PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE LANGSUNG

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

ALEX DANAN SUNTADI MULYANA
NIM : 981414016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

PENYELESAIAN NUMERIK

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE LANGSUNG

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

ALEX DANAN SUNTADI MULYANA

NIM : 981414016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2003

PENYELESAIAN NUMERIK

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE LANGSUNG

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

ALEX DANAN SUNTADI MULYANA
NIM : 981414016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2003

SKRIPSI

PENYELESAIAN NUMERIK

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE LANGSUNG

Disusun oleh

Alex Danan Suntadi Mulyana

NIM : 981414016

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing

M. Andy Rudhito, M.Si.

Tanggal 5 September 2003

SKRIPSI

PENYELESAIAN NUMERIK
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE LANGSUNG

Dipersiapkan dan disusun oleh

Alex Danan Suntadi Mulyana
NIM : 981414016

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Penguji Skripsi
Pada tanggal 18 September 2003 dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	
Anggota	: M. Andy Rudhito, M.Si.	
Anggota	: Drs. A. Mardjono	
Anggota	: Dr. Y. Marpaung	

Yogyakarta, 18 September 2003
Fakultas keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Orang-orang yang menabur dengan mencucurkan airmata, akan menuai dengan bersorak-sorai. Orang yang berjalan maju dengan menangis sambil menabur benih, pasti pulang dengan sorak-sorai sambil membawa berkas-berkasnya.

(Mazmur 126:5,6)

"Tetapi siapa yang termasuk orang hidup mempunyai harapan, karena anjing yang hidup lebih baik daripada singa yang mati "

(Pengkhotbah 9:4)

Mengapa engkau tertekan, hai jiwaku, dan mengapa engkau gelisah didalam diriku? Berharaplah kepada Allah! Sebab aku bersyukur lagi kepada-Nya, penolongku dan Allahku!

(Mazmur 42 :12)

Kupersembahkan untuk yang tercinta dan terkasih

Bapak, Ibu, adikku Dwi, Wiwin
Dan teman-teman PMAT `98

ABSTRAK

Sistem persamaan linear $Ax = b$ dengan A adalah matriks bujursangkar dapat diselesaikan mengunakan metode langsung. Metode langsung ini meliputi metode row pivoting dan metode Thomas yang berdasarkan metode eliminasi Gauss.

Metode eliminasi Gauss digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang elemen pivotnya tidak sama dengan nol. Metode row pivoting digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang elemen pivotnya dapat nol. Metode Thomas digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang mempunyai bentuk khusus yaitu bentuk tridiagonal.

Metode ini digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam analisis tiang penyangga, sirkuit listrik, model ekonomi leontif, dan interpolasi spline kubik.

ABSTRACT

A linear equation system $Ax = b$ with A is a square matrix can be solved by direct methods. The direct methods included row pivoting method and Thomas method, both of these based on Gaussian elimination.

Gaussian elimination method is used for solving linear equation system which it's pivot elements are non zero. Row pivoting method is applicable for solving linear equation system which it's pivot elements may be zero. The last, Thomas method is applicable for solving the special pattern of linear equation system, such is a tridiagonal system.

Thus methods are applicable for solving problems in analysis of forces on a simple truss, electric circuit, Leontif economic model, and spline cubic interpolation.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Linear Dengan Metode Langsung", sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pedidikan Matematika.

Dalam menyusun skripsi ini, penulis mendapat bantuan berupa bimbingan, sarana, dukungan moral dan materiil dari berbagai pihak. Untuk itu penyusun mengucapkan banyak terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Bapak M. Andy Rudhito, M.Si. selaku dosen pembimbing yang dengan kesabarannya telah membimbing dan memberikan saran-saran kepada penulis selama proses penulisan tugas akhir ini.
2. Bapak Drs. Th. Sugiarto, MT. selaku dosen pembimbing akademik dan Ketua Program Studi Pendidikan Matematika.
3. Bapak Drs. Al. Haryono selaku dosen pembimbing akademik penulis dari tahun 1998 sampai 2002.
4. Bapak Dr. Y. Marpaung sebagai dosen penguji atas kritik dan sarannya.
5. Bapak Drs. A. Mardjono sebagai dosen penguji atas kritik dan sarannya.
6. Segenap dosen JPMIPA, khususnya program Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
7. Bapak dan Ibu atas cinta dan doanya.

8. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng atas keramahannya dalam melayani kepentingan mahasiswa.
9. Rekan-rekan mahasiswa pendidikan matematika angkatan `98 atas kebersamaan selama menjalani masa kuliah bersama-sama ,dan semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan bantuan berupa dorongan semangat, tenaga, dan pikiran selama penyusunan skripsi.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang telah disusun ini masih banyak kekurangannya. Meskipun demikian penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua.

Yogyakarta, September 2003

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sistem persamaan linear dengan jumlah persamaan dan jumlah variabel yang sedikit dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang sederhana misalnya substitusi, tetapi dalam penerapannya sistem persamaan linear dengan jumlah persamaan dan jumlah variabel yang besar sekali diperlukan sebuah alat bantu, dalam hal ini alat bantunya adalah komputer. Komputer yang berkembang pesat telah menyediakan berbagai aplikasi untuk memudahkan dalam pemecahan sistem persamaan linear tersebut. Dari sekian banyak sofware aplikasi untuk membantu penyelesaian matematis adalah MATLAB. MATLAB singkatan dari MATrix LABoratory. Perangkat lunak MATLAB adalah program interaktif untuk melakukan perhitungan-perhitungan dengan dasar matrik dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknik.

Metode numerik adalah cara yang digunakan untuk merumuskan masalah matematis agar dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan. Dengan metode numerik langkah-langkah dalam penyelesaian suatu masalah matematika tampak jelas sehingga akan lebih mudah dibuat programnya dalam komputer.

Penyelesaian numerik sistem persamaan linear dapat dilakukan dengan berbagai macam metode tetapi pemilihan suatu metode sangat penting, karena salah satu metode bisa tepat untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear tetapi belum tentu tepat untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang lain.

Salah satu cara penyelesaian numerik sistem persamaan linear adalah dengan metode langsung. Metode ini didasarkan pada metode eliminasi Gauss yang terdiri dari metode row pivoting dan metode Thomas. Metode eliminasi Gauss ini sudah pernah diberikan pada saat kuliah tetapi untuk metode row pivoting dan metode thomas belum pernah diberikan. Metode-metode tersebut dengan cara numerik akan lebih mudah dibuat algoritma lalu dibuat programnya dalam Matlab, maka dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang besar dapat lebih mudah dan cepat didapatkan hasilnya dengan bantuan program matlab tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun masalah yang akan dibahas adalah:

1. bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode eliminasi Gauss?
2. bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode row pivoting?
3. bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode Thomas?
4. bagaimana penulisan program dengan metode eliminasi Gauss, metode row pivoting dan metode Thomas dengan program matlab?
5. bagaimana penerapan metode eliminasi Gauss, metode row pivoting dan metode Thomas?

1.3 Batasan Masalah

Penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode langsung ada berbagai macam metode. Penulisan skripsi ini dibatasi hanya pada metode eliminasi Gauss, metode row pivoting, dan metode Thomas, masing-masing metode beserta program matlabnya.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dalam skripsi ini adalah membahas tentang penyelesaian numerik sistem persamaan linear dengan metode langsung, menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdiri dari 2 macam metode yaitu metode row pivoting dan metode Thomas, juga membahas program matlab dari metode row pivoting dan metode Thomas yang digunakan untuk membantu menyelesaikan persamaan linear yang sulit diselesaikan dengan cara manual.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terbagi dalam lima bab, Bab I merupakan pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

Dalam Bab II, akan diuraikan materi-materi prasyarat yang akan digunakan dalam penulisan teori-teori selanjutnya, subbab pertama akan membahas matrik dan sistem persamaan linear.

Bab III membahas metode eliminasi Gauss, metode row pivoting, dan metode Thomas, beserta program matlabnya. Dilanjutkan dengan Bab IV yang berisi tentang penerapan metode eliminasi Gauss, metode row pivoting, dan metode Thomas di bidang fisika, ekonomi, dan interpolasi spline kubik. Bab terakhir, yaitu Bab V, berisi kesimpulan dan saran.

1.6 Metode Penulisan

Penulisan skripsi menggunakan metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari buku-buku pendukung yang berkaitan dengan penyelesaian numerik sistem persamaan linear dengan metode langsung dan penulisan program matlabnya. Jenis-jenis sumber pustaka yang digunakan penulis tercantum dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks dan Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan dengan persamaan yang berbentuk:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

di mana a_1, a_2 dan b adalah konstanta-konstanta real, dengan a_1 dan a_2 tidak sama dengan nol. Persamaan semacam ini dinamakan persamaan linear dalam variabel x dan y. Secara lebih umum, akan didefinisikan persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definisi 2.1.1

Persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *dan b adalah konstanta-konstanta real, dengan* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *semua tidak sama dengan nol.*

Definisi 2.1.2

Suatu sistem persamaan linear m x n adalah himpunan m persamaan linear dengan n variabel, yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \tag{2.1}
$$

di mana a_{i1} , a_{i2} , ... , a_{in} *dan* b_i *adalah konstanta-konstanta real, dengan* a_{i1} , a_{i2} , ... , a_{in} *semua tidak sama dengan nol untuk* $i = 1 , 2 , \ldots , m$.

Dalam sistem persamaan linear m x n, dapat terjadi $m = n$, $m > n$ atau $m < n$. Apabila $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, ..., $x_n = t_n$. Di mana t_1, t_2, ..., t_n adalah konstanta-konstanta real yang memenuhi semua persamaan linear dalam sistem tersebut, maka pasangan berurutan (t_1, t_2, ..., t_n) disebut *penyelesaian* dari sistem persamaan linear tersebut. Apabila sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian, maka sistem persamaan linear tersebut dikatakan *konsisten*. Sedangkan apabila tidak mempunyai penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dikatakan *tidak konsisten*. Sistem yang konsisten dapat mempunyai tepat satu penyelesaian atau mempunyai banyak penyelesaian.

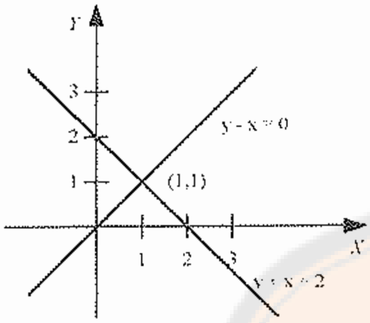
Contoh 2.1.1

Diberikan sistem persamaan linear dengan dua variabel

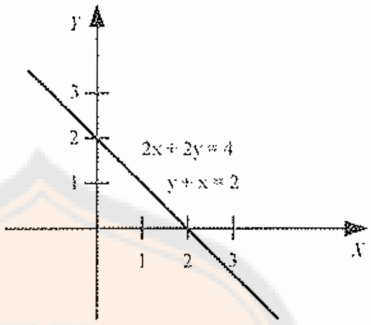
$(a)\ \begin{array}{l} y + x = 2 \\ y - x = 0 \end{array}$ $\quad (b)\ \begin{array}{l} y + x = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{array}$ $\quad (c)\ \begin{array}{l} y + x = 2 \\ y + x = 1 \end{array}$

grafik sistem persamaan linear a, b, c diberikan di bawah ini

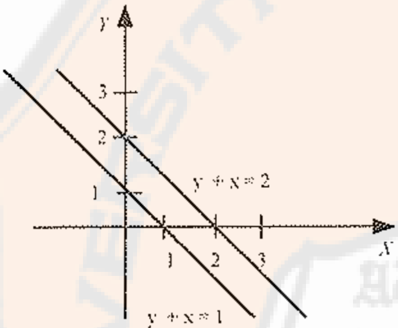
(a)



(b)



(c)



Pada grafik sistem persamaan linear (a) dua garis tersebut berpotongan pada satu titik (1,1) yang merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut dengan $x = 1$ dan $y = 1$, dengan demikian sistem persamaan linear tersebut konsisten. Grafik (b) kedua garisnya berhimpit jadi ada tak terhingga titik perpotongannya sehingga tak terhingga juga penyelesaiannya, sistem persamaan linear tersebut konsisten. Pada grafik (c) kedua garis tidak berpotongan, maka tidak ada penyelesaian pada sistem persamaan linear tersebut, berarti sistem persamaan linear tersebut tidak konsisten.

Definisi 2.1.3

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan real atau kompleks yang terdiri dari baris dan kolom.

Matriks dinyatakan dengan menggunakan huruf besar dan bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut elemen dari matriks yang dinyatakan dengan huruf kecil dan disebut skalar. Suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matrik berordo $m \times n$, dengan $m, n \in Z$, $m > 0$, $n > 0$.

Secara umum matriks A dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dinyatakan dengan a_{ij}, secara singkat matriks A dapat ditulis $A = (a_{ij})$. Sebuah matriks A_{mxn} yang terdiri dari satu baris disebut *matriks baris*, ditulis $A = (a_i)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan sebuah matriks A yang terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom*, ditulis $A = (a_j)$, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$. Sedangkan sebuah matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom sama disebut *matriks bujursangkar*.

Definisi 2.1.4

Matriks bujursangkar $A_{nxn} = (a_{ij})$ *disebut matriks segitiga atas jika* $a_{ij} = 0$, *untuk* $i > j$ *yang secara umum dinyatakan dengan*

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.5

Matriks bujursangkar $A_{nxn} = (a_{ij})$ disebut matriks segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$, untuk $i < j$ yang secara umum dinyatakan dengan

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1.2

Matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.6

Matriks bujursangkar $I = (e_{ij})_{nxn}$ disebut matriks identitas jika

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i = j \\ 0, \text{ untuk } i \neq j \end{cases}$$

matriks identitas berordo n×n dinyatakan sebagai $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ *dan dilambangkan dengan* I_n.

Sistem persamaan linear (2.1) dapat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Atau lebih singkat ditulis $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriks A adalah *matriks koefisien*. Jika pada matriks koefisien A kita tambahkan satu kolom tambahan yaitu elemen-elemen dari matrik b sebagai kolom terakhir, maka kita dapatkan matriks sebagai berikut:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

jika A berukuran $m \times n$, maka matriks lengkap berukuran $m \times (n+1)$.

Suatu sistem persamaan linear dapat dicari penyelesaiannya dengan menggunakan tiga operasi yang dikenakan pada baris-baris sistem persamaan linear tersebut, yaitu:

1. Menukar baris ke-i dan ke-j, yang dinotasikan dengan $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. Mengalikan baris ke-i dengan suatu konstanta c, $c \neq 0$, yang dinotasikan dengan cR_i.
3. Mengganti baris ke-i dengan baris ke-i ditambah c kali baris ke-j, yang dinotasikan dengan $R_i + cR_j$.

Tiga operasi di atas menghasilkan sistem persamaan linear baru yang mempunyai penyelesaian yang sama dengan sistem persamaan linear semula. Jadi ketiga operasi yang dikenakan baris-baris sistem persamaan linear tidak akan mengubah penyelesaian sistem persamaan linear itu. Karena koefisien-koefisien dan konstanta-konstanta dalam persamaan dari suatu sistem persamaan linear dapat dinyatakan sebagai matriks lengkap maka ketiga operasi yang dikenakan pada baris-baris sistem persamaan linear dapat dikenakan juga pada baris-baris matriks lengkapnya, operasi baris yang dikenakan pada matriks disebut *operasi baris elementer.*

Definisi 2.1.7

Operasi baris elementer pada suatu matriks adalah salah satu dari operasi berikut:

1. *Menukar baris ke-i dan ke-j dari matriks tersebut.*
2. *Mengalikan baris ke-i dari matriks tersebut dengan konstanta c, c* $\neq 0$.

3. *Mengganti baris ke-i dengan baris ke-i ditambah c kali baris ke-j dari matriks tersebut.*

Contoh berikut memberikan gambaran bagaimana memecahkan sistem persamaan linear pada sistem tersebut dan memecahkan sistem yang sama pada matriks lengkap.

Contoh 2.7

Pada kolom sebelah kiri, memecahkan sistem persamaan linear dengan mengoperasikannya pada persamaan dalam sistem tersebut, dan kolom sebelah kanan memecahkan sistem yang sama dengan mengoperasikannya pada baris matriks lengkap.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

tambah -2 kali persamaan pertama pada persamaan kedua untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

tambah -2 kali baris pertama pada baris kedua untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

tambah -3 kali persamaan pertama pada persamaan ketiga untuk mendapatkan

tambah -3 kali baris pertama pada baris ketiga untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{bmatrix}$$

kali persamaan kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan

kali baris kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{bmatrix}$$

tambah -3 kali persamaan kedua pada persamaan ketiga untuk mendapatkan

tambah -3 kali baris kedua pada baris ketiga untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2} z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

kali persamaan kedua dengan -2 untuk mendapatkan

kali baris kedua dengan -2 untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

tambah -1 kali persamaan kedua pada persamaan pertama untuk mendapatkan

tambah -1 kali baris kedua pada baris pertama untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & | & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

tambah $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga pada persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga pada persamaan kedua untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

tambah $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga pada persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga pada persamaan kedua untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Jadi pemecahan dari sistem persamaan linear dengan mengoperasikannya pada persamaan dalam sistem tersebut dan memecahkan sistem yang sama dengan mengoperasikannya pada baris matriks lengkap hasilnya sama yaitu $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Definisi 2.1.8

Matriks A dan B dikatakan ekivalen baris, jika salah satu dari kedua matriks tersebut dapat diperoleh menggunakan berhingga banyak operasi baris elementer pada matriks yang lain. Jika salah satu dari kedua matriks tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan berhingga banyak operasi baris dan kolom elementer pada matriks yang lain, maka A dan B dikatakan ekivalen, ditulis $A \sim B$.

Teorema 2.1.1

Jika matriks lengkap dari sistem persamaan linear merupakan dua matriks ekivalen baris, maka kedua sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian yang sama.

Bukti

Misalkan A dan B matriks lengkap dari dua sistem persamaan linear, dan $A \sim B$. Misalkan matriks B dapat diperoleh dengan melakukan berhingga banyak operasi baris elementer pada matriks A. Karena matriks A dan B terdiri dari koefisien–koefisien dari sistem persamaan linear tersebut, maka sistem persamaan linear yang berkaitan dengan matriks B dapat diperoleh dari sistem persamaan linear yang berkaitan dengan matriks A dengan melakukan operasi baris yang sama seperti operasi baris elementer yang dikenakan pada matriks A. Karena operasi baris yang dikenakan pada baris-baris sistem persamaan linear itu tidak mengubah penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut, maka kedua sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian yang sama.

Definisi 2.1.9

Suatu matriks dikatakan matriks eselon baris jika:

1. *Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu.*
2. *Elemen satu terdepan dalam baris yang lebih rendah terletak lebih jauh ke kanan dari satu terdepan dalam baris yang lebih tinggi.*

3. *Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.*

Contoh 2.1.5

Matriks-matriks berikut merupakan matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks berikut tidak merupakan matriks eselon baris:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks *(a)* tidak memenuhi syarat 1. Matriks *(b)* gagal memenuhi syarat 3. Matriks *(c)* tidak memenuhi syarat 2.

Elemen tak nol pertama dari suatu baris dalam matriks eselon baris disebut *elemen pivot*. Setelah diperoleh matriks eselon baris maka penyelesaian dari sistem persamaan linear dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan cara *substitusi balik*. Contoh berikut menjelaskan sistem persamaan linear dioperasikan menjadi bentuk matriks eselon baris lalu diselesaikan dengan substitusi balik.

Contoh 2.1.6

Sistem persamaan linear berikut akan diselesaikan dengan menggunakan matriks eselon baris

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

Matriks lengkap dari sistem persamaan linear di atas adalah

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{array}\right]
$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan baris keempat maka akan memberikan

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{array}\right]
$$

Dengan mengalikan baris kedua dengan -1 dan kemudian menambahkan -5 kali baris kedua ke baris ketiga dan -4 kali baris kedua ke baris keempat didapatkan

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2
\end{array}\right]
$$

dengan mempertukarkan baris ketiga dan baris keempat, kemudian mengalikan baris ketiga dari matriks yang dihasilkan dengan $\frac{1}{6}$ maka akan memberikan bentuk eselon baris

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matriks eselon baris tersebut jika dikembalikan ke dalam bentuk sistem persamaan menjadi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad\quad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Variabel-variabel x_1, x_3, x_6 yang bersesuaian dengan 1 terdepan dalam bentuk eselon baris tereduksi tersebut dinamakan *variabel tak bebas*. Sedangkan variabel lainnya adalah *variabel bebas*. Dari sistem persamaan linear di atas diperoleh $x_6 = \frac{1}{3}$, dengan mensubstitusikan $x_6 = \frac{1}{3}$ ke dalam persamaan kedua maka akan menghasilkan

$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$

$x_6 = \frac{1}{3}$.

Dengan mensubstitusi $x_3 = -2x_4$ ke dalam persamaan pertama maka akan menghasilkan

$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$

$x_6 = \frac{1}{3}$.

Misalkan ditetapkan nilai-nilai dari $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$ maka pemecahan dari sistem tersebut adalah

$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = \frac{1}{3}$, dengan $r, s, t \in R$

Definisi 2.1.10

Proses yang mentransformasikan suatu matriks ke bentuk eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer disebut ***Eliminasi Gauss****.*

Definisi 2.1.11

Suatu matriks dikatakan matriks eselon baris tereduksi jika:

1. *Matriks memiliki bentuk eselon baris*
2. *Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya Elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.*

Contoh 2.1.7

Matriks-matriks berikut merupakan matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.12

Proses yang mentransformasikan suatu matriks ke bentuk eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi baris elementer disebut ***Eliminasi Gauss Jordan.***

Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan dapat diketahui bahwa penyelesaian suatu sistem persamaan linear ada tiga kemungkinan yaitu mempunyai penyelesaian tunggal, mempunyai penyelesaian banyak, dan tak mempunyai penyelesaian. Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan matriks lengkap dari sistem persamaan linear (2.1) diubah menjadi matriks eselon baris tereduksi. Misalkan x_{j1}, x_{j2}, ... , x_{jr} merupakan variabel tak bebas, maka akan diperoleh sistem yang berkaitan dengan matriks eselon baris tereduksi tersebut yaitu

$$\begin{cases} x_{j1} \quad + \sum c_{1k}x_k = d_1 \\ \quad x_{j2} \quad + \sum c_{2k}x_k = d_2 \\ \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad x_{jr} + \sum c_{rk}x_k = d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_m \end{cases} \tag{2.2}$$

dengan $\sum$ menyatakan jumlah yang memuat variabel bebas. Banyak elemen pivot adalah r yaitu $r \le m$ dan $r \le n$. Dalam hal $r \le n$ berarti sistem mempunyai $n - r$ variabel bebas. Dengan demikian penyelesaian dari sistem persamaan linear mempunyai $n - r$ buah parameter. Jika $r = n$, $\sum$ pada persamaan (2.2) tidak ada dan sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $x_{j1} = d_1$, $x_{j2} = d_2$, ... , $x_{jn} = d_n$.

Contoh 2.1.8

Diketahui sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 + (a^2 - 4)x_3 &= 1 + a \end{aligned}$$

Akan dicari nilai a agar sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian tunggal, mempunyai penyelesaian banyak, tak mempunyai penyelesaian.

Matriks lengkap dari sistem persamaan linear di atas adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & 4 \\ 1 & -3 & (a^2-4) & 1+a \end{array}\right]$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan menambahkan -1 kali baris pertama pada baris ketiga.operasi tersebut dapat ditulis $-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ dan $-1R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & (a^2-7) & a \end{array}\right]$$

Dengan menambahkan 1 kali baris kedua pada baris ketiga, operasi tersebut dapat ditulis $1R_2 + R_3 \rightarrow R_3$ menghasilkan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a+2 \end{array}\right]$$

setelah dalam bentuk matriks eselon baris, sistem mempunyai penyelesaian tunggal jika $a^2 - 4 \neq 0$ yaitu $a \neq -2$ dan $a \neq 2$. Sistem mempunyai penyelesaian banyak jika $a^2 - 4 = 0$ dan $a + 2 = 0$ karena sistem di atas akan lebih banyak variabel dari pada persamaan. Sistem tak mempunyai penyelesaian jika $a^2 - 4 = 0$ dan $a + 2 \neq 0$ yang memberikan nilai $a = 2$.

Definisi 2.1.13

Sebuah sistem persamaan-persamaan linear dikatakan homogen jika konstanta pada ruas kanan semuanya sama dengan nol. Sistem persamaan linear homogen tersebut mempunyai bentuk umum:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

dengan a_{ij} konstanta-konstanta real untuk $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ dan $a_{ij} \neq 0$ *secara bersama-sama.*

Sistem persamaan linear homogen dapat ditulis dalam bentuk singkat yaitu:

$$AX = \vec{0} \text{ dengan } A = (a_{ij})_{m \times n}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix}, \text{dan } \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linear homogen selalu konsisten karena $x_1 = 0, x_2 = 0, x_n = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial (*trivial solution*), jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan tak trivial (*non trivial solution*). Dengan demikian sistem persamaan linear homogen hanya mempunyai dua kemungkinan yaitu mempunyai penyelesaian trivial dan mempunyai banyak penyelesaian.

Teorema 2.1.2

Suatu sistem persamaan linear homogen $m \times n$ mempunyai penyelesaian non trivial jika $m < n$.

Bukti

Ubah persamaan (2.3) menjadi bentuk matriks lengkap lalu ubah ke dalam bentuk matriks eselon baris tereduksi, akan diperoleh sistem (2.2) dengan $d_1 = d_2 = \ldots = d_m = 0$ dan banyak elemen pivot tak lebih dari m. Karena banyak persamaan lebih sedikit dari banyaknya variabel maka $r < n$. Berarti sistem mempunyai $n - r$ variabel bebas. Untuk variabel-variabel bebas ini dapat diterapkan nilai sebarang yang akan memberikan penyelesaian non trivial pada sistem tersebut.

Contoh 2.1.9

Diketahui sistem persamaan linear homogen sebagai berikut

$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$

$3x_1 - 2x_2 - 17x_3 + 16x_4 = 0$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$

Matriks lengkap dari sistem tersebut adalah

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -17 & 16 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

sistem persamaan linear tersebut mempunyai lebih sedikit persamaan (tiga) dibanding variabel (empat), maka pasti ada takhingga banyaknya solusi. Untuk memperoleh solusinya digunakan eliminasi Gauss Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -17 & 16 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3}]{\substack{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_2 \rightarrow R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 25 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \leftrightarrow R_2 \\ -R_2 + R_1 \rightarrow R_1}]{\substack{-R_3 \rightarrow R_3 \\ R_2 + 5R_3 \rightarrow R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Setelah diubah kembali ke bentuk persamaan menjadi

$x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0$ $x_1 = 3x_3 - 2x_4$

atau

$x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0$ $x_2 = -4x_3 + 5x_4$

dan penyelesaiannya diperoleh dengan memberikan sembarang nilai kepada x_3 dan x_4. Jika kita ambil $x_3 = c_1$ dan $x_4 = c_2$, maka kita peroleh penyelesaiannya adalah:

$x_1 = 3c_1 - 2c_2$, $x_2 = -4c_1 + 5c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

BAB III

METODE LANGSUNG UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

3.1 Metode Eliminasi Gauss

Seperti telah dibahas dalam bab sebelumnya untuk menyelesaikan sistem $Ax = b$ dengan A berordo $n \times n$, dapat dilakukan dengan mengubah sistem persamaan linear ke sistem yang ekuivalen yaitu $Ux = g$, dengan U adalah matriks eselon baris dari matriks A yang juga merupakan matriks segitiga atas. Sistem persamaan linear tersebut akan lebih mudah diselesaikan dengan proses subtitusi balik.

Metode eliminasi Gauss dianggap metode penghitungan yang paling efisien untuk menghitung sistem persamaan linear karena metode ini hanya melibatkan operasi aritmatika dalam jumlah sedikit. Algoritma eliminasi Gauss hanya menggunakan operasi baris elementer yang ke-3, sehingga tidak dapat untuk menghindari pembagian dengan nol yang mengakibatkan algoritma tidak dapat berjalan jika dalam sistem persamaan linear terdapat elemen pivot yang bernilai nol sehingga mengakibatkan terjadinya pembagian dengan nol.

Algoritma Metode Eliminasi Gauss

Diberikan sistem persamaan linear $A^{(1)}x = b^{(1)}$ dengan:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & & & & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{k1}^{(1)} & \cdots & & a_{kk}^{(1)} & \cdots & a_{kn}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & & a_{nk}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \; a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(1)} \neq 0.$$

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Notasi $A^{(1)}$ menyatakan sistem persamaan linear asli, sedangkan $A^{(k)}$ menyatakan sistem persamaan linear pada langkah ke-(k-1). Notasi $a_{11}^{(1)}$ menyatakan elemen a_{11} belum mengalami operasi baris elementer, sedangkan $a_{nn}^{(k)}$ menyatakan elemen a_{nn} mengalami operasi baris elementer sebanyak (k-1).

Langkah ke-1

Ambil $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Definisikan perkalian baris dengan

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

kalikan m_{i1} dengan elemen pada baris pertama dan tambahkan dengan baris kedua sampai n. Digunakan untuk mengeliminasi x_1 dari persamaan 2 sampai n, didefinisikan:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} \qquad i = 2,\ldots,n, \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + m_{i1}b_1^{(1)} \qquad i = 2,\ldots,n$$

baris pertama dari sistem $A^{(1)}x = b^{(1)}$ tidak berubah, dan kolom pertama dari $A^{(1)}$, di bawah elemen diagonal dibuat nol. Sistem $A^{(2)}x = b^{(2)}$ seperti di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Langkah ke-2

Ambil $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Definisikan perkalian baris dengan

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \qquad i = 3,\ldots,n$$

kalikan m_{i2} dengan elemen pada baris kedua dan tambahkan dengan baris ketiga sampai n, digunakan untuk mengeliminasi x_2 dari persamaan 3 sampai n. didefinisikan:

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} + m_{i1}a_{2j}^{(2)} \qquad j = 2,\ldots,n\,, \quad i = 3,\ldots,n$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} + m_{i1}b_2^{(2)} \qquad i = 2,\ldots,n$$

baris pertama dan kedua dari sistem $A^{(2)}x = b^{(2)}$ tidak berubah, dan kolom kedua dari $A^{(2)}$, di bawah elemen diagonal dibuat nol. Sistem $A^{(3)}x = b^{(3)}$ seperti di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

dilanjutkan mengeliminasi bilangan yang tidak diketahui pada kolom 3, 4 dan seterusnya di bawah elemen diagonal sampai langkah ke-k dibawah ini.

Langkah ke-k

Misalkan $1 \le k \le n-1$. Anggap $A^{(k)}x = b^{(k)}$ dengan $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ dieliminasi secara bergantian.

ambil $a_{kk}^{(k)} \ne 0$ didefinisikan pengali dengan

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad i = k+1, \ldots, n$$

kalikan m_{ik} dengan elemen pada baris k dan tambahkan dengan baris k+1 sampai n, gunakan m_{ik} untuk menghilangkan variabel x_k dari persamaan k+1 sampai n. Didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)} \qquad i, j = k+1, \ldots, n$$

baris ke-1 sampai baris ke-k tidak berubah, dan kolom k sampai elemen diagonal dieliminasi menjadi nol. Bentuk $A^{(k)}$ menjadi:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & & & a_{2n}^{2} \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k+1)} & \cdots & a_{kn}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

Dilanjutkan langkah berikutnya, dari langkah n-1 diperoleh $A^{(n)}x = b^{(n)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

misalkan $U = A^{(n)}$ dan $g_n = b^{(n)}$ adalah matriks segitiga atas, akan mudah untuk diselesaikan dengan subtitusi balik untuk mendapatkan x, dinyatakan sebagai berikut:

$$x_n = \frac{g_n}{u_{nn}} \qquad \text{dan} \qquad x_k = \frac{1}{u_{kk}}\left(g_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right) \qquad k = n\text{-}1, n\text{-}2, \dots, 1.$$

Contoh 3.1.1

Perhatikan sistem persamaan linear berikut

$-1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + x_4 = 2$

$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$

$3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5$

$x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 6$

dari sistem persamaan tersebut diperoleh:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkap dari sistem persaman linear tersebut adalah:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Langkah ke-1

dengan menentukan $m_{21} = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -2$, kalikan dengan baris pertama lalu tambahkan dengan baris kedua. $m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{3}{-1} = 3$ kalikan dengan baris pertama, tambahkan dengan baris ketiga. $m_{41} = -\dfrac{a_{41}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{-1}$ kalikan dengan baris pertama, tambahkan dengan baris keempat didapatkan matriks sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Langkah ke-2

dengan menambahkan $m_{32} = -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} = -\dfrac{6}{-2} = 3$ kali baris kedua pada baris ketiga dan kemudian menambahkan $m_{42} = -\dfrac{a_{42}}{a_{22}} = -\dfrac{6}{-2} = 3$ kali baris kedua pada baris keempat, didapatkan matriks:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Langkah ke-3

dengan menambahkan $m_{43} = -\dfrac{a_{43}}{a_{33}} = -\frac{17}{17} = -1$ kali baris ketiga pada baris keempat, maka didapatkan matriks segitiga atas sebagai berikut:

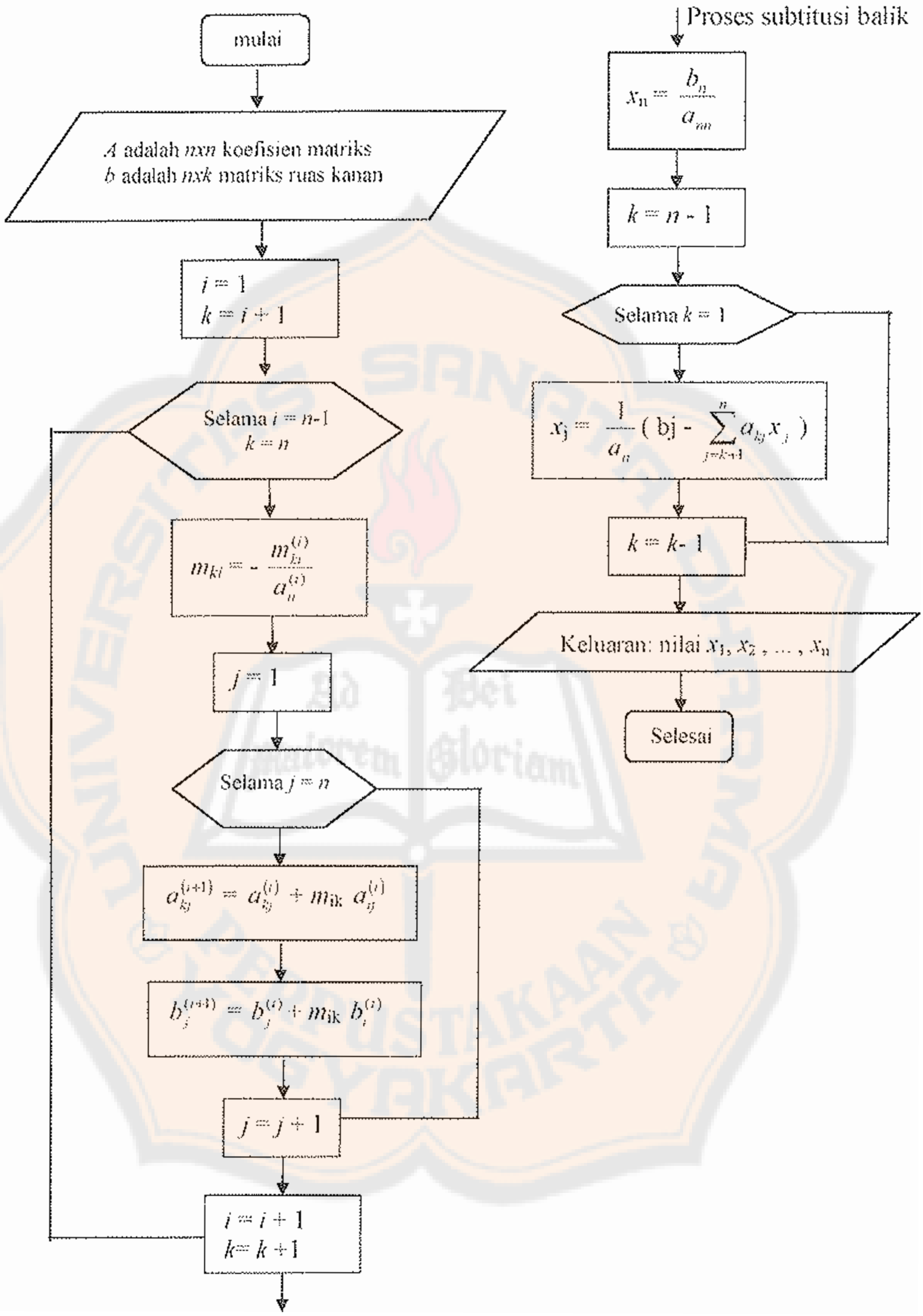
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + -x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_2 + 6x_3 + -x_4 &= 0 \\ 17x_3 + 2x_4 &= 11 \\ -2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_4 = \frac{3}{2}$ ke dalam persamaan ketiga akan diperoleh $17x_3 + 2(\frac{3}{2}) = 11$ didapatkan $x_3 = \frac{8}{17}$, substitusikan kembali x_3, x_4 pada persamaan kedua akan diperoleh $-2x_2 + 6(\frac{8}{17}) + -\frac{3}{2} = 0$ didapatkan $x_2 = \frac{45}{68}$, substitusikan kembali x_4, x_3, x_2 pada persamaan pertama akan diperoleh $-x_1 + 2(\frac{45}{68}) + -\frac{8}{17} + \frac{3}{2} = 2$ didapatkan $x_1 = \frac{6}{17}$, secara berturut-turut diperoleh $x_1 = \frac{6}{17}$, $x_2 = \frac{45}{68}$, $x_3 = \frac{8}{17}$, $x_4 = \frac{3}{2}$.

Metode eliminasi Gauss jika dinyatakan dengan *flow chart* sebagai berikut:


mulai
A adalah mxn koefisien matriks
b adalah nxk matriks ruas kanan
i = 1
k = i + 1
Selama i = n-1
k = n
$m_{ki} = -\frac{m_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$
j = 1
Selama j = n
$a_{kj}^{(i+1)} = a_{kj}^{(i)} + m_{ik}\, a_{ij}^{(i)}$
$b_j^{(i+1)} = b_j^{(i)} + m_{ik}\, b_i^{(i)}$
j = j + 1
i = i + 1
k = k + 1
Proses subtitusi balik
$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
k = n - 1
Selama k = 1
$x_j = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_j - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j\right)$
k = k - 1
Keluaran: nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Selesai

Flow chart tersebut jika diubah dalam program matlab, ditulis dalam *M-File* dan dipanggil di *Command Windows* dengan nama fungsi Gauss (A,b). *A* dan *b* adalah masukan yang akan diolah dengan program tersebut, di mana *A* adalah matriks koefisien dan *b* adalah matrik ruas kanan. Berikut ini adalah program eliminasi Gauss dengan matlab.

```
function x = Gauss(A,b)
% Untuk menyelesaikan Ax = b Menggunakan eliminasi gauss
% masukan:
%      A adalah n kali n koefisien matriks
%      b adalah n kali k matriks ruas kanan
% hasil:
% x adalah n kali k penyelesaian matriks
[n,k1]=size(A); [n1,k]=size(b);  x=zeros(n,k);
for i = 1 : n-1
      m = -A(i+1:n,i)/A(i,i);
      A(i+1:n,:) = A(i+1:n,:) + m*A(i,:);
      b(i+1:n,:) = b(i+1:n,:) + m*b(i,:);
end;
x(n,:) = b(n,:) ./ A(n,n);
for i = n-1 :-1 :1
   x(i,:) = (b(i,:)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n,:)) ./ A(i,i);
end
```

Contoh 3.1.2

Sistem persamaan linear berikut akan diselesaikan menggunakan program metode eliminasi Gauss dengan matlab

$$\begin{aligned}
20x_1+11x_2+12x_3+9x_4+15x_5+16x_6+17x_7+18x_8+27x_9+25x_{10}+19x_{11} &= 200\\
6x_1+25x_2+7x_3+8x_4+9x_5+13x_6+14x_7+20x_8+27x_9+28x_{10}+31x_{11} &= 180\\
14x_1+26x_2+21x_3+23x_4+5x_5+15x_6+17x_7+18x_8+20x_9+21x_{10}+25x_{11} &= 400\\
11x_1+6x_2+40x_3+16x_4+7x_5+21x_6+21x_7+31x_8+6x_9+31x_{10}+39x_{11} &= 350\\
13x_1+7x_2+31x_3+34x_4+8x_5+22x_6+13x_7+32x_8+7x_9+35x_{10}+19x_{11} &= 160\\
14x_1+13x_2+33x_3+31x_4+14x_5+24x_6+14x_7+35x_8+15x_9+37x_{10}+13x_{11} &= 500\\
20x_1+15x_2+34x_3+21x_4+15x_5+7x_6+15x_7+39x_8+5x_9+36x_{10}+11x_{11} &= 300\\
22x_1+16x_2+24x_3+11x_4+17x_5+8x_6+17x_7+36x_8+6x_9+16x_{10}+12x_{11} &= 350\\
7x_1+16x_2+24x_3+11x_4+17x_5+8x_6+17x_7+36x_8+6x_9+16x_{10}+23x_{11} &= 300\\
27x_1+17x_2+19x_3+8x_4+19x_5+10x_6+18x_7+35x_8+3x_9+17x_{10}+34x_{11} &= 200\\
9x_1+18x_2+25x_3+5x_4+16x_5+11x_6+21x_7+25x_8+9x_9+16x_{10}+17x_{11} &= 300
\end{aligned}$$

Matriks lengkap untuk sistem persamaan linear tersebut

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc|c}
20 & 11 & 12 & 9 & 15 & 16 & 17 & 18 & 27 & 25 & 19 & 200\\
6 & 25 & 7 & 8 & 9 & 13 & 14 & 20 & 27 & 28 & 31 & 180\\
14 & 26 & 21 & 23 & 5 & 15 & 17 & 8 & 20 & 21 & 25 & 400\\
11 & 6 & 40 & 16 & 7 & 21 & 21 & 31 & 6 & 31 & 39 & 350\\
13 & 7 & 31 & 34 & 8 & 22 & 13 & 32 & 7 & 35 & 19 & 160\\
14 & 13 & 33 & 31 & 14 & 24 & 14 & 35 & 15 & 37 & 13 & 500\\
20 & 15 & 34 & 21 & 15 & 7 & 15 & 39 & 5 & 36 & 11 & 300\\
22 & 16 & 24 & 11 & 17 & 8 & 17 & 36 & 6 & 16 & 12 & 350\\
7 & 16 & 24 & 11 & 17 & 8 & 17 & 36 & 6 & 16 & 23 & 300\\
27 & 17 & 19 & 8 & 19 & 10 & 18 & 35 & 3 & 17 & 34 & 200\\
9 & 18 & 25 & 5 & 16 & 11 & 21 & 25 & 9 & 16 & 17 & 300
\end{array}\right]$$

pada *command windows*, diketik matriks A dan b lalu diketik nama fungsi Gauss(A,b), digunakan untuk mengolah sistem $Ax = b$ sehingga nilai x akan ditemukan. Dinyatakan sebagai berikut:

```
» A=[20    11   12    9    15    16    17  18    27    25   19
      6    25    7    8     9    13    14   20   27    28   31
     14    26   21   23     5    15    17   8    20    21   25
     11    6    40   16     7    21    21   31    6    31   39
     13    7    31   34     8    22    13   32    7    35   19
     14    13   33   31    14    24    14   35   15    37   13
     20    15   34   21    15     7    15   39    5    36   11
     22    16   24   11    17     8    17   36    6    16   12
      7    16   24   11    17     8    17   36    6    16   23
     27    17   19    8    19    10    18   35    3    17   34
      9    18   25    5    16    11    21   25    9    16   17]

» b = [200;180;400;350;160;500;300;350;300;200;300]
b =
    200
    180
    400
    350
    160
    500
    300
    350
    300
    200
    300

» Gauss(A,b)

ans =
     5.5549
    13.5017
    39.1397
   -11.1467
    10.1272
     9.5991
   -53.7119
    -0.5546
    21.3735
   -17.8411
     3.0295
```

jadi diperoleh

$x_1 =$ 5,5549 $x_4 =$ -11,1467 $x_7 =$ -53,7119 $x_{10} =$ -17,8411

$x_2 =$ 13,5017 $x_5 =$ 10,1272 $x_8 =$ -0,5546 $x_{11} =$ 3,0295

$x_3 =$ 39,1397 $x_6 =$ 9,5991 $x_9 =$ 21,3735

3.2 Metode Row Pivoting

Kelemahan dari metode eliminasi Gauss adalah jika elemen diagonalnya sama dengan nol pada persamaan tersebut atau ditemukan pada saat proses eliminasi maka akan terjadi pembagian dengan nol sehingga metode eliminasi Gauss tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut. Untuk menghindari kelemahan dari metode eliminasi Gauss digunakanlah metode row pivoting yang merupakan penyempurnaan dari metode eliminasi Gauss. Sistem persamaan linear yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss dapat diselesaikan dengan metode row pivoting, sedangkan sistem persamaan linear yang dapat diselesaikan dengan metode row pivoting belum tentu dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss.

Algoritma metode row pivoting berikut berdasarkan metode eliminasi Gauss, dengan cara mencari elemen terbesar yang terletak dalam kolom, pada atau di bawah elemen diagonal yang akan dijadikan sebagai elemen pivot.

Algoritma Metode Row Pivoting

Diberikan sistem persamaan linear $A^{(1)}x = b^{(1)}$ dengan

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & & & & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{k1}^{(1)} & \cdots & & a_{kk}^{(1)} & \cdots & a_{kn}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & & a_{nk}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Langkah ke-1

Andaikan $a_{11}^{(1)}$ sebagai elemen pivot belum ditentukan nilainya, akan dicari c_1 yang merupakan nilai terbesar pada kolom pertama, dirumuskan:

$$c_1 = Max\left| a_{i1}^{(1)} \right| \qquad i = 1, \ldots, n$$

setelah didapatkan c_1 tukar baris yang memuat c_1 dengan baris pertama, jika c_1 terletak pada baris pertama berarti tidak terjadi pertukaran baris. Diteruskan dengan langkah ke-1 metode eliminasi Gauss. Semua pengali akan memenuhi

$$\left| m_{i1} \right| \leq 1 \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

untuk menghindari kesalahan pembulatan yang semakin besar.

Langkah ke-2

Andaikan $a_{22}^{(2)}$ sebagai elemen pivot belum ditentukan nilainya, akan dicari c_2 yang merupakan nilai terbesar pada kolom kedua kecuali elemen yang terletak di atas elemen diagonal, dirumuskan:

$$c_2 = Max\left| a_{i2}^{(2)} \right| \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

setelah didapatkan c_2 tukar baris yang memuat c_2 dengan baris kedua, jika c_2 terletak pada baris kedua berarti tidak terjadi pertukaran baris. Diteruskan dengan langkah ke-2 metode eliminasi Gauss. Semua pengali akan memenuhi

$$\left| m_{i2} \right| \leq 1 \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

untuk menghindari kesalahan pembulatan yang semakin besar.

Langkah ke-k

Andaikan $a_{kk}^{(k)}$ sebagai elemen pivot belum ditentukan nilainya, akan dicari c_k yang merupakan nilai terbesar pada kolom k kecuali elemen yang terletak di atas elemen diagonal, dirumuskan:

$$c_k = \underset{k \le i \le n}{Max} \left| a_{ik}^{k} \right|$$

setelah didapatkan c_k tukar baris yang memuat c_k dengan baris k, jika c_k terletak pada baris k berarti tidak terjadi pertukaran baris. Diteruskan dengan langkah ke-k metode eliminasi Gauss. Semua pengali akan memenuhi

$$\left| m_{ik} \right| \le 1 \qquad\qquad i = k+1,\ldots,n$$

untuk menghindari kesalahan pembulatan yang semakin besar.

Contoh 3.2.1

Sistem persamaan linear berikut akan diselesaikan menggunakan metode row pivoting

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dari sistem persamaan tersebut diperoleh:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkap dari sistem persaman linear tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & -1 & | & -3 \\ -2 & 3 & -3 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah ke-1

Andaikan a_{11} sebagai elemen pivot belum ditentukan nilainya, dicari $c_1 = Max\left| a_{i1}^{(1)} \right| = 4$ yang akan diletakkan pada a_{11}. c_1 terletak pada baris kedua maka ditukar baris kedua dengan baris pertama menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 \\ -2 & 3 & -3 & | & 5 \end{bmatrix}$$

dengan menentukan $m_{31} = \frac{2}{4} < 1$ kalikan dengan baris pertama lalu tambahkan dengan baris ketiga, kita dapatkan matriks:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & | & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Langkah ke-2

Andaikan a_{22} sebagai elemen pivot belum ditentukan nilainya, dicari $c_2 = Max\left| a_{i2}^{(2)} \right| = \frac{7}{2}$ yang akan diletakkan pada a_{22}. c_2 terletak pada baris ketiga maka ditukar baris ketiga dengan baris kedua menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & | & \frac{7}{2} \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

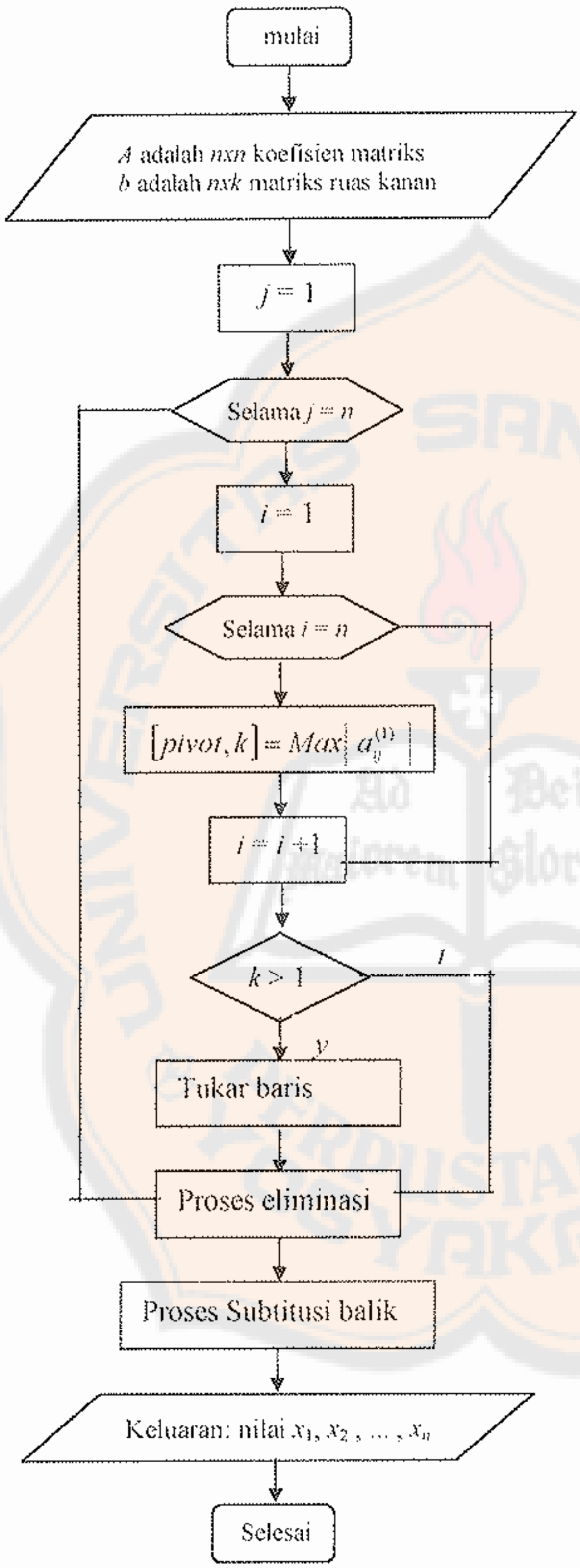
$m_{32} = -\frac{4}{7} < 1$ kalikan dengan baris kedua lalu tambahkan dengan baris ketiga menghasilkan matriks:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

dengan menggunakan substitusi terbalik menghasilkan:

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Metode row pivoting jika dinyatakan dengan *flow chart* sebagai berikut


mulai
A adalah nxn koefisien matriks
b adalah nxk matriks ruas kanan
j = 1
Selama j = n
i = 1
Selama i = n
[pivot, k] = Max| $a_{ij}^{(1)}$ |
i = i + 1
k > 1
t
y
Tukar baris
Proses eliminasi
Proses Subtitusi balik
Keluaran: nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Selesai

Algoritma metode row pivoting diterapkan dalam program matlab sebagai berikut:

```
function x = Gauss_pivot(A,b)
% fungsi x = Gauss_pivot(A,b)
% Penyelesaian sistem persamaan linear Ax = b
% menggunakan eliminasi Gauss dengan row pivoting
% masukan:
%  A adalah n x n koefisien matriks
%  b adalah n x 1 vektor ruas kanan
% keluaran
%  x adalah vektor n x 1
[n,n1]=size(A);
for i = 1:n-1
   [pivot,k]=max(abs(A(i:n,i)));
   % k adalah pivot posisi, relatif terhadap baris i
      if k > 1
      temp1 = A(i,:);       temp2 = b(i,:);
      A(i,:)=A(i+k-1,:);    b(i,:) = b(i+k-1,:);
      A(i+k-1,:) = temp1;   b(i+k-1,:) = temp2;
   end
   for h = i+1 :n
      m = A(h,i)/A(i,i);
      A(h,:) = A(h,:)-m*A(i,:);
      b(h,:) = b(h,:)-m*b(i,:);
   end;
end;
% substitusi terbalik
x(n,:)=b(n,:)./A(n,n);
for i = n-1 :-1:1
```

```
    x(i,:)=(b(i,:)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n))./A(i,i);
end
```

Contoh 3.2.3

Diberikan sistem persamaan linear berikut

$$
\begin{array}{l}
-4x_3 + 5x_4 - 4x_5 - 10x_6 + \quad + 12x_8 + 13x_9 + 2x_{10} + x_{11} + 7x_{12} = 108 \\
4x_1 + \quad - 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 - 5x_7 - 10x_8 + 9x_9 + 5x_{10} + 9x_{11} + 8x_{12} = 17 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 + 4x_6 + 8x_7 - x_8 + 10x_9 + 6x_{10} + 7x_{11} + 3x_{12} = -39 \\
x_1 + \quad x_3 + \quad - 5x_5 - 7x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 19x_9 + 12x_{10} + 4x_{11} + 9x_{12} = 68 \\
x_1 + \quad 9x_3 + 8x_4 + 5x_5 - 3x_6 + 5x_7 + 2x_8 + x_9 + 12x_{10} + 6x_{11} + 8x_{12} = -87 \\
2x_1 - 9x_2 - x_3 + 8x_4 + 5x_5 + \quad + x_7 + \quad + 4x_{10} + 18x_{11} + 7x_{12} = 43 \\
3x_1 + x_2 + \quad -2x_4 - x_5 + 5x_6 + \quad + x_8 + 10x_9 + 18x_{10} + 12x_{11} + 5x_{12} = -57 \\
4x_1 + \quad - 6x_3 - 5x_4 + 6x_5 + x_6 + \quad + x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} + 9x_{12} = 62 \\
-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 - 7x_6 + 10x_7 + \quad + 12x_9 + 4x_{10} + 16x_{11} + 7x_{12} = -15 \\
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 + \quad + 12x_8 + 2x_9 + 6x_{10} + 4x_{11} + 12x_{12} = 6 \\
-7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 9x_4 + 1x_5 + \quad + 6x_7 + 8x_8 + 2x_9 + 14x_{10} + 5x_{11} + 8x_{12} = -48 \\
3x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 1x_4 + 3x_5 + 8x_6 - 10x_7 + \quad + 7x_{11} + 8x_{12} = -27
\end{array}
$$

Matriks lengkap untuk sistem tersebut adalah:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & 0 & -4 & 5 & -4 & -10 & 0 & 12 & 13 & 2 & 1 & 7 & 108 \\
4 & 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & -5 & -10 & 9 & 5 & 9 & 8 & 17 \\
3 & 2 & 1 & 4 & -3 & 4 & 8 & -1 & 10 & 6 & 7 & 3 & -39 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -5 & -7 & 7 & 8 & 19 & 12 & 4 & 9 & 68 \\
1 & 0 & 9 & 8 & 5 & -3 & 5 & 2 & 1 & 12 & 6 & 8 & -87 \\
2 & -9 & -1 & 8 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 18 & 7 & 43 \\
3 & 1 & 0 & -2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 10 & 18 & 12 & 5 & -57 \\
4 & 0 & -6 & -5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 9 & 62 \\
-3 & -4 & -2 & -1 & 4 & -7 & 10 & 0 & 12 & 4 & 16 & 7 & -15 \\
8 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 12 & 2 & 4 & 4 & 12 & 6 \\
-7 & -5 & -9 & 9 & 1 & 0 & 6 & 8 & 2 & 5 & 5 & 8 & -48 \\
3 & 6 & -8 & -1 & 3 & 8 & -10 & 0 & 0 & 7 & 7 & 8 & -27
\end{array}\right]$$

Sebagai masukkan pada command windows diketik matriks *A* dan *b* lalu diketik nama fungsi Gauss_pivot (A,b) jika menggunakan metode row pivoting, nama fungsi Gauss(A,b) jika menggunakan metode eliminasi. Dinyatakan sebagai berikut:

```
» A =   [ 6    25    7    8     9    13    14   20   27    28   31
         14    26   21   23     5    15    17    8   20    21   25
         11     6   40   16     7    21    21   31    6    31   39
         13     7   31   34     8    22    13   32    7    35   19
         14    13   33   31    14    24    14   35   15    37   13
         20    15   34   21    15     7    15   39    5    36   11
         22    16   24   11    17     8    17   36    6    16   12
          7    16   24   11    17     8    17   36    6    16   23
         27    17   19    8    19    10    18   35    3    17   34
          9    18   25    5    16    11    21  25     9    16   17]

»B=[108;17; -39;68;-87;43;-57;62;-15;6;-48;-27]
B =
   108
    17
   -39
    68
   -87
    43
   -57
    62
   -15
     6
   -48
   -27
```

```
» Gauss_pivot(A,b)
x =
   23.4388
   12.0538
  -18.9481
   -9.5446
  -63.5230
  -40.1732
   13.3208
  -12.3785
  -44.6266
    7.8890
   17.5140
   17.0717
```

Jadi nilai x adalah sebagai berikut:

x_1 = 23,4388	x_4 = -9,5446	x_7 = 13,3208	x_{10} = 7,8890
x_2 = 12,0538	x_5 = -63,5230	x_8 = -12,3785	x_{11} = 17,5140
x_3 = -18,9481	x_6 = -40,1732	x_9 = -44,6266	x_{12} = 17,0717

Jika menggunakan metode eliminasi Gauss hasilnya sebagai berikut:

```
» Gauss(A,b)
Warning: Divide by zero.
> In C:\MATLABR11\work\Gauss.m at line 10
Warning: Divide by zero.
> In C:\MATLABR11\work\Gauss.m at line 16

ans =

   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
```

Jadi sistem persamaan linear di atas tidak dapat diselesaikan mengunakan metode eliminasi Gauss karena terjadi pembagian dengan nol yang ditunjukkan dengan peringatan *Divide by zero.*

Dalam matlab ketepatan dalam operasi aritmatik kurang lebih sekitar 16 digit, jadi jika dalam suatu sistem persamaan linear elemen-elemennya menggunakan kurang dari 16 digit galat numeriknya tidak akan tampak.

Contoh 3.2.4

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = 0$$

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 = 0$$

dikerjakan dengan matlab hasilnya

```
A=[1 1/2 1/3;1/2 1/3 1/4;1/3 1/4 1/5]
A =
    1.0000    0.5000    0.3333

    0.5000    0.3333    0.2500

    0.3333    0.2500    0.2000


» b=[1;0;0]
b =
     1
     0
     0

» Gauss(A,b)
ans =
    9.0000
  -36.0000
   30.0000
```

Didapat $x_1 = 9$; $x_2 = -36$; $x_3 = 30$, sesuai jika dikerjakan secara manual. Jika sistem persamaan linear di atas diubah ke dalam bentuk desimal dan dibatasi dalam 2 digit menghasilkan

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,33\,x_3 \qquad = 1$$

$0{,}5x_1 + 0{,}33\,x_2 + 0{,}25\,x_3 = 0$

$0{,}33x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}20x_3 = 0$

dikerjakan dengan matlab hasilnya

```
A=[1 0.5 0.33;0.5 0.33 0.25;0.33 0.25 0.20]
A =
    1.0000    0.5000    0.3300
    0.5000    0.3300    0.2500
    0.3300    0.2500    0.2000

» b=[1;0;0]
b =
     1
     0
     0

» Gauss(A,b)
ans =
   55.5556
 -277.7778
  255.5556
```

jawaban dari sistem persamaan tersebut sangat berbeda yaitu $x_1 = 55{,}55$, $x_2 = -277{,}778$, $x_3 = 255{,}556$. Hal tersebut terjadi karena digunakan angka desimal yang sedikit jika digunakan angka desimal yang banyak maka kesalahan pada hasilnya akan berkurang.

Dalam sistem persamaan linear ada keadaan yang disebut sistem kondisi baik dan sistem kondisi buruk. Sistem kondisi baik adalah sistem di mana perubahan kecil pada satu atau beberapa koefisien menghasilkan perubahan kecil yang serupa pada penyelesaiannya. Sistem kondisi buruk adalah sistem di mana perubahan kecil pada koefisien menghasilkan perubahan besar pada penyelesaian.

Contoh 3.2.5

Diberikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1{,}1x_1 + 2x_2 &= 10{,}4 \end{aligned}$$

dikerjakan dengan matlab hasilnya

```
A=[1 2;1.1 2]
A =
     1.0000     2.0000
     1.1000     2.0000

» b=[10; 10.4]
b =
    10.0000
    10.4000

» Gauss(A,b)
ans =
     4.0000
     3.0000
```

didapatkan nilai $x_1 = 4$ dan $x_2 = 3$. Dengan sedikit perubahan koefisien a_{21} dari 1,1 menjadi 1,05 sistem persamaan linearnya menjadi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1{,}05x_1 + 2x_2 &= 10{,}4 \end{aligned}$$

dikerjakan dengan matlab hasilnya

```
A=[1 2;1.05 2]
A =
     1.0000     2.0000
     1.0500     2.0000

» b=[10; 10.4]
b =
    10.0000
    10.4000

» Gauss(A,b)
ans =
     8.0000
     1.0000
```

didapatkan nilai $x_1 = 8$ dan $x_2 = 1$ hasil tersebut berbeda sekali dengan jawaban sistem di atas padahal hanya berbeda 0,05. Sistem persamaan linear di atas merupakan sistem dengan kondisi buruk, persamaan-persamaan tersebut jika digambar grafiknya ada bagian yang berhimpit sehingga sukar untuk melihat tepatnya garis-garis tersebut berpotongan.

3.3 Metode Thomas

Metode ini memanfaatkan bentuk khusus dari matriks A, algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berdasarkan metode eliminasi Gauss. Kemudahan menggunakan metode ini adalah menggunakan keuntungan dari elemen nol dan menghindari penggunaan operasi aritmatik yang tidak perlu atau mempermudah pengerjaan sistem persamaan linear.

Algoritma Metode Thomas

Sistem persamaan tridiagonal umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
d_1 x_1 + a_1 x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= r_1,\\
b_2 x_1 + d_2 x_2 + a_2 x_3 \qquad\qquad &= r_2,\\
\ddots \qquad\qquad\qquad &\\
+ b_{n-1}x_{n-2} + d_{n-1}x_{n-1} + a_{n-1} x_n &= r_{n-1},\\
+ b_n x_{n-1} + d_n x_n &= r_n,
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linear di atas jika ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix} [x_i] = [r_i]$$

atau lebih singkat ditulis $Tx = r$, di mana T adalah matriks tridiagonal. Vektor d adalah elemen diagonal, vektor a elemen di atas diagonal tersebut, dan vektor b elemen di bawah diagonal. Elemen b_1 dan a_n adalah nol. Sisi bagian kanan adalah vektor r.

Matriks lengkap dari sistem tridiagonal jika diselesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n & r_n \end{array}\right] \frac{1}{d_1} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
\left[\frac{d_1}{d_1}\right] & \left[\frac{a_1}{d_1}\right] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \left[\frac{r_1}{d_1}\right] \\
b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & r_2 \\
0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & r_3 \\
0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & r_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} & & r_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n & & r_n
\end{array}\right] R_2 - b_2 R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & \left[\frac{a_1}{d_1}\right] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{r_1}{d_1}\right] \\
0 & \left[d_2 - \frac{a_1}{d_1} b_2\right] & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \left[r_2 - \frac{r_1}{d_1} b_2\right] \\
0 & b_3 & d'_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r'_3 \\
0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} & r_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n & r_n
\end{array}\right] \frac{1}{\left[d_2 - \frac{a_1}{d_1} b_2\right]} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & \left[\frac{a_1}{d_1}\right] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{r_1}{d_1}\right] \\
0 & 1 & \frac{a_2}{\left[d_2 - \frac{a_1}{d_1} b_2\right]} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{\left[r_2 - \frac{r_1}{d_1} b_2\right]}{\left[d_2 - \frac{a_1}{d_1} b_2\right]} \\
0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_3 \\
0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} & r_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n & r_n
\end{array}\right]$$

Prosedur ini diulang sampai b_n dieliminasi dari baris n, menjadi seperti matriks di bawah ini:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & a'_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r'_1 \\ 0 & 1 & a'_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r'_2 \\ 0 & 0 & 1 & a'_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a'_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r'_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{n-1} & r'_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & r'_n \end{array}\right]$$

Baris pertama matriks T berubah. Semua elemen b dikurangi menjadi tepat nol. Karena elemen d dibagi dengan dirinya sendiri sehingga sama dengan 1 maka tidak memerlukan perhitungan, sebagai akibatnya yang membutuhkan perhitungan kembali dalam matriks T adalah elemen a. Elemen vektor r tentu saja harus dihitung kembali, setelah itu dapat kita lakukan substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari x.

Penyederhanaan cara di atas dengan mencari langsung elemen-elemen yang berubah yaitu elemen a dan elemen r dikenal dengan nama metode Thomas.

Langkah ke-1

Untuk persamaan pertama, memperoleh elemen baru a dan r

$$a'_1 = \frac{a_1}{d_1} \quad , \quad r'_1 = \frac{r_1}{d_1}$$

Langkah ke-2

untuk tiap persamaan $i = 2, \ldots, n$-1

$$a'_i = \frac{a_i}{d_i - b_i a'_{i-1}} \quad , \quad r'_i = \frac{r_i - b_i r'_{i-1}}{d_i - b_i a'_{i-1}}$$

Langkah ke-3

untuk persamaan terakhir

$$r_n' = \frac{r_n - b_n r_{n-1}'}{d_n - b_n a_{n-1}'}$$

Langkah ke-4

diselesaikan dengan substitusi balik menghasilkan

$$x_n = r_n'$$

$$x_i = r_i' - a_i' \; x_{i+1} \,, \qquad i = n\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}3, \ldots , 2, 1.$$

Contoh 3.3.1

Sistem persamaan linear berikut akan diselesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Dikalikan persamaan pertama dengan $\frac{1}{2}$, persamaan pertama hanya tersisa satu dalam diagonalnya, juga merubah dua elemen lainnya,

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2}, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned}$$

$$-x_3 + 2x_4 = 1.$$

Digunakan persamaan pertama untuk mengeliminasi x_1 dari persamaan kedua.

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2},\\
+\frac{3}{2}x_2 - x_3 \qquad &= \frac{1}{2},\\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0,\\
-x_3 + 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Lalu dikalikan persamaan kedua dengan $\frac{2}{3}$, menghasilkan

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2},\\
+x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad &= \frac{1}{3},\\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0,\\
-x_3 + 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Digunakan persamaan kedua untuk menghilangkan x_2 dari persamaan ketiga

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2},\\
+x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad &= \frac{1}{3},\\
\frac{4}{3}x_3 - x_4 &= \frac{1}{3},\\
-x_3 + 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Dengan mengalikan persamaan ketiga dengan $\frac{3}{4}$, menghasilkan

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2}, \\
+ x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad &= \frac{1}{3}, \\
x_3 - \frac{3}{4}x_4 &= \frac{1}{4}, \\
-x_3 + 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Digunakan persamaan ketiga untuk menghilangkan x_3 dari persamaan terakhir:

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2}, \\
+ x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad &= \frac{1}{3}, \\
x_3 - \frac{3}{4}x_4 &= \frac{1}{4}, \\
+ \frac{5}{4}x_4 &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

dan dikalikan persamaan terakhir dengan $\frac{4}{5}$, menghasilkan

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad\qquad &= \frac{1}{2}, \\
+ x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad &= \frac{1}{3}, \\
x_3 - \frac{3}{4}x_4 &= \frac{1}{4}, \\
+ x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Kemudian diselesaikan dengan subtitusi balik sehingga didapatkan

$x_4 = 1$; $x_2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)(1) = 1$; $x_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)(1) = 1$; $x_4 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)(1) = 1$

Contoh 3.3.2

Sistem persamaan linear pada contoh 3.3.1 akan diselesaikan menggunakan metode Thomas.

Tentukan dahulu elemen vektor d, a , b, r sebagai berikut:

d = (2,2,2,2); a = (-1,-1,-1,0); b = (0,-1,-1,-1); r = (1,0,0,1)

Langkah ke-1

pertama bentuk elemen baru a_1 dan r_1:

$$a'_1 = \frac{a_1}{d_1} = -\frac{1}{2}, \qquad r'_1 = \frac{r_1}{d_1} = \frac{1}{2}$$

Langkah ke-2

dari persamaan kedua:

$$a'_2 = \frac{a_2}{d_2 - b_2 a'_1} = \frac{-1}{2-(-1)(\frac{1}{2})} = -\frac{2}{3}$$

$$r'_2 = \frac{r_2 - b_2 r'_1}{d_2 - b_2 a'_1} = \frac{0-(-1)(\frac{1}{2})}{2-(-1)(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$

Untuk persamaan ketiga:

$$a'_3 = \frac{a_3}{d_3 - b_3 a'_2} = \frac{-1}{2-(-1)(-\frac{2}{3})} = -\frac{3}{4}$$

$$r'_3 = \frac{r_3 - b_3 r'_2}{d_3 - b_3 a'_2} = \frac{0-(-1)(\frac{1}{3})}{2-(-1)(-\frac{2}{3})} = \frac{1}{4}$$

Langkah ke-3

untuk persamaan terakhir

$$r_4' = \frac{r_4 - b_4 r_3'}{d_4 - b_4 a_3'} = \frac{1-(-1)(1/4)}{2-(-1)(-3/4)} = 1$$

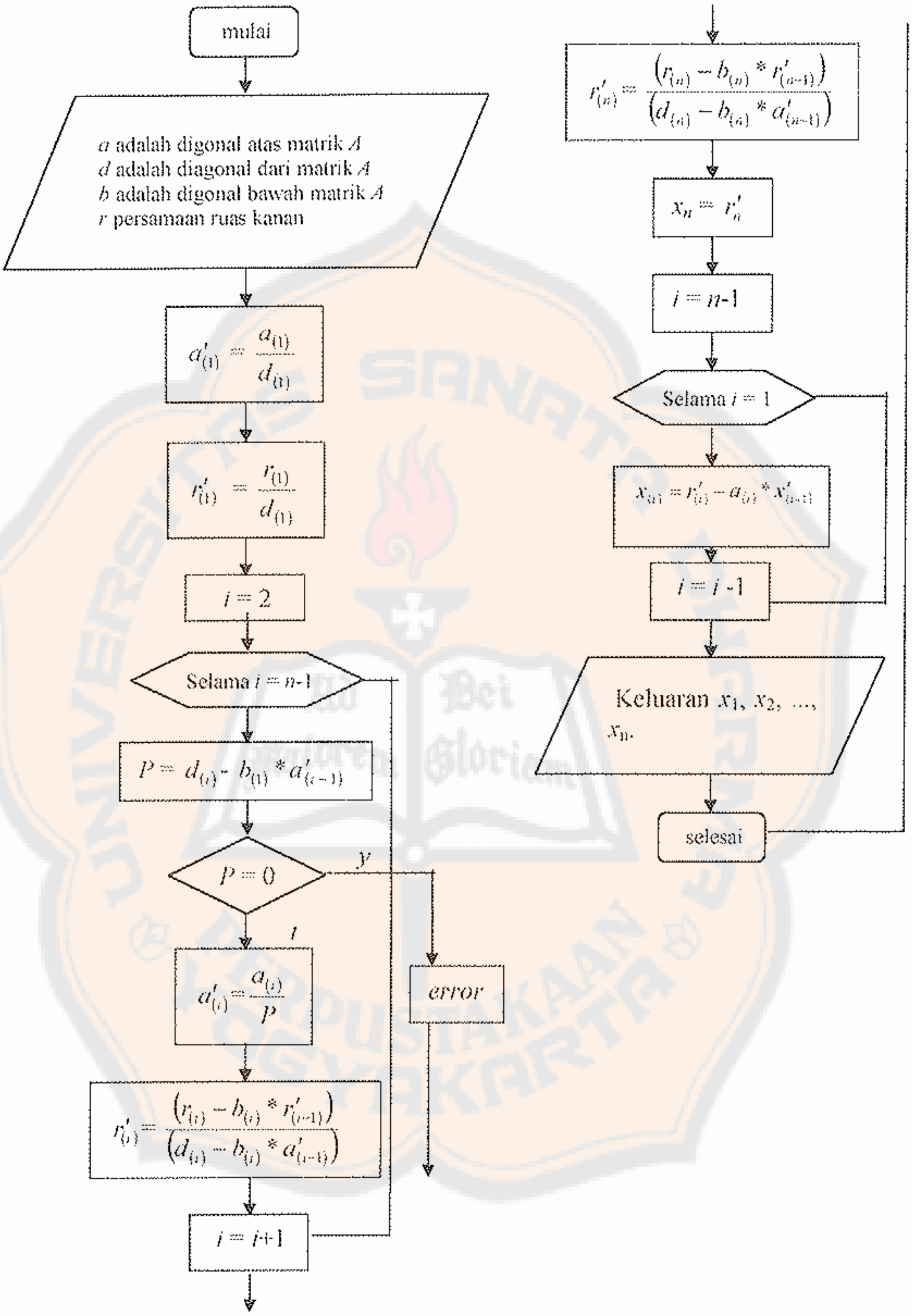
akhirnya, diselesaikan dengan subtitusi balik menghasilkan:

$$x_3 = r_3' - a_3' x_4 = \frac{1}{4} - (-\frac{3}{4})(1) = 1$$

$$x_2 = r_2' - a_2' x_3 = \frac{1}{3} - (-\frac{2}{3})(1) = 1$$

$$x_1 = r_1' - a_1' x_2 = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})(1) = 1$$

Metode Thomas jika dinyatakan dengan *flow chart* program sebagai berikut


mulai
a adalah digonal atas matrik A
d adalah diagonal dari matrik A
b adalah digonal bawah matrik A
r persamaan ruas kanan
$a'_{(1)} = \frac{a_{(1)}}{d_{(1)}}$
$r'_{(1)} = \frac{r_{(1)}}{d_{(1)}}$
$i = 2$
Selama $i = n$-1
$P = d_{(i)} - b_{(i)} * a'_{(i-1)}$
$P = 0$
y
t
$a'_{(i)} = \frac{a_{(i)}}{P}$
error
$r'_{(i)} = \frac{(r_{(i)} - b_{(i)} * r'_{(i-1)})}{(d_{(i)} - b_{(i)} * a'_{(i-1)})}$
$i = i+1$
$r'_{(n)} = \frac{(r_{(n)} - b_{(n)} * r'_{(n-1)})}{(d_{(n)} - b_{(n)} * a'_{(n-1)})}$
$x_n = r'_n$
$i = n$-1
Selama $i = 1$
$x_{(i)} = r'_{(i)} - a_{(i)} * x'_{(i+1)}$
$i = i$ -1
Keluaran x_1, x_2, ..., x_n.
selesai

Algoritma metode Thomas diaplikasikan dalam program Matlab sebagai berikut:

```
function x = thomas(a,d,b,r)
%  menyelesaikan Ax=b di mana A adalah matriks tridiagonal
% masukan
% a   diagonal atas dari matriks A, a(n) = 0.
% d   diagonal dari matriks A
% b   lower diagonal dari matriks A,b(1) = 1
% r   persamaan ruas kanan
n = length(d)
a(1) = a(1)/d(1)
r(1) = r(1)/d(1)
for i = 2 : n-1
   denom = d(i) - b(i)*a(i-1);
   if (denom ==0), error('zero in denominator'), end
   a(i) = a(i)/denom;
   r(i) = (r(i) - b(i)*r(i-1))/denom;
end
r(n) = (r(n) - b(n)*r(n-1))/(d(n) - b(n)*a(n-1));
x(n) = r(n)
for i = n-1: -1 : 1
   x(i) = r(i)-a(i)*x(i+1);
end
```


Contoh 3.3.2

Sistem persamaan linear berikut akan diselesaikan menggunakan metode Thomas.

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
\frac{2}{3}x_1 & + & \frac{1}{6}x_2 & & & & & & & & & & & = & 1,2 \\
\frac{1}{6}x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{6}x_3 & & & & & & & & & = & 1,97 \\
 & + & \frac{1}{6}x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & & & & & & & = & 2 \\
 & & & + & \frac{1}{6}x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & + & \frac{1}{6}x_5 & & & & & = & 0 \\
 & & & & & + & \frac{1}{6}x_4 & + & \frac{2}{3}x_5 & + & \frac{1}{6}x_6 & & & = & -2 \\
 & & & & & & & + & \frac{1}{6}x_5 & + & \frac{2}{3}x_6 & + & \frac{1}{6}x_7 & = & -1,97 \\
 & & & & & & & & & + & \frac{1}{6}x_6 & + & \frac{2}{3}x_7 & = & -1,2
\end{array}
$$

tentukan terlebih dahulu $d = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; $a = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0)$;

$b = (0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$; $r = (1,2 ; 1,97 ; 2 ; 0 ; -2 ; -1,97 ; -1,2)$

dengan memasukkan a, b, d, r ke dalam program matlab menghasilkan:

```
a = [1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 0]
a =
    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667         0

» b=[0 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6]
b =
     0    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667

» d =[2/3 2/3 2/3 2/3 2/3 2/3 2/3 ]
d =
   0.6667   0.6667    0.6667   0.6667    0.6667    0.6667    0.6667


» r=[1.2 1.97 2 0 -2 -1.97 -1.2]
r =
    1.2000    1.9700    2.0000         0   -2.0000   -1.9700   -1.2000
```

```
» thomas(a,d,b,r)
ans =
1.2986    2.0057    2.4986    0    -2.4986   -2.0057   -1.2986
```

maka didapatkan nilai dari x adalah:

x_1 = 1,2986; x_2 = 2,0057; x_3 = 2,4986; x_4 = 0; x_5 = -2,4986; x_6 = -2,0057; x_7 = -1,2986.

BAB IV

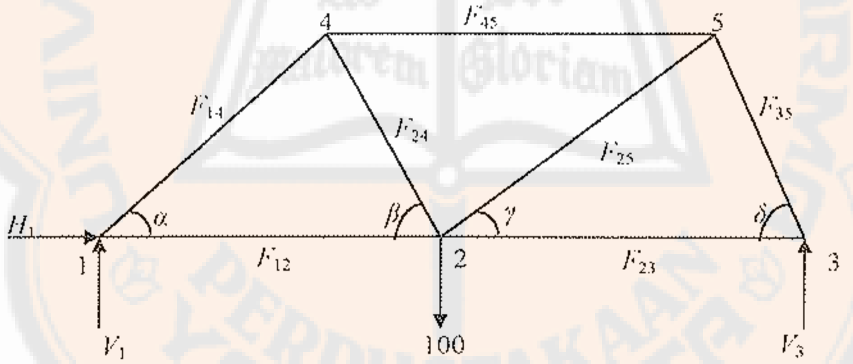
PENERAPAN

4.1 Dalam Bidang Fisika

Ada beberapa masalah bidang fisika, dalam bentuk sistem persamaan linear, akan lebih mudah jika diselesaikan menggunakan metode yang telah dibahas dalam bab III. Di sini akan digunakan metode row pivoting karena banyak elemen nol pada matriks yang digunakan.

4.1.1 Analisis Tiang Penyangga

Diberikan gambar berikut



Gambar (4.1)

Berat struktur 100 kg pada lokasi titik 2, jika $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{4}$, akan dicari nilai dari V_1, H_1, V_3, F_{12}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{35}, F_{45}.

Struktur bangunan kecil yang terdiri dari elemen segitiga mampu menyangga beban yang sangat berat. Untuk analisis kekuatan dalam struktur, dikenal dengan nama kekuatan tiang penyangga.

Kekuatan dalam setiap tiang penyangga F_{12}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{35}, F_{45} mempengaruhi semua struktur. V_1 dan V_2 adalah kekuatan vertikal yang menyangga struktur, H_1 adalah kekuatan penguat yang mendatar pada titik 1.

Didefinisikan gaya positif jika bergerak ke kanan atau ke arah atas, jika arah gaya berlawanan tandanya negatif. Satu-satunya syarat agar suatu tiang penyangga seimbang adalah resultan gaya yang bekerja sama dengan nol. Di sini digunakan *hukum Newton I* yang berbunyi:

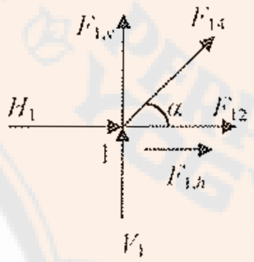
Bila resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sama dengan nol atau tidak ada gaya yang bekerja pada benda maka setiap benda akan bergerak terus dengan kelajuan tetap pada lintasan lurus (gerak lurus beraturan) atau tetap diam.

Hukum Newton I dapat dinyatakan dengan

$$\sum F = 0$$

pada gambar di atas menunjukkan kondisi keseimbangan vertikal dan horisontal dengan 5 titik dinyatakan sebagai berikut:

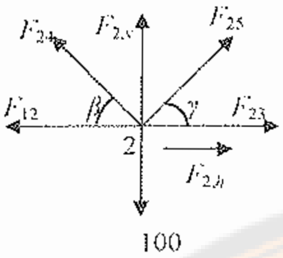
Titik 1



$$\sum F_H = 0 = H_1 + F_{12} + F_{14} \cos\alpha + F_{1,h}$$

$$\sum F_V = 0 = V_1 + F_{14} \sin\alpha + F_{1,v}$$

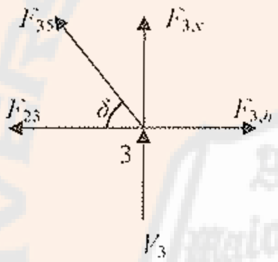
Titik 2



$$\sum F_H = 0 = -F_{12} + F_{23} - F_{24}\cos\beta + F_{25}\cos\gamma + F_{2,h}$$

$$\sum F_V = 0 = F_{24}\sin\beta + F_{25}\sin\gamma - 100 + F_{2,v}$$

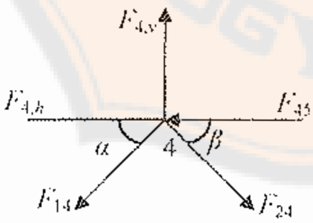
Titik 3



$$\sum F_H = 0 = -F_{23} - F_{35}\cos\delta + F_{3,h}$$

$$\sum F_V = 0 = V_3 + F_{35}\sin\delta + F_{3,v}$$

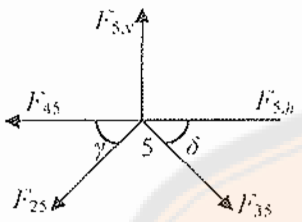
Titik 4



$$\sum F_H = 0 = -F_{14}\cos\alpha + F_{24}\cos\beta + F_{45} - F_{4,h}$$

$$\sum F_v = 0 = -F_{14}\sin\alpha \; - F_{24}\sin\beta + F_{4,v}$$

Titik 5



$$\sum F_H = 0 = -F_{25}\cos\gamma \; + F_{35}\cos\delta \; - F_{45} + F_{5,h}$$

$$\sum F_v = 0 = -F_{25}\sin\gamma \; - F_{35}\sin\delta + \; F_{5,v}$$

$F_{i,h}$ adalah gaya mendatar eksternal yang bekerja pada titik i dan $F_{i,v}$ adalah gaya tegak eksternal yang bekerja pada titik i, oleh karena itu gaya 100 *kg* ke bawah pada titik 2 berpadanan dengan $F_{2,v}$ = -100. Untuk titik yang lain $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ sama dengan nol. Titik-titik di atas jika disatukan menjadi:

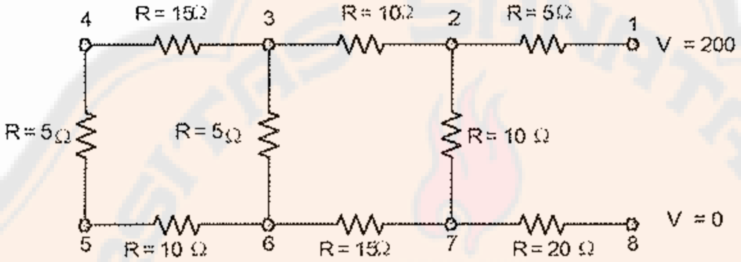
$$\begin{aligned}
&V_1 + F_{14}\sin\alpha = 0,\\
&H_1 + F_{12} + F_{14}\cos\alpha = 0,\\
&+ F_{24}\sin\beta + F_{25}\sin\gamma = 100,\\
&-F_{12} + F_{23} - F_{24}\cos\beta + F_{25}\cos\gamma = 0,\\
&V_3 + F_{35}\sin\delta = 0,\\
&-F_{23} - F_{35}\cos\delta = 0\\
&-F_{14}\sin\alpha - F_{24}\sin\beta = 0,\\
&-F_{14}\cos\alpha + F_{24}\cos\beta + F_{45} = 0,\\
&-F_{25}\sin\gamma - F_{35}\sin\delta = 0,\\
&-F_{25}\cos\gamma + F_{35}\cos\delta - F_{45} = 0,
\end{aligned}$$


```
»A=[1 0 0 0 0.7071 0 0 0 0 0; 0 1 0 1 0.7071 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0
0 0.7071 0.7071 0 0 ; 0 0 0 -1 0 1 -0.7071 0.7071 0 0; 0 0 1 0 0 0
0 0 0.7071 0; 0 0 0 0 0 -1 0 0 -0.7071 0; 0 0 0 0 -0.7071 0 -
0.7071 0 0 0; 0 0 0 0 -0.7071 0 0.7071 0 0 1; 0 0 0 0 0 0 0 -
0.7071 -0.7071 0; 0 0 0 0 0 0 0 -0.7071 0.7071 -1]
A =
  Columns 1 through 7
    1.0000         0         0         0    0.7071         0         0
         0    1.0000         0    1.0000    0.7071         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.7071
         0         0         0   -1.0000         0    1.0000   -0.7071
         0         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0         0         0         0   -1.0000         0
         0         0         0         0   -0.7071         0   -0.7071
         0         0         0         0   -0.7071         0    0.7071
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 8 through 10
         0         0         0
         0         0         0
    0.7071         0         0
    0.7071         0         0
         0    0.7071         0
         0   -0.7071         0
         0         0         0
         0         0    1.0000
   -0.7071   -0.7071         0
   -0.7071    0.7071   -1.0000

» b=[0;0;100;0;0;0;0;0;0;0]
b =
     0
     0
   100
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0

» Gauss_pivot(A,b)
ans
   50.0000
         0
   50.0000
   50.0000
  -70.7114
   50.0000
   70.7114
   70.7114
  -70.7114
 -100.0000
```


Jadi nilai dari V_1=50,0000; H_1 = 0; V_3 =50,0000; F_{12} = 50,0000; F_{14} = -70,7114; F_{23} = 50,0000; F_{24} = 70,7114; F_{25} = 70,7114; F_{35} = -70,7114; F_{45} = -100,0000.

4.1.2 Sirkuit Listrik

Diberikan rangkaian seperti berikut ini



Gambar(4.2)

Akan dicari arus (I) dan tegangan (V) dari masing-masing titik dari rangkaian tersebut.

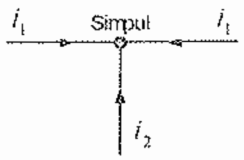
Terdapat tiga besaran dasar yang dikaitkan dengan rangkaian listrik tersebut: tegangan (V) , hambatan (R), dan arus (I). Ini biasanya diukur dalam satuan-satuan, tegangan dalam volt (V), hambatan dalam ohm (Ω), dan arus dalam ampere (A).

Hukum-hukum yang digunakan dalam masalah tersebut adalah

Hukum Kirchhoff I

Yang menyatakan bahwa jumlah kuat arus yang masuk ke suatu titik cabang sama dengan jumlah kuat arus yang keluar dari titik cabang itu.

$$\sum I_{masuk} = \sum I_{keluar}$$



Pada gambar diatas arus yang masuk ketitik cabang adalah positif, jika sebaliknya negatif.

Hukum II Kirchhoff

Menyatakan jumlah aljabar tegangan mengelilingi suatu rangkaian tertutup (loop) sama dengan nol.

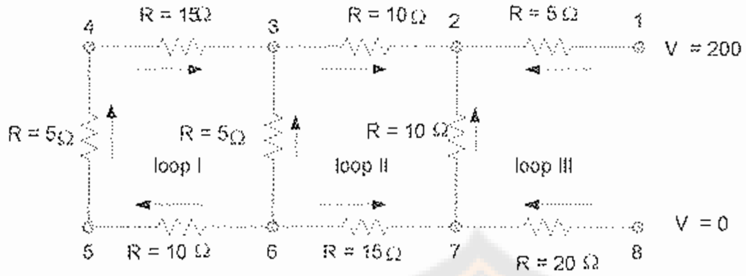
$$\sum V = 0$$

Hukum Ohm

Penurunan tegangan (V) yang melintasi hambatan adalah hasilkali arus yang melewatinya dan hambatannya.

$$V = IR \qquad \text{atau} \qquad R = \frac{V}{I}$$

Penerapan Hukum II Kirchhoff akan menghasilkan sistem persamaan linear, karena loop-loop dalam rangkaian tersebut saling berhubungan seperti dalam gambar (4.2) arus di dalam rangkaian tersebut belum diketahui baik besar maupun arahnya, dapat diasumsikan arah dari masing-masing arus tersebut. Jika penyelesaian resultan yang berdasarkan hukum II Kirchhoff bernilai negatif, maka arah yang diasumsikan salah. Misalkan diasumsikan arah arus sebagai berikut



Gambar (4.3)

Hukum Kirchhoff 1 diterapkan pada tiap titik cabang menghasilkan

$i_{12} + i_{72} + i_{32} = 0$

$i_{63} + i_{43} - i_{32} = 0$

$i_{54} - i_{43} = 0$

$i_{65} - i_{54} = 0$

$-i_{67} - i_{65} - i_{63} = 0$

$i_{87} - i_{72} + i_{67} = 0$

Penerapan aturan tegangan pada masing-masing loop akan menghasilkan:

$-i_{65}R_{65} - i_{54}R_{54} - i_{43}R_{43} + i_{63}R_{63} = 0$

$i_{67}R_{67} - i_{63}R_{63} - i_{32}R_{32} + i_{72}R_{72} = 0$

$-i_{87}R_{87} - i_{72}R_{72} + i_{12}R_{12} + 200 = 0$

Atau, dengan mensubtitusikan tahanan-tahanan dari gambar (4.3) dan dengan memindahkan konstantanya ke ruas kanan didapatkan:

$-10i_{65} - 5i_{54} - 15i_{43} + 5i_{36} = 0$

$15i_{67} - 5i_{63} - 10i_{32} + 10i_{72} = 0$

$-20i_{78} - 10i_{72} + 5i_{21} = 200$

dari sembilan persamaan yang memiliki sembilan arus yang tidak diketahui dapat dibuat sistem persamaan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
i_{12} & i_{32} & & & & & & i_{72} & & = & 0 \\
 & -i_{32} & i_{43} & & & & & & i_{63} & = & 0 \\
 & & -i_{43} & i_{54} & & & & & & = & 0 \\
 & & & -i_{54} & i_{65} & & & & & = & 0 \\
 & & & & -i_{65} & -i_{67} & & & -i_{63} & = & 0 \\
 & & & & & +i_{67} & i_{87} & -i_{72} & & = & 0 \\
 & & -15i_{43} & -5i_{54} & -10i_{65} & & & & 5i_{63} & = & 0 \\
 & -10i_{32} & & & & 15i_{67} & & 10i_{72} & -5i_{63} & = & 0 \\
5i_{12} & & & & & & -20i_{78} & -10i_{72} & & = & 200
\end{array}
$$

akan diselesaikan dengan matlab

```
» A=[1 1 0 0 0 0 0 1 0; 0 -1 1 0 0 0 0 0 1; 0 0 -1 1 0 0 0 0 0; 0
0 0 -1 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 -1 -1 0 0 -1; 0 0 0 0 0 1 1 -1 0; 0 0 -
15 -5 -10 0 0 0 5;0 -10 0 0 0 15 0 10 -5; 5 0 0 0 0 0 -20 -10 0]
A =
     1     1     0     0     0     0     0     1     0
     0    -1     1     0     0     0     0     0     1
     0     0    -1     1     0     0     0     0     0
     0     0     0    -1     1     0     0     0     0
     0     0     0     0    -1    -1     0     0    -1
     0     0     0     0     0     1     1    -1     0
     0     0   -15    -5   -10     0     0     0     5
     0   -10     0     0     0    15     0    10    -5
     5     0     0     0     0     0   -20   -10     0


» b=[0;0;0;0;0;0;0;0;200]
b =
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
   200

» Gauss_Pivot(A,b)
ans =
    6.1625
   -1.5686
   -0.2241
   -0.2241
   -0.2241
    1.5686
   -6.1625
   -4.5938
   -1.3445
```


penyelesaianya adalah

i_{12} = 6,1625; i_{32} = -1,5686; i_{43} = -0,2241; i_{54} = -0,2241 ; i_{65}= -0,2241 ;

i_{76} = 1,5686; i_{87} = -6,1625; i_{72}= -4,5938; i_{63} = -1,3445.

Nilai dari tegangan pada masing-masing titik cabang adalah:

$V_2 = V_1 - (R_{12}\, x\, i_{12}) = 200 - 30{,}8125 = 169{,}188$

$V_3 = V_2 - (R_{32}\, x\, i_{32}) = 169{,}188 - 15{,}686 = 153{,}502$

$V_4 = V_3 - (R_{43}\, x\, i_{43}) = 153{,}502 - 3{,}3615 = 150{,}141$

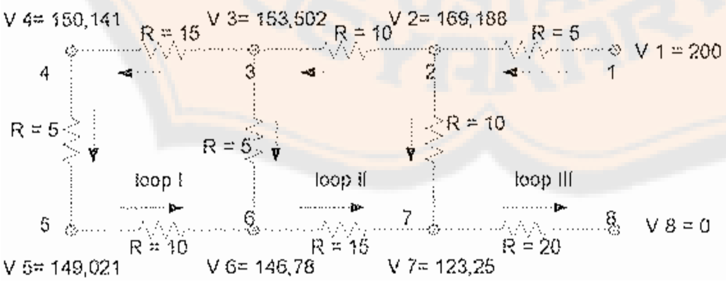
$V_5 = V_4 - (R_{54}\, x\, i_{54}) = 150{,}141 - 1{,}1205 = 149{,}021$

$V_6 = V_5 - (R_{65}\, x\, i_{65}) = 149{,}021 - 2{,}241 = 146{,}78$

$V_7 = V_6 - (R_{76}\, x\, i_{76}) = 146{,}78 - 23{,}523 = 123{,}25$

$V_8 = V_6 - (R_{87}\, x\, i_{87}) = 123{,}25 - 123{,}25 = 0$

Jadi, dari hasil tersebut dapat diketahui arah dari tegangan dan arus rangkaian jika arus negatif berarti arahnya berlawanan dengan arah pada gambar (4.3), jika arusnya positif arahnya sesuai dengan gambar (4.3). Arah arus dan tegangan yang sesuai dengan hasil di atas diberikan pada gambar berikut:



4.2 Dalam Bidang Ekonomi

Masalah dalam bidang ekonomi yang berbentuk sistem persamaan linear adalah model ekonomi Leontif yang dapat diselesaikan dengan salah satu metode yang dibahas dalam bab III. Pada subbab ini akan digunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan masalah dalam model ekonomi Leontif.

4.2.1 Model Ekonomi Leontif

Bertentangan dengan model tertutup di mana keluaran k industri hanya didistribusikan sesama industri itu sendiri, maka model terbuka berusaha memenuhi permintaan dari luar untuk keluaran tersebut. Bagian dari keluaran tersebut masih bisa didistribusikan sesama industri itu sendiri, untuk mempertahankan operasi industri tersebut. Dalam model terbuka harga-hargalah yang tetap, dan tujuannya adalah untuk menentukan tingkat keluaran dari industri-industri yang diperlukan untuk memenuhi permintaan dari luar. akan diukur tingkat keluaran dalam nilai ekonomi dengan menggunakan harga-harga yang tetap. Pada suatu periode waktu yang tetap misalkan:

x_i = seluruh keluaran industri ke-i,

d_i = keluaran industri ke-i yang diperlukan untuk memenuhi permintaan dari luar.

c_{ij} = keluaran industri ke-i yang diperlukan oleh industri ke-j untuk menghasilkan satu-satuan harga dari keluarannya sendiri.

Didefinisikan vektor produksi

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

vektor permintaan

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

dan matriks konsumsi

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

sesuai dengan sifatnya, diperoleh bahwa

$x \geq 0$, $d \geq 0$, $C \geq 0$

Dari c_{ij} dan x_i, dapat dilihat bahwa:

$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{ik}x_k$

adalah keluaran industri ke-i yang diperlukan oleh semua k industri untuk menghasilkan total keluaran yang ditentukan oleh vektor produksi x. Karena jumlah tersebut adalah elemen ke-i dari vektor kolom Cx, maka lebih jauh dapat dikatakan bahwa elemen ke-i dari vektor kolom:

$x - Cx$

adalah nilai kelebihan keluaran industri ke-i yang tersedia untuk memenuhi permintaan dari luar. Nilai permintaan dari luar untuk keluaran industri ke-i

adalah elemen ke-i dari vektor permintaan d, maka didapatkan persamaan berikut:

$x - Cx = d$ atau $(I - C)x = d$ (4)

supaya permintaan dipenuhi secara tepat, tanpa kelebihan atau kekurangan. Jadi, jika diketahui C dan d, maka tujuannya adalah untuk mencari vektor produksi $x \geq 0$ yang memenuhi persamaan (4).

Contoh 4.1

Sebuah kota mempunyai tiga industri utama, operasi tambang batu bara, sebuah pembangkit listrik, dan sebuah jalan kereta api lokal. Untuk menambang \$ 1 batu bara, perusahaan tambang tersebut harus membeli \$ 0,25 listrik untuk menjalankan peralatan dan \$ 0,25 pengangkutan untuk keperluan pengiriman. Untuk menghasilkan \$ 1 listrik, pembangkit listrik memerlukan \$ 0,65 batubara untuk bahan bakar, \$ 0,05 listrik untuk menjalankan peralatan pembantu, dan \$ 0,05 pengangkutan. Untuk menyediakan \$ 1 pengangkutan kereta api memerlukan \$ 0,55 batu bara untuk bahan bakar, dan \$0,10 listrik untuk peralatan pembantu. Dalam suatu minggu tertentu, operasi tambang batu bara tersebut menerima pesanan seharga \$50.000 batu bara dari luar kota, dan pembangkit listrik menerima pesanan seharga \$25.000 listrik dari luar kota. Tidak ada permintaan dari luar untuk jalan kereta api lokal. Berapa banyakkah masing-masing ketiga industri itu harus berproduksi dalam minggu tersebut supaya persis memenuhi permintaan mereka sendiri dan permintaan dari luar.

Untuk periode satu minggu itu, misalkan:

x_1 = nilai keluaran seluruhnya dari operasi tambang batu bara,

x_2 = nilai keluaran seluruhnya dari pembangkit daya listrik,

x_3 = nilai keluaran seluruhnya dari jalan kereta api lokal.

Dari soal diatas diketahui:

Untuk menambang \$ 1 batu bara memerlukan:

- \$ 0 batu bara
- \$ 0,25 listrik
- \$ 0,25 pengangkutan

Untuk menghasilkan \$ 1 listrik memerlukan:

- \$ 0,65 batu bara
- \$ 0,05 listrik
- \$ 0,05 pengangkutan

Untuk menyediakan \$ 1 pengangkutan memerlukan:

- \$ 0,55 batu bara
- \$ 0,10 listrik
- \$ 0 pengangkutan

Terdapat pesanan dari luar kota berupa:

- \$ 50.000 batu bara
- \$ 25.000 listrik
- \$ 0 pengangkutan

Dapat dihasilkan sistem persamaan linear untuk model ekonomi leontif sebagai berikut:

$0\,x_1 + 0{,}65\,x_2 + 0{,}55\,x_3 = 50.000$

$0{,}25\,x_1 + 0{,}05\,x_2 + 0{,}10\,x_3 = 25.000$

$0{,}25\,x_1 + 0{,}05\,x_2 + 0x_3 = 0$

jika dibentuk matriks sistem persamaan linear diatas menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks konsumsi dari sistem itu adalah:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

vektor permintaan

$$d = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan matlab dicari $A = (I - C)$

```
A=eye(3)-C
A =
    1.0000   -0.6500   -0.5500
   -0.2500    0.9500   -0.1000
   -0.2500   -0.0500    1.0000
```

Maka sistem linear $(I - C)x = d$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diselesaikan dengan matlab, diandaikan $d = b$ untuk memudahkan pemanggilan fungsi program


```
» b=[50000; 25000;0]
b =
       50000
       25000
           0

» Gauss(A,b)
ans =
  1.0e+005 *
   1.02087475149105
   0.56163021868787
   0.28330019880716
```

Jadi, keluaran seluruhnya dari operasi tambang batu bara itu haruslah sebesar \$ 102.087, keluaran seluruhnya dari pembangkit daya listrik haruslah \$56.163, dan keluaran seluruhnya dari jalan kereta api haruslah \$28.330.

Model ekonomi diatas tidak hanya terjadi antar beberapa industri tapi bisa juga terjadi antar industri yang banyak jumlahnya.

Contoh 4.2

Misalkan bahwa matriks konsumsi berikut mendefinisikan permintaan 10 industri terhadap yang lain

$$
\begin{array}{c}
\\ M \\ Be \\ Ba \\ T \\ B \\ \mathrm{Pr} \\ P \\ K \\ Ban \\ L
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} M & Be & Ba & T & B & Pr & P & K & Ban & L \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.10 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.20 & 0.01 & 0.05 & 0.02 \\
0.35 & 0 & 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.150 & 0.04 & 0.02 & 0.03 \\
0.12 & 0.30 & 0 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.30 & 0.10 & 0.05 & 0.02 \\
0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.05 & 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.01 & 0.10 \\
0.15 & 0.01 & 0.05 & 0.10 & 0 & 0.10 & 0.01 & 0.10 & 0.03 & 0.01 \\
0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.20 & 0 & 0.03 & 0.06 & 0.04 & 0.03 \\
0.15 & 0.30 & 0.05 & 0.20 & 0.01 & 0.15 & 0 & 0.10 & 0.05 & 0.06 \\
0.02 & 0.10 & 0.30 & 0.02 & 0.03 & 0.10 & 0.01 & 0 & 0.06 & 0.08 \\
0.01 & 0.10 & 0.04 & 0.15 & 0.05 & 0.02 & 0.03 & 0.10 & 0 & 0.09 \\
0.01 & 0.04 & 0.10 & 0.09 & 0.08 & 0.02 & 0.02 & 0.15 & 0.01 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Keterangan: M = Industri mobil; Be = industri besi; Ba = industri baja; T = industri tenaga listrik; B = industri batubara; Pr = industri premium; P = industri plastik; K = industri kimia; Ban = industri ban; dan L = industri lampu.

Akan ditentukan keluaran yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan

$D = [10\ \ 2\ \ 15\ \ 2\ \ 20\ \ 15\ \ 25\ \ 1\ \ 5\ \ 15]^T$ juta dolar

masalah di atas diselesaikan menggunakan matlab dengan metode eliminasi Gauss.

Masukan matriks C pada comman windows sebagai berikut

```
»C=[ 0.10 0.05 0.10 0.05 0.05 0.10 0.20 0.01 0.05 0.02
     0.35 0    0.15 0.10 0.05 0.05 0.15 0.04 0.02 0.03
     0.12 0.30 0    0.15 0.20 0.25 0.30 0.1  0.05 0.02
     0.10 0.20 0.30 0.05 0.15 0.10 0.05 0.02 0.01 0.1
     0.15 0.01 0.05 0.10 0    0.10 0.01 0.1  0.03 0.01
     0.05 0.10 0.05 0.05 0.20 0    0.03 0.06 0.04 0.03
     0.15 0.3  0.05 0.20 0.01 0.15 0    0.10 0.05 0.06
     0.02 0.10 0.30 0.02 0.03 0.1  0.01 0    0.06 0.08
     0.01 0.1  0.04 0.15 0.05 0.02 0.03 0.1  0    0.09
     0.01 0.04 0.1  0.09 0.08 0.02 0.02 0.15 0.01 0    ]

C =
Columns 1 through 7

    0.1000   0.0500    0.1000    0.0500    0.0500    0.1000    0.2000
    0.3500        0    0.1500    0.1000    0.0500    0.0500    0.1500
    0.1200   0.3000         0    0.1500    0.2000    0.2500    0.3000
    0.1000   0.2000    0.3000    0.0500    0.1500    0.1000    0.0500
    0.1500   0.0100    0.0500    0.1000         0    0.1000    0.0100
    0.0500   0.1000    0.0500    0.0500    0.2000         0    0.0300
    0.1500   0.3000    0.0500    0.2000    0.0100    0.1500         0
    0.0200   0.1000    0.3000    0.0200    0.0300    0.1000    0.0100
    0.0100   0.1000    0.0400    0.1500    0.0500    0.0200    0.0300
    0.0100   0.0400    0.1000    0.0900    0.0800    0.0200    0.0200

  Columns 8 through 10

    0.0100     0.0500     0.0200
    0.0400     0.0200     0.0300
    0.1000     0.0500     0.0200
    0.0200     0.0100     0.1000
    0.1000     0.0300     0.0100
    0.0600     0.0400     0.0300
    0.1000     0.0500     0.0600
```



```
         0    0.0600    0.0800
    0.1000         0    0.0900
    0.1500    0.0100         0
```

dicari (*I* - *C*) andaikan sebagai A

```
A = eye(10) - C


A =
  Columns 1 through 7

    0.9000   -0.0500   -0.1000   -0.0500   -0.0500   -0.1000   -0.2000
   -0.3500    1.0000   -0.1500   -0.1000   -0.0500   -0.0500   -0.1500
   -0.1200   -0.3000    1.0000   -0.1500   -0.2000   -0.2500   -0.3000
   -0.1000   -0.2000   -0.3000    0.9500   -0.1500   -0.1000   -0.0500
   -0.1500   -0.0100   -0.0500   -0.1000    1.0000   -0.1000   -0.0100
   -0.0500   -0.1000   -0.0500   -0.0500   -0.2000    1.0000   -0.0300
   -0.1500   -0.3000   -0.0500   -0.2000   -0.0100   -0.1500    1.0000
   -0.0200   -0.1000   -0.3000   -0.0200   -0.0300   -0.1000   -0.0100
   -0.0100   -0.1000   -0.0400   -0.1500   -0.0500   -0.0200   -0.0300
   -0.0100   -0.0400   -0.1000   -0.0900   -0.0800   -0.0200   -0.0200

  Columns 8 through 10

   -0.0100   -0.0500   -0.0200
   -0.0400   -0.0200   -0.0300
   -0.1000   -0.0500   -0.0200
   -0.0200   -0.0100   -0.1000
   -0.1000   -0.0300   -0.0100
   -0.0600   -0.0400   -0.0300
   -0.1000   -0.0500   -0.0600
    1.0000   -0.0600   -0.0800
   -0.1000    1.0000   -0.0900
   -0.1500   -0.0100    1.0000
```

ubah *D* = *b* untuk mempermudah pemanggilan fungsi

```
b = [10;  2 ; 15 ; 2  ;20 ; 15 ; 25;  1 ; 5 ; 15] enter
 b =
    10
     2
    15
     2
    20
    15
    25
    13
     5
    15
```

```
» Gauss(A,b)
ans =
   85.5801
   98.9986
  154.2522
  115.5110
   71.9847
   70.1875
  124.8719
   80.7998
   62.2050
   68.0389
```

Dari hasil di atas dapat disimpulkan keluaran total industri mobil harus \$85,5801 juta, keluaran industri besi \$98,9986 juta, keluaran industri baja \$154,2522 juta, keluaran industri tenaga listrik \$115,5110 juta, keluaran industri batubara \$71,9847 juta, keluaran industri premium \$70,1875 juta, keluaran industri plastik \$124,8719 juta, keluaran industri kimia \$80,7998 juta, keluaran industri ban \$62,2050 juta, keluaran industri lampu \$68,0389 juta.

4.3 Penggunaan Interpolasi Spline Kubik

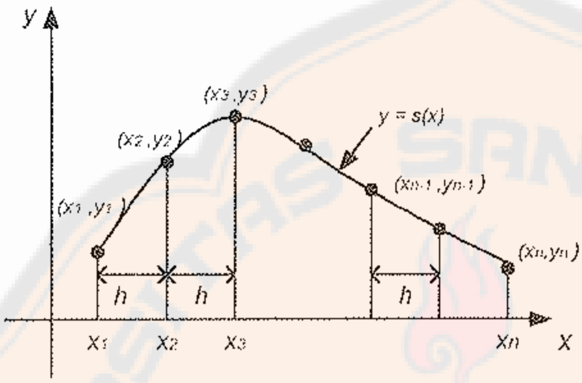
Kerapatan air telah diketahui maksimum pada suhu sedikit di atas titik beku. Tabel di bawah ini memberikan kerapatan air dalam gram per sentimeter untuk duabelas suhu yang berjarak sama dari $-10^0 C$ sampai $34^0 C$.

Suhu(^0C)	-10	-6	-2	2	6	10
Kerapatan (gm/cm^3)	0.99815	0.99912	0.99970	0.99997	0.99997	0.99973

Suhu(^0C)	14	18	22	26	30	34
Kerapatan (gm/cm^3)	0.99927	0.99862	0.99780	0.99681	0.99567	0.99440

Akan dicari spline parabolis run out yang menginterpolasi 12 titik untuk $-2 \le x \le 2$ dan akan dihitung $S(1)$ untuk spline yang didapatkan.

Andaikan diberi n titik di bidang xy, (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... , (x_n,y_n) yang akan diiterpolasi, ditetapkan $y = s(x)$ untuk $x_1 \le x \le x_n$.



Gambar (4.5)

$S(x)$ berupa polinom kubik yang berlainan dalam masing-masing selang, sehingga $S(x)$ berbentuk

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x_1 \le x \le x_2 \\ S_2(x) & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Di mana $S(x)$ adalah polinom-polinom kubik yang dapat ditulis

$$S_1(x) = a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, \qquad x_1 \le x \le x_2$$

$$S_2(x) = a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, \qquad x_2 \le x \le x_3$$

$$\vdots \qquad (2)$$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Definisi

Fungsi f didefinisikan pada $[a,b]$ *dan suatu himpunan bilangan* $x_1, \ldots, x_n$ *sebuah interpolasi spline kubik S untuk f adalah fungsi yang memenuhi kondisi berikut.*

a. *S adalah sebuah polinom kubik dinotasikan* $S_i(x)$ *pada interval* $[x_i, x_{i+1}]$ *untuk* $i = 1, 2, \ldots, n$.

b. $S(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1,2, \ldots, n.$

c. $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \qquad i = 1,2, \ldots, n.$

d. $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \qquad i = 1,2, \ldots, n.$

e. $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \qquad i = 1,2, \ldots, n.$

jika kondisi di atas terpenuhi maka $S'(x)$ dan $S''(x)$ *kontinyu* pada $[a,b]$.

Teorema 4.4.1

Diberikan n titik $(x_1,y_1),(x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$ *dengan* $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *spline kubik*

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots & \\ a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 & \\ \quad + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

yang menginterpolasi titik-titik yang mempunyai koefisien yang diberikan oleh:

$a_i = (M_{i+1} - M_i)/6h$; $\quad b_i = M_i / 2$; $\quad c_i = (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6]$; $\quad d_i = y_i$

untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *di mana* $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bukti

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) didapat

$S(x) = S_1(x) = a_1(x\text{-}x_1)^3 + b_1(x\text{-}x_1)^2 + c_1(x\text{-}x_1) + d_1, \qquad x_1 \leq x \leq x_2$

$S(x) = S_2(x) = a_2(x\text{-}x_2)^3 + b_2(x\text{-}x_2)^2 + c_2(x\text{-}x_2) + d_2, \qquad x_2 \leq x \leq x_3$

$\vdots$

$S(x) = S_{n\text{-}1}(x) = a_{n\text{-}1}(x\text{-}x_{n\text{-}1})^3 + b_{n\text{-}1}(x\text{-}x_{n\text{-}1})^2 + c_{n\text{-}1}(x\text{-}x_{n\text{-}1}) + d_{n\text{-}1}, \quad x_{n\text{-}1} \leq x \leq x_n \qquad (3)$

Karena $S(x_1) = y_1, S(x_1) = y_1, \ldots , S(x_n) = y_n.$ (4)

Maka $d_1 = y_1, d_2 = y_2, \ldots , d_{n\text{-}1} = y_{n\text{-}1}.$ (5)

Dari persamaan (5), persamaan terakhir (3) dan $x_n - x_{n\text{-}1} = h$ diperoleh

$a_{n\text{-}1}h^3 + b_{n\text{-}1}h^2 + c_{n\text{-}1}h + d_{n\text{-}1} = y_n$ (6)

dari kondisi $S_{i\text{-}1}(x_i) = S_i(x_i)$ didapatkan $S_{i\text{-}1}(x_i) = y_i \quad , i = 2, 3, \ldots, n\text{-}1.$

Dari persamaan (6) didapat

$a_1h^3 + b_1h^2 + c_1h + d_1 = y_2$

$a_2h^3 + b_2h^2 + c_2h + d_2 = y_3$

$\vdots$

$a_{n\text{-}2}h^3 + b_{n\text{-}2}h^2 + c_{n\text{-}2}h + d_{n\text{-}2} = y_{n\text{-}1}$ (7)

Turunan pertama dari persamaan (3) adalah

$S'(x) = S_1'(x) = 3a_1(x\text{-}x_1)^2 + 2b_1(x\text{-}x_1) + c_1, \qquad x_1 \leq x \leq x_2$

$S'(x) = S_2'(x) = 3a_2(x\text{-}x_2)^2 + 2b_2(x\text{-}x_2) + c_2, \qquad x_2 \leq x \leq x_3$

$\vdots$

$S'(x) = S_{n-1}'(x) = 3a_{n\text{-}1}(x\text{-}x_{n\text{-}1})^2 + 2b_{n\text{-}1}(x\text{-}x_{n\text{-}1}) + c_{n\text{-}1} \qquad x_{n\text{-}1} \leq x \leq x_n \qquad (8)$

Dari kondisi $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$ dan dari persamaan (7) diperoleh

$3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 = c_2$

$3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 = c_3$

$\vdots$

$3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} = c_{n-1},$ (9)

turunan kedua dari persamaan (3) adalah

$S''(x) = S_1''(x) = 6a_1(x-x_1) + 2b_1,$ $x_1 \le x \le x_2$

$S''(x) = S_2''(x) = 6a_2(x-x_2) + 2b_2,$ $x_2 \le x \le x_3$

$\vdots$

$S''(x) = S_{n-1}''(x) = 6a_{n-1}(x-x_{n-1}) + 2b_{n-1},$ $x_{n-1} \le x \le x_n$ (10)

Andaikan

$M_1 = S_1''(x), M_2 = S_2''(x), \ldots, M_{n-1} = S_{n-1}''(x).$

sehingga $M_1 = 2b_1, M_2 = 2b_2, \ldots, M_{n-1} = 2b_{n-1}.$

Maka $b_1 = \frac{1}{2}M_1, b_2 = \frac{1}{2}M_2, \ldots, b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1}$ (11)

Dari persamaan (11) disubtitusikan kepersamaan (10) didapat

$6a_1h + M_1 = M_2$

$6a_2h + M_2 = M_3$

$\vdots$

$6a_{n-2}h + M_{n-2} = M_{n-1}$

sehingga $a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6h}, a_2 = \frac{M_3 - M_2}{6h}, \ldots, a_{n-2} = \frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{6h}$ (12)

dari persamaan (11),(12) subtitusikan ke persamaan (7) didapat

$$\frac{M_2 - M_1}{6h}h^3 + \frac{1}{2}M_1h^2 + c_1h + y_1 = y_2$$

$$\frac{M_3 - M_2}{6h} h^3 + \frac{1}{2} M_2 h^2 + c_2 h + y_2 = y_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{6h} h^3 + \frac{1}{2} M_{n-2} h^2 + c_{n-2} h + y_{n-2} = y_{n-1}$$

dengan pengolahan aljabar didapatkan $c_i = (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6]$

Besaran-besaran $M_1, M_2, \ldots, M_n$ menentukan spline kubik. Untuk mencari besaran-besaran tersebut kita subtitusikan a_i, b_i, c_i ke dalam baris terakhir persamaan (9), setelah beberapa penyederhanaan aljabar didapatkan

$$\begin{aligned}
M_1 + 4M_2 + M_3 &= \frac{6(y_1 - 2y_2 + y_3)}{h^2} \\
M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6(y_2 - 2y_3 + y_4)}{h^2} \\
&\vdots \\
M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n &= \frac{6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)}{h^2}
\end{aligned}$$

Atau dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Dalam spline parabolis Run out, dua kendala tambahan yang diberikan pada jenis spline ini adalah

$M_1 = M_2$; $M_n = M_{n-1}$

Jika dua persamaan di atas dipakai untuk menghilangkan M_1 dan M_n diperoleh matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

jadi untuk mengerjakan soal di atas lebih dahulu dicari matrik ruas kanan, dengan membuat program matlab di m-file didapatkan program sebagai berikut:

```
function r = kanan(y)
for i = 1:1:12
    r= ((y(1,i)+y(1,i+2)-2*(y(1,i+1)))*6)/16
end
```

masukkan dahulu nilai dari y dan panggil nama fungsi program kanan(y) menghasilkan:

```
r =
 -1.4625e-004
r =
 -1.1625e-004
r =
 -1.0125e-004
r =
 -9.0000e-005
r =
 -8.2500e-005
r =
 -7.1250e-005
r =
 -6.3750e-005
r =
 -6.3750e-005
r =
 -5.6250e-005
r =
 -4.8750e-005
```

jadi matrik tridiagonalnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}00014625 \\ -0{,}00011625 \\ -0{,}00010125 \\ -0{,}00009 \\ -0{,}0000825 \\ 0{,}00007125 \\ -0{,}00006375 \\ -0{,}00006375 \\ -0{,}00005625 \\ -0{,}00004875 \end{bmatrix}$$

diselesaikan menggunakan matlab pada comman windows dimasukkan data yang akan diolah antara lain:

```
»a=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 0]
a =
     1     1     1     1     1     1     1     1     1     0

» d=[5 4 4 4 4 4  4 4 4 5]
d =
     4     4     4     4    4     4    4     4     4     4

» b=[0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ]
b =
     0     1     1     1     1     1     1     1     1     1

»r=[-0.00014625  -0.00011625  -0.00010125  -0.00009  -0.0000825  -
0.00007125   0.00006375 -0.00006375 -0.00005625 -0.00004875]
r =
   1.0e-003 *
   Columns 1 through 7
    -0.1462     -0.1163     -0.1012     -0.0900     -0.0825     -0.0712
0.0638
   Columns 8 through 10
    -0.0638    -0.0562    -0.0487

» thomas(a,d,b,r)
ans =
1.0e-004 *
Columns 1 through 7
-0.2556      -0.1846      -0.1683      -0.1545      -0.1136      -0.2161
0.2656

Columns 8 through 10
-0.2089    -0.0674    -0.0840
```


Jadi didapatkan nilai M adalah:

$M_1 = M_2 = -0{,}00002556$; $M_3 = -0{,}00001846$; $M_4 = -0{,}00001683$;

$M_5 = -0.000001545$; $M_6 = -0.00001136$; $M_7 = -0.00002161$; $M_8 = 0.00002656$;

$M_9 = -0.00002089$; $M_{10} = -0.00000674$; $M_{11} = M_{12} = -0.00000840$.

Untuk mencari spline parabolis run out yang menginterpolasi 12 titik untuk $-2 \leq x \leq 2$ dicari:

$a_3 = (M_4 - M_3)/6h = 0{,}0000000679$

$b_3 = M_3 / 2 = -0{,}00000923$

$c_3 = (y_4 - y_3)/h - [(M_4 + 2M_3)h/6] = 0{,}000103333$

$d_3 = y_3 = 0{,}99970$

Jadi spline parabolis run out yang menginterpolasi 12 titik untuk $-2 \leq x \leq 2$ adalah

$S_3(x) = 0{,}0000000679(x+2)^3 + (-0{,}00000923(x+2)^2) + 0{,}000103333(x+2) + 0{,}99970$

$S(1)$ untuk spline yang didapatkan, subtitusikan $x = 1$ dalam $S_3(x)$ didapatkan:

$S_3(1) = 0{,}0000000679(1+2)^3 + (-0{,}00000923(1+2)^2) + 0{,}000103333(1+2) + 0{,}99970$

$= 0{,}999928$

Jadi kerapatan air adalah 0,999928 g/cm^3 dicapai pada suhu $1^{o}\,C$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Setelah dibahas metode langsung untuk menyelesaikan sistem persamaan linear maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Sistem persamaan linear $Ax = b$ dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss dengan cara mengubah matrik lengkap dari sistem persamaan linear menjadi matriks eselon baris sehingga dapat dengan mudah diselesaikan menggunakan subtitusi balik. Metode eliminasi Gauss tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang elemen diagonalnya nol, karena akan terjadi pembagian dengan nol yang menyebabkan sistem persamaan linear tidak dapat diselesaikan.
2. Sistem persamaan linear $Ax = b$ dapat diselesaikan dengan menggunakan metode row pivoting, metode tersebut berdasarkan metode eliminasi Gauss. Metode row pivoting dapat menghindari terjadinya pembagian dengan nol dengan cara menukar elemen pivot dengan elemen pada kolom yang akan dieliminasi yang nilainya paling besar. Selanjutnya digunakan metode eliminasi Gauss.
3. Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan metode Thomas, sistem tersebut memiliki bentuk khusus yaitu bentuk tridiagonal yang terdiri dari 3 vektor, vektor d yang berisi elemen diagonal, vektor a mengandung elemen di atas diagonal, dan vektor b yang mengandung elemen di bawah diagonal,

elemen lainya nilainya nol. Kemudahan menggunakan metode ini adalah menggunakan keuntungan dari elemen nol dan menghindari penggunaan operasi aritmatik yang tidak perlu atau mempermudah pengerjaan sistem persamaan linear tersebut.

4. Penulisan program metode eliminasi Gauss, metode row pivoting dan metode Thomas berdasarkan algoritma dari masing-masing metode tersebut. Digunakannya program matlab karena matlab mudah digunakan untuk perhitungan-perhitungan dengan dasar matriks, kemudahan dalam penulisan program yang singkat dan sederhana.

5. Penerapan metode eliminasi Gauss, metode row pivoting dan metode Thomas dapat digunakan untuk analisis tiang penyangga, sirkuit listrik, model ekonomi leontif, dan interpolasi spline kubik.

5.2 Saran

Berikut diberikan beberapa saran yang dapat dijadikan permasalahan lebih lanjut:

1. Selain ketiga metode yang dibahas ada metode lain yaitu metode dekomposisi LU yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

2. Membandingkan banyaknya operasi yang dilakukan masing-masing metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear sehingga dapat diketahui metode mana yang lebih baik untuk digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C., 1998, *Elementary Linear Algebra with Application*, diterjemahkan oleh Silaban Pantur: Penerapan Aljabar Linear, Penerbit Erlangga, Jakarta

Anton, H., 1988, *Elementary Linear Algebra*, 5th, diterjemahkan oleh Silaban Pantur dan Susila I Nyoman, Aljabar Linear Elementer, Edisi kelima, Erlangga, Jakarta

Budhi, W. S., 1995, *Aljabar Linear*, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

Chapra, S. C. dan Canale, R. P., 1994, *Metode Numerik*, Erlangga, Jakarta

Chapra, S.C. dan Canale, R. P., 1998, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd editon, dialihbahasakan oleh I Nyoman Susila: Metode Numerik, edisi ke II, jilid 1 (1998), Erlangga, Jakarta

Duane Hanselman & Bruce Littlefield, 1997, *MATLAB Bahasa Komputasi Teknis*, Andi Offset Yogyakarta, Yogyakarta

Friedberg, S. H. Dan Insel, A. J., 1986, *Introduction to Linear Algebra with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

George Nakos dan David Joyner, 1998, *Linear Algebra With Applications*, PWS Publishing Compani, Canada

Laurene V. Fausett, 1995, *Applied Numerical Analisis Using Matlab*, Prentice Hall, New Jersey

Leon, Steven J., 1998, *Linear Algebra with Application*, 5th edition, dialihbahasakan oleh Alit Bondan: Aljabar Linear dan Aplikasinya, Erlangga, Jakarta

Richard L. Burden and J. Douglas Faires, 1993, *Numerical Analisis*, PWS Publishing Compani, Boston