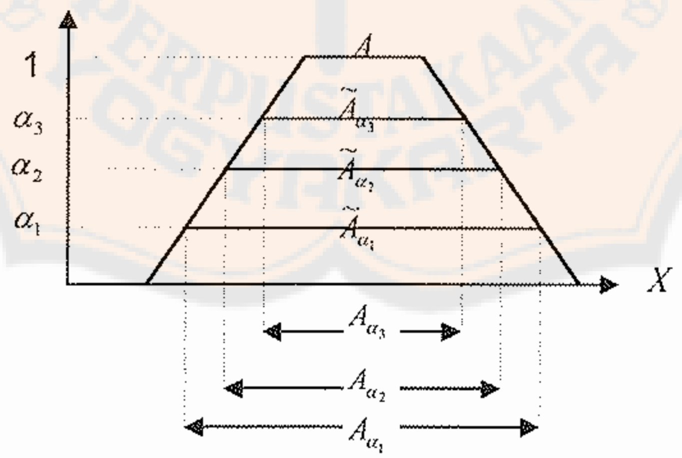
$$\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\widetilde{A}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x) = \text{maks}\left[\sup_{\alpha\in[0,a]} \mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x), \sup_{\alpha\in(a,1]} \mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x)\right].$$

Untuk setiap $\alpha \in (a,1]$, maka $\mu_A(x) = a < \alpha$, jadi $x \notin A_\alpha$ yang berarti $\mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x) = 0$.

Jika $\alpha \in [0,a]$, maka $\mu_A(x) = a \geq \alpha$, oleh karena itu $x \in A_\alpha$, sehingga $\mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x) = \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \alpha \cdot 1 = \alpha$.

Jadi $\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\widetilde{A}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,a]} \alpha = a = \mu_A(x)$, yaitu $A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{A}_\alpha$. ∎

Teorema ini, diperlihatkan pada gambar berikut:



Gambar 3.6.

Teorema dekomposisi ini, memperlihatkan suatu himpunan kabur dapat dinyatakan dengan menggunakan potongan-potongan-α nya.

Definisi 3.17 (Definisi Prinsip Perluasan):

Diberikan suatu himpunan kabur A dalam U dan pemetaan $f : U \to V$. Maka $B = f(A)$ adalah himpunan kabur dalam V yang terimbas oleh f dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{jika} \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{jika} \quad f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

di mana $y \in V$, dan $f^{-1}(y) = \{x \in U | f(x) = y\}$.

Contoh 3.16:

Didefinisikan himpunan kabur $A = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$, dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$. Tentukan himpunan kabur $B = f(A)$ dengan menggunakan prinsip perluasan.

Penyelesaian:

Misal: $y_1 = f(-1) = 1$

$y_2 = f(0) = 0$

$y_3 = f(1) = 1$

$y_4 = f(2) = 4$

Maka

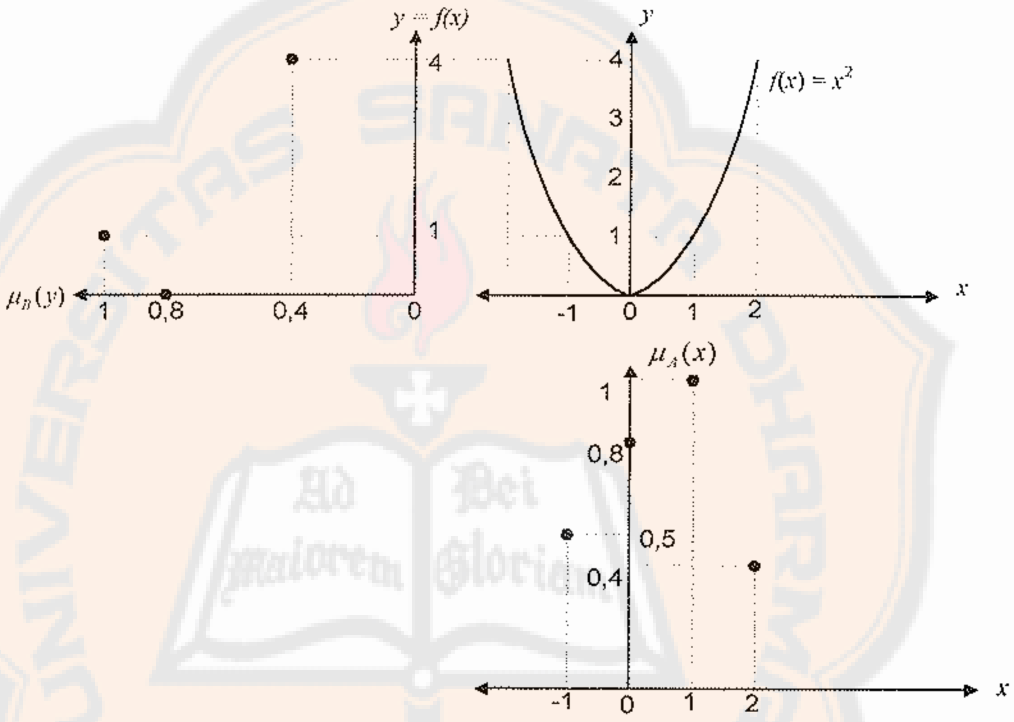
$\mu_B(0) = \mu_A(0) = 0.8$

$\mu_B(1) =$ maks $[\mu_A(-1), \mu_A(1)] =$ maks $[0.5,1] = 1.$

$\mu_B(4) = \mu_A(2) = 0.4$

Jadi $B = f(A) = \{(0,0.8),(1,1),(4,0.4)\}$.

Penjelasan di atas, diperlihatkan dalam Gambar 3.7.



Gambar 3.7.

Jika pemetaan $f : U_1 \times U_2 \to V$, A_1 adalah himpunan kabur dalam U_1 dan A_2 adalah himpunan kabur dalam U_2, maka $f(A_1 \times A_2) = B$ adalah himpunan kabur dalam V dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \mu_{A_1\times A_2}(x_1,x_2) = \sup_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)],\ y \in V,$$

di mana $f^{-1}(y) = \{(x_1,x_2) \in U_1 \times U_2 | f(x_1,x_2) = y\}$.

BAB IV

ARITMETIKA BILANGAN KABUR

A. Bilangan Kabur

Bilangan kabur adalah himpunan kabur yang didefinisikan dalam $\mathbb{R}$ dengan memenuhi beberapa syarat. Fungsi keanggotaan dari himpunan kabur ini adalah

$$A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

Definisi 4.1:

Suatu himpunan kabur A dalam $\mathbb{R}$ disebut *bilangan kabur* jika

i. A normal.

ii. A konveks.

iii. Pendukung dari A adalah terbatas.

iv. A_α berupa interval tertutup dalam $\mathbb{R}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 4.1:

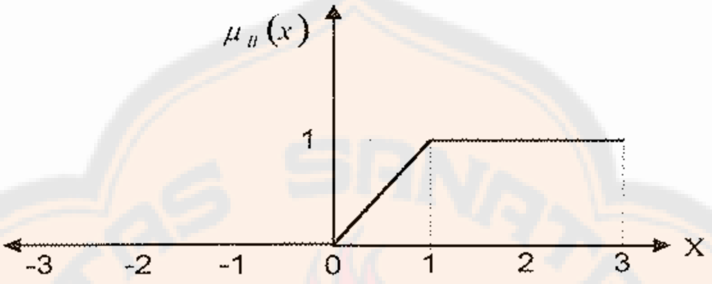
1. $\mu_B(x) = \begin{cases} \min[1,x] & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$ dalam $X = [-3,3]$ adalah bilangan kabur

karena:

i. B normal, yaitu $h(B) = \sup_{x \in X} \mu_B(x) = 1$.

ii. B dalam $\mathbb{R}$ adalah konveks, karena untuk setiap x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$, $\mu_B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)]$.

Perhatikan Gambar 4.1:



Gambar 4.1.

iii. Supp (B) $= \{x \in X | \mu_B(x) > 0\}$ = (0,3]. Jadi pendukung dari B adalah terbatas.

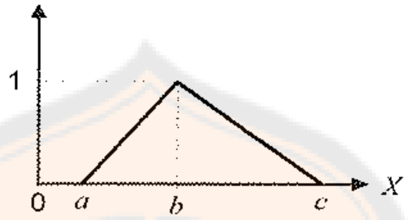
iv. $B_\alpha = \{x \in X | \mu_B(x) \geq \alpha\}$ adalah interval tertutup dalam $\mathbb{R}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

2. $\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{untuk} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{untuk} \quad x \geq 2 \end{cases}$ dalam X = [0,5] adalah bukan bilangan kabur, karena $h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) < 1$, yaitu A tidak normal.

Diberikan dua kelas khusus bilangan kabur, yaitu

1. *Bilangan kabur segitiga* A, yaitu himpunan kabur dalam $\mathbb{R}$ yang mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

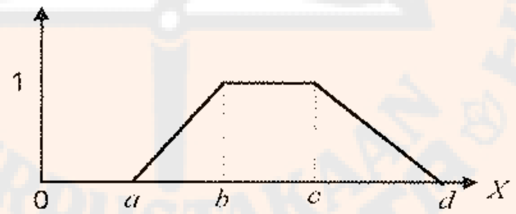
$$\mu_A(x;a,b,c)=\begin{cases}(x-a)/(b-a) & \text{jika} \quad a \le x < b\\ (c-x)/(c-b) & \text{jika} \quad b \le x \le c\\ 0 & \text{jika} \quad x > c \quad \text{atau} \quad x < a\end{cases}$$



Gambar 4.2.

2. *Bilangan kabur trapesium A*, yaitu himpunan kabur dalam $\mathbb{R}$ yang mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_A(x;a,b,c,d)=\begin{cases}(x-a)/(b-a) & \text{jika} \quad a \le x < b\\ 1 & \text{jika} \quad b \le x \le c\\ (d-x)/(d-c) & \text{jika} \quad c < x \le d\\ 0 & \text{jika} \quad x > d \quad \text{atau} \quad x < a\end{cases}$$



Gambar 4.3.

B. Operasi Aritmetika Pada Bilangan-Bilangan Kabur

Terdapat dua metode untuk mengembangkan aritmetika kabur, yaitu:

Metode 1: Dengan dasar Teorema Dekomposisi (Teorema 3.4).

Metode 2: Dengan menggunakan Prinsip Perluasan (Definisi 3.17).

Metode 1: Dengan dasar Teorema Dekomposisi (Teorema 3.4).

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, potongan-α dari bilangan kabur berupa interval tertutup dalam $\mathbb{R}$. Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan operasi aritmetika pada bilangan-bilangan kabur dengan operasi aritmetika pada potongan-α nya, yaitu operasi aritmetika pada interval-interval tertutup.

Definisi 4.2:

Didefinisikan empat buah *operasi aritmetika* pada interval tertutup sebagai berikut:

1. $[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e]$
2. $[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d]$
3. $[a,b]\cdot[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\ \text{maks}\ (ad,ae,bd,be)]$
4. Jika $0 \notin [d,e]$, maka $[a,b]/[d,e]=[a,b]\cdot\left[\frac{1}{e},\frac{1}{d}\right]$

$$=\left[\min\left(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e}\right),\ \text{maks}\ \left(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e}\right)\right]$$

Contoh 4.2:

1. $[3,7]+[2,10]=[5,17]$.
2. $[3,7]-[2,10]=[-7,5]$.
3. $[3,7]\cdot[2,10]=[\min(6,30,14,70),\ \text{maks}\ (6,30,14,70)]=[6,70]$.

4. $[3,7]/[2,10] = [3,7] \times \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right] = \left[\min\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{2}, \frac{7}{10}\right), \text{maks}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{2}, \frac{7}{10}\right)\right]$

$$= \left[\frac{3}{10}, \frac{7}{2}\right].$$

Teorema 4.1:

Jika $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $0 = [0,0]$, dan $1 = [1,1]$, maka berlaku hukum-hukum berikut:

1. Hukum Komutatif

   a. $A + B = B + A$

   b. $A \cdot B = B \cdot A$

2. Hukum Asosiatif

   a. $(A + B) + C = A + (B + C)$

   b. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

3. Hukum Identitas

   a. $A = 0 + A = A + 0.$

   b. $A = 1 \cdot A = A \cdot 1$

4. Hukum Subdistribusi

   $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$

5. Hukum Distributif

   Jika untuk setiap $b \in B$ dan $c \in C$ berlaku $b \cdot c \geq 0$, maka

   $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. Dan jika $A = [a, a]$, maka

   $a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$

6. $0 \in A - A$ dan $1 \in A/A$.

Bukti:

1. a. $A + B = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [b_1 + a_1, b_2 + a_2]$

$= [b_1, b_2] + [a_1, a_2] = B + A$.

b. $A \cdot B = [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]$

$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2),\ \text{maks}\ (a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)]$.

$= [\min(b_1a_1, b_2a_1, b_1a_2, b_2a_2),\ \text{maks}\ (b_1a_1, b_2a_1, b_1a_2, b_2a_2)]$

$= [b_1, b_2] \cdot [a_1, a_2]$

$= B \cdot A$.

2. a. $(A + B) + C = ([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) + [c_1, c_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] + [c_1, c_2]$

$= [a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2] = [a_1, a_2] + [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$

$= [a_1, a_2] + ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$

$= A + (B + C)$.

b. $(A \cdot B) \cdot C = ([a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]) \cdot [c_1, c_2]$

$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] \cdot [c_1, c_2]$

$= [a_1b_1, a_2b_2] \cdot [c_1, c_2]$

$= [\min(a_1b_1c_1, a_1b_1c_2, a_2b_2c_1, a_2b_2c_2), \text{maks}(a_1b_1c_1, a_1b_1c_2, a_2b_2c_1, a_2b_2c_2)]$

$= [a_1b_1c_1, a_2b_2c_2]$

$= [\min(a_1b_1c_1, a_1b_2c_2, a_2b_1c_1, a_2b_2c_2), \text{maks}(a_1b_1c_1, a_1b_2c_2, a_2b_1c_1, a_2b_2c_2)]$

$= [a_1, a_2] \cdot [b_1c_1, b_2c_2]$

$= [a_1, a_2] \cdot [\min(b_1c_1, b_1c_2, b_2c_1, b_2c_2), \text{ maks } (b_1c_1, b_1c_2, b_2c_1, b_2c_2)]$

$= [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] \cdot [c_1, c_2])$

$= A \cdot (B \cdot C)$.

Jadi $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3. a. $0 + A = [0,0] + [a_1, a_2] = [0 + a_1, 0 + a_2] = [a_1, a_2] = A$.

$A + 0 = [a_1, a_2] + [0,0] = [a_1 + 0, a_2 + 0] = [a_1, a_2] = A$.

Jadi, $0 + A = A + 0 = A$.

b. $1 \cdot A = [1,1] \cdot [a_1, a_2]$

$= [\min(1a_1, 1a_2, 1a_1, 1a_2), \text{ maks } (1a_1, 1a_2, 1a_1, 1a_2)]$

$= [\min(a_1, a_2), \text{ maks } (a_1, a_2)]$

$= [a_1, a_2]$

$= A$

$A \cdot 1 = [a_1, a_2] \cdot [1,1]$

$= [\min(a_1 1, a_2 1, a_1 1, a_2 1), \text{ maks } (a_1 1, a_2 1, a_1 1, a_2 1)]$

$= [\min(a_1, a_2), \text{ maks } (a_1, a_2)]$

$= [a_1, a_2]$

$= A$

Jadi, $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$.

4. Akan dibuktikan bahwa $x \in A \cdot (B + C) \Rightarrow x \in A \cdot B + A \cdot C$ untuk setiap $x \in X$. Bukti,

$x \in A \cdot (B + C)$

$\Rightarrow \; x \in [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$

$\Rightarrow \; x \in [a_1, a_2] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$

$\Rightarrow \; x \in [\min(a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)),$

$\text{maks } (a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2))]$

$\Rightarrow \; x \in [a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)]$

$\Rightarrow \; x \in [a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2]$

$\Rightarrow \; x \in [a_1 b_1, a_2 b_2] + [a_1 c_1, a_2 c_2]$

$\Rightarrow \; x \in [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \text{maks}(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)] +$

$[\min(a_1 c_1, a_1 c_2, a_2 c_1, a_2 c_2), \text{maks}(a_1 c_1, a_1 c_2, a_2 c_1, a_2 c_2)]$

$\Rightarrow \; x \in [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$

$\Rightarrow \; x \in A \cdot B + A \cdot C$

Jadi $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$.

5. a. Misalkan untuk setiap $b \in B$ dan $c \in C$ berlaku $b \cdot c \geq 0$.

Akan dibuktikan bahwa $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Bukti:

Kasus I: $b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$ dan $a_1, a_2 \geq 0$, maka:

$A \cdot (B + C) = [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$

$= [a_1, a_2] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$

$= [\min(a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)),$

$$\text{maks } (a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2),$$

$$\text{maks } (a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2)]$$

$$= [a_1b_1+a_1c_1, a_2b_2+a_2c_2].$$

$$= [a_1b_1, a_2b_2]+[a_1c_1, a_2c_2]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2]\cdot[b_1, b_2] + [a_1, a_2]\cdot[c_1, c_2]$$

$$= A\cdot B + A\cdot C.$$

Jadi, $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

Kasus II: $b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$ dan $a_1, a_2 \leq 0$, maka

$$A\cdot(B+C) = [a_1, a_2]\cdot([b_1, b_2]+[c_1, c_2])$$

$$= [a_1, a_2]\cdot[b_1+c_1, b_2+c_2]$$

$$= [\min(a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2)),$$

$$\text{maks } (a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2),$$

$$\text{maks } (a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2)]$$

$$= [a_1b_1+a_1c_1, a_2b_2+a_2c_2].$$

$$= [a_1b_1, a_2b_2]+[a_1c_1, a_2c_2]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$$

$$= A \cdot B + A \cdot C.$$

Jadi, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Kasus III: $a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$ dan $a_1 \leq 0$, maka

$$A \cdot (B + C) = [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$$

$$= [\min(a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)),$$

$$\text{maks}\ (a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1 + a_1c_1, a_1b_2 + a_1c_2, a_2b_1 + a_2c_1, a_2b_2 + a_2c_2),$$

$$\text{maks}\ (a_1b_1 + a_1c_1, a_1b_2 + a_1c_2, a_2b_1 + a_2c_1, a_2b_2 + a_2c_2)]$$

$$= [a_1b_1 + a_1c_1, a_2b_2 + a_2c_2].$$

$$= [a_1b_1, a_2b_2] + [a_1c_1, a_2c_2]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$$

$$= A \cdot B + A \cdot C.$$

Jadi, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Kasus IV: $b_1, b_2, c_1, c_2 \leq 0$ dan $a_1, a_2 \leq 0$, maka

$$A \cdot (B + C) = [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$$

$$= [\min(a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2)),$$

$$\text{maks } (a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2),$$

$$\text{maks } (a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2)]$$

$$= [a_1b_1+a_1c_1, a_2b_2+a_2c_2].$$

$$= [a_1b_1, a_2b_2] + [a_1c_1, a_2c_2]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$$

$$= A \cdot B + A \cdot C.$$

Jadi, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Kasus V: $b_1, b_2, c_1, c_2 \leq 0$ dan $a_1, a_2 \geq 0$, maka

$$A \cdot (B+C) = [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1+c_1, b_2+c_2]$$

$$= [\min(a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2)),$$

$$\text{maks } (a_1(b_1+c_1), a_1(b_2+c_2), a_2(b_1+c_1), a_2(b_2+c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2),$$

$$\text{maks } (a_1b_1+a_1c_1, a_1b_2+a_1c_2, a_2b_1+a_2c_1, a_2b_2+a_2c_2)]$$

$$= [a_2b_2+a_2c_2, a_1b_1+a_1c_1].$$

$$= [a_2b_2, a_1b_1] + [a_2c_2, a_1c_1]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$$

$$= A \cdot B + A \cdot C$$

Jadi, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Kasus VI: $a_1, b_1, b_2, c_1, c_2 \leq 0$ dan $a_2 \geq 0$, maka

$$A \cdot (B + C) = [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2])$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$$

$$= [\min(a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)),$$

$$\text{maks}\ (a_1(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2))]$$

$$= [\min(a_1b_1 + a_1c_1, a_1b_2 + a_1c_2, a_2b_1 + a_2c_1, a_2b_2 + a_2c_2),$$

$$\text{maks}\ (a_1b_1 + a_1c_1, a_1b_2 + a_1c_2, a_2b_1 + a_2c_1, a_2b_2 + a_2c_2)]$$

$$= [a_2b_2 + a_2c_2, a_1b_2 + a_1c_2].$$

$$= [a_2b_2, a_1b_2] + [a_2c_2, a_1c_2]$$

$$= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \text{maks}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] +$$

$$[\min(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2), \text{maks}(a_1c_1, a_1c_2, a_2c_1, a_2c_2)]$$

$$= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] + [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2]$$

$$= A \cdot B + A \cdot C$$

Jadi, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

b. Jika $A = [a,a] = a$ maka berdasarkan pembuktian di atas diperoleh:

Untuk kasus I-IV: $a \cdot (B + C) = [ab_1 + ac_1, ab_2 + ac_2]$

$$= a \cdot [b_1, b_2] + a \cdot [c_1, c_2] = a \cdot B + a \cdot C.$$

Untuk kasus V: $a \cdot (B + C) = [ab_2 + ac_2, ab_1 + ac_1]$

$$= a \cdot [b_2, b_1] + a \cdot [c_2, c_1] = a \cdot B + a \cdot C.$$

Untuk kasus VI: $a \cdot (B + C) = [ab_2 + ac_2, ab_2 + ac_2]$

$$= a \cdot [b_2, b_2] + a \cdot [c_2, c_2] = a \cdot B + a \cdot C.$$

Jadi, $a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$.

6. Andaikan $0 \notin A - A = [a_1, a_2] - [a_1, a_2] = [a_1 - a_2, a_2 - a_1]$.

Maka $((a_1 - a_2 > 0) \wedge (a_2 - a_1 > 0))$ atau $((a_1 - a_2 < 0) \wedge (a_2 - a_1 < 0))$.

Bila $a_1 - a_2 > 0$ maka $a_2 - a_1 < 0$, dan bila $a_1 - a_2 < 0$ maka $a_2 - a_1 > 0$, yaitu $a_1 - a_2 \le 0$ atau $a_2 - a_1 < 0$ dan $a_1 - a_2 \ge 0$ atau $a_2 - a_1 > 0$. Terjadi kontradiksi. Jadi $0 \in A - A$.

$$A/A = [a_1, a_2]/[a_1, a_2] = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right]$$

$$= \left[\min\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \frac{a_2}{a_1}\right), \text{maks}\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \frac{a_2}{a_1}\right)\right]$$

$$= \left[\min\left(\frac{a_1}{a_2}, 1, 1, \frac{a_2}{a_1}\right), \text{maks}\left(\frac{a_1}{a_2}, 1, 1, \frac{a_2}{a_1}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_1}\right]$$

Karena $\dfrac{a_1}{a_2} < 1 < \dfrac{a_2}{a_1}$, maka $1 \in A/A$. ∎

Definisi 4.3:

Jika A dan B adalah dua bilangan kabur, dan $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ adalah potongan-α dari A dan B, maka *penjumlahan* A dan B, yaitu $A+B$, adalah bilangan kabur dengan potongan-α yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+], \text{ untuk setiap } \alpha \in [0,1].$$

Contoh 4.3:

Diberikan dua bilangan kabur segitiga A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x;-1,0,1)$ dan $\mu_B(x;-1,1,3)$. Tentukan $A + B$.

Penyelesaian:

$$\mu_A(x;-1,0,1) = \begin{cases} (x+1)/(0+1) = x+1 & \text{jika} \quad -1 \le x < 0 \\ (1-x)/(1-0) = 1-x & \text{jika} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jika} \quad x > 1 \quad \text{atau} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\mu_B(x;-1,1,3) = \begin{cases} (x+1)/(1+1) = (x+1)/2 & \text{jika} \quad -1 \le x < 1 \\ (3-x)/(3-1) = (3-x)/2 & \text{jika} \quad 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{jika} \quad x > 3 \quad \text{atau} \quad x < -1 \end{cases}$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \ge \alpha\}$, di mana

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x+1 \ge \alpha & \text{jika} \quad -1 \le x < 0 \\ 1-x \ge \alpha & \text{jika} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 \ge \alpha & \text{jika} \quad x > 1 \quad \text{atau} \quad x < -1 \end{cases}$$

Sehingga

$$A_\alpha = \{x | x+1 \geq \alpha \wedge 1-x \geq \alpha\} = \{x | x \geq \alpha - 1 \wedge x \leq 1-\alpha\} = \{x | \alpha - 1 \leq x \leq 1-\alpha\}.$$

Jadi $A_\alpha = [\alpha - 1, 1-\alpha]$.

$$\mu_B(x) = \begin{cases} (x+1)/2 \geq \alpha & \text{jika} \quad -1 \leq x < 1 \\ (3-x)/2 \geq \alpha & \text{jika} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \geq \alpha & \text{jika} \quad x > 3 \quad \text{atau} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$B_\alpha = \{x | (x+1)/2 \geq \alpha \wedge (3-x)/2 \geq \alpha\} = \{x | x+1 \geq 2\alpha \wedge 3-x \geq 2\alpha\}$$

$$= \{x | x \geq 2\alpha - 1 \wedge x \leq 3-2\alpha\} = \{x | 2\alpha - 1 \leq x \leq 3 - 2\alpha\}.$$

Jadi $B_\alpha = [2\alpha - 1, 3-2\alpha]$.

Maka $(A+B)_\alpha = [(\alpha-1)+(2\alpha-1), (1-\alpha)+(3-2\alpha)] = [3\alpha - 2, 4-3\alpha]$.

$$(A+B)_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{A+B}(x) \geq \alpha\}$$

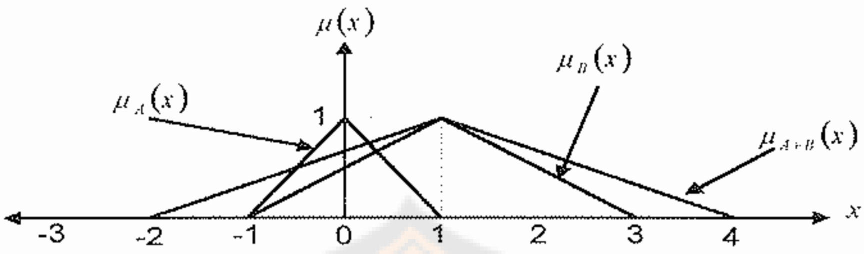
$$= \{x | 3\alpha - 2 \leq x \leq 4 - 3\alpha\} = \{x | x \geq 3\alpha - 2 \wedge x \leq 4 - 3\alpha\}$$

$$= \{x | x+2 \geq 3\alpha \wedge 4 - x \geq 3\alpha\} = \{x | (x+2)/3 \geq \alpha \wedge (4-x)/3 \geq \alpha\}.$$

Dari sini diperoleh:

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} (x+2)/3 & \text{untuk} \quad -2 \leq x < 1 \\ (4-x)/3 & \text{untuk} \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{untuk} \quad x > 4 \quad \text{atau} \quad x < -2 \end{cases}$$

$$= \mu_{A+B}(x; -2, 1, 4).$$



Gambar 4.4.

Definisi 4.4:

Jika A dan B adalah dua bilangan kabur, dan $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ adalah potongan-α dari A dan B, maka *pengurangan* A dan B, yaitu A-B, adalah bilangan kabur dengan potongan-α yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(A-B)_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-], \text{ untuk setiap } \alpha \in [0,1].$$

Contoh 4.4:

Diberikan dua bilangan kabur segitiga A dan B dengan fungsi keanggotaan seperti pada contoh 4.3. Tentukan A - B.

Penyelesaian:

Berdasarkan contoh 4.3,

diperoleh: $A_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ dan $B_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$.

$(A-B)_\alpha = [(\alpha - 1) - (3 - 2\alpha), (1 - \alpha) - (2\alpha - 1)] = [3\alpha - 4, 2 - 3\alpha]$.

$(A-B)_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{A-B}(x) \geq \alpha\}$

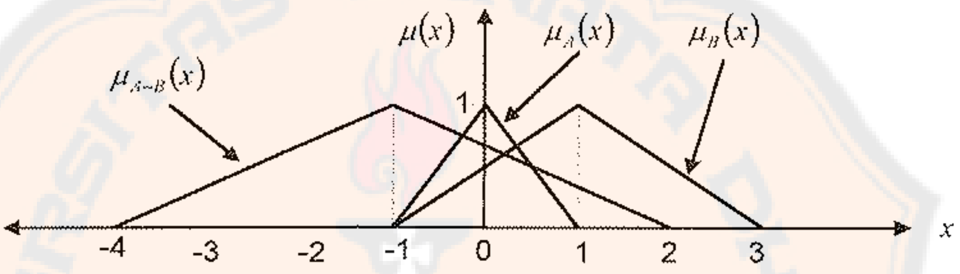
$$= \{x \mid 3\alpha - 4 \leq x \leq 2 - 3\alpha\} = \{x \mid x \geq 3\alpha - 4 \wedge x \leq 2 - 3\alpha\}$$

$$= \{x | x + 4 \geq 3\alpha \wedge 2 - x \geq 3\alpha\} = \{x | (x+4)/3 \geq \alpha \wedge (2-x)/3 \geq \alpha\}.$$

Dari sini diperoleh:

$$\mu_{A-B}(x) = \begin{cases} (x+4)/3 & \text{untuk} \quad -4 \leq x < -1 \\ (2-x)/3 & \text{untuk} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{untuk} \quad x > 2 \quad \text{atau} \quad x < -4 \end{cases}$$

$$= \mu_{A-B}(x; -4, -1, 2).$$



Gambar 4.5.

Definisi 4.5:

Jika A dan B adalah dua bilangan kabur, dan $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ adalah potongan-α dari A dan B, maka *perkalian* A dan B, yaitu $A \cdot B$, adalah bilangan kabur dengan potongan-α yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{ maks } (a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)],$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 4.5:

Berdasarkan contoh 4.3,

diperoleh: $A_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ dan $B_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$.

Untuk $\alpha \in [0,1]$, maka $\alpha - 1 \in [-1,0]$, $1 - \alpha \in [0,1]$, $2\alpha - 1 \in [-1,1]$ dan $3 - 2\alpha \in [1,3]$. Dengan menggunakan definisi 4.2, diperoleh:

$[-1,0] \cdot [-1,1] = [\min(1,-1,0,0), \text{maks } (1,-1,0,0)] = [-1,1]$.

$[-1,0] \cdot [1,3] = [\min(-1,-3,0,0), \text{maks } (-1,-3,0,0)] = [-3,0]$.

$[0,1] \cdot [-1,1] = [\min(0,0,-1,1), \text{maks } (0,0,-1,1)] = [-1,1]$.

$[0,1] \cdot [1,3] = [\min(0,0,1,3), \text{maks } (0,0,1,3)] = [0,3]$.

Hasil ini dapat digunakan untuk menentukan:

$$\begin{aligned}(A \cdot B)_\alpha &= [\min((\alpha-1)(2\alpha-1), (\alpha-1)(3-2\alpha), (1-\alpha)(2\alpha-1), (1-\alpha)(3-2\alpha)),\\ &\quad \text{maks } ((\alpha-1)(2\alpha-1), (\alpha-1)(3-2\alpha), (1-\alpha)(2\alpha-1), (1-\alpha)(3-2\alpha))]\\ &= [(\alpha-1)(3-2\alpha), (1-\alpha)(3-2\alpha)]\\ &= [-2\alpha^2 + 5\alpha - 3, 2\alpha^2 - 5\alpha + 3].\end{aligned}$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(A \cdot B)_\alpha &= \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{A \cdot B}(x) \geq \alpha\}\\ &= \{x \mid -2\alpha^2 + 5\alpha - 3 \leq x \leq 2\alpha^2 - 5\alpha + 3\}\\ &= \{x \mid (x \geq -2\alpha^2 + 5\alpha - 3) \wedge (x \leq 2\alpha^2 - 5\alpha + 3)\}\\ &= \{x \mid (-8x \geq 8(2\alpha^2 - 5\alpha + 3)) \wedge (8x \leq 8(2\alpha^2 - 5\alpha + 3))\}\\ &= \{x \mid (-8x \geq 16\alpha^2 - 40\alpha + 24) \wedge (8x \leq 16\alpha^2 - 40\alpha + 24)\}\end{aligned}$$

$$= \{x|(-8x \geq 16\alpha^2 - 40\alpha + 25 - 1) \wedge (8x \leq 16\alpha^2 - 40\alpha + 25 - 1)\}$$

$$= \{x|(1 - 8x \geq 16\alpha^2 - 40\alpha + 25) \wedge (8x + 1 \leq 16\alpha^2 - 40\alpha + 25)\}$$

$$= \{x|(1 - 8x \geq (5 - 4\alpha)^2) \wedge (8x + 1 \leq (5 - 4\alpha)^2)\}$$

$$= \{x|((1 - 8x)^{\frac{1}{2}} \geq 5 - 4\alpha) \wedge ((8x + 1)^{\frac{1}{2}} \leq 5 - 4\alpha)\}$$

$$= \{x|((5 - (1 - 8x)^{\frac{1}{2}})/4 \geq \alpha) \wedge ((5 - (8x + 1)^{\frac{1}{2}})/4 \geq \alpha)\},$$

Untuk $\alpha = 0$, maka

$5 - (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}}/4 \geq 0 \Leftrightarrow 5 - (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}} \geq 5$

$\Leftrightarrow (1 - 8(x)) \geq 5^2 \Leftrightarrow (1 - 8(x)) \geq 25 \Leftrightarrow 8(x) \geq 1 - 25 \Leftrightarrow 8(x) \geq -24$

$\Leftrightarrow x \geq -3$

Untuk $\alpha = 1$, maka

$5 - (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}}/4 \geq 1 \Leftrightarrow 5 - (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}} \geq 4 \Leftrightarrow (1 - 8(x))^{\frac{1}{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow (1 - 8(x)) \leq 1^2 \Leftrightarrow (1 - 8(x)) \leq 1 \Leftrightarrow 8(x) \leq 1 - 1 \Leftrightarrow 8(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$,

Untuk $\alpha = 0$, maka

$5 - (8(x) + 1)^{\frac{1}{2}}/4 \geq 0 \Leftrightarrow 5 - (1 + 8(x))^{\frac{1}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow (1 + 8(x))^{\frac{1}{2}} \leq 5$

$\Leftrightarrow (1 + 8(x)) \leq 5^2 \Leftrightarrow (1 + 8(x)) \leq 25 \Leftrightarrow 8(x) \leq 25 - 1 \Leftrightarrow 8(x) \leq 24$

$\Leftrightarrow x \leq 3$,

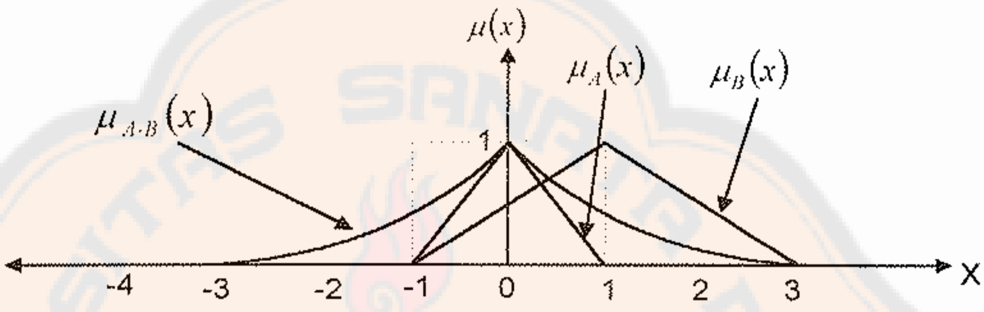
Untuk $\alpha = 1$, maka

$5 - (8(x) + 1)^{\frac{1}{2}}/4 \geq 1 \Leftrightarrow 5 - (1 + 8(x))^{\frac{1}{2}} \geq 4 \Leftrightarrow (1 + 8(x))^{\frac{1}{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow (1 + 8(x)) \leq 1^2 \Leftrightarrow (1 + 8(x)) \leq 1 \Leftrightarrow 8(x) \geq 1 - 1 \Leftrightarrow 8(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Jadi, $\mu_{A\cdot B}(x) = \begin{cases} 5-(1-8x)^{\frac{1}{2}}/4 & \text{jika} \quad -3 \le x < 0 \\ 5-(8x+1)^{\frac{1}{2}}/4 & \text{jika} \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{jika} \quad x > 3 \quad \text{atau} \quad x < -3 \end{cases}$

atau $\mu_{A\cdot B}(x) = \dfrac{5-(1+8|x|)^{\frac{1}{2}}}{4}$ untuk $x \in [-3,3]$.



Gambar 4.6.

Definisi 4.6:

Jika A dan B adalah dua bilangan kabur, dan $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ adalah potongan-α dari A dan B, maka *pembagian* A dan B, yaitu A/B, adalah bilangan kabur dengan potongan-α yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+),$$
$$\text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)],$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

Contoh 4.6:

Berdasarkan contoh 4.3,

diperoleh: $A_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ dan $B_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$. Untuk $\alpha \in [0,1]$, maka

$(\alpha - 1)/(2\alpha - 1) \in [-1,0]/[-1,1] = [\min(1,-1,0,0), \text{maks}(1,-1,0,0)] = [-1,1]$.

$(\alpha - 1)/(3 - 2\alpha) \in [-1,0]/[1,3] = [\min(-1,-1/3,0,0), \text{maks}(-1,-1/3,0,0)] = [-1,0]$.

$(1 - \alpha)/(2\alpha - 1) \in [0,1]/[-1,1] = [\min(0,0,-1,1), \text{maks}(0,0,-1,1)] = [-1,1]$.

$(1 - \alpha)/(3 - 2\alpha) \in [0,1]/[1,3] = [\min(0,0,1,1/3), \text{maks}(0,0,1,1/3)] = [0,1]$.

Hasil ini dapat digunakan untuk menentukan:

$$\begin{aligned}(A/B)_\alpha &= [\min((\alpha-1)/(2\alpha-1),(\alpha-1)/(3-2\alpha),(1-\alpha)/(2\alpha-1),(1-\alpha)/(3-2\alpha)),\\ &\quad \text{maks}((\alpha-1)/(2\alpha-1),(\alpha-1)/(3-2\alpha),(1-\alpha)/(2\alpha-1),(1-\alpha)/(3-2\alpha))]\\ &= [(\alpha-1)/(2\alpha-1),(1-\alpha)/(2\alpha-1)].\end{aligned}$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(A/B)_\alpha &= \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{A/B}(x) \geq \alpha\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq \alpha - 1/2\alpha - 1) \wedge x \leq 1 - \alpha/2\alpha - 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (2\alpha x - x \geq \alpha - 1) \wedge (2\alpha x - x \leq 1 - \alpha)\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (1 - x \geq \alpha - 2\alpha x) \wedge (2\alpha x + \alpha \leq x + 1)\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (1 - x \geq (1 - 2x)\alpha) \wedge ((2x + 1)\alpha \leq x + 1)\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (1 - x/1 - 2x \geq \alpha) \wedge (x + 1/2x + 1 \geq \alpha)\}.\end{aligned}$$

Untuk $\alpha = 0$, maka

$1 - x/1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Sedangkan untuk $\alpha = 1$, maka

$1 - x/1 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow 1 - x \geq 1 - 2x \Leftrightarrow x \geq 0$.

Untuk $\alpha = 0$, maka

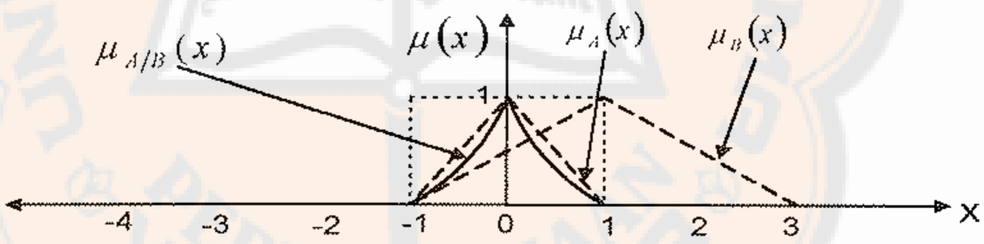
$(x+1)/(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Sedangkan untuk $\alpha = 1$, maka

$(x+1)/(2x+1) \geq 1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2x + 1 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Jadi,

$$\mu_{A/B}(x) = \begin{cases} (x+1)/(2x+1) & \text{jika} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)/(1-2x) & \text{jika} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jika} \quad x \leq -1 \quad \text{atau} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Gambar 4.7.

Metode 2: Dengan menggunakan Prinsip Perluasan (Definisi 3.17).

<u>Definisi 4.7:</u>

Dengan menggunakan Prinsip Perluasan (Definisi 3.17), dapat didefinisikan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari bilangan-bilangan kabur A dan B dengan fungsi keanggotaan berturut-turut sebagai berikut:

a. $\mu_{A+B}(z) = \sup\limits_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

b. $\mu_{A-B}(z) = \sup\limits_{z=x-y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

c. $\mu_{A\cdot B}(z) = \sup\limits_{z=x\cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

d. $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

untuk setiap $z \in \mathbb{R}$.

Contoh 4.7:

Diberikan dua bilangan kabur segitiga seperti pada contoh 4.3, yaitu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x+1 & \text{jika} \quad -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{jika} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jika} \quad x > 1 \quad \text{atau} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} (y+1)/2 & \text{jika} \quad -1 \le y < 1 \\ (3-y)/2 & \text{jika} \quad 1 \le y \le 3 \\ 0 & \text{jika} \quad y > 3 \quad \text{atau} \quad y < -1 \end{cases}$$

a. $f(x,y) = x + y$, diperluas menjadi $f(A,B) = A + B$.

Mencari beberapa nilai $\mu_{(A+B)}(z)$, yaitu untuk $z = -2, z = 0, z = 1, z = 2$, dan $z = 4$.

1. z = -2 hanya diperoleh dari $f(-1,-1)$.

   Jadi, $\mu_{A+B}(-2) = \sup\limits_{z=x+y} \min[\mu_A(-1), \mu_B(-1)] = 0$.

2. $z = 0$ diperoleh dari $f(-1,1), f(0,0)$, dan $f(1,-1)$.

$$\mu_{A+B}(0) = \sup_{z=x+y}(\min[\mu_A(-1),\mu_B(1)],\min[\mu_A(0),\mu_B(0)],$$

$$\min[\mu_A(1),\mu_B(-1)]).$$

$$= \sup_{z=x+y}(\min[0,1],\min[1,\tfrac{1}{2}],\min[0,0]) = \sup_{z=x+y}(0,\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{2}.$$

3. $z = 1$ diperoleh dari $f(-1,2), f(0,1)$, dan $f(1,0)$.

$$\mu_{A+B}(1) = \sup_{z=x+y}(\min[\mu_A(-1),\mu_B(2)],\min[\mu_A(0),\mu_B(1)],$$

$$\min[\mu_A(1),\mu_B(0)]).$$

$$= \sup_{z=x+y}(\min[0,\tfrac{1}{2}],\min[1,1],\min[0,\tfrac{1}{2}]) = \sup_{z=x+y}(0,1,0) = 1.$$

4. $z = 2$ diperoleh dari $f(-1,3), f(0,2)$, dan $f(1,1)$.

$$\mu_{A+B}(2) = \sup_{z=x+y}(\min[\mu_A(-1),\mu_B(3)],\min[\mu_A(0),\mu_B(2)],$$

$$\min[\mu_A(1),\mu_B(1)]).$$

$$= \sup_{z=x+y}(\min[0,0],\min[1,\tfrac{1}{2}],\min[0,1]) = \sup_{z=x+y}(0,\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{2}.$$

5. $z = 4$ hanya diperoleh dari $f(1,3)$.

$$\mu_{A+B}(4) = \sup_{z=x+y}\min[\mu_A(1),\mu_B(3)] = \sup_{z=x+y}\min[0,0] = \sup_{z=x+y} 0 = 0.$$

b. $f(x,y) = x - y$, diperluas menjadi $f(A,B) = A - B$.

Mencari beberapa nilai $\mu_{A-B}(z)$, yaitu untuk $z = -4, z = -1$, dan $z = 2$.

1. $z = -4$ hanya diperoleh dari $f(-1,3)$.

   Jadi, $\mu_{A-B}(-4) = \sup_{z=x-y}\min[\mu_A(-1),\mu_B(3)] = 0$.

2. $z = -1$ diperoleh dari $f(-1,0), f(0,1)$, dan $f(1,2)$.

$$\mu_{A-B}(-1) = \sup_{z=x-y} (\min[\mu_A(-1), \mu_B(0)], \min[\mu_A(0), \mu_B(1)],$$

$$\min[\mu_A(1), \mu_B(2)]).$$

$$= \sup_{z=x+y} (\min[0, \tfrac{1}{2}], \min[1,1], \min[0, \tfrac{1}{2}]) = \sup_{z=x+y} (0,1,0) = 1.$$

3. $z = 2$ diperoleh dari $f(1,-1)$.

$$\mu_{A-B}(2) = \sup_{z=x-y} \min[\mu_A(1), \mu_B(-1)] = \sup_{z=x-y} \min[0,0] = \sup_{z=x-y} 0 = 0.$$

c. $f(x, y) = x \cdot y$, diperluas menjadi $f(A, B) = A \cdot B$.

Mencari beberapa nilai $\mu_{(A \cdot B)}(z)$, yaitu untuk $z = -3, z = 0,$ dan $z = 3$.

1. $z = -3$ hanya diperoleh dari $f(-1,3)$.

   Jadi, $\mu_{A \cdot B}(-3) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(-1), \mu_B(3)] = 0$.

2. $z = 0$ diperoleh dari $f(-1,0), f(0,-1), f(0,0), f(0,1), f(0,2),$ dan $f(0,3)$.

$$\mu_{A \cdot B}(0) = \sup_{z=x \cdot y} (\min[\mu_A(-1), \mu_B(0)], \min[\mu_A(0), \mu_B(-1)],$$

$$\min[\mu_A(0), \mu_B(0)], \min[\mu_A(0), \mu_B(1)],$$

$$\min[\mu_A(0), \mu_B(2)], \min[\mu_A(0), \mu_B(3)]).$$

$$= \sup_{z=x \cdot y} (\min[0, \tfrac{1}{2}], \min[1,0], \min[1, \tfrac{1}{2}], \min[1,1], \min[1, \tfrac{1}{2}], \min[1,0])$$

$$= \sup_{z=x \cdot y} (0,0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},0) = 1.$$

3. $z = 3$ hanya diperoleh dari $f(1,3)$,

$$\mu_{A \cdot B}(3) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(1), \mu_B(3)] = \sup_{z=x \cdot y} \min[0,0] = \sup_{z=x \cdot y} 0 = 0.$$

d. $f(x,y) = x/y$, diperluas menjadi $f(A,B) = A/B$.

Mencari beberapa nilai $\mu_{A/B}(z)$, yaitu untuk $z = -1, z = 0$, dan $z = 1$.

1. $z = -1$, hanya diperoleh dari $f(1,-1)$, dan $f(-1,1)$.

Jadi, $\mu_{A/B}(-1) = \sup\limits_{z=x/y}(\min[\mu_A(1), \mu_B(-1)], \min[\mu_A(-1), \mu_B(1)]$.

$$= \sup_{z=x/y} (\min[0,0], \min[0,1]) = 0.$$

2. $z = 0$, diperoleh dari $f(0,-1), f(0,0), f(0,1), f(0,2)$, dan $f(0,3)$.

$$\mu_{A/B}(0) = \sup_{z=x\cdot y}(\min[\mu_A(0), \mu_B(-1)], \min[\mu_A(0), \mu_B(0)],$$

$$\min[\mu_A(0), \mu_B(1)], \min[\mu_A(0), \mu_B(2)], \min[\mu_A(0), \mu_B(3)])$$

$$= \sup_{z=x\cdot y}(\min[1,0], \min[1,\tfrac{1}{2}], \min[1,1], \min[1,\tfrac{1}{2}], \min[1,0])$$

$$= \sup_{z=x\cdot y}(0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},0) = 1.$$

3. $z = 1$, hanya diperoleh dari $f(-1,-1)$, dan $f(1,1)$.

Jadi, $\mu_{A/B}(1) = \sup\limits_{z=x/y}(\min[\mu_A(-1), \mu_B(-1)], \min[\mu_A(1), \mu_B(1)]$.

$$= \sup_{z=x/y} (\min[0,0], \min[0,1]) = 0.$$

Berikut diberikan teorema-teorema yang memperlihatkan bahwa definisi Operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan adalah ekivalen dengan operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan potongan-α berdasarkan Teorema Dekomposisi.

Teorema 4.2:

Jika $A+B$ adalah penjumlahan dua buah bilangan kabur A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$ dan potongan-α dari A dan B berturut-turut adalah $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, maka potongan-$\alpha$ dari bilangan kabur $A+B$ tersebut adalah $(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan real $z \in (A+B)_\alpha$. Maka $\mu_{A+B}(z) \geq \alpha$. Andaikan $z \notin [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$, maka untuk setiap x dan y dengan $x+y=z$, berlaku $x \notin [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ atau $y \notin [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$, yaitu $\mu_A(x) < \alpha$ atau $\mu_B(y) < \alpha$, sehingga $\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] < \alpha$. Maka terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $z \in [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$.

Maka terbukti bahwa $(A+B)_\alpha \subseteq [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$.

Selanjutnya, Ambil sebarang bilangan real $z \in [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$. Maka terdapat $x \in [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ dan $y \in [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$ sedemikian sehingga $x+y=z$. Berarti $\mu_A(x) \geq \alpha$ dan $\mu_B(y) \geq \alpha$. Jadi $\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \geq \alpha$, yaitu $z \in (A+B)_\alpha$.

Jadi $[a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+] \subseteq (A+B)_\alpha$.

Terbukti bahwa $(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$. ∎

Teorema 4.3:

Jika $A-B$ adalah pengurangan dua buah bilangan kabur A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A-B}(z)=\sup\limits_{z=x-y}\min[\mu_A(x),\mu_B(y)]$ dan potongan-α dari A dan B berturut-turut adalah $A_\alpha=[a_\alpha^-,a_\alpha^+]$, $B_\alpha=[b_\alpha^-,b_\alpha^+]$, maka potongan-$\alpha$ dari bilangan kabur $A-B$ tersebut adalah $(A-B)_\alpha=[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan real $z\in(A-B)_\alpha$. Maka $\mu_{A-B}(z)\geq\alpha$. Andaikan $z\notin[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$, maka untuk setiap x dan y dengan $x-y=z$, berlaku $x\notin[a_\alpha^-,a_\alpha^+]=A_\alpha$ atau $y\notin[b_\alpha^-,b_\alpha^+]=B_\alpha$, yaitu $\mu_A(x)<\alpha$ atau $\mu_B(y)<\alpha$, sehingga $\mu_{A-B}(z)=\sup\limits_{z=x-y}\min[\mu_A(x),\mu_B(y)]<\alpha$. Maka terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $z\in[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$.

Maka terbukti bahwa $(A-B)_\alpha\subseteq[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$.

Selanjutnya, Ambil sebarang bilangan real $z\in[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$. Maka terdapat $x\in[a_\alpha^-,a_\alpha^+]=A_\alpha$ dan $y\in[b_\alpha^-,b_\alpha^+]=B_\alpha$ sedemikian sehingga $x-y=z$. Berarti $\mu_A(x)\geq\alpha$ dan $\mu_B(y)\geq\alpha$. Jadi $\mu_{A-B}(z)=\sup\limits_{z=x-y}\min[\mu_A(x),\mu_B(y)]\geq\alpha$, yaitu $z\in(A-B)_\alpha$.

Jadi $[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]\subseteq(A-B)_\alpha$.

Terbukti bahwa $(A-B)_\alpha=[a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$. ∎

Teorema 4.4:

Jika $A \cdot B$ adalah perkalian dua buah bilangan kabur A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$ dan potongan-α dari A dan B berturut-turut adalah $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, maka potongan-$\alpha$ dari bilangan kabur $A \cdot B$ tersebut adalah $(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)$, maks $(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan real $z \in (A \cdot B)_\alpha$. Maka $\mu_{A \cdot B}(z) \geq \alpha$. Andaikan $z \notin [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$ maka untuk setiap x dan y dengan $x \cdot y = z$, berlaku $x \notin [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ atau $y \notin [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$, yaitu $\mu_A(x) < \alpha$ atau $\mu_B(y) < \alpha$, sehingga $\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] < \alpha$. Maka terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $z \in [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$.

Maka terbukti bahwa

$(A \cdot B)_\alpha \subseteq [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$.

Selanjutnya, Ambil sebarang bilangan real $z \in [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)$, $\text{maks}(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$. Maka terdapat $x \in [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ dan $y \in [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$ sedemikian sehingga $x \cdot y = z$. Berarti $\mu_A(x) \geq \alpha$ dan $\mu_B(y) \geq \alpha$. Jadi $\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \geq \alpha$, yaitu $z \in (A \cdot B)_\alpha$.

Jadi $[\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)] \subseteq (A \cdot B)_\alpha$

Terbukti bahwa

$(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{maks}\ (a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$. ∎

Teorema 4.5:

Jika A/B adalah pembagian dua buah bilangan kabur A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$ dan potongan-α dari A dan B berturut-turut adalah $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, maka potongan-$\alpha$ dari bilangan kabur A/B tersebut adalah

$$(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)].$$

Bukti:

Ambil sebarang bilangan real $z \in (A/B)_\alpha$. Maka $\mu_{A/B}(z) \geq \alpha$. Andaikan $z \notin [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$, maka untuk setiap x dan y dengan $x/y = z$, berlaku $x \notin [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ atau $y \notin [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$, yaitu $\mu_A(x) < \alpha$ atau $\mu_B(y) < \alpha$, sehingga $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] < \alpha$. Maka terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $z \in [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$.

Maka terbukti bahwa $(A/B)_\alpha \subseteq [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$. Selanjutnya, Ambil sebarang bilangan real $z \in [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-,$ $a_\alpha^+/b_\alpha^+)]$. Maka terdapat $x \in [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = A_\alpha$ dan $y \in [b_\alpha^-, b_\alpha^+] = B_\alpha$ sedemikian sehingga $x/y = z$. Berarti $\mu_A(x) \geq \alpha$ dan $\mu_B(y) \geq \alpha$. Jadi $\mu_{A/B}(z)$ = $\sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \geq \alpha$, yaitu $z \in (A/B)_\alpha$. Jadi, $[\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+,$ $a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+)] \subseteq (A/B)_\alpha$.

Terbukti bahwa

$$(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-, a_\alpha^+/b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^-/b_\alpha^-, a_\alpha^-/b_\alpha^+, a_\alpha^+/b_\alpha^-,$$
$$a_\alpha^+/b_\alpha^+)]. \blacksquare$$

BAB V

KESIMPULAN

1. *Himpunan kabur* A dalam semesta X dicirikan oleh suatu fungsi keanggotaan μ_A yang nilainya berada dalam interval $[0,1]$, yaitu:

$$\mu_A : X \to [0,1].$$

Nilai $\mu_A(x) \in [0,1]$ disebut *derajat keanggotaan* x dalam himpunan kabur A. Suatu *himpunan kabur* A dalam X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut dari $x \in X$ dan derajat keanggotaannya, yaitu:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}.$$

2. Teorema Dekomposisi:

Jika A adalah suatu himpunan kabur dalam $\mathbb{R}$ dan $\widetilde{A}_\alpha$ adalah himpunan kabur yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x) = \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x), \text{ untuk setiap } \alpha \in [0,1],$$

di mana $\chi_{A_\alpha}(x)$ adalah fungsi karakteristik dari potongan-α A_α, maka $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \widetilde{A}_\alpha$.

3. Prinsip Perluasan:

Diberikan suatu himpunan kabur A dalam U dan pemetaan $f : U \to V$. Maka $B = f(A)$ adalah himpunan kabur dalam V yang terimbas oleh f dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{jika} \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{jika} \quad f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

di mana $y \in V$, dan $f^{-1}(y) = \{x \in U | f(x) = y\}$.

4. Suatu himpunan kabur A dalam $\mathbb{R}$ disebut *bilangan kabur* jika

   i. A normal.

   ii. A konveks.

   iii. Pendukung dari A adalah terbatas.

   iv. A_α adalah interval tertutup dalam $\mathbb{R}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

5. Jika A dan B adalah dua bilangan kabur, dan $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ adalah potongan-α dari A dan B, maka *penjumlahan* A dan B, yaitu $A+B$, *pengurangan* A dan B, yaitu A-B, *perkalian* A dan B, yaitu $A \cdot B$, dan *pembagian* A dan B, yaitu A/B, adalah bilangan kabur dengan potongan-α yang didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

   a. $(A+B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$

   b. $(A-B)_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$

   c. $(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+), \text{ maks } (a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$

   d. $(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- / b_\alpha^-, a_\alpha^- / b_\alpha^+, a_\alpha^+ / b_\alpha^-, a_\alpha^+ / b_\alpha^+), \text{maks}(a_\alpha^- / b_\alpha^-, a_\alpha^- / b_\alpha^+,$

   $a_\alpha^+ / b_\alpha^-, a_\alpha^+ / b_\alpha^+)]$

   untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

6. Dengan menggunakan prinsip perluasan, penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan-bilangan kabur A dan B didefinisikan sebagai bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan berturut-turut :

   a. $\mu_{A+B}(z) = \sup\limits_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

   b. $\mu_{A-B}(z) = \sup\limits_{z=x-y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

   c. $\mu_{A\cdot B}(z) = \sup\limits_{z=x\cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

   d. $\mu_{A/B}(z) = \sup\limits_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

   untuk setiap $z \in \mathbb{R}$.

7. Definisi operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan adalah ekivalen dengan definisi operasi aritmetika bilangan kabur dengan menggunakan potongan-α berdasarkan Teorema Dekomposisi.

DAFTAR PUSTAKA

Klir, G.J. and Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Nguyen, Hung, T. and Walker, Elbert, A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Susilo, F. (2003). *Pengantar Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Penerbit Universitas Sanata Dharma.

Terano, T., Asai, K. and Sugeno, M. (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. New York: Academic Press.

Wang, Li-Xin. (1997). *A Course in Fuzzy System And Control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

Yen, John and Langari, Reza. (1999). *Fuzzy Logic Intelligence, Control, and Information*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

Zimmermann, H.-J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers.