TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH NILAI AWAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR SIMULTAN ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Lusiana

NIM : 98 1414 033

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2002

S k r i p s i

TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA

DALAM MENYELESAIKAN MASALAH NILAI AWAL

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR SIMULTAN

ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Oleh :

L u s i a n a

NIM : 98 1414 033

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Drs. A. Tutoyo, M.sc

tanggal 16 bulan April tahun 2002

S k r i p s i

TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH NILAI AWAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR SIMULTAN ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh

L u s i a n a

NIM : 98 1414 033

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 13 bulan Nopember tahun 2002
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	:	Drs. A. Atmadi, M.Si	....
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, M.T	....
Anggota	:	1. Drs. A. Tutoyo, M.sc	....
		2. Drs. A. Mardjono	....
		3. M. Andy Rudhito, S.pd	....

Yogyakarta, 13 Nopember 2002
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd

Kupersembahkan skripsi ini untuk :

Keluargaku tercinta : papa, mama, ci santi dan elsa terimakasih atas segala cinta, dukungan dan doanya, felex yang selalu menyemangati & memperhatikanku, sahabat-sahabatku, seluruh mahasiswa pendidikan matematika angkatan 98.

Dengan tetap mematuhi hal-hal yang tak ditakdirkan untuk kulakukan, aku kini mengerti bahwa kekuatanku adalah hasil kelemahanku, kesuksesanku adalah akibat kegagalanku, dan gayaku langsung berkaitan dengan keterbatasanku.

(Billy Joel)

JANGAN MENGHARAPKAN MENJADI APA-APA SELAIN MENJADI DIRIMU SENDIRI, DAN COBALAH MENJADI DIRIMU YANG SEMPURNA.

(SANTO FRANCIS DESALAS)

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 13 Nopember 2002

Penulis

Lusiana

ABSTRAK

Transform Laplace dari suatu fungsi f(t) adalah fungsi F(s) yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$. Transform Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan. Bentuk umum sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tidak diketahui adalah sebagai berikut :

$$a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}\frac{dy}{dt} + a_{13}x + a_{14}y = f_1(t),$$

$$a_{21}\frac{dx}{dt} + a_{22}\frac{dy}{dt} + a_{23}x + a_{24}y = f_2(t)$$

dimana a_{11}, a_{12}, ... , a_{23}, a_{24} merupakan koefisien yang berupa konstanta dan sistem tersebut juga memenuhi kondisi awal $x(0) = c_1$ dan $y(0) = c_2$. Untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut pertama-tama kita kerjakan Transform Laplace pada masing-masing persamaan diferensial, yaitu

$$\mathcal{L}\left\{a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}\frac{dy}{dt} + a_{13}x + a_{14}y\right\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\},$$

$$\mathcal{L}\left\{a_{21}\frac{dx}{dt} + a_{22}\frac{dy}{dt} + a_{23}x + a_{24}y\right\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Kemudian kita gunakan sifat linearitas Transform Laplace, diperoleh

$$a_{11}\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + a_{12}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_{13}\mathcal{L}\{x(t)\} + a_{14}\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\},$$

$$a_{21}\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + a_{22}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_{23}\mathcal{L}\{x(t)\} + a_{24}\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Berdasarkan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awalnya didapat

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - c_1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - c_2$$

Akibatnya diperoleh sistem persamaan aljabar

$a_{11}(sX(s) - c_1) + a_{12}(sY(s) - c_2) + a_{13}X(s) + a_{14}Y(s) = F_1(s)$,

$a_{21}(sX(s) - c_1) + a_{22}(sY(s) - c_2) + a_{23}X(s) + a_{24}Y(s) = F_2(s)$.

Selanjutnya sistem persamaan aljabar tersebut kita selesaikan misalnya dengan menggunakan eliminasi untuk memperoleh Transform Laplace X(s) dan Y(s). Terakhir untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut kita gunakan invers Transform Laplace yang didefinisikan

sebagai berikut $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ F(s) \}$. Dalam kasus ini kita mencari $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ dan $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Sistem persamaan diferensial linear simultan dapat diperoleh dari sistem pegas-massa, dimana pada sistem pegas-massa tersebut berlaku Hukum Hooke dan Hukum Newton II. Dengan menerapkan kedua hukum tersebut akan diperoleh persamaan diferensial linear orde kedua. Selanjutnya persamaan diferensial linear orde kedua tersebut kita reduksi sehingga menghasilkan sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama. Sehingga untuk mencari persamaan perpindahan benda sistem pegas-massa tersebut langkah-langkahnya sama seperti diatas.

ABSTRACT

Laplace Transform of function f(t) is function F(s) stated by $\mathcal{L}\{f(t)\}=$ F(s) $=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$. Laplace Transform can be used to solve-initial value problem system of simultaneous linear differential equations. The general linear system with constant coefficients of two first-order differential equation in two unknown function is of the form

$$a_{11}\frac{dx}{dt}+a_{12}\frac{dy}{dt}+a_{13}x+a_{14}y=f_1(t),$$

$$a_{21}\frac{dx}{dt}+a_{22}\frac{dy}{dt}+a_{23}x+a_{24}y=f_2(t)$$

in which a_{11}, a_{12}, ..., a_{23}, a_{24} are constant coefficients and that satisfies the initial conditions $x(0) = c_1$ and $y(0) = c_2$. To solve the initial-value problem system of simultaneous linear differential equations, first we take the Laplace Transform of both sides of equation, that are

$$\mathcal{L}\left\{a_{11}\frac{dx}{dt}+a_{12}\frac{dy}{dt}+a_{13}x+a_{14}y\right\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\},$$

$$\mathcal{L}\left\{a_{21}\frac{dx}{dt}+a_{22}\frac{dy}{dt}+a_{23}x+a_{24}y\right\}=\mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Then we use the linear property of the Laplace Transform, we obtain

$$a_{11}\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+a_{12}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+a_{13}\mathcal{L}\{x(t)\}+a_{14}\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\},$$

$$a_{21}\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+a_{22}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+a_{23}\mathcal{L}\{x(t)\}+a_{24}\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Based on transform of derivatives theorem and using the initial conditions, we have

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}=sX(s)-x(0)=sX(s)-c_1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-c_2$$

Consequencely, we obtain system algebraic equations

$a_{11}(sX(s)-c_1)+a_{12}(sY(s)-c_2)+a_{13}X(s)+a_{14}Y(s)=F_1(s),$

$a_{21}(sX(s)-c_1)+a_{22}(sY(s)-c_2)+a_{23}X(s)+a_{24}Y(s)=F_2(s).$

Next, we solve the algebraic equations for example using elimination to determine X(s) and Y(s). Finnaly, to get solutions of initial-value problem system of simultaneous linear differential equations, we use inverse Laplace Transform which is defined as $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. In this case we find

$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ dan $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

The system of simultaneous linear differential equations can be obtained from spring-mass system, in which the Hooke Law and the second Newton Law occur. Applying those two laws, second order of linear differential equations can be obtained. Next we reduce the second order of linear differential equations to determine the first order of simultaneous linear differential equations system. Therefore, to determine the spring-mass system of mass displacement equations, we must follow the steps above.

KATA PENGANTAR

Namo Buddhaya penulis panjatkan kepada Sang Tiratana atas segala cinta kasih, berkah dan bimbingan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Selama menyusun skripsi ini, banyak sekali kesulitan dan hambatan yang penulis alami. Namun karena bantuan dari banyak pihak akhirnya semua kesulitan dan hambatan tersebut dapat dilewati.

Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan tulus penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih atas segala bantuan, perhatian, dorongan, dan dukungan kepada :

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.sc selaku dosen pembimbing dan penguji,
2. Bapak Andy Rudhito, S.pd selaku dosen penguji,
3. Bapak Drs. A. Mardjono selaku dosen penguji
4. Sepupu-sepupuku Ita, wati, Christian dan sahabat-sahabatku Yuli, Wuri, Beti, Bruder, Drajat, Linda.
5. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari semua pihak.

Yogyakarta, Nopember 2002

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu ilmu yang penting dalam kehidupan sehari-hari dari hal-hal yang kecil sampai yang besar, misal transaksi jual beli di pasar membutuhkan keterampilan matematika, contohnya untuk menghitung uang kembalian; untuk mengemudikan kapal laut seorang nahkoda harus mengerti tentang tempat dan kedudukan; ekonom dalam memperhitungkan laba atau rugi menggunakan teknik-teknik matematika seperti integral; sampai kepada cara menerbangkan pesawat angkasa yang membutuhkan pengetahuan tentang tempat dan kedudukan.

Dari begitu pentingnya peranan matematika dalam kehidupan sehari-hari, ada cabang ilmu matematika yang hebat yaitu kalkulus. Contoh kehebatan kalkulus dalam penerapan kehidupan sehari-hari, misalnya untuk memprediksi laba atau rugi yang diperoleh dengan menggunakan teknik-teknik yang ada di dalam kalkulus yaitu pengintegralan dan pendiferensialan. Selain itu kehebatan yang lain adalah dapat membuktikan atau menyelesaikan hal yang tidak bisa diselesaikan oleh cabang ilmu matematika lain yaitu kalkulus dapat menentukan panjang dari keliling lingkaran padahal ilmu geometri sendiri tidak dapat menyelesaikannya.

Dalam kalkulus ada persamaan yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang-bidang sains dan teknik. Masalah-masalah tersebut seringkali sukar diselesaikan dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada, sehingga seringkali digunakan model matematika sebagai alat untuk memecahkan masalah-masalah tersebut. Model-model matematika ini banyak yang pada akhirnya melahirkan persamaan-persamaan yang mengandung turunan fungsi yang tak diketahui. Persamaan seperti ini kita katakan sebagai persamaan diferensial. Contoh model matematika dalam bentuk persamaan diferensial adalah gerak jatuh bebas yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathrm{F} = m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$$

dimana : F : gaya

m : massa

h : ketinggian

g : percepatan gravitasi

t : waktu.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan atau diferensial dari satu atau lebih fungsi, sebagai contoh :

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \text{..............................(1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \text{..................(2)}$$

$$xy' + y = 3 \text{..............................(3)}$$

$$y'' + y' + 3y = 0 \text{......................(4)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z \text{..............................(5)}$$

Untuk menentukan penyelesain persamaan diferensial kita perlu mengetahui terlebih dahulu klasifikasi persamaan diferensial tersebut. Metode mana yang harus kita gunakan akan sangat banyak ditentukan oleh jenis persamaan diferensialnya. Klasifikasi persamaan diferensial dapat ditinjau dalam berbagai cara. Pertama berdasarkan banyaknya variabel terikat yang terdapat pada persamaan differensial. Berdasarkan itu persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat yang berpadanan dengan satu variabel bebas. Persamaan (1), (2), (3), (4) diatas merupakan persamaan diferensial biasa. Sedangkan yang dimaksud dengan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang mengandung turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat yang berpadanan dengan lebih dari satu variabel bebas. Persamaan (5) diatas merupakan persamaan diferensial parsial.

Kedua, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan berdasarkan orde yang dimilikinya. Orde dalam suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi pada turunan yang muncul dalam persamaan. Bentuk umum persamaan diferensial orde ke-n dapat ditulis sebagai berikut :

$$F\,(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ atau } F\,(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

Persamaan (1) dan (3) diatas merupakan persamaan diferensial biasa orde pertama, persamaan (2) dan (4) merupakan persamaan diferensial biasa orde kedua, dan persamaan (5) merupakan persamaan diferensial parsial orde pertama.

Selanjutnya berdasarkan konsep kelinearan yang diterapkan pada suatu persamaan. Berdasarkan itu persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear. Suatu persamaan diferensial biasa orde n dikatakan linear dalam y jika dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)y = f(x)$$

dimana a_0, a_1, ..., a_n dan f adalah fungsi-fungsi kontinu dalam suatu interval x, dan $a_n(x) \neq 0$ dalam selang tersebut. Fungsi $a_k(x)$ disebut fungsi koefisien dengan k = 0, 1, 2, ... n. Jika f(x) = 0 , kita sebut persamaan diferensial tersebut homogen, sedangkan jika $f(x) \neq 0$ maka kita sebut persamaan diferensial tersebut nonhomogen. Persamaan diferensial yang tidak linear disebut persamaan diferensial nonlinear. Bila semua koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_0(x)$ diatas adalah tetap (konstan) maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Bila semua koefisiennya berupa variabel disebut persamaan diferensial dengan koefisien variabel. Contoh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Contoh persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel adalah sebagai berikut :

$$ty'' + y' + 4ty = 0$$

Selain persamaan diferensial yang mengandung sebuah fungsi yang tak diketahui, ternyata ada pula persamaan diferensial dengan n persamaan dan n fungsi yang tak diketahui yang disebut sistem persamaan diferensial linear simultan. Secara umum sistem persamaan diferensial linear simultan dari dua persamaan diferensial linear orde pertama dengan dua fungsi x dan y yang tidak diketahui dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_{11}(t)\frac{dx}{dt}+a_{12}(t)\frac{dy}{dt}+a_{13}(t)x+a_{14}(t)y=F_1(t),$$
$$a_{21}(t)\frac{dx}{dt}+a_{22}(t)\frac{dy}{dt}+a_{23}(t)x+a_{24}(t)y=F_2(t).$$

dimana $a_{11},a_{12},\ldots,a_{24}$ merupakan fungsi koefisien yang dapat berupa variabel atau konstanta. Sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama mempunyai bentuk normal yang secara umum dinyatakan dengan bentuk :

$$\frac{dx}{dt}=b_{11}(t)x+b_{12}(t)y+F_1(t),$$
$$\frac{dy}{dt}=b_{21}(t)x+b_{22}(t)y+F_2(t).$$

Selain terdiri atas dua persamaan diferensial linear dengan dua fungsi yang tak diketahui, sistem persamaan diferensial linear simultan dapat juga mempunyai n persamaan diferensial linear dengan n fungsi yang tidak diketahui, begitu juga ordenya dapat berorde n. Secara umum bentuk normal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dari n persamaan diferensial linear dengan n fungsi yang tidak diketahui dalam variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah

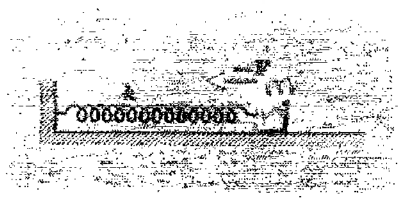
$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= b_{11}(t)x_1 + b_{12}(t)x_2 + \ldots + b_{1n}(t)x_n + F_1(t), \\
\frac{dx_2}{dt} &= b_{21}(t)x_1 + b_{22}(t)x_2 + \ldots + b_{2n}(t)x_n + F_2(t), \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
\frac{dx_n}{dt} &= b_{n1}(t)x_1 + b_{n2}(t)x_2 + \ldots + b_{nn}(t)x_n + F_n(t).
\end{aligned}
$$

Contoh sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dari dua persamaan diferensial linear dengan dua fungsi yang tak diketahui :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + x + y &= t, \\
\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - x - y &= t^2.
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan diferensial linear simultan dapat diperoleh dari bidang Fisika. Contohnya, sistem pegas-massa. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh : sebuah benda bermassa m diikatkan pada pegas dengan konstanta pegas k dan bebas bergerak diatas permukaan horizontal tanpa gesekan seperti diperlihatkan gambar di bawah ini :



Berdasarkan Hukum Hooke : F = - kx

dimana : F : gaya pengembalian pegas

m : massa

k : konstanta pegas.

Dengan menerapkan Hukum Newton II tentang gerak : F = ma,

dimana : F : gaya yang bekerja pada benda

m : massa

a : percepatan.

Kemudian kita subtitusikan F dengan – kx serta percepatan a kita tuliskan sebagai x'' , sehingga kita peroleh

$-kx = mx''$ *atau* $mx'' = -kx$ ....(i)

Perpindahan benda dapat diketahui dengan pasti jika perpindahan awal dan kecepatan awal dari benda diketahui, yaitu jika dipenuhi

$x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$

Persamaan diferensial (i) dapat direduksi ordenya menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama sebagai berikut :

misal : $x_1 = x$ *dan* $v_1 = x'$

jadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan diferensial (i) adalah

$$x_1' = x' = v_1,$$
$$v_1' = x'' = -\frac{k}{m}x = -\frac{k}{m}x_1$$

Contoh : Diketahui sistem pegas-massa seperti diperlihatkan gambar berikut

Dari gambar diatas dapat diketahui bahwa sistem ini terdiri atas dua massa dan dua susunan pegas linear.

Misalkan x_i menyatakan perpindahan massa m_i dari posisi setimbangnya, dengan perpindahan positif diukur kearah kanan dan k_1 dan k_2 merupakan konstanta pegas serta gaya gesekan dengan udara diabaikan.

Pada sistem tersebut berlaku Hukum Hooke : $F = -kx$

- gaya yang bekerja pada massa m_1 : $F_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$
- gaya yang bekerja pada massa m_2 : $F_2 = -k_2(x_2 - x_1)$

dengan menggunakan Hukum Newton II tentang gerak didapat $m_i x_i''$ sama dengan jumlah aksi gaya yang bekerja pada massa m_i, sehingga didapat :

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1)$$

perpindahan benda dapat diketahui dengan pasti jika perpindahan awal dan kecepatan awal dari massa-massa tersebut diketahui, yaitu jika dipenuhi

$x_1(0) = c_1$, $x_1'(0) = c_2$, $x_2(0) = c_3$, $x_2'(0) = c_4$

Persamaan (a) dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama sebagai berikut :

misalkan $x_1 = y_1, x_1' = v_1, x_2 = y_2, x_2' = v_2$. Sehingga persamaan differensial (a) menjadi

$$m_1 x_1'' = m_1 v_1' = -k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2)$$

$$m_2 x_2'' = m_2 v_2' = -k_2(y_2 - y_1)$$

jadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan (a) adalah :

$$y_1' = v_1,$$
$$v_1' = -\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2)y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_2,$$
$$y_2' = v_2,$$
$$v_2' = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_2$$

Dari contoh di atas dapat diketahui bahwa persamaan diferensial linear tingkat tinggi dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan cara memberikan nama baru pada turunannya.

Dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial kita perlu mengetahui kondisi awalnya . Persamaan diferensial bersama dengan kondisi awalnya disebut dengan masalah nilai awal (MNA), yang ditulis $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$.

Persamaan diferensial linear dapat diselesaikan dengan banyak metode diantaranya dengan metode Bernoulli, metode faktor pengintegralan, metode variasi parameter, dan lain-lain. Sedangkan sistem persamaan diferensial linear simultan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode operator diferensial, metode matriks, dan lain-lain. Selain itu ternyata persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial linear simultan dapat diselesaikan dengan menggunakan Transform Laplace.

Transform Laplace sendiri didefinisikan sebagai berikut : Misalkan f(t) suatu fungsi dari t yang tertentu untuk t>0 maka Transform Laplace dari f(t) yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$ adalah

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \text{, untuk } s > 0.$$

Transform ini jika diberlakukan pada bentuk persamaan diferensial linear dalam f(t) akan mengubah bentuk persamaan diferensial tersebut menjadi sebuah persamaan aljabar dalam F(s) yang mengandung, sehingga dapat menyederhanakan masalahnya. Kemudian masalah yang telah sederhana ini diselesaikan dengan menggunakan Transform Laplace dan untuk mengetahui fungsi f(t) yang kita cari, kita gunakan invers transform laplace.

Invers transform laplace didefinisikan sebagai berikut : Jika transform laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s), yaitu jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka f(t) disebut invers transform laplace dari F(s), secara simbolis kita tulis

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ F(s) \}.$$

Karena semua alasan itulah penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh tentang bagaimana Transform Laplace dapat mempermudah kita dalam mencari penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah :

1. Bagaimana Transform Laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan differensial linear orde pertama dengan koefisien konstan ?
2. Bagaimana Transform Laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan ?
3. Bagaimana transform laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan yang diterapkan pada sistem pegas-massa?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah :

1. Untuk lebih memahami kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde

pertama dengan koefisien konstan dan sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

2. Untuk lebih memahami kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan yang diterapkan pada sistem pegas-massa.

1.4 Manfaat Penulisan

Manfaat bagi penulis adalah dapat menambah pengetahuan baru tentang cara lain untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan, yaitu dengan menggunakan Transform Laplace. Manfaat bagi lembaga pendidikan adalah dapat menambah perbendaharaan skripsi, dan bagi calon guru adalah dapat menambah pengetahuan baru.

1.5 Pembatasan Masalah

Untuk aplikasi Transform Laplace akan dibahas bagaimana Transform Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dan sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan, dimana sistem tersebut terdiri atas dua persamaan diferensial dan dua fungsi yang tidak diketahui.

Untuk penggunaan Transform Laplace penulis akan membahas bagaimana Transform Laplace tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan, dimana sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut diperoleh dari sistem pegas-massa. Sistem pegas-massa yang akan dibahas pun dibatasi untuk sistem yang mengabaikan gaya gesekan dari luar dan gaya luar atau yang disebut getaran bebas tak teredam. Selain itu kita juga membatasi untuk sistem dengan satu derajat kebebasan dan dua derajat kebebasan. Untuk sistem dengan satu derajat kebebasan yang akan dibahas adalah sistem satu pegas-satu massa dan sistem dua pegas-satu massa, sedangkan untuk sistem dengan dua derajat kebebasan adalah sistem dua pegas-dua massa dan sistem tiga pegas-dua massa.

1.6 Metode Penulisan

Dalam penulisan ini penulis akan menggunakan metode studi pustaka

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan ini terbagi dalam beberapa bab, yakni :

I. Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

1.2 Perumusan Masalah

3.6 Aplikasi Transform Laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

IV. Penggunaan transform laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dengan penerapan pada sistem pegas-massa.

4.1 Sistem pegas-massa

4.2 Langkah-langkah penyelesaian

4.3 Kasus-kasus

4.3.1 Sistem pegas-massa dengan satu derajat kebebasan

4.3.2 Sistem pegas-massa dengan dua derajat kebebasan

V. Penutup

5.1 Kesimpulan

5.2 Saran

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

2.1. Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama

Sebelum kita membahas persamaan diferensial linear orde pertama, ada baiknya kita tinjau kembali definisi persamaan diferensial linear orde-n.

Definisi : Suatu persamaan diferensial linear orde-n dikatakan linear dalam y jika dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_n(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad \ldots(1)$$

dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dan f adalah fungsi-fungsi kontinu dalam suatu interval x dan $a_n(x) \neq 0$ dalam selang tersebut. $a_k(x)$ disebut fungsi koefisien yang berupa konstanta atau variabel dan k = 0, 1, 2, …, n.

Dari definisi persamaan diferensial linear orde-n dapat diperoleh definisi persamaan diferensial linear orde pertama yaitu dengan mengambil y yang turunan tertingginya satu.

Definisi : Suatu persamaan diferensial linear orde pertama dalam y adalah persamaan diferensial yang berbentuk :

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad \ldots \quad (2)$$

dimana a_0, a_1, f adalah fungsi-fungsi kontinu dalam suatu interval x dan $a_1(x) \neq 0$ dalam selang tersebut. $a_0(x)$, $a_1(x)$ merupakan fungsi koefisien yang dapat berupa konstanta atau variabel.

Berdasarkan definisi di atas terdapat beberapa kondisi yang harus dipenuhi oleh suatu persamaan diferensial linear orde pertama, sebagai berikut :

1. Fungsi y (fungsi yang belum diketahui) dan $\frac{dy}{dx}$ yang muncul harus berpangkat satu.
2. Tidak boleh ada perkalian antara fungsi y dengan $\frac{dy}{dx}$
3. Tidak boleh ada fungsi transenden dari y dan $\frac{dy}{dx}$

Persamaan diferensial yang tidak linear disebut nonlinear.

Contoh (1) : $\frac{dy}{dx} + 2y = 5$

dimana $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $f(x) = 5$

karena fungsi koefisiennya berupa konstanta maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan.

Contoh (2) : $x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$

dimana $a_0 = x + 1$, $a_1 = x$, $f(x) = x^3$

karena koefisiennya berupa fungsi yang kontinu dimana-mana maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien variabel.

Contoh (3) : $(\frac{dy}{dx})^2 + 2y = x$

karena derivatif pertama fungsi yang belum diketahui berpangkat dua maka persamaan diferensial di atas nonlinear.

Contoh (4) : $\frac{dy}{dx} + 5y = \cos y$

adalah nonlinear karena cos y adalah fungsi transendental dari fungsi yang belum diketahui.

Contoh (5) : $y^2 + x\frac{dy}{dx} = \sin y\frac{dy}{dx}$

adalah nonlinear karena ada perkalian antara fungsi yang belum diketahui dengan derivatifnya.

Persamaan diferensial linear orde pertama (2) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad . \quad . \quad . \quad (3)$$

persamaan diferensial tersebut linear dalam y. Persamaan diferensial (3) disebut persamaan bentuk baku atau normal.

Contoh (6) : Ubahlah persamaan dalam contoh 1 menjadi bentuk (3) dari contoh 1 diatas didapat P(x) = 2, Q(x) = 5

jadi contoh 1 diatas sudah berbentuk seperti persamaan (3).

Contoh (7) : Ubahlah persamaan dalam contoh 2 menjadi bentuk (3)

Persamaan dalam contoh 2 dapat diubah menjadi berbentuk (3) dengan cara membagi kedua ruas dengan x, didapat

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(x+1)}{x} y = x^2$$

dengan $P(x) = \dfrac{(x+1)}{x}$ dan $Q(x) = x^2$.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear Simultan Orde Pertama dengan Koefisien Konstan

Di atas telah kita bahas mengenai suatu persamaan diferensial linear dengan satu fungsi yang tidak diketahui. Sekarang kita akan membahas dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tidak diketahui yang disebut dengan sistem persamaan diferensial linear simultan, jika persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan maka persamaan itu disebut sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

Definisi : Secara umum sistem persamaan diferensial linear simultan dari dua persamaan diferensial orde pertama dengan koefisien konstan dan dua fungsi yang tak diketahui dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_{11}\frac{dx}{dt}+a_{12}\frac{dy}{dt}+a_{13}x+a_{14}y=F_1(t),$$

$$\cdots \quad (4)$$

$$a_{21}\frac{dx}{dt}+a_{22}\frac{dy}{dt}+a_{23}x+a_{24}y=F_2(t)$$

dimana x(t) dan y(t) merupakan fungsi yang tidak diketahui,

a_{11}, a_{12}, … ,a_{23}, a_{24} merupakan koefisien yang berupa konstanta, $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ merupakan fungsi yang diketahui.

Selanjutnya sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dari dua persamaan diferensial linear orde pertama dengan dua fungsi yang tidak diketahui kita sebut sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama saja.

Contoh (8) : Sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}-2x+y=t^3$$

$$\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+3x+4y=e^t$$

Contoh (9) : Sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan

$$3y' + 2y - x' = 2,$$
$$y' + x = 0$$

Selain berbentuk seperti di atas sistem persamaan diferensial linear simultan mempunyai bentuk lain yang disebut bentuk normal dari sistem persamaan diferensial linear simultan.

Definisi : Secara umum bentuk normal dari sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan adalah

$$\frac{dx}{dt} = b_{11}x + b_{12}y + F_1(t),$$
$$\frac{dy}{dt} = b_{21}x + b_{22}y + F_2(t) \qquad \ldots (5)$$

dimana b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} merupakan koefisien yang berupa konstanta.

Contoh (10) : Carilah bentuk normal dari sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dari contoh (8)

Untuk mendapatkan $\frac{dy}{dt}$ kita eliminasi $\frac{dx}{dt}$ dengan cara mengalikan persamaan diferensial yang pertama dengan 1 dan persamaan differensial yang kedua dengan 2, didapat

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} - 2x + y = t^3,$$
$$2\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 6x + 8y = 2e^t$$

kemudian kita kurangkan kedua persamaan differensial tersebut didapat

$$7\frac{dy}{dt} - 8x - 7y = t^3 - 2e^t$$

$$7\frac{dy}{dt} = 8x + 7y + (t^3 - 2e^t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{7}x + y + \frac{t^3 - 2e^t}{7}$$

untuk mendapatkan $\frac{dx}{dt}$ kita eliminasi $\frac{dy}{dt}$ dengan cara mengalikan persamaan differensial pertama dengan –2 dan persamaan differensial kedua dengan 3 didapat

$$-4\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{d} + 4x - 2y = -2t^3,$$

$$3\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} + 9x + 12y = 3e^t$$

kemudian kita kurangkan kedua persamaan differensial tersebut didapat

$$-7\frac{dx}{dt} - 5x - 14y = -2t^3 - 3e^t$$

$$-7\frac{dx}{dt} = 5x + 14y - 2t^3 - 3e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{7}x - 2y + \frac{2}{7}t^3 + \frac{3}{7}e^t$$

jadi bentuk normal dari sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama dari contoh (9) adalah

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{7}x + y + \frac{t^3 - 2e^t}{7},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{7}x - 2y + \frac{2}{7}t^3 + \frac{3}{7}e^t$$

Contoh (11) : Carilah bentuk normal dari sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dari contoh (9)

$$3y' + 2y - x' = 2,$$
$$y' + x = 0$$

dari persamaan differensial yang kedua didapat

$y' = -x$

kemudian kita subtitusikan $y' = -x$ pada persamaan differensial yang pertama didapat

$$3(-x) + 2y - x' = 2$$
$$x' = -3x + 2y - 2$$

jadi bentuk normal dari sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama di atas adalah

$$x' = -3x + 2y - 2,$$
$$y' = -x$$

Dalam sistem persamaan diferensial linear simultan terdapat satu sifat yang penting untuk diketahui, yaitu setiap persamaan diferensial linear tingkat tinggi dapat diubah kedalam sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan semula.

Untuk menjabarkan pengubahan tersebut, pertama-tama kita pandang persamaan diferensial orde-n dalam x

$$a_n \frac{d^{(n)}x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} + \quad \ldots \quad + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t) \qquad \ldots \quad (6)$$

kemudian kita misalkan :

$$x_1 = x, x_2 = \frac{dx}{dt}, x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, x_{n-1} = \frac{d^{(n-2)}x}{dt^{n-2}}, x_n = \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} \qquad \cdots \quad (7)$$

nyatakan bahwa $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x_3, dst$.

Dengan mensubtitusikan (7) ke (6) didapat

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2 \\
&\frac{dx_2}{dt} = x_3 \\
&\vdots \\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\
&\frac{dx_n}{dt} = px_n + qx_{n-1} + \ldots + rx_1 + F(t)
\end{aligned} \qquad \ldots \quad (8)$$

dimana : $p = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, q = -\frac{a_{n-2}}{a_n}, r = -\frac{a_0}{a_n}$

Dari penjelasan di atas diperoleh bahwa banyaknya persamaan diferensial dari sistem persamaan differensial linear simultan yang didapat dari hasil pengubahan adalah orde dikalikan dengan banyaknya persamaan diferensial yang diketahui.

Contoh (12) : Ubahlah persamaan diferensial linear orde kedua berikut menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

$$3\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \sin t$$

misal : $x_1 = y, x_2 = \frac{dy}{dt}$, maka

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{3}\left(2\frac{dy}{dt} - y + \sin t\right) = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}\sin t$$

sehingga sistem persamaan diferensial linear simultan yang ekuivalen dengan persamaan diferensial di atas adalah

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}\sin t$$

Contoh (13) : Ubahlah persamaan differensial linear orde ketiga berikut menjadi sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama

$x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \sin 2t$

misalkan : $x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x''$, maka

$$x_1' = x' = x_2,$$
$$x_2' = x'' = x_3,$$
$$x_3' = x''' = -3x'' - 2x' + 5x + \sin 2t$$
$$= -3x_3 - 2x_2 + 5x_1 + \sin 2t$$

jadi sistem persamaan differensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan differensial linear orde ketiga di atas adalah

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = x_3,$$
$$x_3' = -3x_3 - 2x_2 + 5x_1 + \sin 2t$$

2.3 Masalah Nilai Awal

Untuk mencari penyelesaian khusus persamaan diferensial, diperlukan suatu kondisi awal. Sebagai contoh $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, dimana a adalah konstanta real . Persamaan diferensial tersebut mempunyai penyelesaian umum y = c e^{-ax}, dimana c adalah konstanta sebarang. Karena c adalah konstanta sebarang maka akan menimbulkan banyak penyelesaian khusus untuk persamaan diferensial tersebut. Oleh karena itu diperlukan kondisi awal untuk mendapatkan satu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial tersebut.

Definisi : Berdasarkan persamaan diferensial linear orde pertama

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \ldots (9)$$

dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$

maka persamaan (9) bersama dengan kondisi awal yang diberikan disebut masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

Contoh (14) : Tentukan penyelesaian khusus dari masalah nilai awal

$$y' + 2y = e^{-x},\ y(0) = \frac{3}{4}$$

penyelesaian umum dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = e^{-x} + ce^{-2x}$$

untuk sebarang nilai c.

Karena adanya kondisi awal, maka penyelesaian khusus persamaan diferensial tersebut bisa diperoleh dengan cara memasukkan x = 0 dan y = $\frac{3}{4}$, diperoleh

$$\frac{3}{4} = e^{0} + ce^{0}$$

$$\frac{3}{4} = 1 + c$$

$$c = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

jadi penyelesaian khusus dari masalah nilai awal di atas adalah

$$y = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Contoh (15) : Perlihatkan bahwa y = 1 + 2x adalah penyelesaian dari masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 2y - 4x,\ y(0) = 1$

Pertama-tama kita turunkan y = 1 + 2x terhadap x didapat $\frac{dy}{dx} = 2$

kemudian masukkan y = 1 + 2x dan $\frac{dy}{dx} = 2$ kepersamaan differensial, diperoleh

2 = 2 (1 + 2x) – 4x

2 – 2 (1 + 2x) + 4x = 0

2 – 2 – 4x + 4x = 0

selanjutnya kita periksa kondisi awalnya y(0) = 1 + 2 . 0 = 1

ternyata kondisi awal ini cocok dengan syarat yang diminta dalam masalah nilai awal di atas.

Jadi y = 1 + 2x adalah penyelesaian dari masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 4x,\ y(0) = 1$$

BAB III

TRANSFORM LAPLACE

3.1 Transform Laplace dan Invers Transform Laplace

Sewaktu kuliah kita telah mempelajari beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear, misalnya dengan menggunakan metode faktor pengintegralan; metode variasi parameter; metode subtitusi; dan lain-lain. Sekarang kita akan membahas metode lain yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial linear maupun sistem persamaan diferensial linear simultan yaitu dengan menggunakan Transform Laplace. Dengan menggunakan Transform Laplace persamaan diferensial tersebut akan diubah bentuknya kedalam persamaan aljabar sehingga lebih mudah untuk menyelesaikannya. Selanjutnya untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial tersebut kita membutuhkan invers Transform Laplace.

3.1.1 Transform Laplace

Pertama-tama akan kita bahas definisi dari Transform Laplace .

Definisi : Diberikan f(t) fungsi bernilai real untuk semua $t \geq 0$, maka Transform Laplace dari f (t) adalah fungsi F (s) yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad . . . (10)$$

untuk semua s > 0.

Transform Laplace dari f dikatakan ada di s, jika integral tersebut konvergen. Secara umum kita akan menggunakan huruf kecil f, g, h, dan sebagainya untuk melambangkan fungsi-fungsi dari t dan huruf kapital yang berpadanan untuk melambangkan Transform Laplacenya. Integral pada definisi Transform Laplace tersebut merupakan integral tak wajar. Untuk menghitung integral tak wajar ini dikerjakan

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \quad . . .(11)$$

Oleh karena itu, adanya Transform Laplace bergantung pada nilai limitnya.

Kita dapat mencari Transform Laplace dari beberapa fungsi sederhana dengan menggunakan definisi Transform Laplace . Hal ini akan dijelaskan melalui contoh-contoh.

Contoh (16) : Tentukan Transform Laplace dari f (t) = 1 untuk setiap t ≥ 0.

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st}\, 1\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-sT}}{s} + \frac{1}{s} \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-sT}}{s} \right] + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{s}$$

$$= 0 + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

jadi $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, dimana s > 0

Contoh (17) : Tentukan Transform Laplace dari f (t) = t untuk t > 0.

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} t \, dt$$

untuk menyelesaikan integral diatas kita gunakan pengintegralan parsial.

Misal : $u = t$ $\qquad dv = e^{-st}\, dt$

$du = dt$ $\qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$\int_0^T e^{-st} t\, dt = [-\frac{e^{-st}}{s} t]_0^T - \int_0^T -\frac{e^{-st}}{s} dt$$

$$= [-\frac{e^{-st}}{s} t]_0^T - [\frac{e^{-st}}{s^2}]_0^T$$

$$= [-\frac{e^{-sT}}{s} T - 0] - [\frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{1}{s^2}]$$

$$= -\frac{e^{-sT}}{s} T - \frac{e^{-sT}}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

sehingga

$$\mathcal{L}\ \{t\} = \lim_{T\to\infty} [-\frac{e^{-sT}}{s} T - \frac{e^{-sT}}{s^2} + \frac{1}{s^2}]$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{e^{-sT}}{s} T - \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-sT}}{s^2} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s^2}$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

Jadi $\mathcal{L}$ {t} = F (s) = $\frac{1}{s^2}$, dimana s > 0

Contoh (18): Tentukan Transform Laplace dari fungsi f (t) = e^{at}, untuk t>0 dan a sebarang konstanta

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\ \{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} + \frac{1}{s-a} \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left(-\frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} \right) + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{s-a}$$

$$= 0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

jadi $\mathcal{L}\ \{e^{at}\} = F\ (s) = \dfrac{1}{s-a}$, dimana s>a

Contoh (19) : Tentukan Transform Laplace dari fungsi $f(t) = t^n$, $t > 0$

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\ (t^n) = \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} t^n\, dt$$

kita selesaikan integral diatas dengan menggunakan pengintegralan parsial

misal : $u = t^n$ $\qquad dv = e^{-st}\, dt$

$du = n\, t^{n-1}\, dt$ $\qquad v = -\dfrac{e^{-st}}{s}$

sehingga,

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^n dt = \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^T + \frac{n}{s}\int_0^T t^{n-1}e^{-st}dt\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^T + \lim_{T\to\infty}\frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}T^n e^{-sT} + \frac{1}{s}\cdot 0\cdot e^0\right] + \lim_{T\to\infty}\frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= 0 + \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

andaikan n diganti dengan n-1, maka

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$$

sehingga, $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n}{s}\dfrac{(n-1)}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$

$$= \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$$

jika diteruskan akan didapat

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathcal{L}\{t^0\}$$

dimana n(n-1)(n-2)…3.2.1 = n! dan $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

jadi $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^n}\left(\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, dimana s>0

Contoh (20) : Tentukan Transform Laplace dari fungsi f (t) = sin at, dimana t>0 dan a sebarang konstanta

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^{T} e^{-st} \sin at\, dt$$

untuk menyelesaikan integral diatas kita gunakan pengintegralan parsial

misal : $u = e^{-st}$ $\qquad dv = \sin at\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt$ $\qquad v = -\dfrac{1}{a}\cos at$

$$\int_0^T e^{-st} \sin at\, dt = -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at\Big]_0^T - \int_0^T \left(-\frac{1}{a}\cos at\right)(-se^{-st})dt$$

$$= -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at\Big]_0^T - \frac{s}{a}\int_0^T \cos at\; e^{-st} dt$$

sekali lagi kita gunakan pengintegralan parsial

misal : $u = e^{-st}$ $\qquad dv = \cos at\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt$ $\qquad v = \dfrac{1}{a}\sin at$

$$\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt = -\frac{1}{a}e^{-st}\cos at]_0^T - \frac{s}{a}\left\{\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^T + \frac{s}{a}\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-st}\cos at]_0^T - \frac{s}{a}[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at]_0^T - \frac{s^2}{a^2}\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt$$

kemudian kedua ruas kita tambahkan dengan $\frac{s^2}{a^2}\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt$, didapat

$$(1+\frac{s^2}{a^2})\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt = -\frac{1}{a}e^{-st}\cos at]_0^T - \frac{s}{a}[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at]_0^T$$

$$\int_0^T e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a^2}{s^2+a^2}\left\{\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^T - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^T\right\}$$

sehingga

$$\mathcal{L}\,\{\sin at\} = \lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{s^2+a^2}\left\{\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^T - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^T\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{s^2+a^2}[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at]_0^T - \lim_{T\to\infty}\frac{as}{a^2+s^2}[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at]_0^T$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{a}e^{-sT}\cos aT + \frac{1}{a}] - \frac{as}{s^2+a^2}\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{a}e^{-sT}\sin aT - 0]$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

jadi $\mathcal{L}\,\{\sin at\} = F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$

Contoh (21) : f (t) = cos at, untuk t > 0 dan a sebarang konstanta.

Carilah Transform Laplacenya dengan menggunakan definisi Transform Laplace

$\mathcal{L}$ {f (t)} $= F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$,

maka $\mathcal{L}$ {cos at} $= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} \cos at\, dt$

kita gunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikannya

misal : $u = e^{-st}$ $\qquad$ $dv = \cos at$

$du = -s\, e^{-st}$ $\qquad$ $v = \frac{1}{a} \sin at$

sehingga,

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \lim_{T\to\infty}\{[\frac{1}{a} e^{-st} \sin at]_0^T - \int_0^T -\frac{s}{a} e^{-st} \sin at\, dt\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{a} e^{-st} \sin at]_0^T + \frac{s}{a} \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \sin at\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{a} e^{-sT} \sin aT - \frac{1}{a} e^0 \sin 0] + \frac{s}{a} \mathcal{L}\{\sin at\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}[0-0] + \frac{s}{a}\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

jadi $\mathcal{L}$ {cos at} $= F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$

Transform Laplace yang dihasilkan dari contoh-contoh tersebut kita rangkum menjadi sebuah tabel, yang kita sebut tabel Transform Laplace . Akan tetapi tabel ini tidak hanya terdiri dari contoh-contoh di atas saja melainkan masih ada Transform Laplace yang lain, karena tidak mungkin kita membahasnya satu persatu. Tabel Transform Laplace ini akan disertakan sebagai lampiran pada halaman 132 -133.

Dari contoh-contoh di atas kita melihat bahwa Transform Laplace dari suatu fungsi selalu ada untuk s > 0. Untuk meyakinkan hal itu terdapat teorema mengenai eksistensi Transform Laplace. Tetapi, sebelumnya kita terlebih dahulu mendefinisikan fungsi berorde eksponensial.

Definisi : Sebuah fungsi f adalah fungsi berorde eksponensial jika ada bilangan real α, M dan T sedemikian sehingga

$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, untuk $t \geq T$ ....(12)

jadi jika f adalah fungsi berorde eksponensial dan nilai dari f ada untuk $t \to \infty$, maka kenaikan f tidak akan lebih cepat dari $Me^{\alpha t}$.

Contoh (22) : Setiap fungsi yang terbatas adalah fungsi berorde eksponensial, dengan $\alpha = 0$. Sebagai contoh, sin bt dan cos bt.

Contoh (23) : $f(t) = e^{at}$ sin bt adalah fungsi berorde eksponensial, dengan $\alpha = a$ karena menurut definisi fungsi berorde eksponensial

$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

$|e^{at} \sin bt| \leq Me^{at}$

bila kita ambil M = 1 maka

$|e^{at} \sin bt| \leq e^{at}$

Contoh (24) : Perlihatkan $f(t) = e^{t^2}$ bukan fungsi berorde eksponensial

$\lim_{t\to\infty} e^{t^2} = \infty$, karena nilai limitnya tidak ada maka berdasarkan definisi fungsi berorde eksponensial nilai $e^{t^2} > Me^{\alpha t}$ berapapun nilai dari α.

Teorema (Eksistensi Transform Laplace) :

Jika fungsi f kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ dan memenuhi keadaan (12) maka F (s) ada untuk semua $s > \alpha$.

Bukti : Kita mulai pembuktian dengan memecah integral di atas menjadi 2 integral yang terpisah

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

T dipilih sedemikian hingga pertidaksamaan (13) terpenuhi.

Integral pertama di ruas kanan yaitu, $\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$ ada, karena f(t) dan e^{-st} f(t) kontinu sepotong-sepotong dalam interval [0,T] untuk $s > \alpha$.

Untuk membuktikan bahwa integral yang kedua juga konvergen kita gunakan teorema uji banding untuk integral tak wajar, yaitu :

Jika g dan G fungsi-fungsi real sedemikian hingga $0 \leq g(t) \leq G(t)$ dalam interval $a \leq t < \infty$, andaikan $\int_a^\infty G(t)\, dt$ ada dan g terintegralkan dalam setiap subinterval yang tertutup kiri dari $a \leq t < \infty$ maka $\int_a^\infty g(t)\, dt$ juga ada.

Andaikan $g(t) = |e^{-st} f(t)| = e^{-st}|f(t)|$, $G(t) = M\, e^{-(s-\alpha)t}$

Karena f(t) adalah fungsi berorde eksponensial α dengan $t \geq T$, maka

$g(t) \leq G(t)$, untuk semua $t \geq T$.

Selanjutnya untuk $s > \alpha$

$$\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\,dt = M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt$$

$$= M\lim_{x\to\infty}\int_T^x e^{-(s-\alpha)t}\,dt$$

$$= M\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_T^x$$

$$= M\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{-(s-\alpha)} - \frac{e^{-(s-\alpha)T}}{-(s-\alpha)}\right]$$

$$= M\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{(s-\alpha)}$$

sehingga $\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\,dt$ ada

karena $|e^{-st} f(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t}$ untuk $t \geq T$ dan $\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\,dt$ ada

maka berdasarkan teorema uji banding, integral

$\int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt$ ada untuk $s > \alpha$ begitupun $\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ ada untuk $s > \alpha$.

Akhirnya, karena kedua integral di ruas kanan ada maka Transform Laplace F(s) ada untuk $s > \alpha$. ■

3.1.2 Invers Transform Laplace

Pada subbab 3.1.1 kita telah membahas cara mencari Transform Laplace dari fungsi f (t), t >0 yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}$ {f (t)} = F(s). Sekarang akan kita bahas cara mencari invers Transform Laplace , yaitu jika diberikan fungsi F(s) , kita cari fungsi f (t) yang Transform Laplacenya diberikan oleh fungsi F.

Definisi : Jika diketahui fungsi f (t) sedemikian hingga $\mathcal{L}$ {f (t)} = F(s), maka f(t) disebut invers Transform Laplace dari F(s). Kita notasikan invers Transform Laplace ini dengan $\mathcal{L}^{-1}$ dan ditulis

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\ \{F(s)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Dari definisi di atas akan menimbulkan pertanyaan bagi kita, apakah invers Transform Laplace itu tunggal ?. Untuk menjawab pertanyaan ini kita perhatikan teorema berikut

<u>Teorema (ketunggalan invers Transform Laplace) :</u>

Andaikan f dan g adalah 2 fungsi yang kontinu untuk t ≥ 0 dan keduanya mempunyai Transform Laplace yang sama maka

f(t) = g(t) untuk semua t ≥ 0.

Bukti : untuk membuktikan teorema ini, cukup kita perlihatkan bahwa

$$f(t) - g(t) = 0$$

diketahui $\mathcal{L}$ { f(t) } = $\mathcal{L}$ {g(t)} = G (s)

andaikan h(t) = f(t) – g(t)

maka $\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} - \mathcal{L}\{g(t)\}$

$$H(s) = F(s) - G(s)$$

$$= G(s) - G(s) = 0, \text{ untuk } s > \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ i })$$

kemudian kita ganti s dengan $\alpha + n$, maka $H(s) = 0$ untuk $n \geq 0$

sehingga menurut definisi Transform Laplace diperoleh

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt$$

$$0 = \int_0^\infty e^{-(\alpha+n)t} h(t)\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ ii })$$

selanjutnya kita andaikan $v(t) = \int_0^t e^{-\alpha x} h(x)\, dx$, maka $v'(t) = e^{-\alpha t} h(t)$ dan integralkan (ii) secara parsial dengan memisalkan : $u = e^{-nt}$ $\qquad v'(t) = e^{-\alpha t} h(t)$

$$du = -ne^{-nt} \qquad v(t) = \int_0^t e^{-\alpha x} h(x)\, dx$$

sehingga (ii) menjadi

$$0 = e^{-nt} v(t)]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-nt} v(t)\, dt$$

karena $v(0) = 0$, maka

$$\int_0^\infty e^{-nt} v(t)\, dt = 0, n \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{iii})$$

untuk memperlihatkan $h(t) = 0$ kita harus memperlihatkan bahwa $v(t) = 0$, untuk itu pada (iii) kita lakukan subtitusi x = - ln t dan u(t) = v (- ln t) diperoleh

$$\int_0^1 t^n u(t)\, dt = 0, n \geq 0 \text{ ....(iv)}$$

dari (iv) diperoleh bahwa u(t) = 0 maka v(t) = 0 demikian pula h(t) = 0.

Jadi h(t) = f(t) – g(t) = 0 atau f(t) = g(t). ■

Contoh (25) : Diketahui $\mathcal{L}$ {1} = $\frac{1}{s}$. Sehingga invers transform dari F(s) = $\frac{1}{s}$ adalah fungsi kontinu f yang terdefinisi untuk t > 0 oleh f(t) = 1. Berdasarkan teorema ketunggalan invers Transform Laplace tidak ada lagi invers transform yang kontinu dari F sedemikian hingga F(s) = $\frac{1}{s}$. Ternyata F juga ada untuk invers transform yang diskontinu, perhatikan fungsi g yang didefinisikan sebagai berikut :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 2, & t = 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

dengan menggunakan definisi Transform Laplace didapat

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

$$= \int_0^3 e^{-st} dt + \int_3^3 2e^{-st} dt + \int_3^\infty e^{-st} dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^3 + \left[\frac{2e^{-st}}{-s} \right]_3^3 + \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_3^T$$

$$= -\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{1}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s} + \lim_{T \to \infty} \left[\frac{e^{-sT}}{-s} + \frac{e^{-3s}}{s} \right]$$

$$= -\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}, \text{ jika } s > 0$$

melihat hasil di atas ternyata fungsi g yang diskontinu pada t = 3 juga merupakan invers dari $F(s) = \frac{1}{s}$.

Tetapi karena invers Transform Laplace haruslah berupa fungsi yang kontinu maka satu-satunya invers dari $F(s) = \frac{1}{s}$ adalah $f(t) = 1$ untuk $t > 0$.

Cara mencari invers Transform Laplace tidak jauh berbeda dengan cara mencari Transform Laplacenya, dengan kata lain untuk mencari invers Transform Laplace kita harus sudah mengenal rumus-rumus untuk mencari Transform Laplace. Rumus-rumus tersebut dapat kita lihat pada tabel Transform Laplace (lihat lampiran). Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh (26) : Tentukan $\mathcal{L}^{-1} \{ \frac{1}{s-3} \}$

Dengan melihat tabel Transform Laplace diketahui

$$\mathcal{L} \{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Sehingga, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = e^{3t}$

Contoh (27) : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}$

Dengan melihat tabel Transform Laplace diketahui

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Sehingga, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\} = \sin 2t$

Contoh (28): Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-4}\}$

Dengan melihat tabel Transform Laplace diketahui

$\mathcal{L}\{\frac{s}{s^2-a^2}\} = \cosh at$ sehingga,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-4}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-2^2}\} = \cosh 2t$$

Contoh (29) : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2-6s+13}\right\}$

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-6s+13} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} = \frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}$$

Dari tabel Transform Laplace diketahui

$$\mathcal{L}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$$

sehingga $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}\right\} = e^{3t}\cos 2t$

3.2 Sifat-Sifat Transform Laplace

Selain menggunakan definisi Transform Laplace , untuk mencari Transform Laplace kita juga memerlukan sifat-sifat dari Transform Laplace sehingga dapat mempermudah kita untuk mencari Transform Laplace tersebut. Transform Laplace $\mathcal{L}$ adalah sebuah operator yang mempunyai sifat linear. Untuk lebih jelasnya kita lihat teorema berikut:

<u>Teorema (sifat linearitas)</u> :

Andaikan f_1 dan f_2 adalah fungsi-fungsi sedemikian hingga $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ ada, dan andaikan pula c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, maka

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t) \pm c_2f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad \text{......................}(14)$$

Untuk membuktikan teorema ini kita dapat menggunakan definisi Transform Laplace yang secara langsung mengikuti sifat linearitas dari limit dan integral.

Bukti : $\mathcal{L}\{c_1f_1(t) \pm c_2f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,[c_1f_1(t) \pm c_2f_2(t)]\,dt$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,[c_1f_1(t) \pm c_2f_2(t)]\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T [e^{-st}\,c_1f_1(t) \pm e^{-st}\,c_2f_2(t)]\,dt$$

$$= c_1\left(\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f_1(t)\,dt\right) \pm c_2\left(\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f_2(t)\,dt\right)$$

$= c_1\mathcal{L}\ \{f_1(t)\} \pm c_2\mathcal{L}\ \{f_2(t)\}$ ■

Contoh (30) : Tentukan Transform Laplace dari fungsi f(t) = cosh at dengan menggunakan sifat linearitas.

kita ketahui bahwa cosh at $= \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, a>0 dan

$\mathcal{L}\ \{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, maka

$$\mathcal{L}\ \{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\} = \frac{1}{2}\ \mathcal{L}\ \{e^{at}\} + \frac{1}{2}\ \mathcal{L}\ \{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)+(s-a)}{s^2 - a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{2s}{s^2 - a^2})$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

jadi $\mathcal{L}\ \{\cosh at\ \} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$, untuk s> |a|

dengan cara yang sama didapat $\mathcal{L}\ \{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$,

untuk s> |a|

Contoh (31) : Dengan menggunakan sifat linearitas carilah

$$\mathcal{L}\ \{5e^{-2t} - 7\cos 3t + \sinh 4t\}$$

berdasarkan contoh diatas dan $\mathcal{L}\ \{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, maka

$$\mathcal{L}\ \{5e^{-2t} - 7\cos 3t + \sinh 4t\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 7\mathcal{L}\{\cos 3t\} + \mathcal{L}\{\sinh 4t\}$$

$$= \frac{5}{s+2} - \frac{7s}{s^2+3^2} + \frac{4}{s^2-4^2}$$

$$= \frac{5}{s+2} - \frac{7s}{s^2+9} + \frac{4}{s^2-16}$$

Contoh (32) : Dengan menggunakan sifat linearitas carilah $\mathcal{L}\ \{\cos^2 3t\}$

diketahui $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, $\mathcal{L}\ \{1\} = \dfrac{1}{s}$

$$\mathcal{L}\ \{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

sehingga, $\mathcal{L}\ \{\cos^2 3t\} = \mathcal{L}\ \{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 6t\}$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\ \{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\ \{\cos 6t\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+6^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+36)}$$

$$= \frac{2(s^2+36)+2s^2}{4s(s^2+36)}$$

$$= \frac{4s^2 + 72}{4s(s^2 + 36)}$$

$$= \frac{4(s^2 + 18)}{4s(s^2 + 36)}$$

$$= \frac{s^2 + 18}{s(s^2 + 36)}$$

Teorema (sifat translasi) :

Andaikan $\mathcal{L}$ {f(t)} = F(s) ada untuk s>α maka $\mathcal{L}$ {e^{at} f(t)} ada untuk s>α+a, a sebarang konstanta, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Bukti : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt$$

$$= F(s-a) \quad \blacksquare$$

Contoh (33) : Carilah $\mathcal{L}$ {e^{at} t} dengan menggunakan teorema sifat translasi

misalkan f(t) = t dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = F(s) = \frac{1}{s^2}$

menurut teorema $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

maka $\mathcal{L}\{e^{at}\, t\} = \frac{1}{(s-a)^2}$, s>a

Contoh (34) : Carilah $\mathcal{L}$ {e^{at} sin bt} dengan menggunakan sifat translasi

misalkan f(t) = sin bt, dimana $\mathcal{L}$ {sin bt } = $\dfrac{b}{s^2+b^2}$

menurut teorema $\mathcal{L}$ {e^{at} f(t)} = F (s-a)

sehingga F (s-a) = $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

jadi $\mathcal{L}$ {e^{at} sin bt} = $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, s>a

Contoh (35) : Carilah $\mathcal{L}$ {e^{-2t} cos 4t } dengan menggunakan sifat translasi

misalkan f(t) = cos 4t dan $\mathcal{L}$ {cos 4t } = $\dfrac{s}{s^2+4^2} = \dfrac{s}{s^2+16}$

menurut teorema $\mathcal{L}$ {e^{at} f(t)} = F (s-a)

sehingga, $\mathcal{L}$ {e^{-2t} cos 4t} = F (s-(-2)) = F (s+2)

jadi $\mathcal{L}$ {e^{-2t} cos 4t} = $\dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}$

Seperti halnya Transform Laplace , invers Transform Laplace juga mempunyai sifat linearitas dan sifat translasi, sebagai berikut :

1. Sifat linearitas

$\mathcal{L}^{-1}$ {$c_1F_1(s) \pm c_2F_2(s)$}= $c_1f_1(t) \pm c_2f_2(t)$ ....(16)

2. Sifat translasi

$\mathcal{L}^{-1}$ {F(s-a)} = e^{at}f(t) ....(17)

Contoh (36) : Carilah $\mathcal{L}^{-1}$ $\{\frac{s+5}{s^2-2s-3}\}$ dengan menggunakan sifat linearitas invers Transform Laplace.

kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{s+5}{s^2-2s-3} = \frac{s+5}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$$s+5 = A(s+1) + B(s-3)$$

untuk s = 3, 8 = 4A $\Rightarrow$ A = 2

untuk s = -1, 4 = -4B $\Rightarrow$ B = -1

Sehingga, $\frac{s+5}{s^2-2s-3} = \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+5}{s^2-2s-3}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s-3}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

dari tabel Transform Laplace diketahui $e^{at} = \frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s-3}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 2e^{3t} - e^{-t}$$

jadi $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+5}{s^2-2s-3}\} = 2e^{3t} - e^{-t}$

Contoh (37) : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+13}\right\}$ dengan menggunakan sifat linearitas invers Transform Laplace

$$F(s) = \frac{s}{s^2+6s+13} = \frac{s}{(s+3)^2+4}$$

$$= \frac{s+3-3}{(s+3)^2+2^2}$$

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} - \frac{3}{(s+3)^2+2^2}$$

dari tabel Transform Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} - \frac{3}{(s+3)^2+2^2}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\}$$

$$= e^{-3t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 2t$$

Contoh (38) : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s^2+4s+10}\}$ dengan menggunakan sifat translasi invers Transform Laplace.

dengan melengkapkan kuadrat, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s^2+4s+10}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s^2+4s+4)+6}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s+2)^2+(\sqrt{6})^2}\}$$

dari tabel Transform Laplace diketahui

$$\mathcal{L}\{ e^{at} \sin at\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

dan karena $\mathcal{L}^{-1}$ $\{F(s\text{-}a)\} = e^{at} f(t)$, a = -2

jadi $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4s + 10}\right\} = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-2t} \sin \sqrt{6}t$

Contoh (39) : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s+3)^4}\right\}$ dengan menggunakan sifat translasi invers Transform Laplace

$$F(s) = \frac{7}{(s+3)^4} = \frac{7}{6}\frac{6}{(s+3)^4}$$

Dari tabel Transform Laplace diperoleh $\mathcal{L}\{ t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Dan karena $\mathcal{L}^{-1}$ { F(s-a) } = e^{at} f(t), dengan a = -3

$$\text{Maka } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s+3)^4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{6}\frac{6}{(s+3)^4}\right\}$$

$$= \frac{7}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+3)^4}\right\}$$

$$= \frac{7}{6} e^{-3t} t^3$$

3.3. Transform Laplace dari Turunan dan Integral

Pada bagian ini kita akan membahas Transform Laplace dari turunan dan integral yang sangat berguna dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear maupun sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

Pertama, kita akan membicarakan Transform Laplace dari turunan yang menjelaskan hubungan antara f (t) dan $f'(t)$. Masalah tersebut akan dijelaskan melalui teorema berikut.

Teorema : Misalkan f fungsi real yang kontinu dan merupakan fungsi berorde eksponensial α untuk $t \geq 0$ dan f' kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$, maka Transform Laplace dari f' ada dan diberikan oleh

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad \text{.........(18)}$$

Bukti : berdasarkan definisi Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt$$

kita gunakan pengintegralan parsial dengan

$u = e^{-st}$ $\qquad dv = f'(t)\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt$ $\qquad v = f(t)$

$$\text{maka } \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{T\to\infty} \left\{ e^{-st} f(t)\big]_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} e^{-st} f(t)\big]_0^T + \lim_{T\to\infty} s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \{e^{-sT} f(T) - f(0)\} + s\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

$= - f(0) + s\,\mathcal{L}\{ f(t) \}$

jadi $\mathcal{L}\{ f'(t) \} = s\,\mathcal{L}\{ f(t) \} - f(0)$ ■

Contoh (40) : Dengan menggunakan $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ carilah $\mathcal{L}\{\cos at\}$

misal : $f(t) = \cos at$, maka $f(0) = 1$ dan $f'(t) = -a \sin at$

subtitusikan ke (18), didapat

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

$\mathcal{L}\{- a \sin at\} = s\,\mathcal{L}\{\cos at\} - 1$

$(- a)\dfrac{a}{s^2 + a^2} = s\,\mathcal{L}\{\cos at\} - 1$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s}[1 - \frac{a^2}{s^2 + a^2}] = \frac{1}{s}[\frac{s^2 + a^2 - a^2}{s^2 + a^2}] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

ini sesuai dengan hasil sebelumnya.

Contoh (41) : Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan untuk mencari $\mathcal{L}\{ e^{at} \}$

Misal $f(t) = e^{at}$, maka

$f(0) = e^0 = 1$ dan $f'(t) = ae^{at}$

menurut teorema $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

jadi $\mathcal{L}\{ ae^{at} \} = s\,\mathcal{L}\{ e^{at} \} - 1$

$a\,\mathcal{L}\{ e^{at} \} = s\,\mathcal{L}\{ e^{at} \} - 1$

$$a\,\mathcal{L}\{e^{at}\} - s\,\mathcal{L}\{e^{at}\} = -1$$

$$-(s-a)\,\mathcal{L}\{e^{at}\} = -1$$

$$(s-a)\,\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Contoh (42) : Tunjukan bahwa $\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$

Misal $f(t) = t\,e^{at}$, maka $f(0) = 0$ dan $f'(t) = e^{at} + at\,e^{at}$

Berdasarkan teorema $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Jadi $\mathcal{L}\{e^{at} + at\,e^{at}\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - 0$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} + a\,\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = s\,\mathcal{L}\{t\,e^{at}\}$$

$$s\,\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} - a\,\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$$

$$(s-a)\,\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$$

$$\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)}\,\mathcal{L}\{e^{at}\}$$

karena $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)}$

maka $\mathcal{L}\{t\,e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)(s-a)} = \frac{1}{(s-a)^2}$

Kedua, akan kita bicarakan Transform Laplace dari integral yang akan dijelaskan pula melalui teorema berikut.

Teorema : Jika f(t) kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ dan merupakan fungsi berorde eksponensial $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ untuk $t \geq T$, maka

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \text{ untuk } s > \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

secara ekuivalen

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

Bukti : Misalkan : $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ maka $g'(t) = f(t)$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan didapat

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

dengan $g(0) = 0$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\}$ atau $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$

jadi $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$ ■

Contoh (43) : Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos x\,dx\right\}$

Misal : $g(t) = \int_0^t \cos x\,dx$ maka $g'(t) = f(t) = \cos t$

Berdasarkan teorema Transform Laplace dari integral didapat

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos x\, dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\ f(t)\ \}$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\ \cos t\ \}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

Contoh (44) : Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x\, dx\right\}$

Misal : g(t) = $\int_0^t x\, dx$ maka $g'(t) = f(t) = t$

Berdasarkan teorema Transform Laplace dari integral didapat

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x\, dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\ f(t)\ \}$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\ t\ \}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^3}$$

Contoh (45) : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$

misal F(s) = $\frac{1}{s-a}$, maka $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{ax}$

sehingga $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\} = \int_0^t e^{ax}\,dx$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\Big]_0^t$$

$$= \frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

kita ulangi sekali lagi langkah diatas

misal $F(s) = \dfrac{1}{s(s-a)}$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{a}(e^{ax} - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t (e^{ax} - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax} - x\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a}\left[(\frac{1}{a}e^{at} - t) - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$$

Contoh (37) :Diberikan $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$, carilah f(t) dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral.

Dari tabel Transform Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\ \{\frac{1}{2}\sin\ 2x\} = \frac{1}{s^2+4}$$

$$\text{sehingga } \int_0^t \frac{\sin 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x]_0^t$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4}$$

$$\text{jadi f(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4)}\} = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4}$$

3.4 Konvolusi Dua Fungsi f(t) dan g(t)

Dalam mencari invers Transform Laplace seringkali Transform Laplacenya muncul sebagai hasil kali , misalnya

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\ \{\cos t\}.\mathcal{L}\ \{\sin t\}$$

Untuk mencari x(t) kita pasti berpikir untuk langsung mengalikannya sebagai berikut $\mathcal{L}$ { cos t }. $\mathcal{L}$ { sin t } = $\mathcal{L}$ { cos t . sin t } = $\mathcal{L}$ $\{\frac{1}{2}\sin 2t\} = \frac{1}{s^2+4}$

Ternyata hasilnya tidak sesuai dengan hasil diatas, sehingga

$\mathcal{L}$ {cos t}.$\mathcal{L}$ {sin t}$\neq$ $\mathcal{L}$ {cos t.sin t}

Untuk menyelesaikan masalah diatas diperlukan alat lain yang disebut konvolusi .

Definisi : Andaikan f(t) dan g(t) kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$, maka konvolusi dari f(t) dan g(t) yang dinotasikan oleh f * g dan didefinisikan

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Sekarang mari kita ganti t – x pada integran dalam (21) menjadi u sehingga u = t – x maka du = - dx

Untuk x = 0 maka u = t

x = t maka u = 0

sehingga $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx$

$$= \int_t^0 f(u)g(t-u)\,(-du)$$

$$= -\int_t^0 f(u)g(t-u)\,du$$

$$= \int_0^t g(t-u)f(u)\,du = (g * f)(t)$$

Jadi kita telah memperlihatkan bahwa konvolusi memiliki sifat komutatif, yaitu (f * g)(t) = (g * f)(t).

Contoh (47) : Cari konvolusi dari t dan t^2

$$t * t^2 = \int_0^t (t-x)x^2\,dx$$

$$= \int_0^t (tx^2 - x^3)dx$$

$$= \frac{1}{3}tx^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^t$$

$$= (\frac{1}{3}t \cdot t^3 - \frac{1}{4}t^4) - 0$$

$$= \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

Contoh (48) : Cari konvolusi dari cos t dan sin t

Misal : f(t) = cos t dan g(t) = sin t

(f * g)(t) = (cos t * sin t)

$$= \int_0^t \cos(t-x)\sin x \, dx$$

berdasarkan trigonometri diperoleh

cos A sin B = $\frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

sehingga cos (t-x) sin x = $\frac{1}{2}[\sin(t-x+x) - \sin(t-x-x)]$

$$= \frac{1}{2}[\sin t - \sin(t-2x)]$$

$$\therefore (\cos t * \sin t) = \int_0^t \frac{1}{2}[\sin t - \sin(t-2x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin t \int_0^t dx - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin t [x]_0^t + \frac{1}{4}\int_0^t \sin(t-2x)\, d(t-2x)$$

$$= \frac{1}{2}\sin t \cdot (t) + \frac{1}{4}[-\cos(t-2x)]_0^t$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{4}[-\cos(t-2t) + \cos t]$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{4}\cos(-t) + \frac{1}{4}\cos t$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos t$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t$$

Contoh (49) : Cari konvolusi dari f(t) = t dan g(t) = e^{at}

$$(t * e^{at}) = \int_0^t (t-x)e^{ax}\, dx$$

$$(e^{at} * t) = \int_0^t e^{a(t-x)} x\, dx$$

kita akan memakai yang kedua karena akan lebih mudah menyelesaikannya.

$$\left(e^{at} * t\right) = \int_0^t e^{a(t-x)} x\, dx$$

$$= \int_0^t e^{at} e^{-ax} x\, dx$$

$$= e^{at} \int_0^t x e^{-ax}\, dx$$

kita gunakan pengintegralan parsial

misal : u = x dv = e^{-ax} dx

du = dx $v = -\frac{1}{a} e^{-ax}$

$$\int_0^t x e^{-ax}\, dx = \left[-\frac{1}{a} x e^{-ax}\right]_0^t + \frac{1}{a}\int_0^t e^{-ax}\, dx$$

$$= \left[-\frac{t}{a} e^{-at} - 0 \right] + \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^t$$

$$= -\frac{t}{a} e^{-at} + \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a} e^{-at} + \frac{1}{a} \right]$$

$$= -\frac{t}{a} e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at} + \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{-ate^{-at} - e^{-at} + 1}{a^2}$$

$$= \frac{e^{-at}(-at-1)+1}{a^2}$$

$$\text{jadi } (e^{at} * t) = e^{at} \left[\frac{e^{-at}(-at-1)+1}{a^2} \right] = \frac{-at + e^{at} - 1}{a^2}$$

Sekarang kita akan membahas teorema Transform Laplace dari konvolusi.

Teorema : Misal f(t) dan g(t) kontinu sepotong-sepotong dan keduanya merupakan fungsi berorde eksponensial untuk $t \geq 0$ serta

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, maka

$\mathcal{L}\{ (f * g)(t) \} = F(s)\, G(s)$……………….(22)

secara ekuivalen

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$…………………(23)

Bukti : Dari definisi Transform Laplace dan definisi konvolusi didapat

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-x) g(x)\, dx \right] dt$$

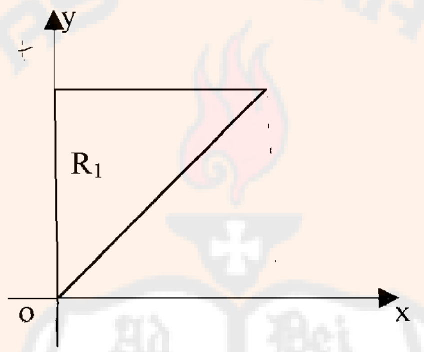
integral tersebut dapat dinyatakan menjadi integral berulang

$$\int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-st} f(t-x)g(x)\,dx\,dt$$

integral itu sama dengan integral ganda

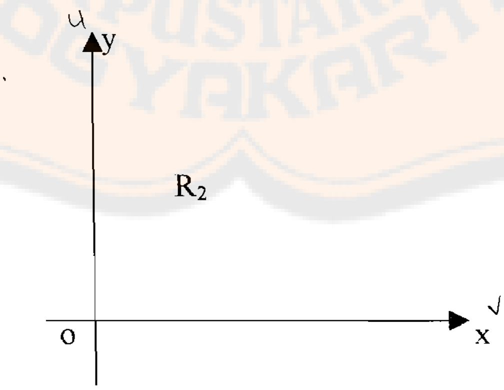
$$\iint_{R_1} e^{-st} f(t-x)g(x)\,dx\,dt$$

dimana R_1 adalah area dikuadran 1 dengan besar sudut 45^0 yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $t = x$



$\partial(v+x)$

sekarang kita lakukan penggantian variabel untuk mentransform integral ganda, yaitu $u = t - x$ dan $v = x$. Dengan perubahan variabel tersebut menyebabkan area R_1 juga berubah menjadi seluruh area dikuadran pertama, dimana sumbu x menjadi sumbu v sedangkan sumbu t menjadi sumbu u. kita sebut daerah tersebut R_2.



Sehingga integral ganda diatas menjadi

$$\iint_{R_2} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\, du\, dv$$

dimana u > 0 dan v > 0

integral ganda tersebut sama dengan itegral berulang sebagai berikut

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\, du\, dv$$

tetapi integral berulang tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv\right)$$

jadi $\mathcal{L}\,\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\,\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}$

$= F(s)G(s)$ ■

Contoh (50) : Tentukan Transform Laplace dari fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan teorema konvolusi

a. $t^3 * \sin t$

b. $e^t * t$

c. $\int_0^t e^{-(t-u)} \cos u\, du$

jawaban :

a. $t^3 * \sin t$

misal : $f(t) = t^3$ dan $g(t) = \sin t$

menurut teorema konvolusi $\mathcal{L}\,\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}$

maka $\mathcal{L}\,\{\, t^3 * \sin t \,\} = \mathcal{L}\,\{\, t^3 \,\}\mathcal{L}\,\{\, \sin t \,\}$

$$= \frac{6}{s^4}\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{6}{s^4(s^2+1)}$$

b. $e^t * t$

misal : f(t) = e^t dan g (t) = t

menurut teorema konvolusi $\mathcal{L}\{ f(t)*g(t) \}=\mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}$

maka $\mathcal{L}\{ e^t * t \} = \mathcal{L}\{e^t\} . \mathcal{L}\{t\}$

$$= \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{(s-1)s^2}$$

c. $\int_0^t e^{-(t-u)} \cos u \, du$

berdasarkan definisi konvolusi

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\, du$$

$$= \int_0^t e^{-(t-u)} \cos u \, du$$

berarti f(t) = e^{-t} dan g(t) = cos t

menurut teorema konvolusi diperoleh

$\mathcal{L}\{ e^{-t} * \cos t \} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} . \mathcal{L}\{ \cos t \}$

$$= \frac{1}{s+1}\frac{s}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$$

Contoh (51) : Gunakan teorema konvolusi untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

kita tulis fungsi tersebut kedalam bentuk

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \text{F(s)G(s)}$$

diketahui $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ dan $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin t$

sehingga $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = 1 * \sin t$

$$= \int_0^t 1 \cdot \sin x \, dx$$

$$= -\cos x]_0^t$$

$$= -\cos t - (-\cos 0)$$

$$= -\cos t + 1 = 1 - \cos t$$

Contoh (52) : Gunakan teorema konvolusi untuk mencari

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$$

Diketahui $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$ dan $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} = e^{2t}$

Sehingga $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\} = e^{-t} * e^{2t} = \int_0^t e^{-(t-x)} e^{2x} \, dx$

$$= \int_0^t e^{-t} e^{x} e^{2x}\, dx$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{3x}\, dx$$

$$= e^{-t} [\frac{1}{3} e^{3x}]_0^t$$

$$= e^{-t} \left[\frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} [e^{2t} - e^{-t}]$$

jadi $\mathcal{L}^{-1} \{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\} = \frac{1}{3} [e^{2t} - e^{-t}]$

3.5 Aplikasi Transform Laplace Untuk Menyelesaikan Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama dengan Koefisien Konstan

Sekarang kita akan membahas bagaimana Transform Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan. Sewaktu kuliah kita telah mempelajari beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan orde pertama pada masalah nilai awal. Metode-metode yang pernah kita pelajari digunakan untuk mencari penyelesaian umum dari persamaan diferensial dan kemudian digunakan kondisi awal untuk memperoleh penyelesaian khususnya. Dengan adanya Transform Laplace kita tidak perlu mencari penyelesaian umum terlebih dahulu, tetapi langsung mendapatkan penyelesaian khususnya.

Mari kita lihat bagaimana Transform Laplace tersebut dapat menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan dengan pertama-tama melihat definisi persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan :

$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$ dengan kondisi awal $y(0)=c_0$ dan $a_1 \neq 0$

kemudian kedua ruas kita ambil Transform Laplacenya

$\mathcal{L}\{ a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \} = \mathcal{L}\{f(t)\}$

karena Transform Laplace mempunyai sifat linearitas maka

$a_1 \mathcal{L}\{ \frac{dy}{dt} \} + a_0 \mathcal{L}\{ y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$

berdasarkan teorema Transform Laplace dari turunan didapat :

$a_1[s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)] + a_0 \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{ f(t) \}$

$a_1[sY(s) - c_0] + a_0 Y(s) = F(s)$ ....(24)

Persamaan (24) adalah persamaan aljabar dalam s. Kemudian kita selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh Y(s). setelah itu kita cari penyelesaian tunggal, yaitu mencari invers dari Transform Laplace

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \}$ dengan menggunakan tabel Transform Laplace.

Langkah- langkah di atas dapat diringkas sebagai berikut :

1. Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas persamaan differensial
2. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar
3. Selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh Transform Laplacenya.
4. Tentukan invers Transform Laplace dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misal pecahan parsial, konvolusi) dan kombinasikan dengan melihat tabel Transform Laplace.

Contoh (53): Selesaikan masalah nilai awal berikut dengan menggunakan Transform Laplace

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}, \; y(0) = 3$$

Langkah 1: Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas persamaan differensial

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} - 2y \right\} = \mathcal{L} \left\{ e^{5t} \right\}$$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} - 2 \mathcal{L} \left\{ y(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ e^{5t} \right\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\ \{ \frac{dy}{dt} \} = s\ \mathcal{L}\ \{ y(t) \} - y(0) = s\ Y\ (s) - 3$$

sehingga $sY(s) - 3 - 2Y(s) = \mathcal{L}\ \{ e^{5t} \}$

diketahui $\mathcal{L}\ \{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

maka persamaan aljabarnya

$$s\ Y(s) - 3 - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

Langkah 3 : Menyelesaikan persamaan aljabar

$$sY(s) - 3 - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$(s - 2)Y(s) - 3 = \frac{1}{s-5}$$

$$(s - 2)\ Y(s) = 3 + \frac{1}{s-5}$$

$$(s - 2)\ Y(s) = \frac{3s-14}{s-5}$$

$$Y(s) = \frac{3s-14}{(s-5)(s-2)}$$

Langkah 4 : Mencari invers dari Y(s)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\}$$

kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-5}$$

$$3s - 14 \equiv A(s-5) + B(s-2)$$

untuk $s = 5$, $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

untuk $s = 2$, $-8 = -3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$

Sehingga $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{8}{3}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-5}\right\}$

$$= \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

dari tabel Transform Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}, \quad \mathcal{L}\{e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}$$

maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\} = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$

jadi penyelesaian masalah nilai awal di atas adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$$

Contoh (54) : Selesaikan masalah nilai awal $y' + 3y = 3$, $y(0) = 0$

dengan menggunakan Transform Laplace

Langkah 1 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas persamaan differensial

$\mathcal{L}\{\, y' + 3y\} = \mathcal{L}\{\, 3 \,\}$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

  $\mathcal{L}\{\, y' \,\} + 3\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\, 3\}$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

  $\mathcal{L}\{\, y' \,\} = s\,\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)$

  $= s\,Y(s) - 0$

dari tabel Transform Laplace diperoleh $\mathcal{L}\{3\} = \dfrac{3}{s}$

maka persamaan aljabarnya

$$s\,Y(s) - 0 + 3\,Y(s) = \frac{3}{s}$$

Langkah 3 : Menyelesaikan persamaan aljabar

$$SY(s) + 3Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$(s+3)Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+3)}$$

Langkah 4 : Mencari invers Y(s)

Untuk mencari invers Y(s) = $\frac{3}{s(s+3)}$ akan kita cari dengan dua cara yang pertama dengan teorema Transform Laplace dari integral dan yang kedua dengan konvolusi.

- Dengan teorema Transform Laplace dari integral

Misal : $F(s) = \frac{3}{s+3}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+3}\right\} = 3e^{-3x} = f(x)$

Menurut teorema Transform Laplace dari integral

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+3)}\right\} = \int_0^t 3e^{-3x}\,dx$$

$$= 3\int_0^t e^{-3x}\,dx$$

$$= 3[-\frac{1}{3}e^{-3x}]_0^t$$

$$= 3[-\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}]$$

$$= -e^{-3t} + 1$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = -e^{-3t} + 1$$

- Dengan konvolusi

$$\mathcal{L}^{-1}\{\ Y(s)\ \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+3)}\right\} = 3\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\}$$

kita misalkan $F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\ F(s)\ \} = f(t) = 1$

$$G(s) = \frac{1}{s+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\ G(s)\ \} = g(t) = e^{-3t}$$

Berdasarkan teorema Transform Laplace dari konvolusi

$$\mathcal{L}^{-1}\{\ F(s).G(s)\ \} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

maka didapat $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+3}\right\} = (1 * e^{-3t}) = \int_0^t 1\,.\,e^{-3x}\ dx$

$$= \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^t$$

$$= -\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}$$

sehingga $3\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = -e^{-3t} + 1$

jadi penyelesaian masalah nilai awal tersebut adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\{\ Y(s)\ \} = y(t) = -e^{-3t} + 1$$

Contoh (55) : Selesaikan masalah nilai awal $y' + 3y = e^{-t}\sin t$, $y(0) = 1$

dengan menggunakan Transform Laplace

Langkah 1: Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas persamaan differensial

$\mathcal{L}\ \{y' + 3y\} = \mathcal{L}\ \{\ e^{-t} \sin t\ \}$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

  $\mathcal{L}\ \{y'\} + 3\mathcal{L}\ \{y(t)\} = \mathcal{L}\ \{e^{-t} \sin t\}$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

  $\mathcal{L}\ \{y'\} = s\ Y(s) - y(0) = s\ Y(s) - 1$

  dari tabel Transform Laplace diperoleh

  $\mathcal{L}\ \{e^{at} \sin t\} = \dfrac{1}{(s-a)^2 + 1}$ maka $\mathcal{L}\ \{e^{-t} \sin t\} = \dfrac{1}{(s+1)^2 + 1}$

  maka persamaan aljabarnya

  $$sY(s) - 1 + 3Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

  Langkah 3 : Menyelesaikan persamaan aljabar

  $$sY(s) - 1 + 3Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

  $$(s + 3)\ Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + 1$$

  $$Y(s) = \frac{1}{[(s+1)^2 + 1](s+3)} + \frac{1}{s+3}$$

Langkah 4 : Mencari invers Y(s)

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+1](s+3)} + \frac{1}{s+3}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+1](s+3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+1](s+3)}\right\}$ akan kita gunakan

teorema konvolusi, dengan memisalkan :

$F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{-t}\sin t$

$G(s) = \dfrac{1}{s+3}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^{-3t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) * G(s)\} = (f * g)(t)$$

$$= (g * f)(t)$$

$$= (e^{-3t} * e^{-t}\sin t)$$

$$= \int_0^t e^{-3(t-x)} e^{-x} \sin x\, dx$$

$$= \int_0^t e^{-3t} e^{3x} e^{-x} \sin x\, dx$$

$$= e^{-3t} \int_0^t e^{2x} \sin x\, dx$$

kemudian kita lakukan pengintegralan parsial sebanyak dua kali misal : $u = e^{2x}$ $\quad dv = \sin x\, dx$

$du = 2e^{2x}$ $\quad v = -\cos x$

sehingga $\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx = -\cos x\, e^{2x}]_0^t + 2\int_0^t e^{2x} \cos x\, dx$

$= (-\cos t\, e^{2t} + 1) + 2\int_0^t e^{2x} \cos x\, dx$

misal : $u = e^{2x}$ $\quad dv = \cos x\, dx$

$du = 2e^{2x}$ $\quad v = \sin x$

maka,

$$\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx = (-\cos t\, e^{2t} + 1) + 2\left[\sin x\, e^{2x}]_0^t - 2\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx\right]$$

$$= (-\cos t\, e^{2t} + 1) + 2\sin t\, e^{2t} - 4\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx$$

selanjutnya kedua ruas kita tambahkan dengan $4\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx$

didapat :

$$5\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx = -\cos t\, e^{2t} + 2\sin t\, e^{2t} + 1$$

$$\int_0^t e^{2x} \sin x\, dx = \frac{1}{5} e^{2t} (-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{ F(s) * G(s) \} = e^{-3t}\left\{\frac{1}{5}e^{2t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}e^{-t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}e^{-3t}$$

maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+1](s+3)}\right\} = \frac{1}{5}e^{-t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}e^{-3t}$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+1](s+3)} + \frac{1}{s+3}\right\} = \frac{1}{5}e^{-t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}e^{-3t} + e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{5}e^{-t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{6}{5}e^{-3t}$$

jadi penyelesaian masalah nilai awal di atas adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{5}e^{-t}(-\cos t + 2\sin t) + \frac{6}{5}e^{-3t}$$

3.6. Aplikasi Transform Laplace Untuk Menyelesaikan Masalah Nilai Awal Sistem Persamaan Diferensial Linear Simultan Orde Pertama dengan Koefisien Konstan

Pada subbab 3.5 kita telah membahas aplikasi Transform Laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan, pada subbab 3.6 ini akan dibahas aplikasi Transform

Laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan.

Pertama-tama mari kita lihat kembali definisi dari sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan

$$a_{11}\frac{dx}{dt}+a_{12}\frac{dy}{dt}+a_{13}x+a_{14}y=F_1(t),$$

$$a_{21}\frac{dx}{dt}+a_{22}\frac{dy}{dt}+a_{23}x+a_{24}y=F_2(t)$$

dimana x(t) dan y(t) merupakan fungsi-fungsi yang tidak diketahui; a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} merupakan koefisien yang berupa konstanta , $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ merupakan fungsi-fungsi yang diketahui. Sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut memenuhi kondisi awal $x(0) = c_1$ dan $y(0) = c_2$, dimana c_1 dan c_2 konstan.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan ini sama seperti langkah-langkah pada subbab 3.5, tetapi dengan sedikit diperluas. Adapun langkah-langkah tersebut adalah :

1. Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan differensial .
2. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar

3. Selesaikan persamaan aljabar tersebut sehingga diperoleh dua Transform Laplace X(s) dan Y(s).
4. Tentukan invers Transform Laplace X(s) dan Y(s) dengan bantuan tabel Transform Laplace maupun dengan menggunakan metode yang sesuai, misalnya dengan pecahan parsial, konvolusi, teoremaTransform Laplace dari integral dan kombinasikan juga dengan melihat tabel Transform Laplace.

Untuk lebih jelasnya mari kita lihat contoh-contoh di bawah ini.

Contoh (56) : Gunakan Transform Laplace untuk mencari penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan differensial linear simultan berikut

$$\frac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} - 2x - y = 4e^t$$

Dan memenuhi kondisi awal x(0) = -1 dan y(0) = 0

Langkah 1 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan differensial

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt} - 6x + 3y\right\} = \mathcal{L}\ \{8e^t\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2x - y\right\} = \mathcal{L}\ \{4e^t\}$$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\ \{\frac{dx}{dt}\} - 6\,\mathcal{L}\ \{x(t)\} + 3\ \mathcal{L}\ \{y(t)\} = 8\ \mathcal{L}\ \{e^t\},$$

$$\mathcal{L}\ \{\frac{dy}{dt}\} - 2\ \mathcal{L}\ \{x(t)\} - \mathcal{L}\ \{y(t)\} = 4\ \mathcal{L}\ \{e^t\}$$

- Gunakan Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\ \{\frac{dx}{dt}\} = sX(s) - x(0) = sX(s) + 1,$$

$$\mathcal{L}\ \{\frac{dy}{dt}\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

dari Transform Laplace didapat $\mathcal{L}\ \{e^t\} = \frac{1}{s-1}$

maka persamaan aljabarnya

$$sX(s) + 1 - 6\ X(s) + 3\ Y(s) = \frac{8}{s-1},$$

$$sY(s) - 2\ X(s) - Y(s) = \frac{4}{s-1}$$

atau

$$(s-6)\ X(s) + 3\ Y(s) = \frac{8}{s-1} - 1,$$

$$(s-1)\ Y(s) - 2\ X(s) = \frac{4}{s-1}$$

atau

$$3\,Y(s) + (s-6)\,X(s) = \frac{-s+9}{s-1},$$

$$(s-1)\,Y(s) - 2\,X(s) = \frac{4}{s-1}$$

Langkah 3 : Menyelesaikan persamaan aljabar

untuk mendapatkan X(s) dan Y(s) kita selesaikan dengan metode eliminasi

pertama kita eliminasi Y(s) dengan cara mengalikan persamaan pertama dengan (s – 1) dan persamaan kedua dengan 3, didapat

$$3\,(s-1)\,Y(s) + (s-1)(s-6)\,X(s) = -s+9$$

$$3\,(s-1)\,Y(s) - 6\,X(s) = \frac{12}{s-1}$$

kemudian kita kurangkan, didapat

$$(s-1)(s-6)\,X(s) + 6\,X(s) = -s+9-\frac{12}{s-1}$$

$$\{(s-1)(s-6)+6\}X(s) = \frac{(-s+9)(s-1)-12}{s-1}$$

$$(s^2-7s+12)X(s) = \frac{-s^2+10s-21}{s-1}$$

$$(s-3)(s-4)\,X(s) = \frac{(s-3)(-s+7)}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $Y(s) = \dfrac{2}{(s-1)(s-4)}$

Langkah 4 : Mencari invers dari X(s) dan Y(s)

- $\mathcal{L}^{-1}\{ X(s) \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-s+7}{(s-1)(s-4)}\right\}$

  kita gunakan pecahan parsial

  $$\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

  $$-s+7 \equiv A(s-4) + B(s-1)$$

  untuk $s = 1$, $6 = -3A \Rightarrow A = -2$

  untuk $s = 4$, $3 = 3B \Rightarrow B = 1$

  sehingga $\dfrac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = -\dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s-4}$

  maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-s+7}{(s-1)(s-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s-4}\right\}$

  $$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

  $$= -2e^{t} + e^{4t}$$

  $\therefore \mathcal{L}^{-1}\{ X(s) \} = x(t) = -2e^{t} + e^{4t}$

- $\mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s-4)}\right\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s-4)}\right\}$

kita gunakan konvolusi untuk mencari inversnya, dengan

memisalkan F(s) = $\frac{1}{s-1}$ dan G(s) = $\frac{1}{s-4}$

maka f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$ { F(s) } = $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{t}$

g(t) = $\mathcal{L}^{-1}$ { F(s) } = $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t}$

sehingga $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-4)}\right\} = f(t) * g(t)$

$$= \int_0^t e^{(t-x)} e^{4x} dx$$

$$= \int_0^t e^{t} e^{3x} dx$$

$$= e^{t} \int_0^t e^{3x} dx$$

$$= e^{t} [\frac{e^{3x}}{3}]_0^t$$

$$= e^{t} [\frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3}]$$

$$= \frac{e^{4t}}{3} - \frac{e^{t}}{3}$$

$$2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-4)}\right\} = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^{t}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{\, Y(s) \,\} = y(t) = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^{t}$$

jadi penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan di atas adalah

$x(t) = -2e^{t} + e^{4t}$

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^{t}$$

Contoh (57) : Tentukan penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan

$$\frac{dx}{dt} = -x - 5y,\; x(0) = 1,$$

$$2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -12y,\; y(0) = 1$$

Langkah 1 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \mathcal{L}\,\{-x - 5y\},$$

$$\mathcal{L}\left\{2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right\} = \mathcal{L}\,\{-12y\}$$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\,\{\frac{dx}{dt}\} = -\,\mathcal{L}\,\{x(t)\} - 5\,\mathcal{L}\,\{y(t)\},$$

$$2\,\mathcal{L}\,\{\frac{dx}{dt}\} - \mathcal{L}\,\{\frac{dy}{dt}\} = -12\,\mathcal{L}\,\{y(t)\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\,\{\frac{dx}{dt}\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\,\{\frac{dy}{dt}\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

maka persamaan aljabarnya

$sX(s) - 1 = - X(s) - 5\ Y(s),$

$2s\ X(s) - 2 - sY(s) + 1 = - 12\ Y(s)$

atau

$(\ s + 1\ )X(s) + 5\ Y(s) = 1,$

$2s\ X(s) - (\ s - 12\ )Y(s) = 1$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar

kita gunakan metode eliminasi untuk mendapatkan X(s) dan Y(s), dengan mengalikan persamaan pertama dengan -(s – 12) dan persamaan kedua dengan 5, didapat :

$- \{(\ s + 1\ )(\ s - 12\ )\}X(s) - 5(\ s - 12\ )Y(s) = -(\ s - 12\ ),$

$$10s\ X(s) - 5\ (s - 12\ )\ Y(s) = 5$$

kemudian kedua persamaan tersebut kita kurangkan, didapat :

$[\ - \{(\ s + 1\ )(\ s - 12\ )\} - 10s\ ]\ X(s) = - (s - 12) - 5$

$$(-s^2 + s + 12)\,X(s) = -s + 7$$

$$X(s) = \frac{-s+7}{-s^2+s+12}$$

$$X(s) = \frac{-s+7}{(-s+4)(s+3)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-4)(s+3)}$

Langkah 4 : Mencari invers X(s) dan Y(s)

- $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-s+7}{(-s+4)(s+3)}\right\}$

  kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{-s+7}{(-s+4)(s+3)} = \frac{A}{-s+4} + \frac{B}{s+3}$$

$$-s + 7 \equiv A(s+3) + B(-s+4)$$

untuk $s = -3$, $10 = 7B \Rightarrow B = \dfrac{10}{7}$

untuk $s = 4$, $3 = 7A \Rightarrow A = \dfrac{3}{7}$

sehingga $\dfrac{-s+7}{(-s+4)(s+3)} = \dfrac{\frac{3}{7}}{(-s+4)} + \dfrac{\frac{10}{7}}{(s+3)}$

maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-s+7}{(-s+4)(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{3}{7}}{-s+4} + \dfrac{\frac{10}{7}}{s+3}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{7}}{-(s-4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{10}{7}}{s+3}\right\}$$

dari tabel Transform Laplace didapat $\mathcal{L}\ \{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{\ X(s)\ \} = x(t) = -\frac{3}{7}e^{4t} + \frac{10}{7}e^{-3t}$$

- $\mathcal{L}^{-1}\{\ Y(s)\ \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s-4)(s+3)}\right\}$

kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{s-1}{(s-4)(s+3)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+3}$$

$$s - 1 \equiv A(s+3) + B(s-4)$$

untuk $s = 4$, $3 = 7A \Rightarrow A = \dfrac{3}{7}$

untuk $s = -3$, $-4 = -7B \Rightarrow B = \dfrac{4}{7}$

sehingga $\dfrac{s-1}{(s-4)(s+3)} = \dfrac{\frac{3}{7}}{s-4} + \dfrac{\frac{4}{7}}{s+3}$

maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s-4)(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{3}{7}}{s-4} + \dfrac{\frac{4}{7}}{s+3}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{7}}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{7}}{s+3}\right\}$$

$$= \frac{3}{7}e^{4t} + \frac{4}{7}e^{-3t}$$

jadi $\mathcal{L}^{-1}\{\ Y(s)\ \} = y(t) = \frac{3}{7}e^{4t} + \frac{4}{7}e^{-3t}$

jadi penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut adalah

$$x(t) = -\frac{3}{7}e^{4t} + \frac{10}{7}e^{-3t}$$

$$y(t) = \frac{3}{7}e^{4t} + \frac{4}{7}e^{-3t}$$

Contoh (58) : Tentukan penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan berikut

$$\begin{aligned} x' &= y + \sin t, & x(0) &= 1 \\ y' &= -2x + 3y - \cos t & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Langkah 1 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

$\mathcal{L}\{\, x'\} = \mathcal{L}\{\ y + \sin t\ \}$,

$\mathcal{L}\{\, y'\} = \mathcal{L}\ \{\ -2x + 3y - \cos t\ \}$

Langkah 2 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

  $\mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{\sin t\}$,

  $\mathcal{L}\{y'\} = -2\,\mathcal{L}\{x(t)\} + 3\,\mathcal{L}\{y(t)\} - \mathcal{L}\{\cos t\}$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

  $\mathcal{L}\{x'\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$,

  $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$

  dari tabel Transform Laplace didapat

  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ dan $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$

  maka persamaan aljabarnya

  $sX(s) - 1 = Y(s) + \dfrac{1}{s^2+1}$,

  $sY(s) - 1 = -2X(s) + 3Y(s) - \dfrac{s}{s^2+1}$

  atau

  $sX(s) - Y(s) = 1 + \dfrac{1}{s^2+1}$,

  $2X(s) + (s-3)Y(s) = 1 - \dfrac{s}{s^2+1}$

  atau

$$sX(s) - Y(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1},$$

$$2X(s) + (s\text{-}3)Y(s) = \frac{s^2-s+1}{s^2+1}$$

Langkah 3 : Menyelesaikan persamaan aljabar

Kita gunakan determinan matriks untuk memperoleh X(s) dan Y(s).

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s^2+2}{s^2+1} & -1 \\ \frac{s^2-s+1}{s^2+1} & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s^2+2}{s^2+1}(s-3) + \frac{s^2-s+1}{s^2+1}}{s(s-3)+2}$$

$$= \frac{(s^2+2)(s-3)+s^2-s+1}{(s^2+1)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{s^3-3s^2+2s-6+s^2-s+1}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{s^3-2s^2+s-5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{s^3+s}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} - \frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{s(s^2+1)}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} - \frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{s}{(s-1)(s-2)} - \frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s & \dfrac{s^2+2}{s^2+1} \\ 2 & \dfrac{s^2-s+1}{s^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}}=\frac{s\left(\dfrac{s^2-s+1}{s^2+1}\right)-\left(\dfrac{s^2+2}{s^2+1}\right)2}{s(s-3)+2}$$

$$=\frac{s(s^2-s+1)-2(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2-3s+2)}$$

$$=\frac{s^3-s^2+s-2s^2-4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$=\frac{s^3-3s^2+s-4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$=\frac{s^3+s}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}-\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$=\frac{s(s^2+1)}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}-\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

$$=\frac{s}{(s-1)(s-2)}-\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$$

Langkah 4 : Mencari invers X(s) dan Y(s)

- $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-1)(s-2)}-\dfrac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s-2)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$$

kita gunakan pecahan parsial untuk mencari inversnya

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-1)(s-2)}\right\}$

$$\frac{s}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$s \equiv A(s-2) + B(s-1)$$

untuk s= 1, 1 = -A $\Rightarrow$ A = -1

untuk s = 2, 2 = B

sehingga $\dfrac{s}{(s-1)(s-2)} = -\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{s-2}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s-2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-2}\right\}$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= -e^{t} + 2e^{2t}$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$

$$\frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2}$$

$$2s^2+5 = (As+B)(s-1)(s-2) + C(s^2+1)(s-2) + D(s^2+1)(s-1)$$

untuk s = 1, 7 = -2C $\Rightarrow$ C = $-\dfrac{7}{2}$

untuk s = 2, 13 = 5D $\Rightarrow$ D = $\frac{13}{5}$

untuk s = 0, 5 = 2B – 2C – D

$$5 = 2B - 2(-\frac{7}{2}) - \frac{13}{5}$$

$$\frac{3}{5} = 2B \Rightarrow B = \frac{3}{10}$$

untuk s = 3, 23 = (3A+B)2 + 10C + 20D

$$23 = 6A + 2B + 10C + 20D$$

$$23 = 6A + 2(\frac{3}{10}) + 10(-\frac{7}{2}) + 20(\frac{13}{5})$$

$$\frac{54}{10} = 6A \Rightarrow A = \frac{9}{10}$$

sehingga $\frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} = \frac{\frac{9}{10}s + \frac{3}{10}}{s^2+1} - \frac{\frac{7}{2}}{s-1} + \frac{\frac{13}{5}}{s-2}$

$$= \frac{\frac{9}{10}s}{s^2+1} + \frac{\frac{3}{10}}{s^2+1} - \frac{\frac{7}{2}}{s-1} + \frac{\frac{13}{5}}{s-2}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{9}{10}s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{7}{2}}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{13}{5}}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{9}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} +$$

$$\frac{13}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{9}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t - \frac{7}{2}e^{t} + \frac{13}{5}e^{2t}$$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

$$= -e^{t} + 2e^{2t} - \left(\frac{9}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t - \frac{7}{2}e^{t} + \frac{13}{5}e^{2t}\right)$$

$$= -\frac{9}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t + \frac{5}{2}e^{t} - \frac{3}{5}e^{2t}$$

- $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s-2)} - \frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s-2)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$$

kita selesaikan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$ dengan menggunakan

pecahan parsial.

$$\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2}$$

$$3s^2 + 4 \equiv (As+B)(s-1)(s-2) + C(s^2+1)(s-2) + D(s^2+1)(s-1)$$

untuk s = 1, 7 = -2C $\Rightarrow C = -\dfrac{7}{2}$

untuk s = 2, 16 = 5D $\Rightarrow D = \dfrac{16}{5}$

untuk s = 0, 4 = 2B – 2C – D

$$4 = 2B - 2(-\frac{7}{2}) - \frac{16}{5}$$

$$\frac{1}{5} = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{10}$$

untuk s = 3, 31 = (3A+B)2 + 10C +20D

$$31 = 6A + 2B + 10C + 20D$$

$$31 = 6A + 2(\frac{1}{10}) + 10(-\frac{7}{2}) + 20(\frac{16}{5})$$

$$\frac{18}{10} = 6A \Rightarrow A = \frac{3}{10}$$

sehingga $\dfrac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)} = \dfrac{\frac{3}{10}s + \frac{1}{10}}{s^2+1} - \dfrac{\frac{7}{2}}{s-1} + \dfrac{\frac{16}{5}}{s-2}$

$$= \frac{\frac{3}{10}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{10}}{s^2+1} - \frac{\frac{7}{2}}{s-1} + \frac{\frac{16}{5}}{s-2}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+4}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{10}}{s^2+1}-\frac{\frac{7}{2}}{s-1}+\frac{\frac{16}{5}}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+$$

$$\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t-\frac{7}{2}e^{t}+\frac{16}{5}e^{2t}$$

jadi $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = x(t)$

$$= -e^{t}+2e^{2t}-\left\{\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t-\frac{7}{2}e^{t}+\frac{16}{5}e^{2t}\right\}$$

$$= -\frac{3}{10}\cos t-\frac{1}{10}\sin t+\frac{5}{2}e^{t}-\frac{6}{5}e^{2t}$$

jadi penyelesaian masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan di atas adalah

$$x(t) = -\frac{9}{10}\cos t-\frac{3}{10}\sin t+\frac{5}{2}e^{t}-\frac{3}{5}e^{2t},$$

$$y(t) = -\frac{3}{10}\cos t-\frac{1}{10}\sin t+\frac{5}{2}e^{t}-\frac{6}{5}e^{2t}$$

BAB IV

PENGGUNAAN TRANSFORM LAPLACE UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH NILAI AWAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR SIMULTAN ORDE PERTAMA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DENGAN PENERAPAN PADA SISTEM PEGAS-MASSA

Pada bab I kita telah mengetahui bahwa sistem persamaan diferensial linear simultan dapat diperoleh dari sistem pegas-massa. Pada bab III, diketahui bahwa sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan Transform Laplace . pada bab ini, kita akan membahas aplikasi dari Transform Laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan. Sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut diperoleh dari sistem pegas-massa. Oleh karena sistem pegas-massa selalu menghasilkan persamaan diferensial orde dua, maka kita perlu melakukan pereduksian untuk memperoleh sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama.

Sistem pegas-massa yang mengabaikan gaya gesekan dengan udara dan gaya luar disebut getaran bebas tak teredam. Getaran bebas tak teredam yang akan kita bahas adalah yang mempunyai satu derajat kebebasan dan dua derajat kebebasan. Yang dimaksud dengan sistem satu derajat kebebasan adalah sistem yang membutuhkan satu variabel bebas untuk menentukan kedudukan massa dalam sistem. Sedangkan sistem dengan dua derajat kebebasan adalah sistem yang membutuhkan dua variabel bebas untuk menentukan kedudukan massa dalam sistem.

Sistem pegas-massa yang mempunyai satu derajat kebebasan akan menghasilkan sebuah persamaan diferensial linear orde dua. Dengan kata lain, sistem tersebut akan menghasilkan sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan dua persamaan diferensial linear dan dua fungsi yang tidak diketahui yang ekuivalen dengan persamaan differensial linear orde dua tersebut. Begitu juga sistem pegas-massa yang mempunyai dua derajat kebebasan akan menghasilkan dua buah persamaan diferensial linear orde dua. Sistem ini juga akan menghasilkan sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan empat persamaan diferensial linear dan empat fungsi yang tidak diketahui.

4.1 Sistem Pegas-massa

Sebuah benda bermassa yang dikaitkan pada pegas, jika diberi gaya akan menyebabkan pegas tersebut tertekan atau terentang. Pegas yang ditekan atau direntangkan akan menimbulkan gaya pengembalian, hal ini dijelaskan oleh Hukum Hooke.

Hukum Hooke : gaya berbanding langsung dengan panjang simpangannya

Ditulis : $F = -kx$, $k > 0$ ....(25)

Dimana F : gaya pengembalian pegas

k : konstanta pegas

x : simpangan

Tanda negatif (-) menunjukan bahwa arah gaya pengembalian pegas selalu berlawanan dengan arah perpindahan benda.

Selain berlaku Hukum Hooke berlaku juga Hukum Newton II tentang gerak.

Hukum Newton II : percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja pada benda.

Ditulis : F = ma ....(26)

Dimana F : gaya yang bekerja pada benda

m : massa benda

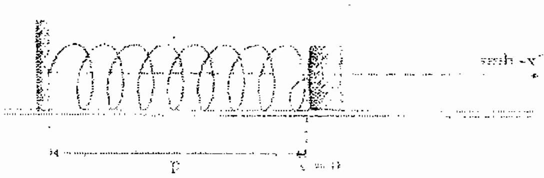
a : percepatan

percepatan a dapat diganti dengan $\frac{d^2x}{dt^2}$.

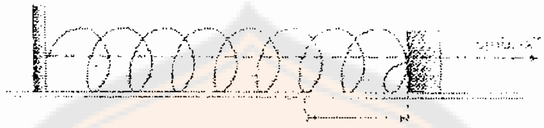
Hubungan antara Hukum Hooke dan Hukum Newton II akan menghasilkan persamaan untuk sistem pegas-massa tak teredam. Sistem pegas-massa dapat disusun dalam posisi mendatar maupun vertikal. Sistem pegas-massa dengan posisi mendatar akan sedikit berbeda dengan posisi tegak pada titik kesetimbangannya, namun pada akhirnya akan tetap menghasilkan persamaan yang sama. Untuk lebih jelasnya akan kita bahas secara terpisah.

1. Sistem pegas-massa dengan posisi mendatar

   Tinjau sistem pegas-massa seperti terlihat pada gambar 1a. Ujung kiri pegas terikat pada dinding sedangkan ujung kanan diikatkan pada suatu benda bermassa m dan seluruhnya berada di atas meja mendatar yang dianggap licin sempurna serta gesekan dengan udara diabaikan.



Gambar 1a



Gambar 1b

Panjang pegas pada gambar 1a adalah panjang normalnya, dan posisi massa (ujung kanan pegas) dipilih sebagai pangkal pengukuran (x = 0). Jika benda ditarik kekanan sejauh x, maka akan timbul penyimpangan sebesar x (gambar 1b). Sehingga pada ujung kanan ini akan bekerja gaya pegas yang berlawanan dengan arah simpangan yaitu kearah kiri, hal ini terjadi karena pegas berusaha kembali kepanjang normalnya. Untuk selanjutnya kita sepakati bila perpindahan benda mengarah kekiri kita beri tanda negatif (-) dan bila mengarah kekanan kita beri tanda positif (+).

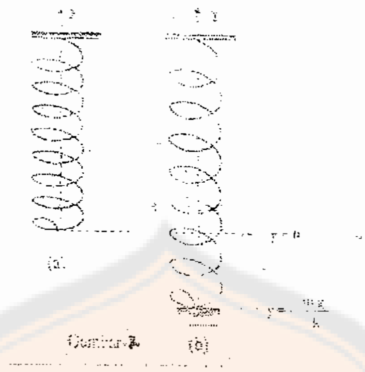
Seperti kita ketahui pada sistem pegas-massa berlaku Hukum Hooke dan Hukum Newton II, maka diperoleh

$F_{Newton} = F_{Hooke}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{.................(27)}$$

2. Sistem pegas-massa dengan posisi tegak

   Tinjau sistem pegas-massa yang terlihat pada gambar 2a dan 2b dibawah ini, dimana pegas dalam posisi tegak dan ujung atasnya melekat pada langit-langit.



Gambar 2a memperlihatkan pegas tanpa beban dalam keadaan normal, ujung bawah pegas diambil sebagai pangkal koordinat (y = 0) dengan perjanjian y positif jika diukur di bawah titik seimbang dan negatif jika di atas.

Jika kemudian pada ujung bawah dikaitkan benda bermassa m maka akan timbul simpangan sebesar y (gambar 2b). Karena berat benda adalah W = mg, maka simpangannya menjadi

W= mg = - ky

$$y = -\frac{mg}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

dimana $y = -\frac{mg}{k}$ *ini akan menjadi titik kesetimbangan bagi getaran yang* terjadi. Sehingga persamaan sistem pegas-massa dengan posisi tegak adalah

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

andaikan $\bar{y} = y + \frac{mg}{k}$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

maka persamaan (29) berubah menjadi

$$m\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -k\bar{y}$$

Jadi sesungguhnya persamaan antara posisi mendatar dan posisi tegak adalah sama, perbedaannya terletak pada titik kesetimbangan yaitu jika posisi mendatar di x = 0 sedangkan posisi tegak bergeser kebawah sejauh y = $\frac{mg}{k}$. Sehingga untuk selanjutnya persamaan sistem pegas-massa dengan posisi mendatar dan tegak adalah sama.

Sistem pegas-massa yang kita bahas di atas merupakan sistem dengan satu derajat kebebasan yang mempunyai persamaan $mx'' = -kx$. Selanjutnya pada pembahasan kasus-kasus akan dibahas masalah sistem pegas-massa yang lain yaitu sistem dua pegas-satu massa yang termasuk sistem dengan satu derajat kebebasan, sistem dengan dua derajat kebebasan yang meliputi dua pegas-dua massa dan tiga pegas-dua massa. Untuk mendapatkan persamaan dari masalah-masalah tersebut, kita tinggal menganalogikannya dengan persamaan yang telah diperoleh di atas.

4.2 Langkah-langkah penyelesaian.

Secara umum langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan adalah

1. Menentukan persamaan diferensial sistem pegas-massa
   a. gunakan hukum Hooke untuk menentukan simpangan pegas
   b. kombinasikan dengan hukum Newton II untuk mendapatkan persamaan differensial sistem pegas-massa
2. Mengubah persamaan diferensial linear orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

   Pandang persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan dari sistem pegas massa

   $mx'' = -kx$ atau $x'' = -\dfrac{k}{m}x$

   dengan perpindahan awal $x(0) = c_1$ dan kecepatan awal $x'(0) = c_2$

   untuk mengubah persamaan differensial tersebut kita misalkan

   $x_1 = x,\ x_2 = x'$

   maka sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan diferensial linear orde dua tersebut adalah

   $$x_1{}' = x' = x_2,$$
   $$x_2{}' = x'' = -\frac{k}{m}x = -\frac{k}{m}x_1$$

3. Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan differensial

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = \mathcal{L}\{x_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{k}{m}x_1(t)\right\}$$

4. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar

- Gunakan sifat linearitas

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = \mathcal{L}\{x_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = -\frac{k}{m}\,\mathcal{L}\{x_1(t)\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = sX_1(s) - x_1(0) = sX_1(s) - c_1$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = sX_2(s) - x_2(0) = sX_2(s) - c_2$$

maka persamaan aljabar sistem persamaan diferensial tersebut adalah

$$sX_1(s) - c_1 = X_2(s),$$
$$sX_2(s) - c_2 = -\frac{k}{m}X_1(s)$$

atau

$$sX_1(s) - X_2(s) = c_1,$$
$$\frac{k}{m}X_1(s) + sX_2(s) = c_2$$

5. Menyelesaikan persamaan aljabar untuk memperoleh Transform Laplace

Karena tujuan kita hanya mencari persamaan perpindahan benda, maka kita cukup mencari Transform Laplace dari $X_1(s)$ saja.

Persamaan aljabar tersebut dapat diselesaikan dengan eliminasi, determinan, dan lain-lain. Misalnya kita selesaikan persamaan di atas dengan determinan

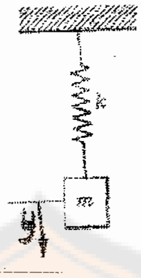
$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s \end{vmatrix}} = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

6. Mencari invers $X_1(s)$ untuk memperoleh persamaan perpindahan benda dengan cara melihat tabel Transform Laplace atau menggunakan metode yang sesuai, misalnya pecahan parsial, teorema Transform Laplace dari integral, konvolusi dan kombinasikan juga dengan menggunakan tabel Transform Laplace.

4.3 Kasus-kasus

4.3.1 Sistem Pegas Massa dengan Satu Derajat Kebebasan

Kasus 1 : Sebuah pegas yang mempunyai konstanta pegas k = 16 N/m tergantung dalam posisi vertikal dengan ujung atasnya tetap (lihat gambar). Suatu massa dengan berat $\frac{1}{16}$kg digantungkan pada ujung bawah pegas. Setelah diam, massa itu ditarik kebawah $\frac{1}{4}m$ dan dilepaskan. Tentukan persamaan perpindahan bendanya !



Penyelesaian : diketahui : k = 16 N/m, m = $\frac{1}{16} kg$

Pada saat t = 0, y = $\frac{1}{4}$ dan $y' = 0$

Langkah 1 : menentukan persamaan differensial sistem pegas massa.

Berdasarkan pembahasan pada hal (104) diperoleh persamaan untuk sistem pegas-massa tersebut adalah

$$my'' = -ky$$

$$\frac{1}{16} y'' = -16y$$

$$y'' = -256y$$

Langkah 2 : mengubah persamaan diferensial linear orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama.

Misal : $y_1 = y$, $y_2 = y'$ maka $y_1(0) = \frac{1}{4}$, $y_2(0) = 0$

Jadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama yang ekuivalen dengan persamaan diferensial di atas adalah

$$y_1' = y' = y_2,$$
$$y_2' = y'' = -256y = -256y_1$$

Langkah 3 : kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan differensial

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = \mathcal{L}\left\{-256y_1\right\}$$

Langkah 4 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = -256\,\mathcal{L}\left\{y_1(t)\right\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s) - \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 0 = sY_2(s)$$

maka persamaan aljabar dari sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut adalah

$$sY_1(s) - \frac{1}{4} = Y_2(s),$$
$$sY_2(s) = -256Y_1(s)$$

atau

$$sY_1(s) - Y_2(s) = \frac{1}{4},$$
$$256Y_1(s) + sY_2(s) = 0$$

Langkah 5 : menyelesaikan persamaan aljabar

kita gunakan determinan untuk memperoleh $Y_1(s)$

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 256 & s \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{4}s}{s^2 + 256} = \frac{\frac{1}{4}s}{s^2 + 16^2}$$

Langkah 6 : mencari invers $Y_1(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}s}{s^2 + 16^2}\right\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 16^2}\right\}$$

dari tabel Transform Laplace diperoleh

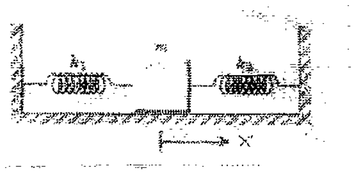
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = y_1(t) = \frac{1}{4}\cos 16t$$

jadi persamaan perpindahan benda untuk sistem di atas adalah

$$y_1(t) = y(t) = \frac{1}{4}\cos 16t$$

Kasus 2 : Sebuah massa m seberat 32kg, ujung kiri dan kanannya terikat pada pegas. Dimana ujung-ujung yang lain dari pegas itu terikat pada dinding seperti terlihat pada gambar dibawah ini



Kedua pegas tersebut mempunyai konstanta pegas masing-masing 4 N/m. Tentukan persamaan perpindahan benda jika benda ditarik ke kanan sejauh 3 m dari posisi setimbangnya, kemudian diberi kecepatan ke kiri sebesar 2 m/s !

Penyelesaian : Diketahui : m = 32 kg, $k_1 = k_2 = 4$ N/m

Pada saat t = 0, x = 3, $x' = -2$

Langkah 1 : Menentukan persamaan differensial sistem pegas-massa

Berdasarkan Hukum Hooke

$$F = -k_1 x - k_2 x$$

Dengan menerapkan Hukum Newton II diperoleh

$$mx'' = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$
$$32x'' = -(4+4)x = -8x$$
$$x'' = -\frac{1}{4}x$$

Langkah 2 : Mengubah persamaan diferensial linear orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

Misal : $x_1 = x,\ x_2 = x'$ *maka* $x_1(0) = 3,\ x_2(0) = -2$

Maka sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dari persamaan diferensial di atas adalah

$$x_1' = x' = x_2,$$
$$x_2' = x'' = -\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x_1$$

Langkah 3 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = \mathcal{L}\{x_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{4}x_1(t)\right\}$$

Langkah 4 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = \mathcal{L}\{x_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}\{x_1(t)\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\{x_1'\} = sX_1(s) - x_1(0) = sX_1(s) - 3,$$

$$\mathcal{L}\{x_2'\} = sX_2(s) - x_2(0) = sX_2(s) + 2$$

maka persamaan aljabar dari sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut adalah

$$sX_1(s) - 3 = X_2(s),$$
$$sX_2(s) + 2 = -\frac{1}{4}X_1(s)$$

atau

$$sX_1(s) - X_2(s) = 3,$$
$$\frac{1}{4}X_1(s) + sX_2(s) = -2$$

Langkah 5 : Menyelesaikan persamaan aljabar

Kita gunakan determinan untuk mencari $X_1(s)$

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{4} & s \end{vmatrix}} = \frac{3s-2}{s^2+\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{3s}{s^2+\frac{1}{4}} - \frac{2}{s^2+\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{3s}{s^2+(\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{s^2+(\frac{1}{2})^2}$$

Langkah 6 : mencari invers $X_1(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+(\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right\}$$

$$= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right\}$$

dari tabel Transform Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \text{ dan } \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

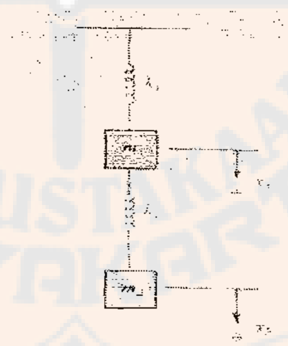
$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right\} - \frac{2}{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right\}$$

$$= 3\cos\frac{1}{2}t - 4\sin\frac{1}{2}t$$

jadi persamaan perpindahan benda untuk sistem di atas adalah : $x_1(t) = x(t) = 3\cos\frac{1}{2}t - 4\sin\frac{1}{2}t$

4.3.2 Sistem Pegas-Massa dengan dua derajat kebebasan

Kasus 3 : Tentukan persamaan perpindahan benda sistem pegas-massa seperti terlihat pada gambar dibawah ini



Dengan m_1= 2 kg, m_2 = 1 kg, k_1 = 4 N/m, k_2 = 2 N/m dan kondisi awalnya $x_1(0) = 2,\ x_1'(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ x_2'(0) = 0$

Penyelesaian : Langkah 1 : Menentukan persamaan diferensial sistem pegas-massa

Berdasarkan Hukum Hooke diperoleh

- Gaya yang bekerja pada massa m_1 :

$$F = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

- Gaya yang bekerja pada massa m_2 :

$$F = -k_2(x_2 - x_1)$$

dengan menerapkan Hukum Newton diperoleh

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1),$$
$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1)$$

dengan memasukan nilai-nilai ke dalam persamaan diferensial diperoleh

$$2x_1'' = -4x_1 + 2(x_2 - x_1),$$
$$x_2'' = -2(x_2 - x_1)$$

atau

$$x_1'' = -2x_1 + x_2 - x_1 = -3x_1 + x_2,$$
$$x_2'' = -2x_2 + 2x_1$$

Langkah 2 : Mengubah persamaan diferensial linear orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

Misal : $y_1 = x_1,\ y_2 = x_1',\ y_3 = x_2,\ y_4 = x_2'$ maka

$$y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1,\ y_4(0) = 0$$

maka kita peroleh sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = x_1'' = -3x_1 + x_2 = -3y_1 + y_3,$$
$$y_3' = x_2' = y_4,$$
$$y_4' = x_2'' = -2x_2 + 2x_1 = -2y_3 + 2y_1$$

Langkah 3 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = \mathcal{L}\left\{-3y_1(t) + y_3(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_3'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_4(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_4'\right\} = \mathcal{L}\left\{-2y_3(t) + 2y_1(t)\right\}$$

Langkah 4 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = -3\,\mathcal{L}\left\{y_1(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y_3(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{y_3'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_4(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_4'\right\} = -2\,\mathcal{L}\left\{y_3(t)\right\} + 2\,\mathcal{L}\left\{y_1(t)\right\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\{y_1'\} = sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s) - 2$$

$$\mathcal{L}\{y_2'\} = sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 0$$

$$\mathcal{L}\{y_3'\} = sY_3(s) - y_3(0) = sY_3(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y_4'\} = sY_4(s) - y_4(0) = sY_4(s) - 0$$

maka persamaan aljabar sistem persamaan diferensial di atas adalah

$$\begin{aligned} &sY_1(s) - 2 = Y_2(s), \\ &sY_2(s) = -3Y_1(s) + Y_3(s), \\ &sY_3(s) - 1 = Y_4(s), \\ &sY_4(s) = -2Y_3(s) + 2Y_1(s) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} sY_1(s) - Y_2(s) \qquad\qquad\qquad\qquad &= 2, \\ 3Y_1(s) + sY_2(s) - Y_3(s) \qquad\quad &= 0, \\ sY_3(s) - Y_4(s) &= 1, \\ -2Y_1(s) \qquad\quad + 2Y_3(s) + sY_4(s) &= 0 \end{aligned}$$

Langkah 5 : Menyelesaikan persamaan aljabar

Kita gunakan determinan untuk memperoleh $Y_1(s)$ dan $Y_3(s)$

$$Y_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\0&s&-1&0\\1&0&s&-1\\0&0&2&s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s&-1&0&0\\3&s&-1&0\\0&0&s&-1\\-2&0&2&s\end{vmatrix}}=\frac{2\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&2&s\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&s&-1\\0&2&s\end{vmatrix}}{s\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&2&s\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1&0\\0&s&-1\\-2&2&s\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{2\left(s\begin{vmatrix}s&-1\\2&s\end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix}-1&0\\2&s\end{vmatrix}}{s\left(s\begin{vmatrix}s&-1\\2&s\end{vmatrix}\right)+3\begin{vmatrix}s&-1\\2&s\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\-2&s\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{2\left[s\left(s^2+2\right)\right]-(-s)}{s\left[s\left(s^2+2\right)\right]+3\left(s^2+2\right)+(-2)}$$

$$=\frac{2(s^3+2s)+s}{s(s^3+2s)+3s^2+6-2}$$

$$=\frac{2s^3+5s}{s^4+5s^2+4}$$

$$=\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y_3(s)=\frac{\begin{vmatrix}2&s&-1&0\\0&3&s&0\\1&0&0&-1\\0&-2&0&s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s&-1&0&0\\3&s&-1&0\\0&0&s&-1\\-2&0&2&s\end{vmatrix}}=\frac{2\begin{vmatrix}3&s&0\\0&0&-1\\-2&0&s\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s&-1&0\\3&s&0\\-2&0&s\end{vmatrix}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$=\frac{2\left(\begin{vmatrix}3&s\\-2&0\end{vmatrix}\right)+s\begin{vmatrix}s&-1\\3&s\end{vmatrix}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{2(2s) + s(s^2 + 3)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{4s + s^3 + 3s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{s^3 + 7s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Langkah 6 : Mencari invers $Y_1(s)$ dan $Y_3(s)$

– $\mathcal{L}^{-1}$ { $Y_1(s)$ }= $\mathcal{L}^{-1}$ $\left\{ \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right\}$

kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

$$2s^3 + 5s = (As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)$$

koefisien s^3 : A+C = 2

koefisien s^2 : B+D = 0$\Rightarrow$ B = -D

koefisien s : 4A+C= 5

koefisien s^0 : 4B+D= 0

4(-D)+D = 0

-3D = 0 $\Rightarrow$ D = 0, B = 0

A+C = 2 $\Rightarrow$ A = 2 – C

Substitusikan kepersamaan 4A + C = 5

Diperoleh : 4 (2 – C) + C = 5

-3 C = - 3

C = 1

A = 2 –1 = 1

Sehingga $\dfrac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+4}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \cos t + \cos 2t$$

- $\mathcal{L}^{-1}\{ Y_3(s) \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

kita gunakan pecahan parsial

$$\frac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$s^3 + 7s = (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1)$$

koefisien s^3 : A+C = 1

koefisien s^2 : B+D = 0 $\Rightarrow$ B = -D

koefisien s : 4A+C= 7

koefisien s^0 : 4B+D= 0

4(-D)+D = 0

-3D = 0 $\Rightarrow$ D = 0, B = 0

A+C = 1 $\Rightarrow$ A = 1 – C

Substitusikan kepersamaan 4A + C = 7

Diperoleh : 4 (1 – C) + C = 7

-3 C = 3

C = - 1

A = 1+1 = 2

Sehingga $\dfrac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{2s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+4}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

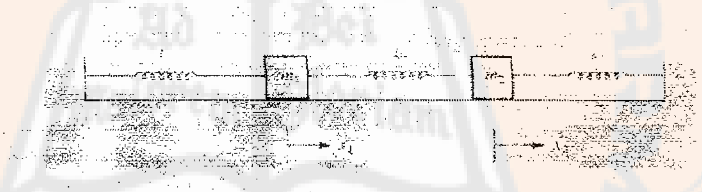
$$= 2\cos t - \cos 2t$$

jadi persamaan perpindahan benda untuk sistem di atas adalah

$y_1(t) = x_1(t) = \cos t + \cos 2t$,

$y_3(t) = x_2(t) = 2\cos t - \cos 2t$

Kasus 4 : Diketahui suatu sistem dengan dua massa dan tiga pegas seperti terlihat pada gambar dibawah ini



Dimana $m_1 = m_2 = 1$ kg dan $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ N/m. Jika benda pertama ditarik ke kanan sejauh 1 m dan benda kedua ditarik ke kiri sejauh 1 m, kemudian keduanya dilepaskan secara bersamaan. Tentukan persamaan perpindahan benda tersebut!

Penyelesaian : Langkah 1 : Menentukan persamaan diferensial sistem pegas-massa

Berdasarkan Hukum Hooke diperoleh

- gaya yang bekerja pada massa m_1 :

  $F = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$

- gaya yang bekerja pada massa m_2 :

  $F = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2$

dengan menerapkan Hukum Newton II diperoleh

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1),$$
$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2$$

dengan memasukan nilai-nilai ke dalam persamaan diferensial diperoleh

$$x_1'' = -x_1 + x_2 - x_1,$$
$$x_2'' = -(x_2 - x_1) - x_2$$

atau

$$x_1'' = -2x_1 + x_2,$$
$$x_2'' = -2x_2 + x_1$$

Langkah 2 : Mengubah persamaan diferensial linear orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

Misal : $y_1 = x_1, y_2 = x_1', y_3 = x_2, y_4 = x_2'$ maka

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = -1,\ y_4(0) = 0$$

maka kita peroleh sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama

$$y_1' = x_1' = y_2,$$
$$y_2' = x_1'' = -2x_1 + x_2 = -2y_1 + y_3,$$
$$y_3' = x_2' = y_4,$$
$$y_4' = x_2'' = -2x_2 + x_1 = -2y_3 + y_1$$

Langkah 3 : Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = \mathcal{L}\left\{-2y_1(t) + y_3(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_3'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_4(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_4'\right\} = \mathcal{L}\left\{-2y_3(t) + y_1(t)\right\}$$

Langkah 4 :

- Gunakan sifat linearitas Transform Laplace

$$\mathcal{L}\left\{y_1'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_2(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_2'\right\} = -2\,\mathcal{L}\left\{y_1(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y_3(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{y_3'\right\} = \mathcal{L}\left\{y_4(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{y_4'\right\} = -2\,\mathcal{L}\left\{y_3(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y_1(t)\right\}$$

- Gunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal

$$\mathcal{L}\{y_1'\} = sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y_2'\} = sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 0$$

$$\mathcal{L}\{y_3'\} = sY_3(s) - y_3(0) = sY_3(s) + 1$$

$$\mathcal{L}\{y_4'\} = sY_4(s) - y_4(0) = sY_4(s) - 0$$

maka persamaan aljabar sistem persamaan diferensial di atas adalah

$$\begin{aligned}
&sY_1(s) - 1 = Y_2(s),\\
&sY_2(s) = -2Y_1(s) + Y_3(s),\\
&sY_3(s) + 1 = Y_4(s),\\
&sY_4(s) = -2Y_3(s) + Y_1(s)
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{array}{lllll}
sY_1(s) - Y_2(s) & & & & = 1,\\
2Y_1(s) + sY_2(s) - Y_3(s) & & & & = 0,\\
 & & sY_3(s) - Y_4(s) & & = -1,\\
-Y_1(s) & & +\, 2Y_3(s) + sY_4(s) & & = 0
\end{array}$$

Langkah 5 : Menyelesaikan persamaan aljabar

Kita gunakan determinan untuk memperoleh $Y_1(s)$ dan $Y_3(s)$

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 2 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & 2 & s \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & s & -1 \\ 0 & 2 & s \end{vmatrix}}{s\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 2 & s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\left(s\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & s \end{vmatrix}}{s\left(s\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix}\right) + 2\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\left[s\left(s^2+2\right)\right] + (-s)}{s\left[s\left(s^2+2\right)\right] + 2\left(s^2+2\right) + (-1)}$$

$$= \frac{s^3 + 2s - s}{s(s^3+2s) + 2s^2 + 4 - 1}$$

$$= \frac{s^3 + s}{s^4 + 4s^2 + 3}$$

$$= \frac{s^3 + s}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$= \frac{s(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$= \frac{s}{s^2+3}$$

$$Y_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & s & -1 & 0 \\ 0 & 2 & s & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & 2 & s \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s & 0 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix}}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$= \frac{-s\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix}\right) - s\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix}}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$= \frac{s - s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$$
$$= \frac{s - s^3 - 2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$$
$$= \frac{-s^3 - s}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$$
$$= \frac{-s(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$$
$$= \frac{-s}{s^2 + 3}$$

Langkah 6 : Mencari invers $Y_1(s)$ dan $Y_3(s)$

- $\mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\}$

$$= \cos\sqrt{3}t$$

- $\mathcal{L}^{-1}\{Y_3(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s}{s^2+3}\right\}$

$$= -\cos\sqrt{3}t$$

jadi persamaan perpindahan benda dari sistem di atas adalah

$$y_1(t) = x_1(t) = \cos\sqrt{3}t,$$
$$y_3(t) = x_2(t) = -\cos\sqrt{3}t$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Pada bab ini penulis akan mengemukakan kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya. Adapun kesimpulan yang dapat kita ambil adalah sebagai berikut

1. Transform Laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde pertama dengan koefisien konstan dengan langkah-langkah sebagai berikut
    1. Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial
    2. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar
    3. Selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh Transform Laplacenya.
    4. Tentukan invers Transform Laplace dari penyelesaiannya dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misal pecahan parsial, konvolusi) dan kombinasikan dengan melihat tabel Transform Laplace.
2. Transform Laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dengan langkah-langkah sebagai berikut :
    1. Kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial .

2. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar
3. Selesaikan persamaan aljabar tersebut sehingga diperoleh dua Transform Laplace X(s) dan Y(s).
4. Tentukan invers Transform Laplace X(s) dan Y(s) dengan bantuan tabel Transform Laplace maupun dengan menggunakan metode yang sesuai, misalnya dengan pecahan parsial, konvolusi, teorema Transform Laplace dari integral, dan lain-lain yang juga dikombinasikan dengan melihat tabel Transform Laplace.

3. Transform Laplace digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama dengan koefisien konstan dimana sistem persamaan diferensial linear simultan tersebut diperoleh dari sistem pegas-massa dengan langkah-langkah sebagai berikut
   1. Menentukan persamaan diferensial sistem pegas-massa
      a. gunakan hukum Hooke untuk menentukan simpangan pegas
      b. kombinasikan dengan hukum Newton II untuk mendapatkan persamaan diferensial sistem pegas-massa
   2. Mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama
   3. kerjakan Transform Laplace pada kedua ruas dari masing-masing persamaan diferensial

4. Gunakan sifat linearitas, teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan aljabar
5. Menyelesaikan persamaan aljabar untuk memperoleh Transform Laplace
6. Mencari invers $X_1(s)$ untuk memperoleh persamaan perpindahan benda dengan cara melihat tabel Transform Laplace atau menggunakan metode yang sesuai, misalnya pecahan parsial, teorema Transform Laplace dari integral, konvolusi dan kombinasikan juga dengan menggunakan tabel Transform Laplace.

5.2 Saran

1. Fungsi f(t) yang akan dicari Transform Laplacenya harus kontinu sepotong-sepotong.
2. Jika akan menggunakan Transform Laplace untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear simultan orde pertama harus diketahui dahulu nilai awalnya.
3. Jika MNA tersebut mudah untuk didiferensialkan, sebaiknya kita tidak menggunakan Transform Laplace tetapi kita gunakan metode lain misalnya metode koefisien tak tentu.

Daftar Pustaka

Boyce, L, William & Diprima, C. Richard (1986). *Elementary Differential Equations*. Fourth Edition. John Wiley & Sons, Inc.

Finizio/Ladas (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Jakarta : Erlangga.

Halliday, Resnick (1985). *Fisika*. Jilid 1. Edisi Ketiga. Jakarta : Erlangga.

Jr, C. H. Edwards & Penney, E. David (1993). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problem*. Third Edition. Prentice hall International, inc.

Leighton, Walter (1981). *A First Course In Ordinary Differential Equation*. Belmont California : Wadsworth Publishing Company.

Miller, K, Richard (1991). *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Second Edition. Englewood Cliffs Newjersey : Prentice hall.

Nagle, Kent, R & Saff B. Edward (1986). *Fundamentals of Differential Equations*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, inc.

Pipes, A. Luis & Harvill, R. Lawrence (1991). Matematika Terapan untuk Para Insinyur dan Fisikawan. Edisi Ketiga. Gadjah Mada University Press.

Rice & Strange (1986). *Ordinary Differential Equation with Applications*. Monterey California : Brooks/Cole Publishing co.

Ritgerand, D, Paul & Rose, J, Nicholas (1986). *Differential Equations With Applications. Mc*. Graw-Hill Book Company.

Spiegel, R, Murray, P.Dh (1985). *Seri Buku Schaum Teori dan soal-soal : Transformasi Laplace*. Jakarta : Erlangga.

Susanta, B. Diktat kuliah Riset Operasi Modul 5 : *Model DiBidang Fisika I*.

Tutoyo, A (1991). *Diktat Persamaan Diferensial disadur dari buku "Ordinary Differential Equations With Applications" karangan Rice & Strange*. Yogyakarta.

Vierck, K. Robert (1979). *Vibration Analysis*. Second Edition. Harper & Row, publisher.

Drs. Yaya S. Kusumah (1989). *Persamaan Diferensial*. Jakarta : Depdikbud Dirjen Pendidikan Tinggi Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan.

Lampiran

TABEL TRANSFORM LAPLACE

Nomor	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Syarat
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t^n , n bilangan bulat positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
4	$t^n e^{at}$, n bilangan bulat positif	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
5	Sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
6	Cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
7	Sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
8	Cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
9	e^{at} Sin bt	$\frac{a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
10	e^{at} Cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)+b^2}$	$s > a$
11	t Sin at	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$S > 0$
12	t Cos at	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s > \|a\|$

13	$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
14	$\frac{Sin\, at - at\, Cos\, at}{2b^3}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
15	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, (\sqrt{\pi} = 1{,}7724538509\ldots)$	$s > 0$
16	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$	$c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$	$s > 0$
17	$\int_0^t f(x)\, dx$	$\frac{F(s)}{s}$	$s > 0$
18	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	$s > a$
19	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$s > 0$
20	$f(t) * g(t)$	$F(s).G(s)$	$s > 0$