PRINSIP DUALITAS PADA IRISAN KERUCUT

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

CHRISTIANA RETNO PRASETYANINGSIH
NIM : 981414017

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

HALAMAN PERSETUJUAN

SKRIPSI

PRINSIP DUALITAS PADA IRISAN KERUCUT

Oleh

Christiana Retno Prasetyaningsih

NIM : 981414017

Telah Disetujui Oleh

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hw., MA.

Tanggal 3 November 2003

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

PRINSIP DUALITAS PADA IRISAN KERUCUT

Dipersiapkan dan Disusun Oleh

Christiana Retno Prasetyaningsih

NIM : 981414017

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 17 Oktober 2003
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Wanty Widjaja, S.Pd., M.Ed.	....

Yogyakarta, 17 Oktober 2003
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Darma
Dekan,

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.

HALAMAN PERSEMBAHAN

"Segala Perkara Dapat Kutanggung Di Dalam DIA

Yang Memberi Kekuatan Kepadaku"(Filipi 4:13)

Kupersembahkan Karya Ini Kepada Yang Tercinta dan Terkasih :
Gusti Yesus dan Ibu Maria
Bapak dan Ibu
Mas Hary, Mas Widhi dan Dik Arif
Mas Abi

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 17 Oktober 2003

Penulis

Christiana Retno P

ABSTRAK

Tulisan ini membahas tentang " Prinsip Dualitas Pada Irisan Kerucut" dengan mengingat salah satu topik dalam Geometri Euclides yaitu irisan kerucut yang meliputi irisan kerucut yang tak sebenarnya (misal titik, dua garis lurus berpotongan/sejajar, dua garis berimpit) dengan irisan kerucut yang sebenarnya (misal lingkaran, elips, parabola, hiperbola) dan adanya satu sifat yang istimewa dalam Geometri Proyektif yaitu Prinsip Dualitas yang menyatakan bahwa dalam bidang proyektif setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik terletak pada satu garis dengan dua garis melalui satu titik.

Berkas titik merupakan himpunan semua titik yang terletak pada satu garis dualnya, berkas garis merupakan himpunan semua garis yang melalui satu titik. Berkas – berkas itulah yang saling berkorespondensi satu – satu dan dua berkas yang saling berkorespondensi dikatakan perspektif (perspektivitas). Jika korespondensinya merupakan hasil kali dari beberapa perspektivitas disebut proyektivitas.

Dalam Geometri Proyektif dikenal adanya irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis, yang menyatakan bahwa himpunan titik potong semua pasangan garis yang saling berkorespondensi dari dua berkas garis proyektif (tidak perspektif) yang sebidang membentuk suatu kurva disebut irisan kerucut titik. Dualnya, irisan kerucut garis yang merupakan himpunan semua garis penghubung pasangan titik yang berkorespondensi dari dua berkas titik proyektif (tidak perspektif) yang sebidang terletak pada garis yang berlainan. Disinilah terdapat Prinsip Dualitas pada Irisan Kerucut yaitu irisan kerucut titik dualnya irisan kerucut garis dan sebaliknya.

Pada irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis terdapat teorema yang dapat lebih memperjelas berlakunya prinsip dualitas yaitu Teorema Pascal dan Teorema Brianchon.

Teorema Pascal menyatakan jika suatu segienam sederhana merupakan segienam dalam dari suatu irisan kerucut, maka titik potong – titik potong dari tiga pasang sisi yang berhadapan segaris (kolinear).

Teorema Brianchon menyatakan jika suatu sisienam sederhana merupakan sisienam luar dari suatu irisan kerucut, maka garis penghubung – garis penghubung dari tiga pasang titik sudut yang berhadapan berpotongan pada satu titik (konkuren).

Selain berlaku pada segienam, kedua teorema di atas juga berlaku pada segilima sederhana, segiempat sederhana, dan segitiga.

ABSTRACT

This is study about "The principle of duality which holds for conics" in Projective Geometry. It is already known in Euclidean Geometry that conics include the degenerate conics (points, two intersecting lines, two parallel/coincident lines) and the non-degenerate conics (circles, ellipses, parabolas, hyperbolas). One of the most elegant properties of Projective Geometry is the principal of duality, which asserts (in a projective plane) that every definition remains significant and every theorem remains true, when we consistently interchange the words point and line (and consequently lie on and pass through, join and intersection, collinear and concurrent, etc).

A pencil of points is the set of all points on a line. Dually a pencil of lines is the set of all lines through a point. We can have a one-to-one correspondence between two pencils (between a pencil of points and a pencil of llines, between two pencils of points or between two pencils of lines). The correspondence between two pencils is called a perspectivity. The product of any number of perspectivities is called a projectivity.

The intersections of corresponding lines of two projective, non-perspective pencils of lines constitute a curve is called a point conic. Dually the set of all lines joining the corresponding points of two projective, non-perspective pencils of points is called a line conic. We can say a point conic is the dual of a line conic. There are also theorems about a point conic which are duals of theorems about a line conic, especially Pascal's Theorem and Brianchon's Theorem.

Pascal's Theorem : If a simple hexagon $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ is inscribed in a conic, the intersections of the three pairs of opposite sides are collinear.

The dual of this theorem is Brianchon's Theorem : If a simple hexagon $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ is circumsribed about conic, the joins of the three pairs of opposite vertices are concurrent.

By considering a line through two coincident points as a tangent to the conic these theorem are also valid for simple pentagons, simple quadrangles, and triangles.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.

Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata 1 (S1) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Namun demikian perlu disadari bersama bahwa bantuan dari semua pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik berupa bimbingan, pengarahan, petunjuk – petunjuk, kerjasama, dukungan, kritikan maupun saran.

Pada kesempatan ini pula, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A selaku dosen pembimbing 1 yang dengan kesabaran telah membimbing dan memberikan saran – saran kepada penulis selama proses penulisan tugas akhir ini.
2. Bapak Drs. Th. Sugiarto., MT selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberi dukungan atas penulisan tugas akhir ini.
3. Bapak Drs. Th. Sugiarto., MT selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis selama kuliah.

4. Teman – teman PMAT Angkatan 1998 atas dukungan dan kebersamaan yang telah kalian berikan selama ini.
5. Mario, Sugeng, Mirna temen berbagi selama menyelesaikan tugas akhir.
6. Teman – teman di Wisma Cemprenk thanks a lot guys.

Penulis juga menyadari keterbatasan kemampuan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik, sehingga harapan penulis, kiranya semua pihak dapat memberikan kritik dan saran yang membangun untuk kebaikan penulis di masa yang akan datang. Semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi kita semua.

Yogyakarta, 17 Oktober 2003

Penulis,

Christiana Retno P

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

A, B, C, ...	titik – titik
$a, b, c, \ldots$	garis – garis
$\overleftrightarrow{AB}$	garis yang melalui titik A dan B
$\overline{AB}$	segmen garis AB
AB	panjang segmen garis AB
$\angle ABC$	sudut ABC
p(A, B, C, ...)	berkas titik dengan sumbu garis p
P($a, b, c, \ldots$)	berkas garis yang berpusat di titik P
$\doublebarwedge$	perspektivitas
$\barwedge$	proyektivitas

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dalam Geometri dikenal seorang Matematikawan yang bernama Blaise Pascal, yang hidup sekitar tahun 1623 – 1662. Sejak saat itu Pascal sudah dikenal dengan teori – teorinya antara lain segitiga Pascal, segienam Pascal, dan lain – lain. Selain itu diusianya yang ke – 16 dia menemukan suatu teorema yang berlaku pada irisan kerucut, yang kemudian dikenal sebagai Teorema Pascal.

Pada tahun 1785 – 1864 (sekitar 150 tahun kemudian), ada seorang Matematikawan yang bernama C. J. Brianchon yang menemukan teorema yang semacam pada irisan kerucut. Kemudian teorema tersebut dikenal dengan sebutan Teorema Brianchon yang berhubungan dengan Teorema Pascal.

Kedua hal tersebut di atas termasuk dalam Geometri Proyektif, sehingga untuk membahasnya diperlukan hal – hal yang ada dalam Geometri Proyektif. Dengan pengertian pangkalnya adalah titik, garis, dan relasi insidensi.

Enam titik $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ yang sebidang, tiga diantaranya tidak segaris dan garis penghubung – garis penghubung titik sudut – titik sudutnya tertentu disebut segienam sederhana. Untuk suatu segienam dengan titik sudut – titik sudut yang berurutan A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, dan C_2 sisi – sisinya yang berhadapan adalah $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, dan $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2C_1}$. Bidang inilah yang nantinya akan digunakan untuk menggambarkan Teorema Pascal dan Brianchon.

Terdapat juga teorema – teorema dalam Geometri Proyektif yang harus dibuktikan untuk membahas kedua hal tersebut. Selain itu juga digunakan kerucut dan irisannya yang ada dalam Geometri Euclides sebagai gambaran sekilas mengenai Irisan Kerucut, Prinsip Dualitas, Proyektivitas, dan lain – lain. Hal yang menarik dari topik ini adalah hubungan antara keduanya (Teorema Pascal dan Brianchon), karena kedua hal ini muncul pada selang waktu yang cukup lama. Bagaimanakah Prinsip Dualitas digunakan untuk menyatakan hubungan tersebut ? Hal inilah yang melatarbelakangi penulis untuk mendalami konsep Prinsip Dualitas Pada Irisan Kerucut dan menjadikannya sebagai topik skripsi.

B. PERUMUSAN MASALAH

Pokok – pokok perumusan masalah yang akan ditulis

1. Apakah yang dimaksud dengan Prinsip Dualitas ?
2. Bagaimanakah Prinsip Dualitas dapat digunakan untuk menyatakan hubungan antara irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis ?
3. Bagaimanakah Prinsip Dualitas dapat digunakan untuk menyatakan hubungan antara Teorema Pascal dan Brianchon pada irisan kerucut ?

C. TUJUAN PENULISAN

1. Mengenal dan memahami Prinsip Dualitas.
2. Mengetahui hubungan antara irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis dengan menggunakan Prinsip Dualitas.

3. Mengenal dan memahami hubungan antara Teorema Pascal dan Brianchon yang berlaku pada irisan kerucut dengan menggunakan Prinsip Dualitas.

D. MANFAAT PENULISAN

Manfaat dari mempelajari Teorema Pascal dan Brianchon adalah dapat lebih mengenal lebih dalam tentang sifat – sifat pada irisan kerucut. Dan bagi para guru dan mahasiswa calon guru bidang studi Matematika, dapat menambah wawasan mengenai sifat – sifat pada irisan kerucut dan adanya irisan kerucut dalam dan irisan kerucut luar.

E. METODE PEMBAHASAN

Metode yang digunakan adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan yang tercantum dalam daftar pustaka.

F. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Perumusan Masalah

C. Tujuan Penulisan

D. Manfaat Penulisan

E. Metode Pembahasan

F. Sistematika Pembahasan

BAB II

LANDASAN TEORI

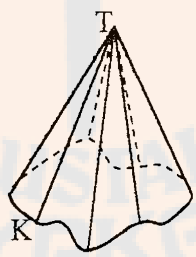
A. IRISAN KERUCUT

Dalam kehidupan sehari – hari banyak dijumpai benda – benda yang berbentuk kerucut. Misal caping, corong, tumpeng, dan lain – lain. Untuk membuat suatu model kerucut tidaklah sukar dan inilah yang dapat memudahkan kita untuk memperlihatkan kerucut beserta beberapa irisannya. Dalam hal ini terdapat beberapa kemungkinan yang terjadi pada irisan kerucut tergantung kepada letak bidang datar yang mengiris suatu kerucut.

A.1. Kerucut dan Irisannya

Definisi II. A. 1

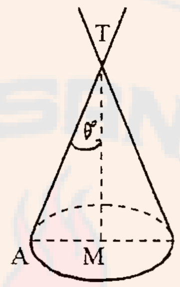
Bidang kerucut atau kerucut ialah tempat kedudukan titik – titik pada garis – garis yang melalui suatu titik T yang tertentu dan memotong garis lengkung K yang tidak sebidang dengan T.



Gambar II.1. a

Garis – garis yang melalui titik T disebut garis – garis pelukis, titik T disebut puncak kerucut, garis lengkung K disebut garis arah (gambar II.1.a). Kerucut lingkaran ialah kerucut yang garis arahnya berbentuk lingkaran. Garis yang menghubungkan puncak dengan pusat lingkaran disebut sumbu kerucut. Jika sumbu itu tegak lurus pada lingkaran, maka kerucut tersebut disebut kerucut lingkaran tegak.

Dalam uraian selanjutnya yang digunakan untuk membuat suatu irisan kerucut adalah kerucut lingkaran tegak tadi (gambar II. 1. b).



Gambar II.1. b

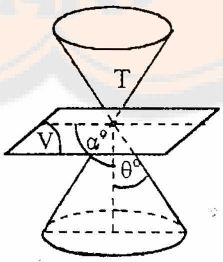
$\overleftrightarrow{TM}$ merupakan sumbu kerucut. Jika $\overleftrightarrow{TA}$ suatu garis pelukis, maka sudut ATM ($\angle ATM = \theta$) adalah setengah sudut puncak kerucut. Kerucut ini dapat pula dipandang terjadi dari garis $\overleftrightarrow{TA}$ yang diputar mengelilingi $\overleftrightarrow{TM}$.

Berikut ini terdapat beberapa kemungkinan dari irisan kerucut, tetapi sebelumnya akan diberikan dahulu mengenai definisi irisan kerucut itu sendiri.

Definisi II. A. 1. a

Irisan kerucut adalah garis potong sebuah bidang datar dengan sebuah kerucut lingkaran tegak.

a. Irisan Kerucut Berupa Titik



Gambar II. 2

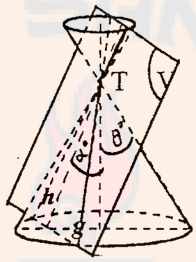
Jika bidang pengiris V melalui titik puncak kerucut T dan $\alpha^\circ > \theta^\circ$ maka irisan bidang datar V dengan kerucut berupa sebuah titik.

Catatan :

α° = besar sudut antara bidang datar V dengan sumbu kerucut.

θ° = besar setengah sudut puncak kerucut

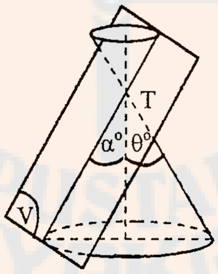
b. Irisan Kerucut Berupa Dua Garis Lurus Berpotongan



Gambar II. 3

Jika bidang pengiris V melalui titik puncak kerucut T dan $\alpha^\circ < \theta^\circ$ maka irisan bidang datar V dengan kerucut berupa dua garis lurus berpotongan di T, yakni garis g dan garis h.

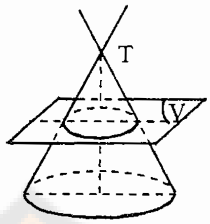
c. Irisan Kerucut Berupa Dua Buah Garis Berimpit



Gambar II. 4

Jika bidang pengiris V melalui titik puncak kerucut T dan $\alpha^\circ = \theta^\circ$ berarti bidang V menyinggung kerucut. Maka irisan bidang V dengan kerucut berupa dua buah garis berimpit.

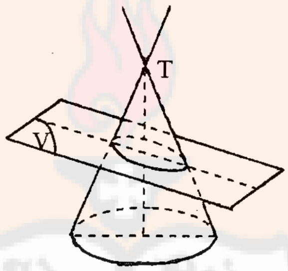
d. Irisan Kerucut Berupa Lingkaran



Gambar II. 5

Jika bidang pengiris V tegak lurus dengan sumbu kerucut maka irisannya berupa lingkaran.

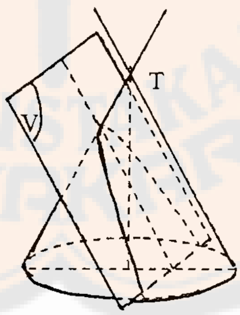
e. Irisan Kerucut Berupa Elips



Gambar II. 6

Jika bidang pengiris V memotong bagian dari suatu kerucut dan $\theta° < \alpha° < 90°$ maka irisannya berupa elips.

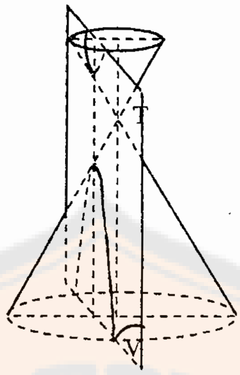
f. Irisan Kerucut Berupa Parabola



Gambar II. 7

Jika bidang pengiris V sejajar terhadap satu garis pelukis dan $\alpha° = \theta°$ maka irisannya berupa parabola.

g. Irisan Kerucut Berupa Hiperbola



Gambar II. 8

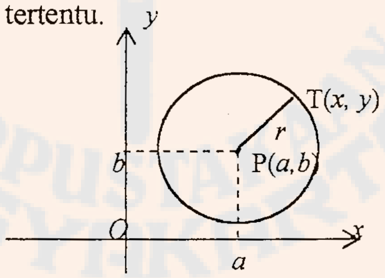
Jika bidang pengiris V memotong bagian dari dua selimut kerucut dan sejajar dengan sumbu kerucut dan $\alpha^{\circ} < \theta^{\circ}$ maka irisannya berupa hiperbola.

Selain beberapa hal di atas mengenai irisan kerucut, di sini irisan kerucut juga mempunyai persamaan kanonik yang menggunakan sistem koordinat kartesius tegak.

a. Persamaan Lingkaran

Definisi II. A. 3

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik sebidang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu.



Gambar II. 9

T(x, y) pada lingkaran, PT adalah jari-jari r .

Lingkaran = { T | PT = r }

$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r\}$$

$$= \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

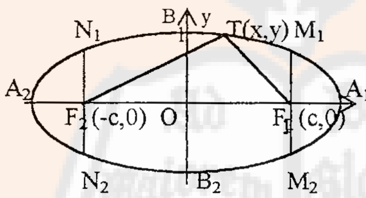
Titik tertentu itu disebut pusat lingkaran (titik P) dan jarak yang sama itu disebut jari – jari atau radius (r).

Jikalau lingkaran tersebut jari – jarinya sama dengan nol maka persamaannya menjadi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ yang berupa suatu titik yang dapat juga dipandang sebagai lingkaran yang tak sebenarnya (lingkaran titik).

b. Persamaan Elips

Definisi II. A. 4

Elips adalah tempat kedudukan titik – titik sebidang yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap sama besarnya.



Gambar II. 10

Persamaan Elips pada bidang kartesius.

Dengan memperhatikan gambar di atas, dimisalkan titik T (x, y) pada elips, berdasarkan definisi di atas, kedua titik tertentu tersebut F_1 dan F_2 dengan $F_1F_2 = 2c$ sehingga F_1 (c, 0) dan F_2 ($-c$, 0) dan jumlah jarak yang tetap itu besarnya $2a$.

Berdasarkan definisi, kita dapat menentukan persamaan elips.

Elips = $\{T \mid TF_1 + TF_2 = 2a\}$

$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\}$

setelah dijabarkan didapat

$= \{(x, y) \mid (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\}$

$= \{(x, y) \mid b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\}$ untuk $b^2 = a^2 - c^2$

Jadi, persamaan elips di atas adalah $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ atau $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

- Titik O disebut pusat elips dan titik F_1 dan F_2 disebut titik api atau fokus elips, sedang sumbu – sumbu simetrinya sumbu x dan sumbu y.
- Ruas garis A_1A_2 disebut sumbu panjang (sumbu mayor), sedang ruas garis B_1B_2 disebut sumbu pendek (sumbu minor).
- Titik – titik A_1, A_2, B_1, dan B_2 disebut puncak – puncak elips dan ruas garis N_1N_2 dan M_1M_2 disebut latus rektum.

Selain pada definisi di atas, elips dapat juga dipandang sebagai tempat kedudukan titik – titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis adalah tetap harganya yang besarnya antara 0 dan 1.

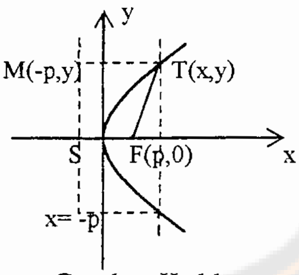
Titik tersebut dinamakan fokus, sedang garisnya disebut direktriks (garis arah) yang persamaannya $x = -\dfrac{a^2}{c}$ dan $x = \dfrac{a^2}{c}$.

Harga tetap itu adalah $\dfrac{c}{a}$ dengan $0 < \dfrac{c}{a} < 1$ dinamakan eksentrisitas suatu elips yang dilambangkan e.

c. Persamaan Parabola

Definisi II. A. 5

Parabola adalah tempat kedudukan titik – titik sebidang yang berjarak sama terhadap sebuah titik dan sebuah garis tertentu.



Gambar II. 11

Dimisalkan T(x,y) pada parabola. Titik yang diketahui pada sumbu x. Misalkan F (p,0) dan jarak F ke garis itu 2p, maka garis tersebut persamaannya $x = -p$. Berdasarkan definisi, maka jarak TF = TM.

Parabola = { T | TF = TM}

$= \{(x,y) \mid \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2}\ \}$

setelah dijabarkan didapat

$= \{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$

Jadi, parabola dengan persamaan $y^2 = 4px$ mempunyai puncak O(0,0); sumbu simetri sumbu x; titik api F (p,0) dan direktriks $x = -p$.

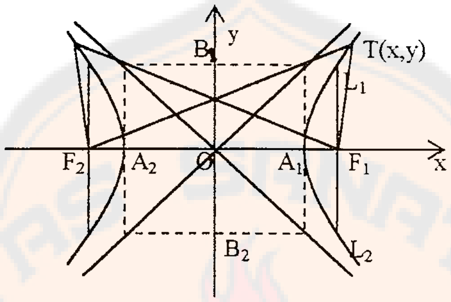
Jika parabola dengan puncak O(0,0) sumbu simetri sumbu y dan direktriks $y = -p$, maka persamaannya adalah $x^2 = 4py$.

Apabila parabola $y^2 = 4px$ ditranslasikan dengan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sedemikian hingga sumbu simetri sejajar sumbu x, maka diperoleh parabola dengan persamaan $(y - b)^2 = 4p(x - a)$, puncak (a,b) dan persamaan direktriks $x = a - p$. Jika parabola dengan puncak (a,b), sumbu simetri sejajar sumbu y yaitu $x = a$ dan direktriks $y = b - p$, maka persamaannya adalah $(x - a)^2 = 4p(y - b)$.

d. Persamaan Hiperbola

Definisi II. A. 6

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik – titik sebidang yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu diketahui besarnya tetap.



Gambar II. 12

Dimisalkan T (x,y) terletak pada hiperbola.

Kedua titik tertentu itu F_1 dan F_2 terletak pada sumbu x dengan F_1 $(c,0)$ dan F_2 $(-c,0)$, $F_1F_2 = 2c$ dan selisih jaraknya yang tetap itu besarnya $2a$.

Hiperbola $= \{T \mid TF_2 - TF_1 = 2a\}$

$= \{(x,y) \mid \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\}$

setelah dijabarkan didapat

$= \{(x,y) \mid (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\}$

oleh karena $c > a$ maka $a^2 - c^2 < 0$, dimisalkan $b^2 = c^2 - a^2$ sehingga didapat hiperbola $= \{(x,y) \mid -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2\}$

$= \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

Jadi, persamaan hiperbola di atas adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dengan memperhatikan persamaan di atas :

- O disebut pusat, F_1 dan F_2 disebut fokus, dan A_1 dan A_2 disebut puncak.
- Ruas garis L_1L_2 disebut latus rektum, sedang $e = \frac{c}{a} > 1$ disebut eksentrisitas.

Dalam hiperbola dikenal adanya asimtot, asimtot ini merupakan sebuah garis lurus yang menyinggung hiperbola di titik jauh tak hingga.

Asimtot – asimtot ini berupa dua garis berpotongan, persamaannya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Jadi, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$

setelah dijabarkan didapat $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

Jadi, asimtot – asimtot hiperbola mempunyai persamaan $y = \pm\frac{b}{a}x$.

A. 2. Garis Singgung

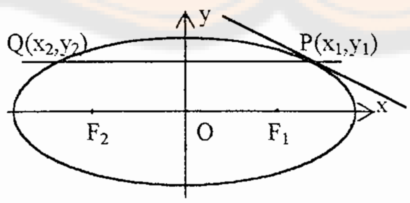
Garis singgung pada kurva merupakan suatu garis yang memotong suatu kurva di dua titik berimpit.

Ada tiga kemungkinan letak garis terhadap elips, yaitu :

1. Garis memotong elips pada dua titik yang berlainan.
2. Garis tidak memotong elips.
3. Garis menyinggung elips.

Garis dikatakan menyinggung elips apabila garis tersebut memotong elips di dua titik berimpit.

1. Garis Singgung pada Elips di Suatu Titik pada Elips



Gambar II.13

Dimisalkan titik P (x_1,y_1) dan Q (x_2,y_2) terletak pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

P pada elips maka berlaku : $\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}=1$

Q pada elips maka berlaku : $\frac{x_2^{\,2}}{a^2}+\frac{y_2^{\,2}}{b^2}=1$ $-$

$$\frac{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}-y_2^{\,2}}{b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$$

Gradien garis $\overrightarrow{PQ}$ = $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ maka $m_{\overrightarrow{PQ}}$ = $-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$

Persamaan garis $\overrightarrow{PQ}$ adalah $y-y_1 = m_{\overrightarrow{PQ}}\ (x-x_1)$

$$\Leftrightarrow y-y_1 = -\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}\ (x-x_1)$$

Jika garis $\overrightarrow{PQ}$ diputar dengan pusat P sedemikian sehingga titik Q berimpit dengan titik P, maka garis $\overrightarrow{PQ}$ ini merupakan garis singgung di titik P.

Karena P dan Q berimpit, maka koordinat – koordinat P sama dengan koordinat – koordinat Q, sehingga $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Persamaan garis singgung elips di P (x_1,y_1) yaitu :

$$y-y_1 = -\frac{2b^2x_1}{2a^2y_1}\ (x-x_1)$$

$$\Leftrightarrow a^2y_1y-a^2y_1^{\,2}=-b^2x_1x+b^2x_1^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^{\,2}+a^2y_1^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$$

Jadi, persamaan garis singgung pada elips di P (x_1,y_1) adalah $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh persamaan garis singgung pada parabola di P (x_1,y_1) yaitu $y_1 y = 2p(x + x_1)$ sedang pada hiperbola diperoleh $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

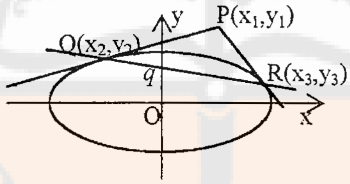
2. Garis Singgung pada Elips dari Suatu Titik di Luar Elips

Salah satu cara untuk menentukan persamaan garis singgung elips dari suatu titik di luar elips adalah dengan menentukan garis kutub (*polar*) titik tersebut.

Definisi II. A. 7

Jika dari sebuah titik P (x_1,y_1) di luar suatu elips ditarik dua buah garis singgung, maka garis penghubung q antara kedua titik singgungnya disebut garis kutub (*polar*) P terhadap elips.

P disebut kutub garis q.



Gambar II. 14

Dimisalkan P (x_1,y_1) terletak di luar elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Q ($x_2$,$y_2$) dan R ($x_3$,$y_3$) adalah titik – titik singgung kedua garis singgung dari P (x_1,y_1), maka :

- pada $\overleftrightarrow{PQ}$ berlaku $\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$ ... (1)
- pada $\overleftrightarrow{PR}$ berlaku $\frac{x_3 x}{a^2} + \frac{y_3 y}{b^2} = 1$ ... (2)

Jika titik P terletak pada (1) berarti $\frac{x_2x_1}{a^2}+\frac{y_2y_1}{b^2}=1$. ... (3)

Jika titik P terletak pada (2) berarti $\frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}=1$. ... (4)

Dari (3) dan (4), maka dapat dinyatakan bahwa titik Q dan R terletak pada $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ ... (5).

Hal ini menyatakan (5) ditentukan oleh titik Q dan R atau $\overleftrightarrow{QR}$ merupakan garis kutub (*polar*) titik P (x_1,y_1).

Jadi, persamaan garis kutub titik P (x_1,y_1) terhadap elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

Dengan mengulang cara yang sama diperoleh persamaan garis singgung pada parabola di P(x_1,y_1) yaitu $y_1y=2p(x+x_1)$ sedang pada hiperbola persamaan garis singgungnya di P(x_1,y_1) adalah $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

B. PENGERTIAN PANGKAL DAN AKSIOMA – AKSIOMA DALAM GEOMETRI PROYEKTIF

Prinsip Dualitas merupakan suatu hal yang istimewa dalam Geometri Proyektif. Untuk itu sebelumnya akan diawali dengan pengertian pangkal dan aksioma – aksioma dalam Geometri Proyektif.

Geometri Proyektif dapat dipelajari secara sintetik atau secara analitik. Untuk kali ini, Geometri Proyektif dipandang sebagai suatu sistem yang deduktif yang didasarkan atas pengertian pangkal, definisi, dan beberapa aksioma. Geometri ini kemudian dikenal sebagai Geometri Proyektif yang sintetik.

Dalam Geometri Proyektif tidak pernah dibicarakan tentang lingkaran, jarak, sudut, keantaraan, dan kesejajaran. Selain itu dalam geometri ini terdapat sifat – sifat proyektif yaitu sifat dari suatu bangun yang tidak berubah oleh setiap transformasi proyektif. Letak segaris atau kolinearitas dari titik – titik dan perpotongan pada satu titik atau konkurensi dari garis – garis adalah sifat – sifat suatu bangun yang tidak berubah oleh suatu transformasi proyektif.

Pengertian pangkal dari Geometri Proyektif ialah titik, garis, dan relasi insidensi. Suatu titik atau garis dikatakan insiden jika titik itu terletak pada garis tersebut atau garis tersebut melalui titik tadi.

Berikut akan diberikan aksioma – aksioma pendahuluan yang terdapat pada Geometri Proyektif.

Aksioma II. B. 1

Jika A dan B dua titik yang berlainan, maka terdapat paling sedikit satu garis yang melalui kedua titik tersebut.

Aksioma II. B. 2

Jika A dan B dua titik yang berlainan, maka terdapat paling banyak satu garis yang melalui kedua titik tersebut.

Aksioma II. B. 3

Jika p dan q dua garis yang berlainan, maka terdapat paling sedikit satu titik yang terletak pada kedua garis tersebut.

Aksioma II. B. 4

Terdapat paling sedikit tiga titik yang berlainan pada sebarang garis.

Aksioma II. B. 5

Tidak semua titik terletak pada garis yang sama.

Setelah dengan beberapa aksioma pendahuluan, diperoleh beberapa definisi dalam bidang proyektif.

Definisi II. B. 1

Tiga titik tidak segaris adalah titik sudut – titik sudut suatu segitiga yang sisi – sisinya garis – garis lengkap.

Definisi II. B. 2

Jika empat titik dalam bidang dihubungkan berpasangan dengan enam garis maka titik – titik itu disebut titik – titik suatu segiempat lengkap dan garis – garis itu disebut sisi – sisinya.

Definisi II. B. 3

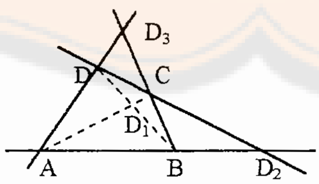
Dua sisi dikatakan berhadapan jika sisi – sisi itu tidak mempunyai titik sudut persekutuan.

Definisi II. B. 4

Titik potong dua sisi berhadapan disebut titik diagonal.

Definisi II. B. 5

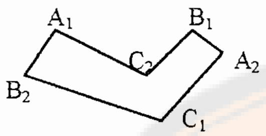
Ada tiga titik diagonal pada segiempat lengkap.



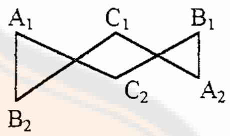
Gambar II. 15

Definisi II. B. 6

Suatu segienam (*heksagon*) $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ mempunyai enam titik sudut A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, C_2, dan enam sisi $\overline{A_1B_2}, \overline{B_2C_1}, \overline{C_1A_2}, \overline{A_2B_1}, \overline{B_1C_2}, \overline{C_2A_1}$.



Gambar II. 16. a



Gambar II. 16. b

Setelah dengan beberapa aksioma pendahuluan dan beberapa definisi dalam bidang proyektif kita dapat memulai dengan beberapa aksioma yang penting dalam bidang proyektif.

Aksioma II. B. 6

Sebarang dua titik berlainan insiden dengan tepat satu garis.

Garis yang menghubungkan titik A dan B dinyatakan dengan $\overleftrightarrow{AB}$.

Aksioma II. B. 7

Sebarang dua garis insiden dengan paling sedikit satu titik.

Titik potong dua garis a dan b dinyatakan dengan $a.b$.

Titik potong garis – garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ dinyatakan dengan $\overleftrightarrow{AB} \,.\, \overleftrightarrow{CD}$.

Garis yang menghubungkan $a.b$ dan $c.d$ dinyatakan dengan $(a.b)(c.d)$.

Dalil II. B. 7. a

Sebarang dua garis yang berlainan insiden dengan tepat satu titik.

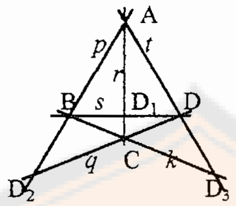
Bukti : Andaikan kedua garis berlainan itu insiden dengan dua titik, maka menurut aksioma II. B. 6 maka kedua garis itu berimpit.

Aksioma II. B. 8

Ada empat titik yang tiga diantaranya tidak segaris.

Aksioma II. B. 9 (Aksioma Fano)

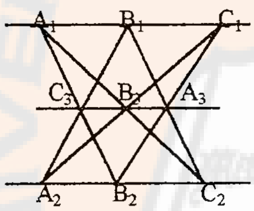
Ketiga titik diagonal dari suatu segiempat lengkap tidak pernah segaris.

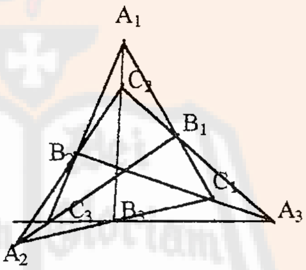


Gambar II. 17

Aksioma II. B. 10 (Teorema Pappus)

Jika keenam titik sudut dari suatu segienam (*heksagon*) terletak bergantian pada dua garis, maka ketiga titik potong – titik potong sisi – sisi yang berhadapan segaris.





Gambar II. 18. a Gambar II. 18. b

Dalam aksioma II. B.10 terdapat 9 titik dan 9 garis yang dapat dilukis dalam beberapa cara seperti pada gambar II. 18. a dan gambar II. 18. b.

$A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ merupakan segienam (*heksagon*) yang terbentuk dari dua garis $\overleftrightarrow{A_1B_1C_1}$ dan $\overleftrightarrow{A_2B_2C_2}$ dengan titik – titik yang menghubungkan pasangan titik yang sisinya berhadapan adalah $A_3 = \overleftrightarrow{B_1C_2}.\overleftrightarrow{B_2C_1}$; $B_3 = \overleftrightarrow{A_1C_2}.\overleftrightarrow{A_2C_1}$; $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2}.\overleftrightarrow{A_2B_1}$.

Aksioma ini menyatakan bahwa ketiga titik itu segaris.

Tiga titik A_i, B_j, C_k segaris bila $i + j + k \equiv 0$ (modulo 3). Dan kita dapat pula menyusun 9 titik tadi dalam bentuk matriks.

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$$

Bagaimanapun letak kedua garis itu, tentu $\overline{A_1B_2}.\overline{A_2B_1}$, $\overline{B_1C_2}.\overline{B_2C_1}$, dan $\overline{A_1C_2}.\overline{A_2C_1}$ akan segaris atau C_3, A_3, dan B_3 segaris.

Setelah cukup dengan mempelajari pengertian pangkal dan aksioma-aksioma dalam Geometri Proyektif, maka kita dapat mulai dengan Prinsip Dualitas.

C. PRINSIP DUALITAS

Dalam geometri proyektif terdapat satu sifat yang istimewa yaitu Prinsip Dualitas yang menyatakan bahwa dalam bidang proyektif setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema/dalil tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik terletak pada suatu garis dengan dua garis melalui satu titik, dua titik yang dihubungkan oleh satu garis dengan dua garis yang berpotongan pada suatu titik (dua titik yang kolinear dengan dua garis yang konkuren).

Sebagai contoh, hal yang paling mudah untuk dinyatakan dualnya adalah

- Terdapat dua titik berlainan yang menentukan sebuah garis.
- Terdapat dua garis berlainan yang menentukan sebuah titik.

Dua pernyataan di atas saling dual jika kata titik dan garis ditukar satu sama lain.

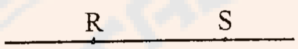
Untuk menunjukkan kebenaran prinsip ini cukup ditunjukkan bahwa aksioma – aksioma menyatakan dualnya sendiri. Jadi jika terdapat suatu dalil dengan buktinya, maka akan dapat langsung dinyatakan dual dari dalil itu beserta buktinya.

Berikut terdapat beberapa teorema yang akan membuktikan adanya Prinsip Dualitas.

Teorema II. C. 1

Jika p dan q dua garis yang berlainan, maka terdapat paling banyak satu titik yang terletak pada kedua garis tersebut.

Bukti :



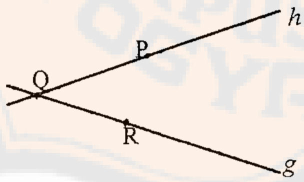
Gambar II. 19

Berdasarkan aksioma II. B. 3 tedapat paling sedikit satu titik R pada garis p dan q. Diandaikan terdapat dua titik R dan S dengan R $\neq$ S pada garis p dan q. Maka pada titik yang berlainan R dan S terdapat dua garis yang berlainan. Hal ini bertentangan dengan aksioma II. B. 2.

Teorema II. C. 2

Tidak semua garis melalui suatu titik yang sama (Tidak semua garis berpotongan pada satu titik yang sama).

Bukti :



Gambar II. 20

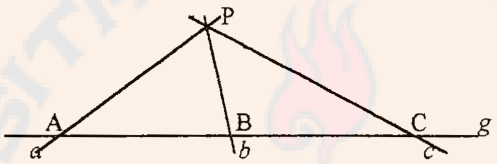
Diambil P suatu titik dan h suatu garis. Jika P tidak pada h maka bukti selesai (banyak garis melalui P tetapi h tidak melalui P).

Dimisalkan bahwa P terletak pada h dan diambil Q $\neq$ P suatu titik lain pada h (aksioma II. B. 4) dan R suatu titik tidak pada h (aksioma II. B. 5). Karena R $\neq$ Q, maka berdasarkan aksioma II. B. 1 terdapat garis $g = \overleftrightarrow{QR}$ melalui Q dan R. Karena $g.h$ = Q dan P $\neq$ Q, maka g tidak melalui P (teorema II. C. 1).

Teorema II. C. 3

Terdapat paling sedikit tiga garis yang berlainan melalui sebarang titik.

Bukti :



Gambar II. 21

Diambil P suatu titik dan g suatu garis tidak melalui P (teorema II. C. 2). Pada g dibuat tiga titik yang berlainan (aksioma II. B. 4) kita sebut saja titik A, B, dan C. Jika P tidak pada g, maka P $\neq$ A, P $\neq$ B, P $\neq$ C, dan juga $a = \overleftrightarrow{PA}$, $b = \overleftrightarrow{PB}$, $c = \overleftrightarrow{PC}$ adalah tiga garis yang melalui P. Diperhatikan garis a dan b, karena $a.g$ = A, $b.g$ = B, dan B $\neq$ A, maka B tidak pada a dan A tidak pada b. Jadi $a \neq b$. Dengan mengulangi alasan – alasan di atas didapat $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

Sekarang kita mempunyai beberapa aksioma dan teorema yang merupakan pasangan dual, yaitu aksioma II. B. 1 dengan aksioma II. B. 3, aksioma II. B. 2 dengan teorema II. C. 1, aksioma II. B. 4 dengan teorema II. C. 3, dan aksioma II. B. 5 dengan teorema II. C. 2 yang terdiri dari empat pernyataan beserta pasangan dualnya.

Berikut ini akan diberikan dualitas dari aksioma – aksioma yang terdapat dalam bidang proyektif, untuk memberikan bukti yang lebih lengkap bahwa Prinsip Dualitas berlaku dalam Geometri Proyektif.

Dual aksioma II. B. 6 (Dalil II. B. 7. a)

Sebarang dua garis berlainan insiden dengan tepat satu titik.

Dual aksioma II. B. 7 (Separo dari aksioma II. B. 6)

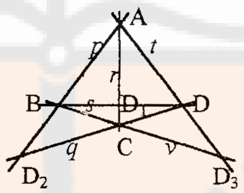
Sebarang dua titik insiden dengan paling sedikit satu garis.

Dual aksioma II. B. 8

Ada empat garis yang tiga diantaranya tidak berpotongan pada satu titik.

Dual dari aksioma ini menyatakan adanya suatu sisiempat lengkap, yaitu suatu himpunan empat garis potong memotong berpasangan pada enam titik. Garis - garis itu disebut sisi-sisinya dan titik potong - titik potong itu adalah titik sudut - titik sudutnya.

Segiempat ABCD



Gambar II. 22. a

Sisi – sisinya $\overleftrightarrow{AB} = p$, $\overleftrightarrow{BC} = v$, $\overleftrightarrow{CD} = q$, $\overleftrightarrow{AD} = t$, $\overleftrightarrow{AC} = r$, $\overleftrightarrow{BD} = s$.

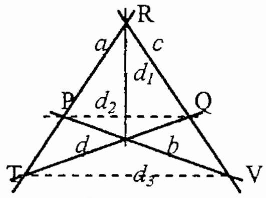
$\overleftrightarrow{AC} \cdot \overleftrightarrow{BD} = D_1$

$\overleftrightarrow{AB} \cdot \overleftrightarrow{CD} = D_2$

$\overleftrightarrow{AD} \cdot \overleftrightarrow{BC} = D_3$

Titik – titik diagonalnya D_1, D_2, dan D_3.

Sisiempat *abcd*



Gambar II. 22. b

Titik sudut – titik sudutnya $a.b$ = P, $b.c$ = V, $c.d$ = Q, $d.a$ = T, $a.c$ = R, $b.d$ = S.

Diagonal – diagonalnya

$(a.c)(b.d) = \overleftrightarrow{RS} = d_1$

$(a.b)(b.d) = \overleftrightarrow{PQ} = d_2$

$(a.d)(b.c) = \overleftrightarrow{TV} = d_3$

Segiempat lengkap terdiri dari empat titik sudut, enam sisi, dan tiga titik diagonal.

Sisiempat lengkap terdiri dari empat sisi, enam titik sudut, dan tiga diagonal.

Dalam dual aksioma ini dua titik sudut dikatakan berhadapan jika titik – titik itu tidak dihubungkan oleh sebuah sisi dan ketiga garis penghubung titik sudut – titik sudut berhadapan disebut diagonal.

Dual aksioma II. B. 9

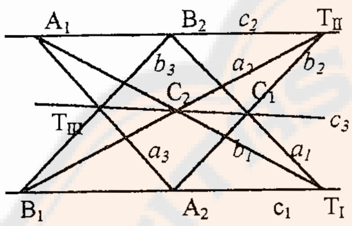
Ketiga diagonal dari suatu sisiempat lengkap tidak pernah berpotongan pada satu titik.

Dengan memperhatikan gambar II. 22. b, untuk menjelaskan dual dari aksioma II. B. 9 dapat diandaikan bahwa dual dari aksioma II. B. 9 tidak benar. Maka terdapat suatu sisiempat *abcd* sedemikian hingga d_1, d_2, d_3 berpotongan pada satu titik. Dimisalkan titik potong d_1 dan d_2 adalah D_1, maka D_1 yaitu titik potong $\overleftrightarrow{PQ}$

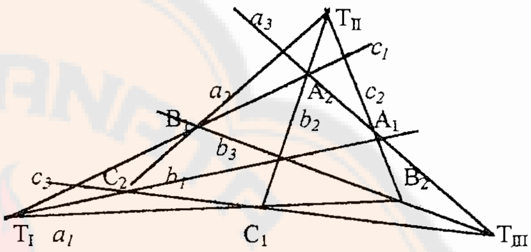
dan $\overrightarrow{RS}$ harus terletak di d_3. D_1 tidak mungkin terletak pada d_3. Berarti tidak mungkin d_1, d_2, dan d_3 berpotongan pada satu titik. Pengandaian salah.

Dual aksioma II. B. 10

Jika keenam sisi dari suatu sisienam berpotongan bergantian pada dua titik, maka ketiga garis penghubung titik sudut yang berhadapan melalui satu titik.



Gambar II. 23. a



Gambar II. 23. b

Terdapat enam sisi dari sisienam $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ yang sisi – sisinya a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 (gambar II. 23. a dan II. 23. b) maka $a_1.b_2 = C_1$ dan $a_2.b_1 = C_2$; $b_1.c_2 = A_1$ dan $b_2.c_1 = A_2$; $c_1.a_2 = B_1$ dan $c_2.a_1 = B_2$ sehingga $c_3 = \overline{C_1C_2}$, $b_3 = \overline{B_1B_2}$, dan $a_3 = \overline{A_1A_2}$.

$a_1.b_2$ berhadapan dengan $a_2.b_1$ ($\angle C_1$ berhadapan dengan $\angle C_2$).

$a_1.c_2$ berhadapan dengan $a_2.c_1$ ($\angle B_2$ berhadapan dengan $\angle B_1$).

$b_1.c_2$ berhadapan dengan $b_2.c_1$ ($\angle A_1$ berhadapan dengan $\angle A_2$).

Pada gambar di atas terlihat bahwa a_1, b_1, dan c_1 berpotongan di T_I, a_2, b_2, dan c_2 berpotongan di T_{II}, dan a_3, b_3, dan c_3 berpotongan di T_{III}.

Dalam bentuk matriks dapat disusun sebagai berikut

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$$

BAB III

PROYEKTIVITAS

A. PERSPEKTIVITAS

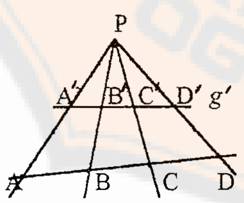
Perspektivitas merupakan dasar dari proyektivitas, maka sebelum sampai pada proyektivitas terlebih dahulu akan dibahas mengenai perspektivitas.

Dalam kehidupan sehari – hari secara tidak sadar kita telah menggunakan sifat – sifat yang dasar dari perspektivitas, misalnya penggunaan cermin.

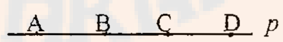
Titik – titik pada cermin adalah perspektif dari titik – titik pada bayangan terhadap (dari) mata. Demikian pula dengan titik – titik pada cermin perspektif dengan titik – titik pada benda terhadap bayangan mata.

Terdapat dua buah garis yaitu g dan g', titik – titik pada garis g dan g' dikatakan perspektif terhadap titik P, jika garis – garis yang menghubungkan titik – titik yang berkorespondensi semuanya melalui P.

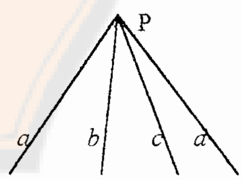
Titik P disebut titik pusat perspektivitas dan garis – garis melalui P disebut proyektor dari titik – titik dari berkas itu.



Gambar III. 1. a



Gambar III. 1. b



Gambar III. 1. c

Semua titik yang terletak pada suatu garis disebut berkas titik. Berkas titik yang terletak pada garis p (Gb. III.1. b) dapat dinyatakan dengan

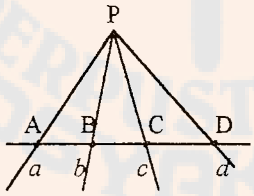
p(A, B, C, D, ...) dan A, B, C, D, ... berlainan serta garis p disebut dasar/sumbu dari berkas.

Dengan mengingat adanya Prinsip Dualitas maka dual dari pernyataan di depan dapat dinyatakan sebagai berikut :

Semua garis yang berpotongan pada suatu titik disebut berkas garis. Berkas garis tersebut berpusat di P (Gb. III.1.c) dan dapat dinyatakan dengan P(a, b, c, d, ...) dan a, b, c, d, ... merupakan unsur – unsurnya yang berlainan serta titik P disebut titik pusat berkas.

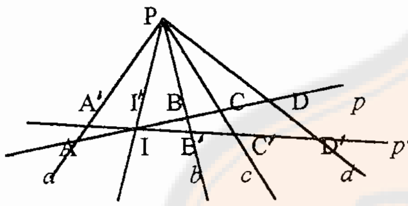
Suatu korespondensi satu – satu ada antara unsur – unsur dua berkas yang diberikan jika ada aturan tertentu yang mengawankan setiap unsur dari berkas yang satu secara tunggal dengan unsur pada berkas yang lain dan sebaliknya. Dengan demikian, jika ada korespondensi antara dua berkas maka setiap unsur dan kawannya disebut unsur – unsur yang berkorespondensi. Korespondensi identitas yang mengawankan setiap unsur dengan dirinya sendiri merupakan contoh trivial.

Dapat diperhatikan gambar III. 2 berikut

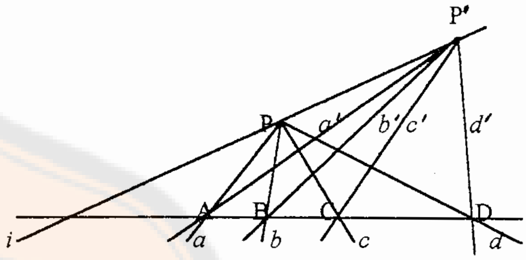


Gambar III. 2

Terdapat suatu berkas garis P(a, b, c, d, ...) yang dipotong oleh sebarang garis p yang tidak melalui P. Maka terdapat korespondensi satu – satu antara berkas garis dan berkas titik (pada p). Untuk setiap garis pada berkas garis yang berpusat di P berkorespondensi secara tunggal dengan suatu titik pada p. Selain itu korespondensi antara garis dan titik dapat dibalik, yaitu setiap titik pada berkas titik p berkorespondensi secara tunggal dengan suatu garis dari berkas garis yang berpusat di P.



Gambar III. 3. a



Gambar III. 3. b

Gambar III. 2 menggambarkan korespondensi satu – satu yang disebut dengan perspektivitas dan dapat ditulis P(a, b, c, d, ...) $\overline{\wedge}$ p(A, B, C, D, ...) dengan demikian dapat dikatakan bahwa berkas garis P(a, b, c, d, ...) perspektif dengan berkas titik p(A, B, C, D, ...) dan sebaliknya p(A, B, C, D, ...) $\overline{\wedge}$ P(a, b, c, d, ...). Untuk selanjutnya hal di atas disebut sebagai perspektivitas elementer.

Pada gambar III. 3. a terdapat berkas garis P(a, b, c, d, ...) yang dipotong oleh dua garis yang berlainan p dan p', keduanya tidak melalui P. Berdasarkan keterangan pada Gb. III. 2, pada Gb. III. 3. a terdapat dua perspektivitas elementer yaitu P(a, b, c, d, ...) $\overline{\wedge}$ p(A, B, C, D, ...) dan P(a, b, c, d, ...) $\overline{\wedge}$ $p'(A',B',C',D',...)$.

Kedua perspektivitas elementer tersebut dapat juga ditulis

p(A, B, C, D, ...) $\overline{\wedge}$ P(a, b, c, d, ...) $\overline{\wedge}$ $p'(A',B',C',D',...)$.

Gambar III. 3. b merupakan dual dari Gb. III. 3. a, sehingga perspektivitasnya P(a, b, c, d, ...) $\overline{\wedge}$ p(A, B, C, D, ...) $\overline{\wedge}$ $P'(a',b',c',d',...)$.

Setelah jelas dengan korespondensi satu – satu antara berkas titik pada p dan p' (A dan A', B dan B', C dan C', ...) dapat ditetapkan bahwa anggota berkas titik pada p dan p' dilalui anggota berkas garis yang berpusat di P dan dapat ditulis $p(A, B, C, D, ...) \overset{P}{\overline{\wedge}} p'(A', B', C', D', ...)$.

Definisi III. A. 1

Dua berkas titik pada dua garis yang berlainan p dan p' dikatakan perspektif terhadap suatu titik P, jika garis penghubung dari titik – titik yang berkorespondensi dari p dan p' melalui P.

Pada perspektivitas di atas, satu titik yang berada pada p dan p' mempunyai peran khusus. Diambil suatu titik yaitu I sebagai titik pada p dan I′ sebagai titik pada p'. Maka titik yang berkorespondensi dengan I adalah I = I′ dan I berkorespondensi dengan dirinya sendiri atau titik invarian pada perspektivitas.

Teorema III. A. 1

Dalam perspektivitas antara dua berkas titik pada garis yang berlainan p dan p', titik I = $p. p'$ berkorespondensi dengan dirinya sendiri.

Bukti :

Terdapat perspektivitas antara dua berkas titik pada garis yang berlainan p dan p'.

Akan dibuktikan I = $p. p'$ berkorespondensi dengan dirinya sendiri.

Dimisalkan I suatu anggota berkas titik pada p dan I′ pada p'. Karena anggota kedua berkas titik p dan p' perspektif maka I perspektif dengan I′, berarti I dan I′ berkorespondensi. Dengan demikian p dan p' dua garis yang berpotongan di $I = I'$ (Gb. III. 3. a). Dengan kata lain $I = p.p'$ berkorespondensi dengan dirinya sendiri.

Jika diketahui sebarang dua titik B dan C pada p yang berkorespondensi dengan B' dan C' pada p', maka garis penghubung pasangan titik yang berkorespondensi BB' dan CC' melalui pusat P.

Teorema III. A. 2

Sebarang perspektivitas antara dua berkas titik pada garis yang berlainan p dan p' tertentu dengan tunggal oleh sebarang dua titik yang berlainan pada p yang bukan $p.p'$, yang korespondensinya pada p' diketahui.

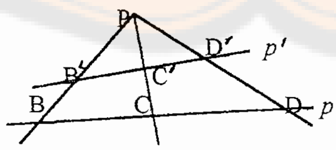
Bukti :

Terdapat dua berkas titik pada garis yang berlainan p dan p', titik – titik pada p dan p' saling berkorespondensi.

Akan dibuktikan bahwa sebarang perspektivitas antara dua berkas titik tertentu dengan tunggal oleh sebarang dua titik pada salah satu berkas.

Dimisalkan terdapat dua titik pada p yaitu B dan C yang berkorespondensi dengan B' dan C' yang merupakan anggota dari p'. Berdasarkan definisi III. A. 1 dan pernyataan di atas, maka terdapat garis penghubung dari B ke B' dan dari C ke C' yang melalui suatu titik P.

Jika dilukis suatu titik D pada p maka korespondensinya D' pada p', sehingga garis penghubung D ke D' melalui P.



Gambar III. 4

Dual dari perspektivitas antara dua berkas titik yang ada pada garis yang berlainan adalah perspektivitas antara dua berkas garis yang melalui titik yang berlainan.

Definisi III. A. 2

Dua berkas garis P(a, b, c, d, ...) dan $\mathrm{P}'(a', b', c', d', \ldots)$ melalui titik yang berlainan dikatakan perspektif terhadap garis p, jika titik potong – titik potong dari anggota berkas yang berkorespondensi terletak pada garis p.

Perspektivitas tersebut sesuai dengan Gambar III. 3. b dan dapat ditulis $\mathrm{P}(a, b, c, d, \ldots) \overset{p}{\barwedge} \mathrm{P}'(a', b', c', d', \ldots)$ dengan garis p sebagai sumbu perspektivitas.

Untuk perspektivitas seperti di atas juga berlaku Prinsip Dualitas.

Dual teorema III. A. 1

Dalam setiap perspektivitas antara dua berkas garis yang berpusat pada dua titik yang berlainan P dan P$'$, garis $i = \overleftrightarrow{\mathrm{PP}'}$ berkorespondensi dengan dirinya sendiri.

Dual teorema III. A. 2

Sebarang perspektivitas antara dua berkas garis yang berpusat di dua titik yang berlainan P dan P$'$ tertentu dengan tunggal oleh sebarang dua garis yang melalui P yang bukan $\overleftrightarrow{\mathrm{PP}'}$ dan korespondensinya yang melalui P$'$ diketahui.

Pernyataan pada dua teorema tersebut beserta dualnya dapat digambarkan seperti pada Gb. III. 3. a dan Gb. III. 3. b.

B. POSTULAT – POSTULAT GEOMETRI PROYEKTIF

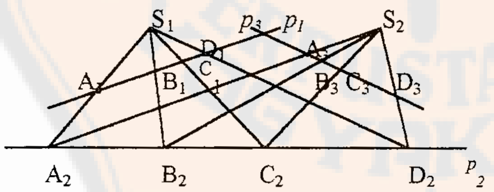
B. 1. Pengertian Proyektivitas

Dalam bahasan yang telah lalu, kita membicarakan tentang perspektivitas yang merupakan dasar dari proyektivitas.

Suatu berkas titik merupakan himpunan semua titik yang terletak pada satu garis. Dualnya, suatu berkas garis merupakan himpunan semua garis yang melalui satu titik. Kita telah mengenal korespondensi satu – satu antara unsur – unsur dari dua buah berkas titik (garis) yang dikenal dengan sebutan perspektivitas.

Untuk kali ini kita akan menggunakan konsep yang telah ada dalam perspektivitas untuk mempelajari proyektivitas.

Suatu perspektivitas $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots) \stackrel{S_1}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots)$ telah didefinisikan pada bahasan yang lalu, yaitu merupakan korespondensi satu – satu antara dua berkas titik pada garis yang berlainan sehingga garis penghubung titik – titik tersebut berpusat di titik S_1. Suatu perspektivitas dapat dianggap sebagai transformasi, karena perspektivitas merupakan suatu cara untuk menghubungkan himpunan titik pada p_1 ke himpunan titik pada p_3.



Gambar III. 5

Sehingga korespondensi satu – satu antara dua berkas titik disebut proyektivitas, yang dapat ditulis sebagai berikut :

$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots) \overset{S_1}{\doublebarwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots) \overset{S_2}{\doublebarwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \ldots)$ atau

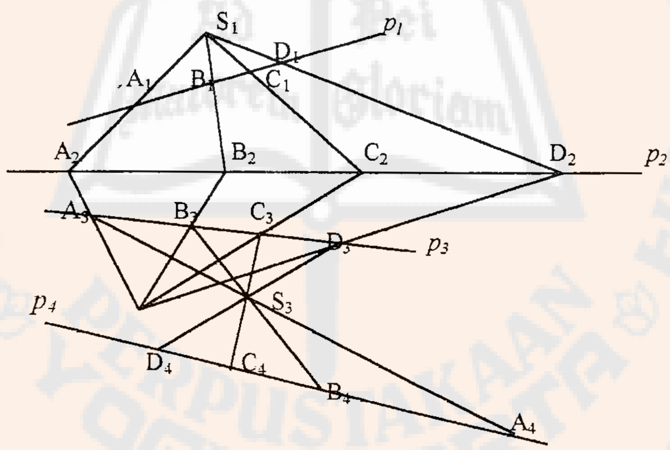
$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots) \barwedge p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \ldots)$

Definisi III. B. 1

Suatu korespondensi satu – satu antara dua berkas titik (garis) disebut suatu proyektivitas, asalkan korespondensinya merupakan hasil kali dari beberapa perspektivitas.

Gambar III. 6 berikut merupakan gambaran suatu proyektivitas antara dua berkas titik pada garis yang berlainan $p_1(A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots) \barwedge p_4(A_4,B_4,C_4,D_4, \ldots)$ yang merupakan hasil kali beberapa perspektivitas

$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1,\ldots) \overset{S_1}{\doublebarwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2,\ldots) \overset{S_2}{\doublebarwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3,\ldots) \overset{S_3}{\doublebarwedge} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4,\ldots)$



Gambar III. 6

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa p_1 dan p_4 proyektif atau $p_1 \barwedge p_4$.

Antara dua bangun yang proyektif selalu ada korespondensi satu – satu antara unsur – unsurnya. Jadi perspektivitas merupakan kejadian khusus dari proyektivitas.

B. 2. Teorema Dalam Proyektivitas

Definisi mengenai proyektivitas di depan sangatlah umum. Sekarang kita bermaksud untuk membuktikan teorema yang diakhiri dengan teorema Fundamental dari Geometri Proyektif, untuk mempermudah kita menyelesaikan kerumitan yang ada.

Teorema III. B. 2. a

Sebarang tiga titik pada suatu garis u adalah proyektif dengan sebarang tiga titik pada garis u' dengan menggunakan dua pusat perspektivitas.

Bukti :

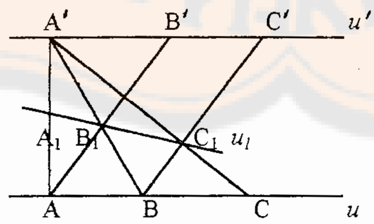
Terdapat dua garis berlainan u dan u'.

Akan dibuktikan bahwa sebarang tiga titik pada u proyektif dengan sebarang tiga titik pada u'.

Dimisalkan A, B, C pada u dan A', B', C' pada u'.

A dan A' sebagai pusat perspektivitas.

Dengan pusat A' dapat diproyeksikan A, B, C ke A_1, B_1, C_1 dan dengan pusat A didapat proyeksi A', B', C' dari A_1, B_1, C_1. Seperti pada gambar III. 7 berikut dan dimisalkan garis u_1 melalui A_1, B_1, C_1 sehingga didapat $u(A, B, C) \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} u_1(A_1, B_1, C_1) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} u'(A', B', C')$. Jadi $u(A, B, C) \,\overline{\wedge}\, u'(A', B', C')$.



Gambar III. 7

Menurut aksioma II. B. 10, sumbu $A_1B_1C_1$ merupakan garis *Pappus* dari segienam $AB'CA'BC'$. Selain itu juga terdapat titik potong $\overline{BC'}.\overline{B'C}$ yang juga merupakan anggota dari garis *pappus*.

Akibat

Sebarang tiga titik dari sebuah garis dapat diproyeksikan ke sebarang tiga titik dari garis yang sama dengan tidak lebih dari tiga perspektivitas.

Bukti :

Terdapat satu garis yang memuat sebarang tiga titik.

Akan dibuktikan bahwa sebarang tiga titik pada suatu garis proyektif dengan sebarang tiga titik dari garis yang sama dengan tiga perspektivitas.

Dimisalkan A, B, C pada l dan A',B',C' juga pada l. O sebagai pusat perspektivitas.

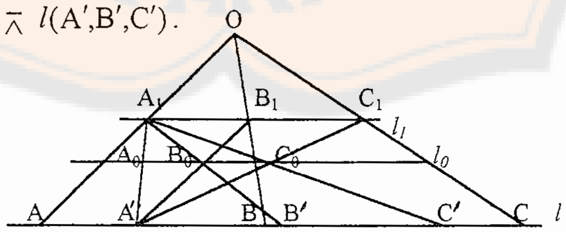
Dapat dilukis sebarang garis l_1 yang memuat A_1, B_1, C_1 yang perspektif dengan A, B, C dengan pusat O.

Dengan pusat A' dapat diproyeksikan A_1, B_1, C_1 ke A_0, B_0, C_0 dan dengan pusat A_1 didapat proyeksi A',B',C' dari A_0, B_0, C_0.

Seperti pada Gb. III. 8 berikut dan dimisalkan garis l_0 melalui A_0, B_0, C_0

sehingga $l(A, B, C) \overset{O}{\barwedge} l_1(A_1, B_1, C_1) \overset{A'}{\barwedge} l_0\,(A_0, B_0, C_0) \overset{A_1}{\barwedge} l(A',B',C')$.

Jadi $l(A, B, C) \barwedge l(A',B',C')$.



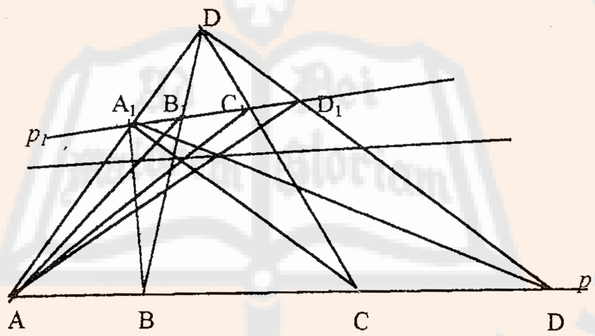
Gambar III. 8

Telah diperlihatkan di depan bahwa sebarang tiga titik berlainan pada suatu garis oleh suatu transformasi proyektif berkorespondensi dengan sebarang tiga titik pada garis yang lain.

Lemma III. B. 2

Jika suatu proyektivitas membiarkan setiap tiga titik berlainan pada suatu garis invarian, maka akan membiarkan setiap titik pada suatu garis invarian (transformasi identitas).

Suatu proyektivitas $D \barwedge D'$ pada satu garis dapat mempunyai satu atau lebih titik invarian – titik invarian. Jika ada lebih dari dua titik invarian, proyektivitas itu suatu identitas $D \barwedge D$.



Gambar III. 9

Konstruksi untuk proyektivitas $p(A,B,C,D) \barwedge p(A,B,C,D')$ pada satu garis menyangkut empat titik pada garis lain sedemikian hingga $p(A,B,C,D) \overline{\barwedge}\, p_1(A_1,B_1,C_1,D_1) \overline{\barwedge}\, p(A,B,C,D')$. Ternyata hal ini tertentu oleh suatu proyektivitas $p_1(A_1,B_1,C_1) \barwedge p(A,B,C)$. Pada $p(A,B,C,D) \barwedge p(A,B,C,D')$ proyektivitas berupa identitas.

Teorema III. B. 2. b (Teorema *Fundamental* dari Geometri Proyektif)

Suatu proyektivitas ditentukan atau tertentu apabila tiga titik dari satu berkas dan tiga titik berkorespondensi dari berkas yang lain diketahui.

Bukti :

A, B, C dan A', B', C' dapat terletak pada garis yang sama atau pada garis yang berlainan.

Diandaikan A, B, C segaris dan A', B', C' segaris.

Akan diperlihatkan terdapat satu proyektivitas dari A, B, C ke A', B', C'.

Berdasarkan teorema III. B. 2. a keberadaan suatu proyektivitas dijamin, sehingga terdapat $p(A,B,C,D) \doublebarwedge p_1(A_1,B_1,C_1,D_1) \doublebarwedge p'(A',B',C',D')$ dan $p(A,B,C,D) \doublebarwedge p_1(A_1,B_1,C_1,D_1) \doublebarwedge p'(A',B',C',D'')$ dengan A, B, C berlainan dan terdapat titik lain D yang segaris, sehingga diperoleh

$p'(A',B',C',D') \doublebarwedge p_1(A_1,B_1,C_1,D_1) \doublebarwedge p'(A',B',C',D'')$.

Jadi, $p'(A',B',C',D') \barwedge p'(A',B',C',D'')$.

Tetapi proyektivitas ini mempunyai tiga titik invarian, oleh karena itu berdasarkan Lemma III. B. 2, $D'=D''$ dan terdapat satu proyektivitas.

Akibat

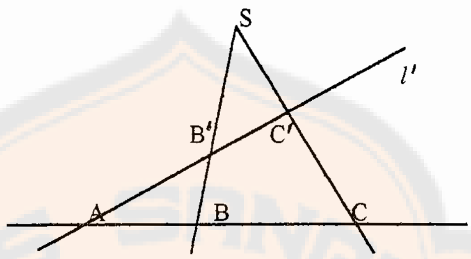
Jika suatu proyektivitas antara titik – titik dari dua garis yang berlainan, titik potong dari dua garis itu berkorespondensi dengan dirinya sendiri, maka proyektivitas itu suatu perspektivitas.

Bukti :

Terdapat proyektivitas antara titik – titik dari dua garis yang berlainan $l(A,B,C) \barwedge l'(A',B',C')$ dan titik potong dari kedua garis itu berkorespondensi dengan dirinya sendiri ($A=A'$).

Akan dibuktikan proyektivitas merupakan suatu perspektivitas.

Karena $A=A'$ maka terdapat perspektivitas $l(A,B,C)\overset{S}{\overline{\wedge}}l(A,B',C')$ dengan $S=\overline{BB'}.\overline{CC'}$ seperti pada gambar III. 10.



Gambar III. 10

Jika suatu proyektivitas pada suatu garis menukar suatu titik A dengan titik yang lain A' dan menukar A' dengan A, titik A, A' dikatakan saling berkorespondensi dua kali.

Suatu *involusi* ialah suatu proyektivitas dengan periode dua, yaitu jika dikerjakan dua kali berturut – turut akan terdapat transformasi identitas.

Jadi, *involusi* adalah suatu proyektivitas yang menukar pasangan titik.

Teorema III. B. 2. c

Jika A,A',B,B' adalah sebarang empat titik pada suatu garis, maka terdapat suatu proyektivitas yang membuat $u(A,A',B,B')\,\overline{\wedge}\,u(A',A,B',B)$.

Bukti :

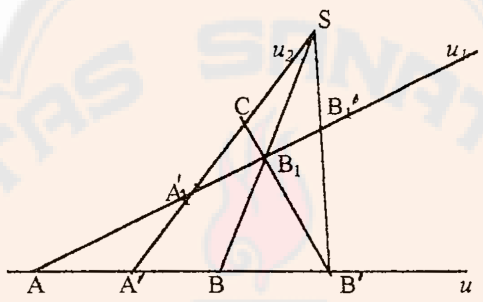
Diambil A dan A' dua titik yang berlainan yang saling berkorespondensi dua kali dan diandaikan B, B' sebarang pasangan titik lain yang berkorespondensi.

Diandaikan u_1 sebarang garis melalui A yang berlainan dengan garis AA' dan memproyeksikan A',B,B' dari pusat S ke A'_1,B_1,B'_1 pada u_1.

Lalu, jika garis $B'B_1$ berpotongan dengan garis $A'S$ di C didapat

$$u(A,A',B,B')\overset{S}{\barwedge}u_1(A,A'_1,B_1,B'_1)\overset{B'}{\barwedge}u_2(A',A'_1,C,S)\overset{B_1}{\barwedge}u(A',A,B',B).$$

Jadi $u(A,A',B,B')\barwedge u(A',A,B',B)$.



Gambar III. 11

Hal di atas memperlihatkan proyektivitas dengan tiga titik yang berkorespondensi $u(A,A',B)\barwedge u(A',A,B')$ yang mentransformasikan B' ke B.

BAB IV

PRINSIP DUALITAS PADA IRISAN KERUCUT

A. IRISAN KERUCUT TITIK DAN IRISAN KERUCUT GARIS

Pada Bab II telah dibahas irisan kerucut. Dalam sejarah Matematika, hal ini sudah dikenal sekitar 430 SM yaitu irisan kerucut merupakan irisan bidang pada kerucut lingkaran tegak. Irisan kerucut dibagi menjadi dua bagian yaitu irisan kerucut yang tak sebenarnya misal titik, dua garis lurus berpotongan atau sejajar, dua buah garis yang berimpit, dan irisan kerucut yang sebenarnya yaitu lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola.

Dalam Geometri Proyektif, irisan kerucut titik merupakan suatu tempat kedudukan titik – titik dari irisan kerucut yang sebenarnya dan dualnya, irisan kerucut garis merupakan suatu envelop (selubung) dari garis – garis pada irisan kerucut yang sebenarnya. Untuk pembahasan berikutnya, irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis dikenalkan sebagai irisan kerucut yang sebenarnya. Pada bahasan berikut, sebagai contohnya akan ditunjukkan bahwa irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis mempunyai kesamaan sifat :

(a) suatu garis (titik) tidak dapat memotong (terletak pada) suatu irisan kerucut titik (garis) pada lebih dari dua titik (garis), dan

(b) lima buah titik (garis) tiga diantaranya tidak terletak (berpotongan) pada satu garis (titik) menentukan irisan kerucut titik (garis) secara tunggal.

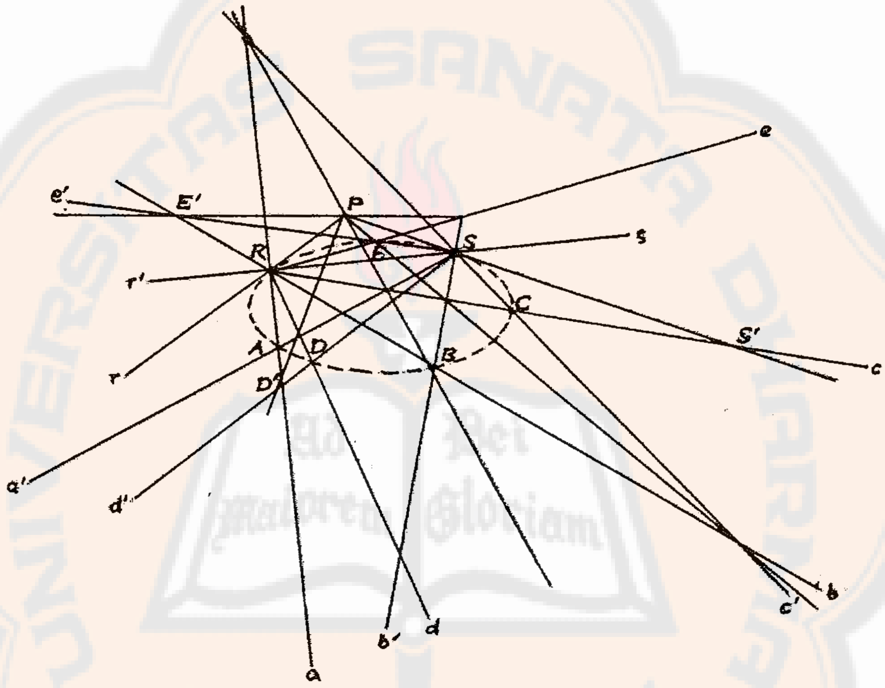
Definisi IV. A. 1

Himpunan titik potong semua pasangan garis yang saling berkorespondensi dari dua berkas garis proyektif (tidak perspektif) yang sebidang membentuk suatu kurva yang disebut irisan kerucut titik.

Suatu proyektivitas antara dua berkas garis menurut teorema *fundamental* dari proyektivitas tertentu oleh tiga pasangan titik yang berkorespondensi.

Berikut terdapat proyektivitas R $(a,\ b,\ c,\ \ldots) \barwedge$ S $(a', b', c', \ldots)$ antara dua berkas garis pada dua pusat yang berlainan R dan S. Jika garis $a,\ b,\ c,\ \ldots$ yang melalui R berkorespondensi berturut – turut dengan garis $a', b', c', \ldots$ yang melalui S, titik A = $a.a'$, B = $b.b'$, C = $c.c'$, ... berdasarkan definisi titik – titik A, B, C, ... membentuk irisan kerucut titik. Dalam geometri Euclides, irisan kerucut terbentuk dari lintasan suatu titik, sedang dalam geometri Proyektif, suatu irisan kerucut titik dilukis titik demi titik. Hal ini pada dasarnya dilakukan dengan pengambilan sebarang garis x yang melalui R dan melukis korespondensinya x' garis yang melalui S. Untuk mengerjakannya dapat digunakan pasangan garis $a.a'$; $b.b'$; $c.c'$ untuk menempatkan titik Pappus (pusat proyektivitas) P sebagai perpotongan dari $(a.c').(a'.c)$ dan $(b.c').(b'.c)$. Untuk sebarang garis lain (dimisalkan d) yamg melalui R, diambil garis penghubung P dan $(a'.d)$ bertemu dengan garis a di D'; kemudian $SD' = d'$ yang berkorespodensi dengan d dan $d.d' = \mathrm{D}$ adalah titik lain pada irisan kerucut titik. Sekali lagi, untuk sebarang garis lain (dimisalkan e) yang melalui R, garis penghubung P dan $(b'.e)$ bertemu b di E', lalu $\mathrm{SE}' = e'$ yang berkorespondensi dengan e dan $e.e' = \mathrm{E}$ titik lain pada irisan kerucut titik, dan seterusnya.

Diambil garis RS disebut s yang dianggap sebagai anggota dari berkas pada R dan disebut r' sebagai anggota berkas pada S. Lalu $s.c' = \text{S}$; diambil $\overrightarrow{\text{PS}}.c = \text{S}'$. Maka $\overleftrightarrow{\text{SS}'} = s'$ yang berkorespondensi dengan s dan $s.s' = \text{S}$ adalah titik pada irisan kerucut titik. Demikian pula R juga merupakan titik pada irisan kerucut titik.



Gambar IV. 1

Biasanya, pada sebarang garis x dari berkas pada R disini terdapat dua titik berlainan dari irisan kerucut titik yaitu R dan $\text{X} = x.x'$ dengan x' pada S yang berkorespondensi dengan x. Garis PR = r merupakan pengecualian, karena korespondensinya adalah $r' = \overline{\text{RS}}$ dan $r.r' = \text{R}$.

Definisi IV. A. 1. a

Suatu garis singgung pada irisan kerucut titik adalah sebarang garis yang melalui satu dan hanya satu titik dari irisan kerucut.

Dengan demikian untuk irisan kerucut pada gambar IV. 1 $\overleftrightarrow{PR}$ dan $\overleftrightarrow{PS}$ keduanya merupakan garis singgung; dengan demikian kita telah membuktikan teorema IV. A. 1 berikut.

Teorema IV. A. 1

Garis singgung pada irisan kerucut titik di pusat R(S) dari salah satu berkas garis yang membangunnya berkorespondensi dengan garis pusat RS yang dianggap sebagai anggota dari berkas di S(R).

Teorema IV. A. 2

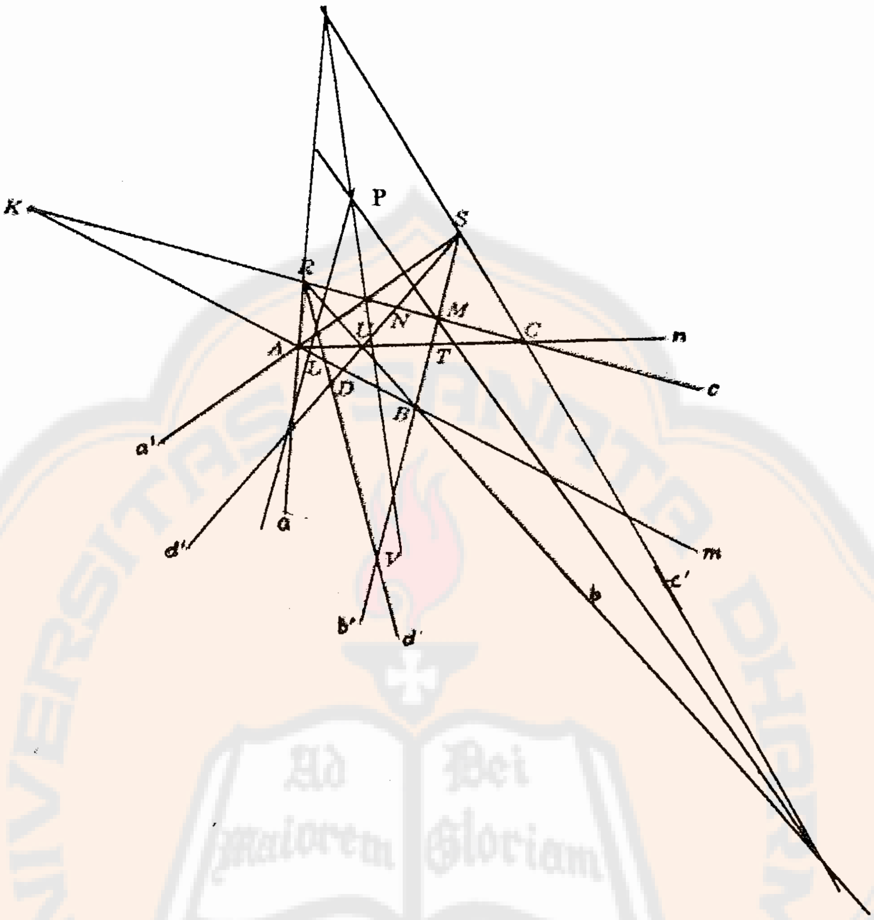
Sebarang dua titik berlainan pada irisan kerucut titik dapat digunakan sebagai pusat dua berkas garis proyektif yang membangun irisan kerucut titik itu.

Bukti :

Dimisalkan terdapat dua titik R dan S yang digunakan sebagai pusat dua berkas garis yang proyektif.

Pada Gb. IV. 2 irisan kerucut titik dibangun dari dua berkas R ($a, b, c, d, \ldots$) dan S ($a', b', c', d', \ldots$) dengan paling sedikit terdapat titik A, B, C, D yang disusun seperti gambar IV. 1. Diambil $\overleftrightarrow{AB} = m$; $\overleftrightarrow{AC} = n$; $m.c = K$; $m.d = L$; $n.b' = T$; $n.d' = U$; $b'.d = V$ sehingga $R(a, b, c, \ldots) \barwedge S(a', b', c', \ldots)$ didapat $m(A,B,K,L) \barwedge n(A,T,C,U)$.

Tetapi pada akhirnya proyektivitas di atas merupakan suatu perspektivitas.



Gambar IV. 2

Sekarang jika dianggap bahwa

$$B(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}) \stackrel{=}{\wedge} d(L,R,V,D) \stackrel{M}{\stackrel{=}{\wedge}} d'(U,N,S,D) \stackrel{=}{\wedge} C(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CR},\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD})$$

maka $B(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}) \bar{\wedge} C(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CR},\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD})$.

Dan selain itu titik potong garis – garis yang berkorespondensi merupakan irisan kerucut titik, sehingga proyektivitas ini juga membangun irisan kerucut titik.

Teorema IV. A. 3

Suatu irisan kerucut titik ditentukan oleh sebarang lima titik secara tunggal.

Bukti :

Diambil A, B, C, R, S sebarang lima titik yang diberikan dari suatu irisan kerucut.

Berdasarkan teorema IV. A. 2, sebarang dua titik berlainan (dimisalkan R dan S) dapat diberikan sebagai pusat dua berkas garis yang membangun irisan kerucut titik. Berdasarkan teorema fundamental dapat ditentukan titik lainnya sebagai proyektivitas tunggal $R(\overleftrightarrow{RA}, \overleftrightarrow{RB}, \overleftrightarrow{RC}) \barwedge S(\overleftrightarrow{SA}, \overleftrightarrow{SB}, \overleftrightarrow{SC})$ yang secara bergantian membangun irisan kerucut yang diketahui.

Teorema IV. A. 4

Tiga titik berlainan dari irisan kerucut titik tidak pernah segaris.

Bukti :

Terdapat tiga titik berlainan pada irisan kerucut titik.

Akan dibuktikan bahwa tiga titik tersebut tidak pernah segaris.

Berdasarkan teorema fundamental diandaikan terdapat tiga titik berlainan yang segaris maka ketiga titik itu berkorespondensi dengan tiga titik segaris. Ketiga titik itu segaris. Jadi tidak membentuk suatu irisan kerucut titik yang sebenarnya.

Teorema IV. A. 5

Lima titik berlainan, tiga diantaranya tidak segaris menentukan irisan kerucut titik secara tunggal.

Bukti :

Berdasarkan teorema IV. A. 3 dan IV. A. 4, jika diambil dua titik sebagai pusat dua berkas garis yang proyektif. Jelas bahwa lima titik berlainan, tiga diantaranya tidak segaris menentukan irisan kerucut titik secara tunggal.

Teorema IV. A. 6

Pada sebarang titik dari irisan kerucut titik terdapat satu dan hanya satu garis singgung pada irisan kerucut titik.

Bukti :

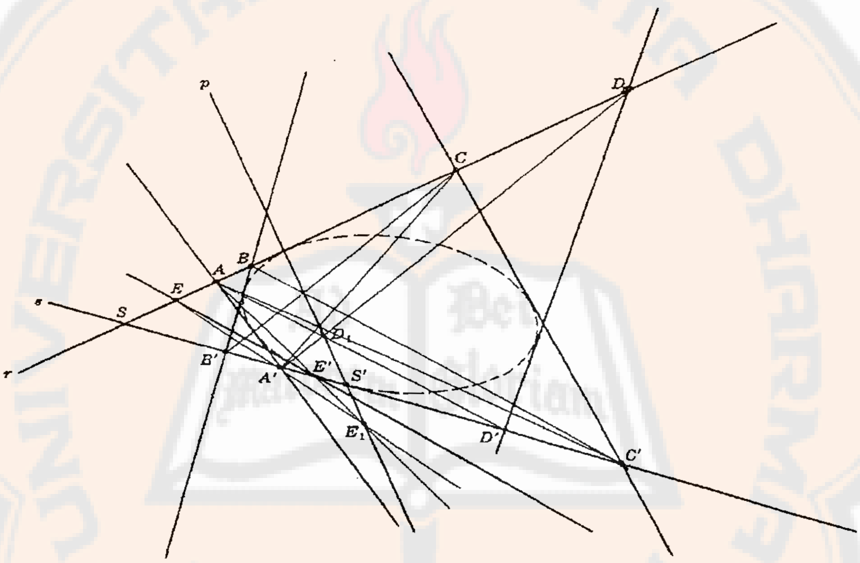
Berdasarkan gambar IV. 1, diandaikan untuk garis RS pada berkas R yang berkorespondensi dengan garis s' pada S dan kedua garis tersebut ($\overleftrightarrow{RS}$ dan s') berpotongan di S. Demikian juga dengan garis SR pada berkas S yang berkorespondensi dengan garis r pada R dan garis tersebut ($\overleftrightarrow{SR}$ dan r) berpotongan di R. Jadi, dengan melihat uraian di atas dan berdasarkan gambar IV. 1 jelas bahwa pada garis s' hanya terdapat satu titik S (S pada irisan kerucut titik) dan pada r juga hanya terdapat titik R saja (R pada irisan kerucut titik).

Dual dari irisan kerucut titik adalah irisan kerucut garis, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi IV. A. 2

Himpunan semua garis penghubung pasangan titik yang berkorespondensi dari dua berkas titik proyektif (tidak perspektif) yang sebidang pada garis (sumbu) yang berlainan disebut irisan kerucut garis.

Berikut terdapat proyektivitas $r(A,B,C,...) \overline{\wedge}\, s(A',B',C',...)$ pada sumbu yang berlainan r dan s. Maka $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$, r, s adalah garis – garis pada irisan kerucut garis yang dibangun oleh suatu proyektivitas. Untuk melukis garis lain, pertama kali dapat dilukis garis Pappus (sumbu proyektivitas) p dengan menghubungkan $\overleftrightarrow{AC'}.\overleftrightarrow{A'C}$ dan $\overleftrightarrow{BC'}.\overleftrightarrow{B'C}$. Untuk sebarang titik lain (dimisalkan D) pada r, diambil $\overleftrightarrow{A'D}.p = D_1$; maka $\overleftrightarrow{AD_1}$. $S = D'$ yang berkorespondensi dengan D dan $\overleftrightarrow{DD'}$ garis lain pada irisan kerucut garis.



Gambar IV. 3

Biasanya, pada sebarang titik X dari berkas pada r (juga X′ pada s) terdapat dua garis berlainan dari irisan kerucut garis r dan $x = \overleftrightarrow{XX'}$ dengan X′ pada s yang berkorespondensi dengan X. Titik $p.s = S'$ merupakan pengecualian karena korespondensinya $S = r.s$ dan $\overleftrightarrow{SS'} = s$.

Karena dalam geometri proyektif berlaku prinsip dualitas, maka keenam teorema berikut yang berlaku pada irisan kerucut garis merupakan dual dari keenam teorema yang berlaku pada irisan kerucut titik. Dan karena keenam teorema dalam irisan kerucut titik sudah dibuktikan kebenarannya, maka secara otomatis keenam teorema berikut juga terbukti dan berlaku pada irisan kerucut garis.

Definisi IV. A. 2. a

Suatu titik singgung pada irisan kerucut garis adalah sebarang titik yang dilalui oleh satu dan hanya satu garis dari irisan kerucut.

Teorema IV. A. 1. a

Titik singgung dari irisan kerucut garis pada sumbu $r(s)$ dari berkas titik yang membangunnya adalah berkorespondensi dengan titik $r.s$ yang dianggap sebagai anggota dari berkas pada $s(r)$.

Teorema IV. A. 2. a

Sebarang dua garis yang berlainan pada irisan kerucut garis dapat digunakan sebagai sumbu dua berkas titik yang proyektif yang membangun irisan kerucut garis.

Teorema IV. A. 3. a

Suatu irisan kerucut garis ditentukan oleh sebarang lima garisnya secara tunggal.

Teorema IV. A. 4. a

Tiga garis berlainan pada irisan kerucut garis tidak pernah berpotongan pada satu titik (konkuren).

Teorema IV. A. 5. a

Lima garis berlainan, tiga diantaranya tidak berpotongan pada satu titik menentukan suatu irisan kerucut garis secara tunggal.

Teorema IV. A. 6. a

Pada sebarang garis dari irisan kerucut garis terdapat satu dan hanya satu titik singgung pada irisan kerucut garis.

Dengan memperhatikan kembali uraian mengenai irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis, kita dapat melihat hubungan diantara keduanya.

Pada irisan kerucut titik gambar IV. 4 berikut, dapat diambil empat titik X, X_1, B, B_1 dan dimisalkan x, x_1, b, b_1 garis singgung – garis singgung yang melalui keempat titik tersebut. Kemudian dapat diandaikan bahwa $\overleftrightarrow{BX_1}.\overleftrightarrow{B_1X} = M$, $\overleftrightarrow{BX}.\overleftrightarrow{B_1X_1} = N$, $\overleftrightarrow{BB_1}.\overleftrightarrow{XX_1} = P$; $x.x_1 = T$, $b.b_1 = U$, $b.x = V$, $b.x_1 = Y$, $b_1.x = Z$ sehingga didapatkan $b(U,B,V,Y) \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} b_1(U,B_1,W,Z) \overline{\wedge} b_1(B_1,U,Z,W)$.

Berdasarkan teorema II. B. 2. c didapat $b(U,B,V,Y) \overline{\wedge} b_1(B_1,U,Z,W)$ dengan $\overleftrightarrow{BB_1}$ sebagai sumbu.

Jika diandaikan $\overline{PBB_1}$ tetap dengan $\overline{PXX_1}$ berubah – ubah, maka Y dan W bergerak berturut - turut sepanjang b dan b_1 membangun suatu irisan kerucut garis.

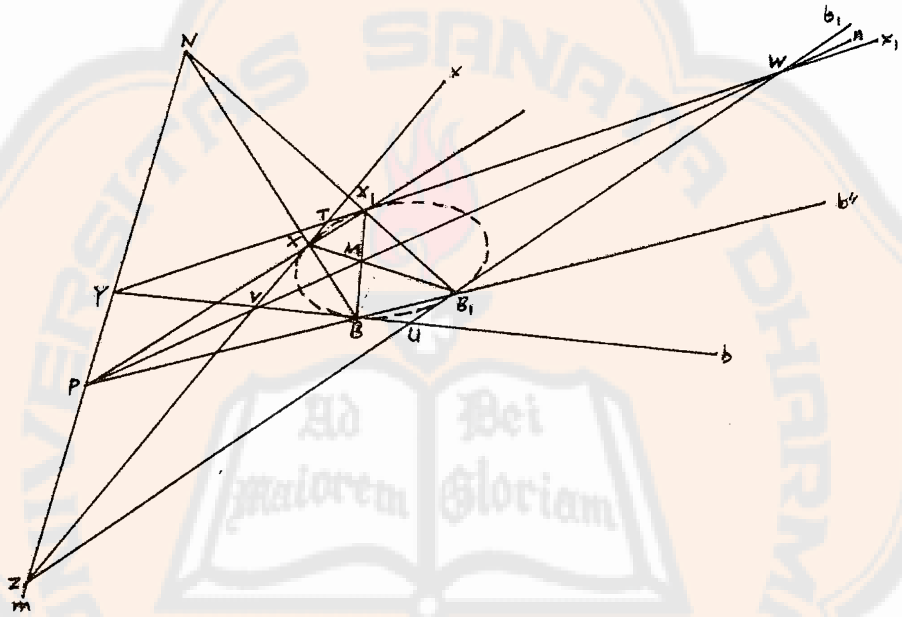
Dengan demikian kita telah membuktikan teorema IV. A. 7 berikut.

Teorema IV. A. 7

Garis singgung – garis singgung dari suatu irisan kerucut titik membangun suatu irisan kerucut garis.

Dualnya, titik singgung – titik singgung dari suatu irisan kerucut garis membangun suatu irisan kerucut titik.

Dengan demikian sebagai konsekuensinya, sekarang kita dapat mendefinisikan istilah irisan kerucut sebagai suatu irisan kerucut titik dengan garis singgung – garis singgungnya atau suatu irisan kerucut garis dengan titik singgung – titik singgungnya.



Gambar IV. 4

Di dalam memberikan dual dari teorema – teorema mengenai irisan kerucut terlihat jelas bahwa kata irisan kerucut dibiarkan tetap meskipun kata titik dan garis saling ditukar. Dan hal ini tidak berpengaruh terhadap hasil pembuktian masing – masing teorema, karena berlakunya prinsip dualitas.

B. TEOREMA PASCAL DAN BRIANCHON

Selain dalam Geometri Euclides, dalam Geometri Proyektif juga terdapat irisan kerucut dalam dan irisan kerucut luar. Sekarang akan dibahas irisan kerucut dalam segienam dan irisan kerucut luar segienam dengan pengertian bahwa :

- Jika titik – titik dari segienam pada suatu irisan kerucut , maka dalam hal ini segienam tersebut merupakan segienam dalam dari irisan kerucut (irisan kerucut luar)
- Jika titik potong garis singgung – garis singgung dari suatu irisan kerucut membentuk suatu segienam, maka dalam hal ini segienam tersebut merupakan segienam luar dari irisan kerucut (irisan kerucut dalam)

Terdapat suatu segienam $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ yang terdiri dari sebarang enam titik yang terletak pada suatu irisan kerucut. Pasangan sisi – sisi yang berhadapan dari segienam tersebut adalah $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, dan $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2C_1}$ yang titik potong – titik potongnya berturut – turut C_3, A_3, dan B_3.

Pada pokok bahasan ini, segienam yang digunakan adalah segienam sederhana.

Definisi IV. B

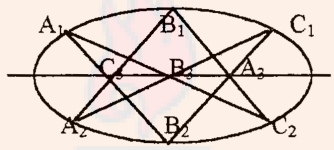
Segienam sederhana merupakan himpunan enam titik sebidang, tiga diantaranya tidak segaris dan garis penghubung – garis penghubungnya tertentu.

Untuk suatu segienam dengan titik sudut – titik sudut yang berurutan A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, dan C_2, sisi – sisinya yang berhadapan $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, dan $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ dengan $\overleftrightarrow{A_2C_1}$.

Definisi tersebut memenuhi untuk segienam – segienam dengan sisi – sisi yang berhadapan potong memotong dalam irisan kerucut. Oleh karena itu kita mempunyai teorema berikut :

Teorema IV. B. 1 (Teorema Pascal)

Jika suatu segienam sederhana $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ merupakan segienam dalam dari suatu irisan kerucut, maka titik potong – titik potong $A_3 = \overleftrightarrow{B_1C_2} . \overleftrightarrow{B_2C_1}$, $B_3 = \overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2C_1}$, $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$ dari tiga pasang sisi – sisi yang berhadapan segaris (kolinear).



Gambar IV. 5

Bukti :

Dipandang A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, dan C_2 enam titik dari irisan kerucut titik sebagai titik sudut – titik sudut dari segienam sederhana $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$.

Lalu $\overleftrightarrow{B_1C_2} . \overleftrightarrow{B_2C_1} = A_3$, $\overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2C_1} = B_3$, $\overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1} = C_3$.

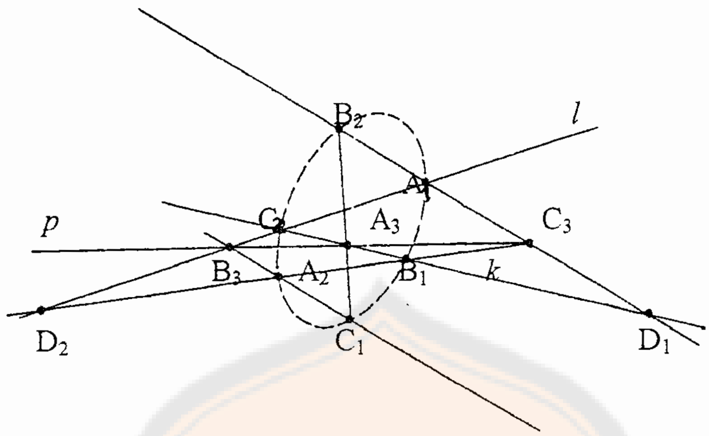
Akan dibuktikan bahwa A_3, B_3, C_3 segaris.

Dimisalkan $\overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{B_1C_2} = D_1$ dan $\overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1} = D_2$.

Terdapat

$$k(D_1,A_3,B_1,C_2) \overset{=}{\wedge} B_2(\overleftrightarrow{B_2A_1},\overleftrightarrow{B_2C_1},\overleftrightarrow{B_2B_1},\overleftrightarrow{B_2C_2}) \overline{\wedge} A_2(\overleftrightarrow{A_2A_1},\overleftrightarrow{A_2C_1},\overleftrightarrow{A_2B_1},\overleftrightarrow{A_2C_2}) \overset{=}{\wedge} l(A_1,B_3,D_2,C_2)$$

sehingga $k(D_1,A_3,B_1,C_2) \overline{\wedge} l(A_1,B_3,D_2,C_2)$. Tetapi hal ini merupakan perspektivitas , sehingga $\overleftrightarrow{A_1D_1},\overleftrightarrow{B_3A_3},\overleftrightarrow{B_1D_2}$ berpotongan di C_3 sehingga A_3, B_3, C_3 segaris.



Gambar IV. 6

Garis $A_3B_3C_3$ pada teorema di atas disebut garis Pascal dari segienam $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$.

Kebalikan Teorema Pascal

Teorema IV. B. 2

Jika titik potong – titik potong dari tiga pasang sisi yang berhadapan dari suatu segienam sederhana segaris, maka titik sudut – titik sudut dari segienam tersebut terletak pada irisan kerucut.

Bukti :

Berdasarkan gambar IV. 6 segienam sederhana $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ dengan $A_3 = \overleftrightarrow{B_1C_2} . \overleftrightarrow{B_2C_1}$, $B_3 = \overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2C_1}$, $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$ segaris.

Dimisalkan $D_1 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{B_1C_2}$ dan $D_2 = \overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$ sehingga $k(D_1, A_3, B_1, C_2) \overset{C_3}{\underset{\wedge}{=}} l(A_1, B_3, D_2, C_2)$ dan terdapat proyektivitas berikut

$$B_2(\overleftrightarrow{B_2A_1}, \overleftrightarrow{B_2C_1}, \overleftrightarrow{B_2B_1}, \overleftrightarrow{B_2C_2}) \underset{\wedge}{-} A_2(\overleftrightarrow{A_2A_1}, \overleftrightarrow{A_2C_1}, \overleftrightarrow{A_2B_1}, \overleftrightarrow{A_2C_2}).$$

Proyektivitas tersebut membangun suatu irisan kerucut titik dengan titik – titik A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, dan C_2.

Sekarang akan diperlihatkan bagaimana melukis titik – titik pada irisan kerucut dengan lima titik yang diberikan, tiga diantaranya tidak segaris. Untuk lebih jelasnya dapat diperhatikan uraian berikut :

- Diberikan lima titik yang berlainan pada suatu irisan kerucut, dengan menggunakan teorema IV. B. 2 kita dapat menentukan titik lain pada irisan kerucut tersebut.

  Dimisalkan lima titik tersebut A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 seperti pada gambar IV. 6.

  Akan dilukis titik C_2 yang terletak pada garis l.

  Dapat dilukis sebarang garis l melalui A_1 yang berlainan dengan $\overleftrightarrow{A_1B_2}$, sehingga $\overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1} = C_3$, $\overleftrightarrow{A_2C_1} . l = B_3$, $\overleftrightarrow{B_3C_3} = p$. p merupakan garis Pascal dari segienam tersebut dan $A_3 = \overleftrightarrow{B_2C_1} . p$. Tetapi $A_3 = \overleftrightarrow{B_1C_2} . \overleftrightarrow{B_2C_1}$ sehingga C_2 terletak pada $\overleftrightarrow{B_1A_3}$. Jadi $C_2 = \overleftrightarrow{B_1A_3} . l$.

Suatu irisan kerucut yang tak sebenarnya memuat dua berkas titik maka Teorema Pascal di atas menjadi Teorema Pappus. Oleh karena itu, Teorema Pappus kadang disebut Teorema Pappus – Pascal.

Pada pokok bahasan sebelumnya (Bab II), teorema Pappus dianggap sebagai aksioma. Setelah mempelajari proyektivitas dan teorema Pascal maka Teorema Pappus dapat dibuktikan dengan menggunakan proyektivitas.

Bukti :

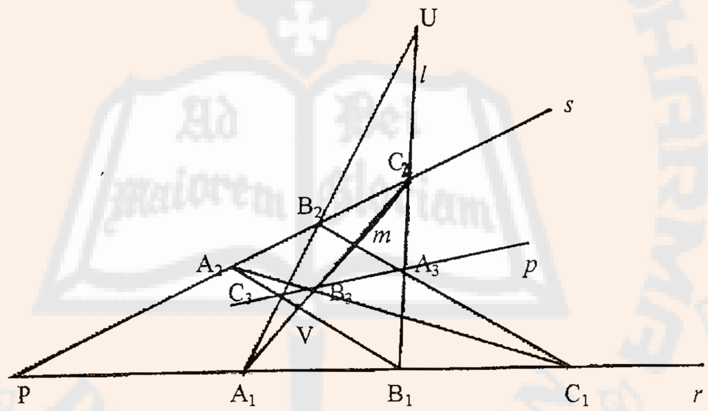
Dimisalkan A_1, B_1, C_1 titik – titik yang berlainan pada garis r dan A_2, B_2, C_2 pada garis lain s.

Akan dibuktikan $A_3 = \overleftrightarrow{B_1C_2} . \overleftrightarrow{B_2C_1}$, $B_3 = \overleftrightarrow{A_1C_2} . \overleftrightarrow{A_2C_1}$, $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$ segaris.

Pada IV. 7 berikut, dimisalkan $r.s$ = P, $\overleftrightarrow{A_1B_2}.\overleftrightarrow{B_1C_2}$ = U, $\overleftrightarrow{A_2B_1}.\overleftrightarrow{A_1C_2}$ = V, $\overleftrightarrow{A_3B_3} = p$. Maka $l(A_3,U,C_2,B_1) \overset{B_2}{\doublebarwedge} r(C_1,A_1,P,B_1) \overset{A_2}{\doublebarwedge} m(B_3,A_1,C_2,V)$

sehingga $l(A_3,U,C_2,B_1) \barwedge m(B_3,A_1,C_2,V)$.

Tetapi hal ini merupakan perspektivitas yaitu $l(A_3,U,B_1) \doublebarwedge m(B_3,A_1,V)$ maka $\overleftrightarrow{A_3B_3}$, $\overleftrightarrow{A_1U} = \overleftrightarrow{A_1B_2}$, $\overleftrightarrow{B_1V} = \overleftrightarrow{B_1A_2}$ konkuren pada $\overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$ = C_3 sehingga titik – titik A_3, B_3, C_3 segaris.

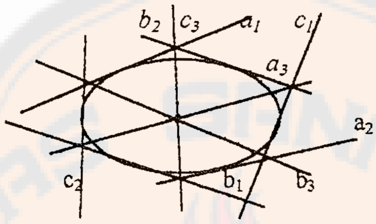


Gambar IV. 7

Teorema Pascal ini ditemukan oleh Blaise Pascal pada tahun 1640 ketika dia berumur 16 tahun. Pada tahun 1806 (± 150 tahun kemudian) C. J. Brianchon menemukan dual dari teorema Pascal yang kemudian dikenal sebagai teorema Brianchon.

Teorema IV. B. 1. a (Teorema Brianchon)

Jika suatu sisienam sederhana $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ merupakan sisienam luar dari irisan kerucut, maka garis penghubung – garis penghubung $a_3 = (b_1.c_2)(b_2.c_1)$, $b_3 = (a_1.c_2)(a_2.c_1)$, $c_3 = (a_1.b_2)(a_2.b_1)$ dari tiga pasang titik sudut – titik sudut yang berhadapan berpotongan pada satu titik (konkuren).



Gambar IV. 8

Bukti :

Dipandang enam garis singgung a_1, b_2, c_1, a_2, b_1, dan c_2 dari suatu irisan kerucut sebagai sisi – sisi dari sisienam sederhana $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$. Lalu $(b_1.c_2)(b_2.c_1) = a_3$, $(a_1.c_2)(a_2.c_1) = b_3$, $(a_1.b_2)(a_2.b_1) = c_3$.

Akan dibuktikan a_3, b_3, c_3 berpotongan pada satu titik.

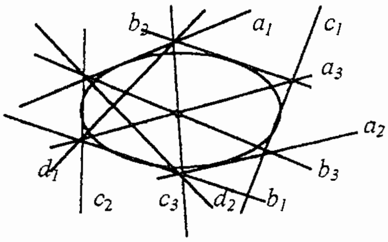
Dimisalkan $(a_1.b_2)(b_1.c_2) = d_1$ dan $(a_1.c_2)(a_2.b_1) = d_2$.

Terdapat

$$(d_1,a_3,b_1,c_2)\doublebarwedge(b_2.a_1,b_2.c_1,b_2.b_1,b_2.c_2)\barwedge(a_2.a_1,a_2.c_1,a_2.b_1,a_2.c_2)\doublebarwedge(a_1,b_3,d_2,c_2)$$

sehingga $(d_1,a_3,b_1,c_2)\barwedge(a_1,b_3,d_2,c_2)$.

Tetapi hal ini merupakan suatu perspektivitas, sehingga $a_1.d_1$, $b_3.a_3$, $b_1.d_2$ terletak pada garis c_3 sehingga a_3, b_3, c_3 berpotongan pada satu titik (konkuren).



Gambar IV. 9

Titik $a_3.b_3.c_3$ dari teorema di atas disebut titik Brianchon dari sisienam $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$.

Kebalikan Teorema Brianchon

Teorema IV. B. 2. a

Jika garis penghubung tiga pasang titik sudut – titik sudut yang berhadapan dari suatu sisienam sederhana berpotongan pada satu titik, maka sisi – sisi dari sisienam menyelubungi irisan kerucut.

Bukti :

Berdasarkan gambar IV. 9 sisienam sederhana $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ dengan $a_3 = (b_1.c_2)(b_2.c_1)$, $b_3 = (a_1.c_2)(a_2.c_1)$, $c_3 = (a_1.b_2)(a_2.b_1)$ berpotongan pada satu titik.

Dimisalkan $d_1 = (a_1.b_2)(b_1.c_2)$ dan $d_2 = (a_1.c_2)(a_2.b_1)$

sehingga $(d_1, a_3, b_1, c_2) \overset{c_3}{\underset{\wedge}{=}} (a_1, b_3, d_2, c_2)$ dan terdapat proyektivitas berikut

$$(b_2.a_1, b_2.c_1, b_2.b_1, b_2.c_2) \overline{\wedge} (a_2.a_1, a_2.c_1, a_2.b_1, a_2.c_2).$$

Proyektivitas ini membangun suatu irisan kerucut garis dengan garis – garis a_1, b_2, c_1, a_2, b_1, dan c_2.

Seperti pada teorema IV. B. 2, teorema IV. B. 2. a juga dapat digunakan untuk melukis suatu irisan kerucut yang ditentukan oleh lima garis yang diberikan, tiga diantaranya tidak berpotongan pada satu titik.

Suatu irisan kerucut yang tak sebenarnya memuat dua berkas garis yang berlainan maka teorema Brianchon di atas menjadi dual dari teorema Pappus.

Kasus Khusus Dari Teorema Pascal Dan Brianchon

Setelah kita mempelajari teorema Pascal dan Brianchon yang berlaku pada segienam sederhana, untuk kali ini kita akan membahas kasus khusus dari kedua teorema tersebut yaitu yang berlaku dalam segilima sederhana, segiempat sederhana, dan segitiga. Segala hal yang ada didalamnya sangat erat kaitannya dengan hal – hal yang ada pada saat membahas kedua teorema tesebut.

Didalam membuktikan teorema Pascal kita telah menggunakan proyektivitas antara dua berkas garis pada titik sudut – titik sudut B_2 dan A_2 dari segienam sederhana (Gb. IV. 5) :

$$B_2(\overleftrightarrow{B_2A_1},\overleftrightarrow{B_2C_1},\overleftrightarrow{B_2B_1},\overleftrightarrow{B_2C_2}) \barwedge A_2(\overleftrightarrow{A_2A_1},\overleftrightarrow{A_2C_1},\overleftrightarrow{A_2B_1},\overleftrightarrow{A_2C_2}).$$

Dalam proyektivitas ini korespondensi $\overleftrightarrow{B_2A_2}$ dianggap sebagai suatu garis pada berkas B_2, yang merupakan garis singgung t yang melalui A_2 pada suatu irisan kerucut. Kemudian proyektivitas di atas dapat juga diberikan sebagai berikut :

$B_2(\overleftrightarrow{B_2A_1},\overleftrightarrow{B_2C_1},\overleftrightarrow{B_2A_2},\overleftrightarrow{B_2C_2}) \barwedge A_2(\overleftrightarrow{A_2A_1},\overleftrightarrow{A_2C_1},t,\overleftrightarrow{A_2C_2})$ yang berkaitan dengan segilima dalam sederhana $A_1B_2C_1A_2C_2$ dari suatu irisan kerucut dan garis singgung pada salah satu titik sudutnya (Gb. IV. 10).

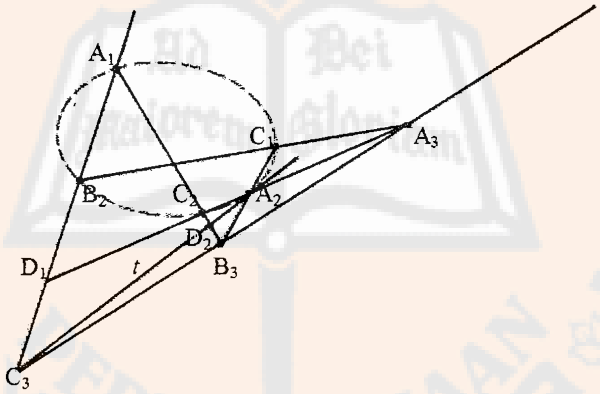
Maka, berdasarkan bukti dari teorema IV. B. 1 kita mempunyai

$k(D_1,A_3,B_1,C_2)\overset{=}{\wedge}B_2(\overleftrightarrow{B_2A_1},\overleftrightarrow{B_2C_1},\overleftrightarrow{B_2B_1},\overleftrightarrow{B_2C_2})\overline{\wedge}A_2(\overleftrightarrow{A_2A_1},\overleftrightarrow{A_2C_1},\overleftrightarrow{A_2B_1},\overleftrightarrow{A_2C_2})\overset{=}{\wedge}l(A_1,B_3,D_2,C_2)$

sehingga $k(D_1,A_3,B_1,C_2)\overline{\wedge}l(A_1,B_3,D_2,C_2)$ dan C_3 = $\overleftrightarrow{D_1A_1}.\overleftrightarrow{D_2A_2}$ yang terletak pada $\overleftrightarrow{A_3B_3}$. Dengan demikian kita telah membuktikan teorema IV. B. 3 berikut.

Teorema IV. B. 3

Jika suatu segilima sederhana merupakan segilima dalam dari suatu irisan kerucut, maka garis singgung pada salah satu titik sudutnya bertemu dengan sisi yang melalui titik sudut yang berhadapan dengannya pada satu titik yang segaris (kolinear) dengan titik potong – titik potong dari dua pasang sisi lain yang tidak berurutan.



Gambar IV. 10

Teorema di atas dapat dianggap sebagai kasus khusus dari teorema Pascal, karena teorema di atas diturunkan dari teorema Pascal jika garis singgung dimisalkan sebagai pengganti salah satu sisi dari segienam sederhana.

Teorema IV. B. 4

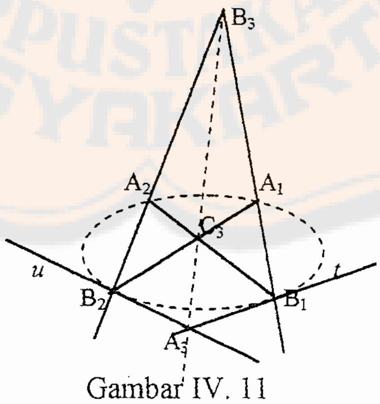
Jika suatu segiempat sederhana merupakan segiempat dalam dari suatu irisan kerucut, maka garis singgung – garis singgung pada pasangan titik sudut yang berhadapan potong memotong pada satu titik yang segaris (kolinear) dengan titik potong – titik potong dari dua pasang sisi yang lain dari suatu segiempat.

Bukti :

Terdapat segiempat dalam $A_1B_2A_2B_1$ dari suatu irisan kerucut dan t suatu garis singgung pada B_1.

Akan dibuktikan bahwa titik potong dari dua garis singgung dua titik sudut yang berhadapan terletak segaris (kolinear) dengan titik potong – titik potong dua pasang sisi yang berhadapan (C_3 = $\overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$, B_3 = $\overleftrightarrow{A_1B_1} . \overleftrightarrow{A_2B_2}$, dan A_3 = $\overleftrightarrow{B_1B_1} . \overleftrightarrow{B_2B_2}$ segaris dengan B_1 bertepatan dengan C_2 dan B_2 bertepatan dengan C_1).

Berdasarkan pengandaian A_3, B_3, dan C_3 di atas maka $\overleftrightarrow{B_2B_3}$ bertemu u di C_1. Dalam kasus ini, u merupakan garis singgung pada B_2. Dengan demikian ketiga titik berikut $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $B_3 = \overleftrightarrow{A_1B_1} . \overleftrightarrow{A_2B_2}$, dan $A_3 = t.u$ segaris.



Gambar IV. 11

Teorema IV. B. 5

Jika suatu segitiga merupakan segitiga dalam dari suatu irisan kerucut, maka garis singgung – garis singgung pada titik sudut – titik sudutnya bertemu dengan sisi – sisi yang berhadapan secara berurutan pada titik – titik segaris.

Bukti :

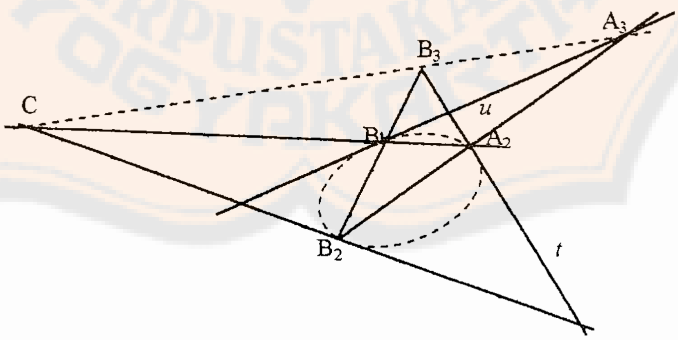
Terdapat segitiga $B_2A_2B_1$ dengan B_2, A_2, B_1 merupakan ketiga titiknya dan *t*, *u* garis singgungnya.

Akan dibuktikan bahwa garis singgung – garis singgung pada titik sudutnya bertemu dengan sisi – sisi yang berhadapan pada titik – titik segaris.

Dimisalkan garis *t* melalui A_2. Jika C_1 titik lain yang bertemu dengan *t* pada irisan kerucut titik, maka $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $A_3 = \overleftrightarrow{A_2B_2}.\overleftrightarrow{B_1C_2}$, dan $B_3 = \overleftrightarrow{A_2C_1} . \overleftrightarrow{B_1B_2}$ segaris dengan A_2 bertepatan dengan C_1, B_1 bertepatan dengan C_2, dan B_2 bertepatan dengan A_1.

Sehingga, jika $B_3 = t.\overleftrightarrow{B_1B_2}$ dan $A_3 = u.\overleftrightarrow{B_3C_3}$, maka C_1 merupakan titik potong *t* dengan $\overleftrightarrow{A_3B_2}$. Dalam hal ini, *t* merupakan garis singgung pada A_2.

Maka $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} . \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $B_3 = t . \overleftrightarrow{B_1B_2}$, dan $A_3 = u . \overleftrightarrow{B_2C_1}$ segaris.

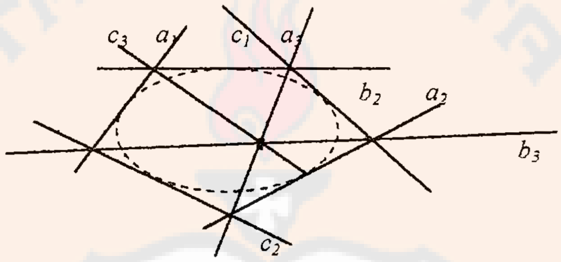


Gambar IV. 12

Ketiga teorema tersebut merupakan kasus khusus dalam teorema Pascal, sedang dualnya kasus khusus dalam teorema Brianchon sebagai berikut :

Teorema IV. B. 3. a

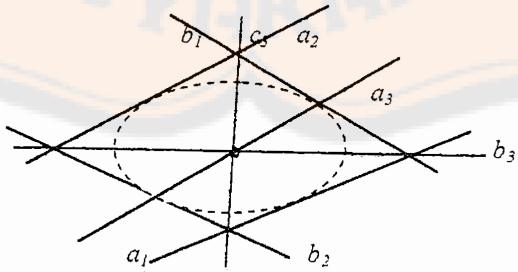
Jika suatu segilima sederhana merupakan segilima luar dari suatu irisan kerucut, maka garis penghubung titik singgung pada salah satu sisinya dengan titik sudut yang berhadapan dengan sisinya berpotongan pada salah satu titik dengan garis penghubung dari dua pasang titik sudut lain yang tidak berurutan.



Gambar IV. 13

Teorema IV. B. 4. a

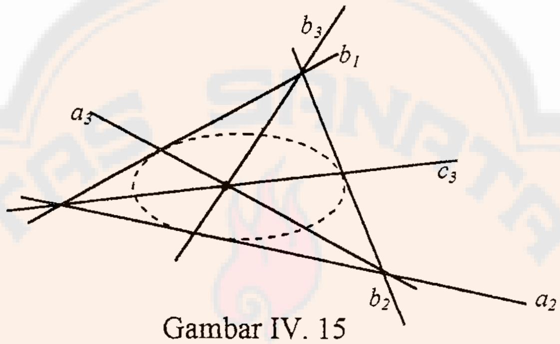
Jika suatu sisiempat sederhana merupakan sisiempat luar dari suatu irisan kerucut, maka garis penghubung titik – titik singgungnya pada pasangan sisinya yang berhadapan berpotongan pada satu titik (konkuren) dengan garis – garis penghubung pada dua pasang titik sudut yang berhadapan dari suatu sisiempat itu.



Gambar IV. 14

Teorema IV. B. 5. a

Jika suatu segitiga merupakan segitiga luar dari suatu irisan kerucut, maka garis – garis penghubung titik – titik sudutnya dengan titik – titik singgungnya secara berurutan pada sisi yang berhadapan berpotongan pada satu titik (konkuren).



Gambar IV. 15

Dalam Prinsip Dualitas pada Irisan Kerucut, irisan kerucut yang digunakan adalah elips karena dalam geometri proyektif elips, parabola, dan hiperbola adalah ekuivalen proyektif.

Dengan demikian jelas bahwa terdapat Prinsip Dualitas Pada Irisan Kerucut.

BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Geometri Proyektif merupakan suatu sistem deduktif yang didasarkan atas pengertian pangkal, definisi, dan beberapa aksioma. Dalam geometri ini terdapat sifat – sifat proyektif, yaitu sifat dari suatu bangun yang tidak berubah oleh suatu transformasi proyektif. Adapun pengertian pangkal dari geometri ini adalah titik, garis, dan relasi insidensi.

Pembahasan Prinsip Dualitas pada Irisan Kerucut ini menggunakan Geometri Proyektif. Prinsip Dualitas merupakan satu sifat yang istimewa dalam geometri ini, yang menyatakan bahwa dalam bidang proyektif setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema/dalil tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik yang segaris (kolinear) dengan dua garis yang melalui satu titik (konkuren).

Dalam Geometri Euclides ada dua macam irisan kerucut yaitu irisan kerucut yang tak sebenarnya (misal titik, dua garis lurus berpotongan/sejajar, dua garis berimpit) dan irisan kerucut yang sebenarnya (misal lingkaran, elips, parabola, hiperbola). Pada penulisan ini, irisan kerucut yang dibahas hanya elips karena dalam Geometri Proyektif elips, parabola, dan hiperbola adalah ekuivalen proyektif.

Maka yang digunakan untuk pembahasan selanjutnya adalah elips.

1. Perspektivitas merupakan dasar dari suatu proyektivitas.

Suatu berkas titik merupakan himpunan semua titik yang terletak pada satu garis (kolinear) dualnya, suatu berkas garis merupakan himpunan semua garis yang melalui satu titik (konkuren).

Dengan demikian, perspektivitas merupakan korespondensi satu – satu antara dua berkas titik (garis). Jika korespondensinya merupakan hasil kali dari beberapa perspektivitas maka disebut proyektivitas. Jadi, perspektivitas merupakan kejadian khusus dari proyektivitas.

2. Dalam geometri ini terdapat suatu teorema Fundamental yang menyatakan bahwa suatu proyektivitas tertentu apabila korespondensi tiga titik dari satu berkas dengan tiga titik dari berkas yang lain diketahui.

3. Dalam geometri ini dikenal adanya irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis. Irisan kerucut titik merupakan himpunan titik potong dari semua pasangan garis yang saling berkorespondensi dari dua berkas garis proyektif (tidak perspektif) yang sebidang yang membentuk suatu kurva. Dualnya, irisan kerucut garis merupakan himpunan semua garis penghubung pasangan titik yang berkorespondensi dari dua berkas titik proyektif (tidak perspektif) yang sebidang pada garis (sumbu) yang berlainan.

   Disinilah terdapat Prinsip Dualitas pada Irisan Kerucut, yaitu irisan kerucut titik dualnya irisan kerucut garis dan sebaliknya. Jadi, setiap definisi dan teorema yang ada pada irisan kerucut titik pasti dualnya berlaku pada irisan kerucut garis.

   Antara irisan kerucut titik dengan irisan kerucut garis ada hubungan yang sangat erat, yaitu garis singgung – garis singgung dari suatu irisan kerucut titik membentuk suatu irisan kerucut garis. Demikian pula titik singgung – titik singgung dari suatu irisan kerucut garis membentuk suatu irisan kerucut titik.

4. Dalam Geometri Proyektif juga dikenal adanya irisan kerucut dalam dan irisan kerucut luar yang berlaku dalam teorema Pascal dan Brianchon.

   Teorema Pascal menyatakan bahwa jika suatu segienam sederhana merupakan segienam dalam dari suatu irisan kerucut maka titik potong – titik potong dari tiga pasang sisi yang berhadapan segaris (kolinear).

   Teorema Brianchon menyatakan bahwa jika suatu sisienam sederhana merupakan sisienam luar dari suatu irisan kerucut maka garis penghubung – garis penghubung dari tiga pasang titik sudut yang berhadapan berpotongan pada satu titik (konkuren).

   Irisan kerucut pada teorema Pascal disebut irisan kerucut luar, sedang dalam teorema Brianchon disebut irisan kerucut dalam.

   Segienam yang digunakan pada kedua teorema di atas adalah segienam sederhana yang merupakan segienam yang sebarang enam titiknya terletak pada suatu irisan kerucut dengan urutan yang tertentu.

   Didalam kedua teorema di atas juga berlaku Prinsip Dualitas oleh karena adanya irisan kerucut titik dan irisan kerucut garis.

5. Selain berlaku pada segienam sederhana, kedua teorema di atas juga berlaku dalam segilima sederhana, segiempat sederhana, dan segitiga. Hal inilah yang merupakan kasus khusus dari kedua teorema tersebut.

   Dengan demikian setelah memperhatikan beberapa penjelasan dan pernyataan di atas jelas bahwa terdapat Prinsip Dualitas pada Irisan Kerucut.

B. IMPLIKASI DAN SARAN

Prinsip Dualitas berlaku dalam Geometri Proyektif, tetapi tidak berlaku dalam Geomeri Euclides. Prinsip ini pada dasarnya tidak hanya untuk irisan kerucut saja, tetapi juga untuk teorema – teorema yang lain, misalnya Teorema Desargues. Maka bagi yang tertarik dan berminat dapat lebih mendalami Geometri Proyektif.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, Jr, 1967, *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Projective Geometry*, McGraw-Hill, Inc : USA.

Coxeter, HSM, F.R.S, 1967, *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley and Sons Inc.

Moeharti, Hw, 1986, Sistem – Sistem Geometri, Karunika Jakarta: Universitas Terbuka.

Moeharti, Hw, 1974, Ilmu Ukur Analitik Bidang Bagian II, FKIE - IKIP : Yogyakarta.

Smart, James, R, 1998, *Modern Geometries* 5^{th} *ed*, San Jose State University : Brooks/Cole Publishing Company.

Young, J.W, 1930, *Projective Geometry*, The Mathematical Association of Amerika.