TRANSFORMASI INVERSI

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Yulita Mirnaningsih

NIM : 981414034

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2004

TRANSFORMASI INVERSI

Oleh :

Yulita Mirnaningsih

NIM : 981414034

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing

Prof. Dra. Moeharti Hw, M.A Tanggal, 9 Juni 2004

TRANSFORMASI INVERSI

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Yulita Mirnaningsih

NIM : 981414034

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 22 Juni 2004

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, MSi	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, MT	....
Anggota	Prof. Dra. Moeharti Hw, M.A	....
Anggota	Dr. St Suwarsono	....
Anggota	Drs. A. Mardjono	....

Yogyakarta, ..22 Juni 2004......

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd

.... Bagi orang yang berpikiran terbuka,
selalu ada jalan keluar untuk setiap masalah ....

-Charles Kettering-

Skripsi ini kupersembahkan untuk:

- Kedua orangtuaku
- Adik-adikku Nana, Windra, Yudha dan David
- Puspito Clan

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagamana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, ..2..Agustus..2004....

Penulis

Yulita Mirnaningsih

ABSTRAK

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk memahami pengertian transformasi inversi, memahami inversi suatu titik, garis dan lingkaran terhadap lingkaran, mengerti dan memahami sifat-sifat invarian oleh transformasi inversi, serta memahami penerapan dari transformasi inversi.

Metode yang digunakan oleh penulis dalam menyusun skripsi ini adalah metode studi pustaka, yaitu mempergunakan sumber dari berbagai buku.

Transformasi inversi dapat dipandang sebagai refleksi terhadap lingkaran. Inversi titik P terhadap ⊙(O, r) adalah titik P' pada $\overrightarrow{OP}$ yang memenuhi persamaan $OP \cdot OP' = r^2$. Setiap titik di luar ⊙(O, r) hasil inversinya adalah suatu titik di dalam ⊙(O, r) dan sebaliknya setiap titik di dalam ⊙(O, r) hasil inversinya adalah suatu titik di luar ⊙(O, r), kecuali untuk titik O hasil inversinya adalah titik di tak berhingga. Titik pada ⊙(O, r) adalah titik-titik invarian.

Hasil inversi garis yang tidak melalui O dari ⊙(O, r) adalah sebuah lingkaran yang melalui O, sedangkan hasil inversi dari garis yang melalui O adalah garis itu sendiri. Garis yang melalui O invarian tetapi tidak invarian setitik. Hasil inversi dari suatu lingkaran yang melalui O adalah sebuah garis lurus yang melalui titik-titik hasil inversi dari titik-titik yang diketahui, sedangkan hasil inversi dari suatu lingkaran yang tidak melalui O adalah sebuah lingkaran lain yang juga tidak melalui O.

Besar sudut antara dua kurva yang saling berpotongan adalah invarian oleh transformasi inversi, dan lingkaran yang berpotongan tegak lurus dengan lingkaran inversi adalah himpunan titik-titik yang invarian, tetapi tidak invarian setitik oleh transformasi inversi.

Prinsip dan konsep dalam transformasi inversi menjadi dasar dalam pembahasan lingkaran Apollonius dan menjadi prinsip kerja suatu alat yang dikenal sebagai Sel Peaucellier. Transformasi inversi juga dapat diterapkan dalam suatu teorema yang telah menjadi sebuah teorema baru.

ABSTRACT

This is a study about the transformation of inversion. The purpose of this study is to understand better and to know more about the transformation of inversion: the inverse of a point, a line and a circle with respect to a circle of inversion, the invariant properties and some applications of this transformation.

This is a literature study with sources from relevant books in the list of references.

A transformation of inversion can be considered as a reflection on a circle. The inverse of a point P with respect to ⊙(O, r) is a point P' that satisfies the equation $OP \cdot OP' = r^2$. Every point outside ⊙(O, r) is transformed into a point inside the circle, and conversely every point inside ⊙(O, r) is transformed into a point outside the circle, especially the point O is transformed into a point at infinity. Every point on ⊙(O, r) is an invariant point.

The inverse of a line not through point O, the center of ⊙(O, r), is a circle passing through O, while the inverse of a line through O is the line itself. This line is invariant but not pointwise invariant. The inverse of a circle passing through O is a straight line passing through the inverse points, while the inverse of a circle not passing through O is another circle not passing through point O.

The measure of the angle between two intersecting curves is an invariant under the transformation of inversion, and a circle orthogonal to the circle of inversion is an invariant set of points but not pointwise invariant under the transformation of inversion.

Some principals and conceptions in the transformation of inversion become the basic material to study of the circle of Apollonius and become the principle work of the device known as Peaucellier's cell. Another application of the transformation of inversion is in finding new theorems by inverting familiar ones.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan karena kasih-Nya, maka skripsi dengan judul "Transformasi Inversi" ini dapat penulis selesaikan.

Skripsi ini disusun dengan maksud untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini, akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak, penulis dapat melaluinya. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjojo, M.A selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang dengan sabar, tekun dan perhatian selalu memberikan bimbingan, saran dan dorongan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. St. Suwarsono dan Drs. A. Mardjono selaku Dosen Penguji yang telah memberikan koreksi dan saran.
3. Bapak Drs. Th. Sugiarto, M.T selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan saran selama penulis menempuh studi di prodi Pendidikan Matematika.
4. Bapak dan Ibu dosen Universitas Sanata Dharma yang telah membimbing dan mendidik penulis selama penulis belajar di Universitas Sanata Dharma.
5. Bapak Narjo dan Sugeng atas pelayanan dan bantuan yang diberikan, terutama masalah kesekertariatan.

6. Semua staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas pelayanan dan bantuannya selama ini.
7. Bapak dan Ibuku –*the best angels*. Terima kasih atas kasih, bimbingan, doa, pengorbanan dan kepercayaannya. Adik-adikku Nana –*the greatest supporter*, atas kesempatan untuk belajar banyak darimu. Windra –*the brainstormer*, selalu bisa kuandalkan. Yudha –*the best listener*, ketulusanmu selalu membuatku tersentuh. David –*the energizer*, kehaiiibatanmu selalu membuatku terkejut. Ka' Ju, terima kasih atas persahabatannya, pengertian dan kepeduliannya.
8. Mbah kung, simak, dan keluarga besar Puspito terima kasih untuk doa dan semua pelajaran berharganya.
9. Sahabat-sahabatku, Yosep, Tari, Sugih, Susana, Rini, Kirjo, Agus terima kasih selalu menjadi teman terbaikku, Nduk Wuri, Ipung, Hendri, Indah, Okta, Neni, Ratna, Diana, Retno, Sugeng, Sutri, Mbak Sarmi, Ari, Yuni, dan semua teman-temanku di P.Mat terima kasih atas kebersamaannya.
10. Semua pihak yang dalam kesempatan ini belum dapat penulis sebutkan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan segala kerendahan hati. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Penulis

Yulita Mirnaningsih

DAFTAR ISI

DAFTAR NOTASI

1. A, B, C, ...	: Titik-titik
2. $a, b, c, \ldots l, \ldots\ldots$	: Garis-garis
3. $\overleftrightarrow{AB}$	: Garis yang melalui titik A dan titik B
4. $\overrightarrow{AB}$	: Sinar garis AB dengan pangkal A
5. $\overline{AB}$	: Segmen garis AB
6. AB	: Panjang segmen garis AB
7. $\triangle$ ABC	: Segitiga ABC
8. $\angle$ ABC	: Sudut ABC
9. $m\angle$ ABC	: Besar sudut ABC
10. $\cong$	: Kongruen
11. $\sim$	: Sebangun
12. $\perp$	: Tegak lurus
13. //	: Sejajar
14. $\odot(O, r)$	: Lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r
15 $\widehat{ABC}$	: Busur ABC
16. $m\ \widehat{ABC}$	: Besar busur ABC

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Pada awalnya pokok permasalahan yang muncul di dalam geometri adalah berkaitan dengan masalah-masalah praktis yang berguna bagi masyarakat dalam kehidupan sehari-hari. Pembelajaran geometri selanjutnya mengalami perkembangan. Geometri tidak hanya dipelajari secara induktif, melainkan juga dipelajari secara deduktif. Sistem induktif dianggap kurang ilmiah sebab dasarnya tidak kuat. Oleh karena itu selanjutnya geometri dipandang sebagai abstraksi dari dunia nyata. Hal yang dianggap lebih penting dalam suatu pokok permasalahan adalah proses pengerjaan secara logis dan sistematis dengan tidak melupakan pengertian-pengertian yang semula diperoleh dari sistem induktif.

Geometri yang sistematis pertama kali disusun oleh Euclides (330 SM) dalam bukunya yang berjudul "Unsur-Unsur Euclides". Euclides mengumpulkan hasil kerja yang ditulis oleh beberapa ahli dari masa sebelumnya menjadi sebuah buku yang tersusun sebagai suatu rangkaian yang logis. Buku tersebut sangat berpengaruh dan bertahan selama 2000 tahun. Di dalam buku tersebut terdapat kelemaham-kelemahan, yang kemudian dibenahi oleh beberapa ahli. Geometri yang pertama kali menggunakan sistem deduktif ini dikenal sebagai Geometri Euclides.

Dalam Geometri Euclides dikenal grup transformasi, yaitu grup similaritas dengan subgrup normal isometri. Similaritas memuat dilatasi dan isometri, sedangkan isometri sendiri meliputi translasi, refleksi dan rotasi. Macam-macam transformasi tersebut sudah dipelajari di sekolah menengah dan di perkuliahan.

Selain grup similaritas dan sub grup normal isometri, dikenal juga transformasi inversi. Transformasi inversi adalah refleksi terhadap lingkaran. Transformasi inversi ditemukan oleh Jacob Steiner pada tahun 1824. Jacob Steiner lahir pada tanggal 18 Maret 1796 di Utzenstorf, Switzerland dan meninggal pada 1 April 1863. Sebagai anak seorang petani kecil, Steiner tidak segera mendapat pendidikan dan belum belajar menulis sampai berumur 14 tahun. Menentang keinginan orang tuanya, pada usia 18 tahun Steiner mengawali pendidikannya di Pestalozzi School di Yverdon, Switzerland. Steiner melanjutkan pendidikannya di Heidelberg dan di Berlin sampai memperoleh gelar profesor di bawah bimbingan Jacobi.

Menurut Steiner, sebuah garis yang melalui titik P dan titik P' juga melalui titik O pada $\odot(O, r)$ dengan $r \neq 0$, jika $OP \cdot OP' = r^2$ maka titik P' merupakan inversi dari titik P dan sebaliknya P merupakan inversi dari P'. Setiap titik di dalam $\odot(O, r)$ akan berkorespondensi dengan suatu titik di luar $\odot(O, r)$, sebaliknya setiap titik di luar $\odot(O, r)$ akan berkorespondensi dengan suatu titik di dalam $\odot(O, r)$ kecuali untuk titik O. Transformasi inversi dari titik O adalah titik di tak berhingga.

Dalam mempelajari transformasi perlu dipelajari sifat tetap atau invarian terhadap transformasi tersebut. Suatu sifat invarian (bertahan) terhadap suatu transformasi bila sifat yang berlaku bagi unsur di bidang itu akan berlaku juga bagi unsur hasil transformasinya. Demikian juga di dalam transformasi inversi akan dipelajari sifat invarian atau sifat bertahannya.

Penulis tertarik untuk mempelajari lebih mendalam tentang transformasi inversi, sebab materi tersebut belum pernah penulis pelajari sebelumnya di kegiatan perkuliahan. Penulis juga melihat bahwa trasformasi inversi merupakan refleksi terhadap lingkaran untuk transformasi di bidang dan refleksi terhadap bola untuk transformasi di ruang, ini sangat menarik untuk dipelajari sebab terdapat sifat-sifat khusus yang bisa dicari hubungannya dengan topik transformasi yang sudah dibahas sebelumnya.

Penulis juga akan membahas bahwa trasformasi inversi yang akan dipelajari ini berguna dalam kehidupan nyata, sebab materi ini menjadi dasar untuk proses kerja sebuah alat yang dikenal sebagai Sel Peaucellier. Alat ini akan mengubah gerak linear menjadi gerak kurvilinear ataupun sebaliknya. Selain itu Lingkaran Apollonius juga mempergunakan teori transformasi inversi sebagai dasar dalam pembahasannya.

B. Pembatasan Masalah

Penulis hanya akan membahas transformasi inversi di bidang saja. Dengan kata lain hanya akan dibahas refleksi terhadap lingkaran saja dan tidak akan dibahas refleksi terhadap bola.

C. Perumusan Masalah

Permasalahan-permasalahan yang akan dibahas antara lain:

1. Apa yang dimaksud dengan transformasi inversi?
2. Bagaimana mencari hasil transformasi inversi suatu titik, suatu garis, dan suatu lingkaran?
3. Bagamanakah sifat-sifat yang invarian (bertahan) oleh transformasi inversi?
4. Bagaimana penerapan dari transformasi inversi?

D. Tujuan Penulisan

Penulis mempelajari lebih mendalam transformasi inversi yang merupakan tipe khusus dari transformasi yang sudah dikenal selama ini dengan tujuan:

1. Agar dapat memahami pengertian transformasi inversi.
2. Agar dapat memahami cara untuk mencari inversi suatu titik, suatu garis dan suatu lingkaran.
3. Mengerti dan memahami sifat-sifat apa saja yang invarian (bertahan) oleh transformasi inversi.
4. Memahami penerapan dari transformasi inversi.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat paling besar diharapkan dirasakan oleh penulis, yaitu penulis mendapatkan tambahan pengetahuan dan wawasan berkaitan dengan topik transformasi inversi. Dari pengetahuan tersebut diharapkan dapat dijadikan bekal bagi penulis sebagai calon guru, baik untuk memberikan tambahan pengetahuan kepada siswa ataupun sebagai usaha untuk memotivasi siswa sehingga timbul rasa ingin tahu yang besar dari siswa.

Bagi pihak lain, semoga mendapatkan tambahan pengetahuan setelah membaca hasil skripsi ini.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka, yaitu mencari sumber dari berbagai buku yang tercantum dalam daftar pustaka dan juga dari pengetahuan yang sudah diperoleh penulis di perkuliahan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dipelajari beberapa definisi, teorema-teorema beserta bukti-buktinya yang akan menjadi dasar untuk mempelajari materi selanjutnya. Agar lebih mudah dipahami, maka materi yang akan dibahas dikelompokkan menjadi beberapa subbab sebagai berikut:

A. Perbandingan pada Segitiga Siku-siku

Untuk membantu memahami perbandingan pada segitiga siku-siku, sebelumnya kita mengingat kembali beberapa materi yang sudah pernah kita pelajari.

Definisi 2.1

Jika a, b dan c adalah bilangan-bilangan positif dan $a : b = b : c$, maka b disebut pembanding nilai tengah dari a dan c.

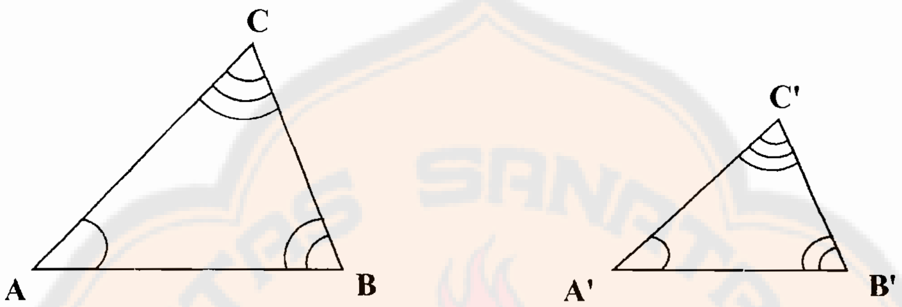
Teorema 2.1

Jika b adalah pembanding nilai tengah dari a dan c maka $b^2 = ac$.

Definisi 2.2

Dua segitiga dikatakan sebangun bila dan hanya bila terdapat korespondensi antara titik-titik sudutnya sedemikian sehingga panjang sisi yang berkorespondensi adalah sebanding dan sudut-sudut yang berkorespondensi adalah kongruen.

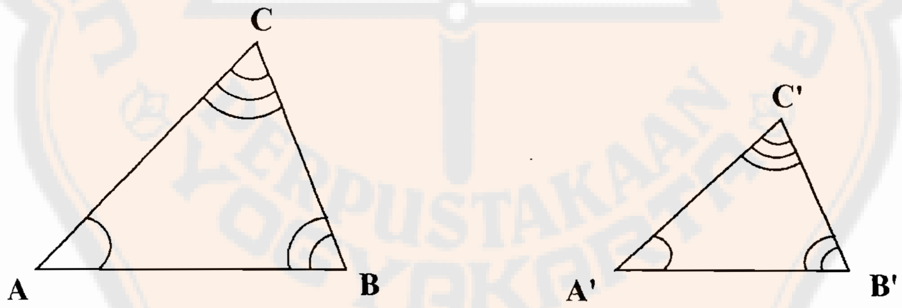
Untuk selanjutnya kesebangunan disimbolkan dengan ~.



Gambar 2.1 Segitiga Sebangun

Postulat 1

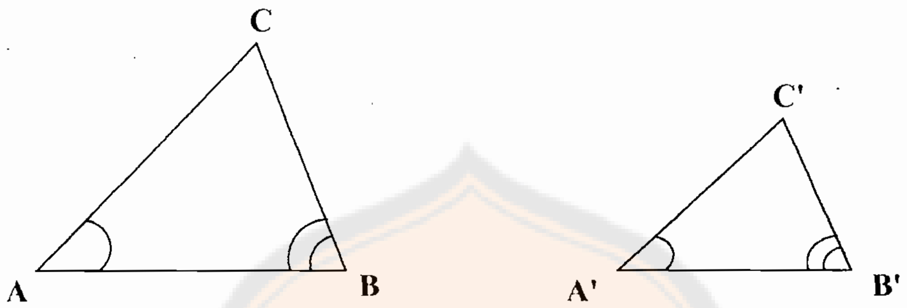
Jika $\triangle$ ABC dan $\triangle$ A'B'C' dengan $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ dan $\angle C \cong \angle C'$ maka $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Gambar 2.2 Ilustrasi Postulat 1.1

Teorema 2.2

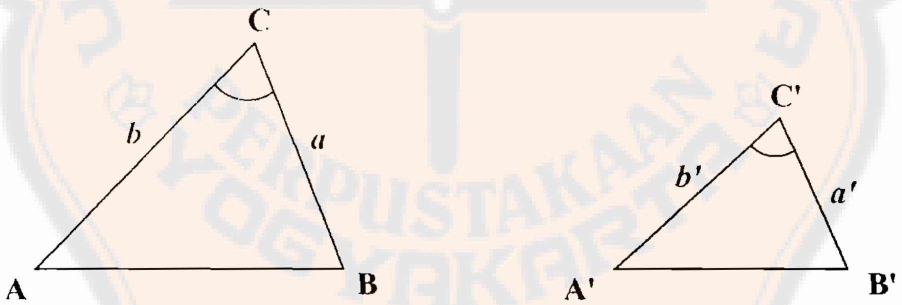
Jika $\triangle$ ABC dan $\triangle$ A'B'C' dengan $\angle A \cong \angle A'$ dan $\angle B \cong \angle B'$ maka $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ A'B'C'.



Gambar 2.3 Ilustrasi Teorema 2.2

Teorema 2.3

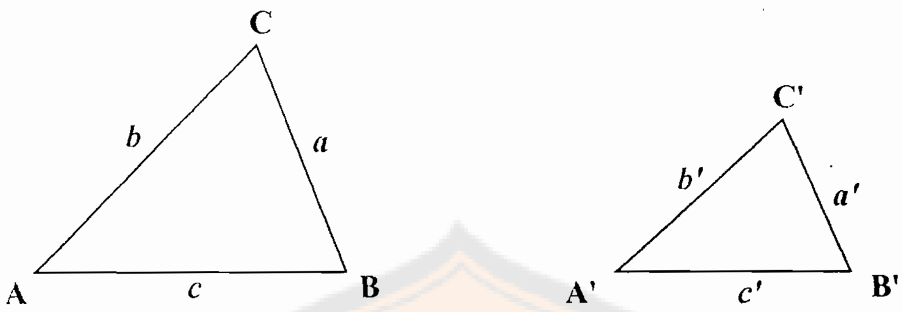
Jika $\triangle$ ABC dan $\triangle$ A'B'C' dengan $a : a' = b : b'$, dan diketahui $\angle$C dan $\angle$C' adalah sudut-sudut yang diapit oleh sisi-sisi yang saling sebanding dan $\angle C \cong \angle C'$, maka $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ A'B'C'.



Gambar 2.4 Ilustrasi Teorema 2.3

Teorema 2.4

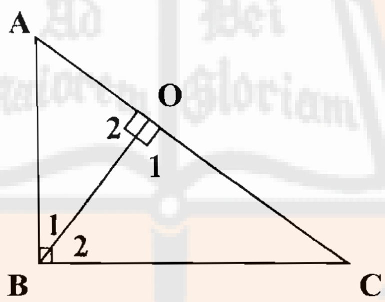
Jika $\triangle$ ABC dan $\triangle$ A'B'C' dengan $a : a' = b : b' = c : c'$, maka $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ A'B'C'.



Gambar 2.5 Ilustrasi Teorema 2.4

Teorema 2.5

Garis tinggi pada sisi miring dari segitiga siku-siku menyebabkan terbentuknya dua segitiga siku-siku yang sebangun dan akan sebangun juga dengan segitiga semula.



Gambar 2.6 Ilustrasi Teorema 2.5

Diketahui

$\triangle$ ABC siku-siku di B.

$\overline{BO}$ garis tinggi pada sisi miring.

Dibuktikan

$\triangle ABC \sim \triangle AOB \sim \triangle BOC$

Bukti

$\triangle$ ABC dan $\triangle$ BOC segitiga siku-siku.

Karena $\angle C \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle O_1$, dan $\angle A \cong \angle B_2$, maka $\triangle ABC \sim \triangle BOC$.

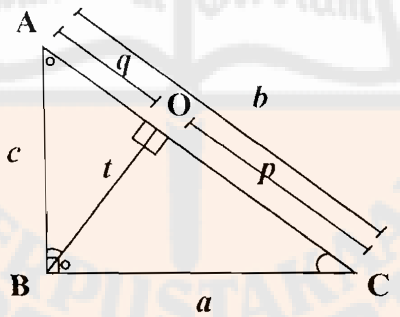
$\triangle$ ABC dan $\triangle$ AOB segitiga siku-siku.

Karena $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle O_2$, dan $\angle C \cong \angle B_1$, maka $\triangle ABC \sim \triangle AOB$.

Jadi $\triangle ABC \sim \triangle AOB \sim \triangle BOC$.

Teorema 2.6

Panjang garis tinggi pada sisi miring dari segitiga siku-siku adalah pembanding nilai tengah dari panjang segmen-segmen garis sisi miringnya.



Gambar 2.7 Ilustrasi Teorema 2.6

Diketahui

$\triangle$ ABC siku-siku di B.

$\overline{BO}$ garis tinggi pada sisi miring

t panjang garis tinggi pada sisi miring

p dan q panjang segmen-segmen garis sisi miringnya

Dibuktikan

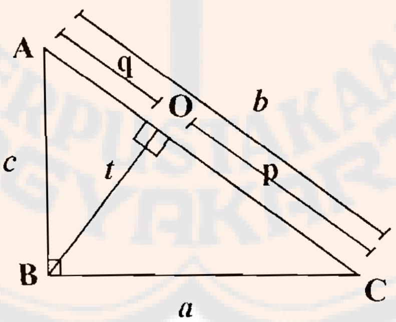
t pembanding nilai tengah dari p dan q

Bukti

Berdasarkan teorema 2.5 $\triangle$ AOB ~ $\triangle$ BOC maka $q : t : c = t : p : a$, sehingga $q : t = t : p$. Tampak bahwa t pembanding nilai tengah dari p dan q. Jadi $t^2 = pq$.

Teorema 2.7

Panjang setiap kaki segitiga siku-siku adalah pembanding nilai tengah dari panjang sisi miring dan panjang proyeksi kaki pada sisi miring.



Gambar 2.8 Ilustrasi Teorema 2.7

Diketahui

$\triangle$ ABC siku-siku di B.

p proyeksi a pada b dan q proyeksi c pada b.

Dibuktikan

c pembanding nilai tengah dari b dan q serta a pembanding nilai tengah dari b dan p

Bukti

Berdasarkan teorema 2.5 $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ AOB, maka $a : b : c = t : c : q$, sehingga $b : c = c : q$. Tampak bahwa c pembanding nilai tengah dari b dan q. Jadi $c^2 = bq$. Dengan langkah yang sama dapat dibuktikan bahwa $a^2 = bp$

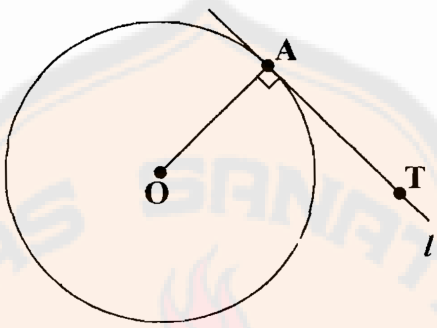
B. Kuasa Titik pada Suatu Lingkaran

Sebelum mempelajari lebih mendalam tentang kuasa titik pada suatu lingkaran, kita mencoba mengingat kembali pengertian yang mendukung.

Telah diketahui bahwa sebuah garis akan memotong lingkaran tepat di dua titik. Misalkan sebuah garis ℓ memotong $\odot$(O, r) di titik A dan B, dan misalkan d adalah jarak garis ℓ terhadap O, maka garis ℓ dikatakan memotong $\odot$(O, r) jika $d < r$, garis ℓ tidak memotong $\odot$(O, r) jika $d > r$, dan garis ℓ akan menyinggung $\odot$(O, r) apabila $d = r$. Sehingga dapat didefinisikan garis singgung pada $\odot$(O, r) sebagai berikut:

Definisi 2.3

Garis singgung pada ⊙(O, *r*) adalah garis ℓ yang memotong ⊙(O, *r*) dengan kedua titik potongnya berimpit.

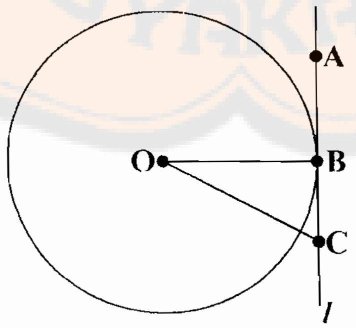


Gambar 2.9 Garis Singgung pada ⊙(O,r)

Titik pada ⊙(O, *r*) yang dilalui garis ℓ tersebut dinamakan titik singgung. Pada gambar di samping $\overline{TA}$ adalah segmen garis singgung pada ⊙(O, *r*).

Teorema 2.8

Garis singgung pada lingkaran adalah tegak lurus pada jari-jari lingkaran yang melalui titik singgung.



Gambar 2.10 Garis Singgung $\perp$ jari-jari ⊙ (O,r)

Diketahui

$\odot(O, r)$ dengan $\overleftrightarrow{AB}$ merupakan garis singgungnya.

$\overline{OB}$ jari-jari $\odot(O, r)$.

Dibuktikan

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OB}$

Bukti

Diambil sebarang titik C pada $\overleftrightarrow{AB}$ seperti pada gambar 2.10. OC > OB sebab C terletak di luar $\odot(O, r)$ sehingga $d > r$. Jika $\overline{OB}$ adalah jarak terpendek dari titik pusat terhadap garis , maka $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ sebab segmen garis yang tegak lurus membuktikan jarak terpendek dari titik terhadap garis. Jadi terbukti bahwa garis singgung pada $\odot(O, r)$ adalah tegak lurus pada jari-jari yang melalui titik singgung.

Teorema 2.9

Titik Q adalah titik di luar $\odot(O, r)$. k_1 dan k_2 adalah garis yang melalui Q dan memotong $\odot(O, r)$. Jika garis k_1 memotong $\odot(O, r)$ di titik C dan D, sedangkan garis k_2 memotong $\odot(O, r)$ di titik A dan titik B, maka :

$$QA \cdot QB = QD \cdot QC.$$

Diketahui

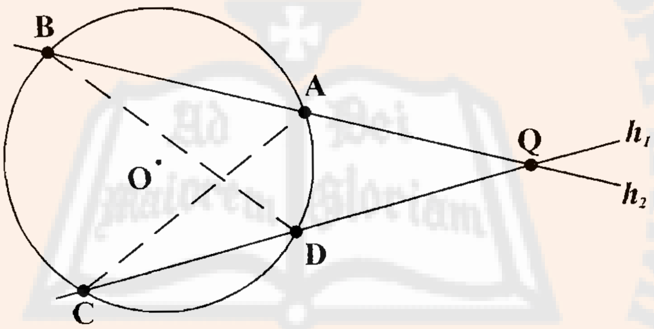
Titik Q di luar ⊙(O, r).

h_1 melalui Q dan memotong ⊙(O, r) di C dan D.

h_2 melalui Q dan memotong ⊙(O, r) di A dan B.

Dibuktikan

QA · QB = QD · QC.



Gambar 2.11 Ilustrasi Teorema 2.9

Bukti

Digambar $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$. Dipandang △ QBD dan △ QCA, dengan ∠Q ≅ ∠Q. Karena $m\angle B = \frac{1}{2}\ \widehat{AD}$ dan $m\angle C = \frac{1}{2}\ \widehat{AD}$ maka ∠B ≅ ∠C, sehingga △QBD ~ △QCA. Akibatnya QB : QC = QD : QA, sehingga QA·QB = QC·QD. Jadi terbukti bahwa QA· QB = QD· QC.

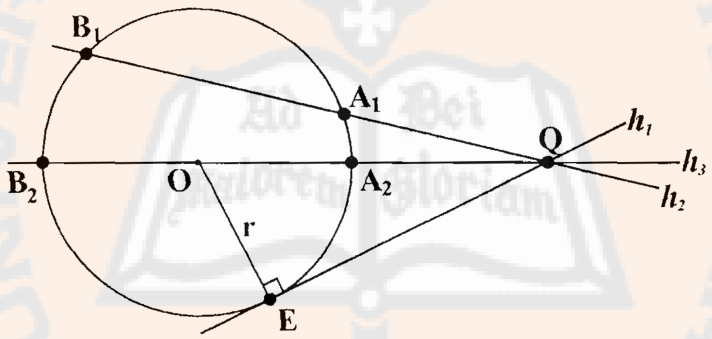
Misalkan Q adalah sebarang titik pada sebuah bidang, dan ⊙(O, r) pada bidang tersebut. Jika suatu garis melalui Q dan memotong lingkaran di titik A dan B akibatnya adalah :

1. $QA \cdot QB$ adalah konstan untuk sebarang letak garisnya.
2. Jika garis melalui O, maka berlaku:

$$QA_2 \cdot QB_2 = (QO - OA_2)(QO + OB_2)$$

$$= (QO - r)(QO + r)$$

$$= QO^2 - r^2$$



Gambar 2.12 Kuasa Q terhadap ⊙ (O,r)

Definisi 2.4

Kuasa titik Q pada ⊙(O, r) adalah $QO^2 - r^2$.

Jika titik Q berada di luar ⊙(O, r), maka $QO > r$ sehingga kuasa titik Q positif, jika Q pada ⊙(O, r) maka kuasanya nol, sedangkan jika Q di dalam ⊙(O, r) maka $QO < r$ sehingga kuasa titik Q adalah negatif.

Teorema 2.10

Titik Q di luar lingkaran dan garis singgung dari Q pada lingkaran menyinggung lingkaran di titik T. Jika terdapat garis dari Q yang memotong lingkaran di titik A dan B, maka $QA \cdot QB = (QT)^2$

Diketahui

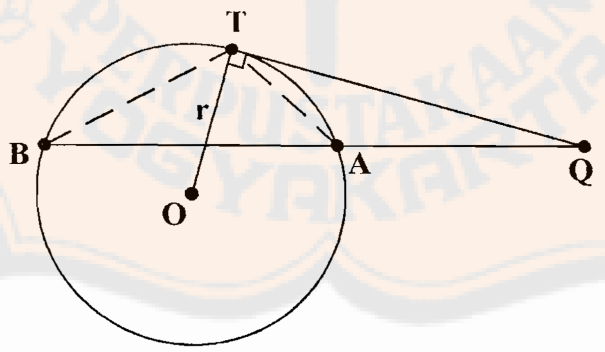
Titik Q di luar $\odot(O, r)$

$\overline{QT}$ segmen garis singgung pada $\odot(O, r)$

ℓ garis yang memotong $\odot(O, r)$ di titik A dan B

Dibuktikan

$QA \cdot QB = (QT)^2$



Gambar 2.13 Ilustrasi Bukti Teorema 2.10

Bukti

Kita ingat kembali bahwa sudut keliling dan sudut antara garis singgung dengan tali busur lingkaran nilainya adalah setengah busur yang dilaluinya, sehingga $\angle ATQ \cong \angle TBQ$, $\angle TQA \cong \angle BQT$ dan $\angle QAT \cong \angle QTB$. Akibatnya adalah $\triangle$ QTA ~ $\triangle$ QBT, sehingga QA : QT = QT : QB.

Jadi $QA \cdot QB = (QT)^2$ atau $QO^2 - r^2 = (QT)^2$.

C. Dua Lingkaran Berpotongan Tegak Lurus

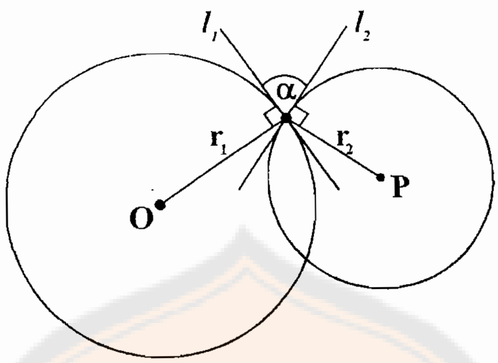
Lingkaran-lingkaran yang berpotongan tegak lurus memegang peranan yang sangat penting dalam mempelajari inversi terhadap suatu lingkaran.

Definisi 2.5

Sudut antara dua lingkaran $\odot(O, r_1)$ dan $\odot(P, r_2)$ yang berpotongan adalah sudut yang diapit oleh garis singgung -garis singgung pada lingkaran di titik potongnya.

$\angle\alpha$ pada gambar 2.14 adalah sudut antara dua lingkaran, yaitu $\odot(O,r_1)$ dan $\odot(P, r_2)$ yang saling berpotongan.

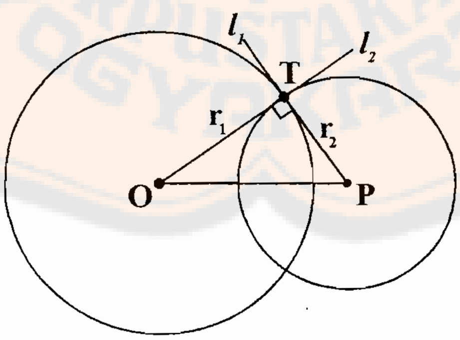
Berdasarkan definisi di atas, maka dapat kita cari syarat agar dua buah lingkaran dikatakan berpotongan tegak lurus.



Gambar 2.14 Sudut antara $\odot(O, r_1)$ dan $\odot(P, r_2)$

Definisi 2.6

Dua buah lingkaran, yaitu $\odot(O, r_1)$ dan $\odot(P, r_2)$ adalah berpotongan tegak lurus jika sudut yang diapit oleh garis singgung-garis singgung pada $\odot(O, r_1)$ dan $\odot(P, r_2)$ di titik potong besarnya adalah 90^0. Dengan kata lain $m\angle\alpha = 90$ yang akan terjadi jika garis singgung -garis singgung berimpit dengan jari-jari lingkaran.



Gambar 2.15 Lingkaran Berpotongan Tegaklurus

Misalkan terdapat ⊙(O, r_1) dan titik T pada ⊙(O, r_1). Jika dari O ditarik garis yang melalui T, maka $\overline{OT}$ adalah jari-jari ⊙(O, r_1), sehingga garis singgung pada ⊙(O, r_1) dengan titik singgungnya di titik T akan berpotongan dengan sebuah garis yang melalui O dengan titik perpotongannya di titik P. Jika titik P merupakan titik pusat dari lingkaran kedua dengan jari-jari $\overline{PT}$ maka ⊙(O, r_1) dan ⊙(P, r_2) akan saling berpotongan tegak lurus.

Oleh karena itu jika ⊙(O, r_1) dan ⊙(P, r_2) berpotongan tegak lurus, maka garis singgung pada ⊙(O, r_1) dengan titik T sebagai titik singgungnya berimpit dengan r_2 dan sebaliknya garis singgung pada ⊙(P, r_2) yang menyinggung lingkaran di titik T berimpit dengan r_1.

Agar dua buah lingkaran berpotongan tegak lurus maka kuadrat jarak titik-titik pusatnya harus sama dengan jumlah jari-jarinya, yaitu $(OP)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

BAB III

TRANSFORMASI INVERSI

Pada bab ini akan diperkenalkan tipe dari transformasi yang dikenal dengan inversi. Transformasi yang dikenal dengan inversi ditemukan oleh Jacob Steiner pada tahun 1824. Selama ini transformasi yang sudah kita pelajari adalah mentransformasikan suatu garis menjadi suatu garis, namun dalam inversi suatu garis yang ditransformasikan terhadap ⊙(O, r) hasilnya adalah suatu lingkaran. Untuk lebih jelasnya akan dimulai dengan mempelajari inversi suatu titik terhadap ⊙(O, r).

A. Transformasi Inversi suatu Titik terhadap Lingkaran

Alasan dipelajari materi pada bab ini selain untuk memahami tipe dari transformasi yang berbeda dengan transformasi pada geometri Euclides juga untuk menemukan beberapa sifat (unsur) tetap yang penting dari transformasi inversi dan untuk mencari beberapa penerapan dari materi ini.

Dalam mempelajari transformasi inversi ini diawali dengan definisi titik-titik inversi.

Definisi 3.1

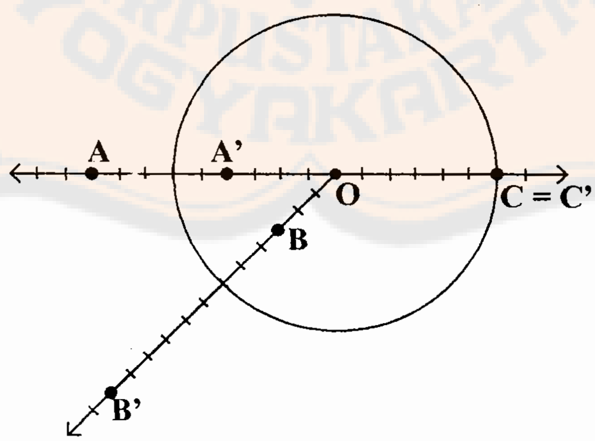
Inversi dari titik P terhadap ⊙(O, r) adalah titik P' pada $\overleftrightarrow{OP}$ yang memenuhi persamaan $OP \cdot OP' = r^2$.

Jadi inversi dari titik P adalah titik P' dan inversi dari titik P' adalah titik P itu sendiri. ⊙(O, r) disebut sebagai lingkaran inversi, titik O adalah titik pusat lingkaran inversi, sedangkan jari-jari r merupakan jari-jari lingkaran inversi.

Berdasarkan definisi di atas, maka setiap titik di luar ⊙(O, r) akan mempunyai inversi di dalam ⊙(O, r) dan setiap titik di dalam ⊙(O, r) mempunyai inversi di luar ⊙(O, r) kecuali untuk titik O inversinya adalah titik di tak berhingga. Setiap titik yang terletak pada ⊙(O, r) inversinya adalah titik itu sendiri.

Contoh 3.1

Sebagai contoh, seperti gambar 3.1 dimisalkan jari-jari ⊙(O, r) adalah 6 satuan dan jarak titik A, B, dan C dari O berturut-turut adalah 9, 3, dan 6 satuan.



Gambar 3.1 Ilustrasi Contoh 3.1

Untuk mencari inversi dari titik A, kita tulis:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

$$9 \cdot OA' = 6^2 = 36$$

$$OA' = \frac{36}{9} = 4$$

Jadi titik A' adalah inversi dari titik A pada $\overleftrightarrow{OA}$ yang berjarak 4 satuan dari O.

Untuk mencari inversi dari titik B, ditulis:

$$OB \cdot OB' = r^2$$

$$3 \cdot OB' = 6^2 = 36$$

$$OB' = \frac{36}{3} = 12$$

Untuk mencari inversi dari titik C, ditulis:

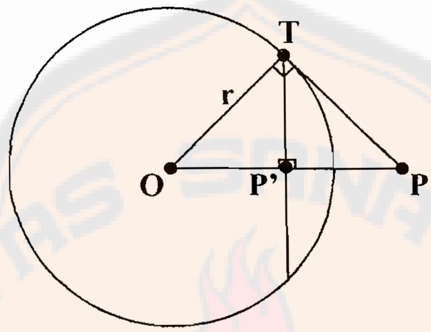
$$OC \cdot OC' = r^2$$

$$6 \cdot OC' = 6^2 = 36$$

$$OC' = \frac{36}{6} = 6$$

Jadi titik B' adalah 12 satuan dari O pada $\overleftrightarrow{OB}$, sedangkan titik C' adalah 6 satuan dari O pada $\overleftrightarrow{OC}$ yang berarti C' adalah titik C itu sendiri sebab saling berimpit.

Inversi suatu titik terhadap ⊙(O, r) dapat dicari juga secara geometris. Untuk mencari inversi suatu titik yang berada di luar ⊙(O, r) digambarkan sebagai berikut.

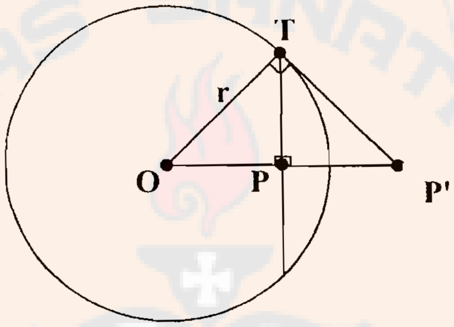


Gambar 3.2 Inversi dari P di luar ⊙(O,r)

Misalkan akan dicari inversi dari titik P terhadap ⊙(O, r). Langkah pertama, digambar $\overrightarrow{OP}$ kemudian dari P ditarik garis yang menyinggung ⊙(O,r) di titik T. Dari T ditarik sebuah garis yang tegak lurus pada $\overrightarrow{OP}$ maka P' adalah perpotongan garis tersebut dengan $\overrightarrow{OP}$, sehingga P' adalah titik hasil inversi dari titik P.

Untuk menunjukkan bahwa P' adalah benar-benar titik hasil inversi dari titik P, akan diperlihatkan bahwa $OP \cdot OP' = r^2$. Pertama digambar $\overline{OT}$. Jika $\overline{PT}$ adalah garis singgung pada ⊙(Q,r) maka $\overline{PT} \perp \overline{OT}$ (berdasarkan teorema). Sehingga Δ OTP adalah segitiga siku-siku dengan T merupakan sudut siku-siku. Karena $\overline{TP'} \perp \overrightarrow{OP}$ dan $\overline{TP'}$ adalah garis tinggi terhadap sisi miring $\triangle$ OTP maka berdasarkan teorema 2.7, OP : OT = OT : OP' dengan $\overline{OT}$ jari-jari $\odot$(O, r) sehingga OT = r. Jadi OP : r = r : OP' atau dengan kata lain OP $\cdot$ OP' = r^2.

Jika titik yang inversinya akan kita cari berada di dalam $\odot$(O, r) maka langkah yang digunakan adalah kebalikan dari langkah di atas.



Gambar 3.3 Inversi dari P di dalam $\odot$(O,r)

Untuk lebih jelasnya, pertama dimisalkan titik T adalah titik ujung dari tali busur yang melalui dan tegak lurus pada $\overrightarrow{OP}$. Kemudian dicari garis singgung pada $\odot$(O, r) dengan titik singgungnya adalah titik T, maka garis singgung tersebut akan memotong $\overrightarrow{OP}$ di titik P'. Titik P' ini adalah inversi dari titik P yang terletak di dalam $\odot$(O, r).

Untuk menunjukkan bahwa P' adalah benar-benar titik inversi dari titik P, maka akan diperlihatkan bahwa OP $\cdot$ OP' = r^2. Karena $\overline{OT} \perp \overline{P'T}$ maka $\triangle$ OTP' adalah segitiga siku-siku yang siku-siku di T. $\overline{TP}$ adalah garis tinggi pada $\overline{OP'}$ sehingga berdasarkan Teorema 2.7, $OP' \cdot OT = OT \cdot OP$, dengan $\overline{OT}$ adalah jari-jari $\odot(O, r)$ sehingga $OT = r$. Jadi $OP \cdot OP' = r^2$.

Teorema 3.1

Suatu lingkaran inversi adalah invarian oleh transformasi inversi terhadap lingkaran tersebut.

Diketahui

$\odot(O, r)$ adalah lingkaran inversi.

Dibuktikan

$\odot(O, r)$ adalah invarian

Bukti

Teorema ini diberikan sebab setiap titik yang terletak pada $\odot(O, r)$ inversinya adalah titik itu sendiri. Jadi $\odot(O, r)$ adalah invarian setitik, yang artinya bahwa setiap titik memiliki bayangan yaitu dirinya sendiri. Karena bayangan setiap titik pada lingkaran adalah titik itu sendiri, berarti bayangan dari lingkaran oleh transformasi inversi adalah lingkaran itu sendiri.

B. Transformasi Inversi suatu Garis terhadap Lingkaran

Pada subbab sebelumnya kita telah memahami pengertian inversi suatu titik terhadap $\odot(O, r)$, kita juga sudah mempelajari bagaimana menentukan inversi suatu titik terhadap ⊙(O, r). Untuk selanjutnya dalam subbab ini akan dipelajari bagaimana menentukan inversi suatu garis terhadap ⊙(O, r).

Untuk menentukan inversi suatu garis terhadap ⊙(O, r) akan kita gunakan pemahaman kita sebelumnya tentang inversi suatu titik terhadap ⊙(O,r) sebagai dasarnya. Di dalam inversi suatu garis terhadap ⊙(O, r) secara umum terdapat dua kasus, yaitu inversi suatu garis lurus yang tidak melalui pusat lingkaran inversi dan inversi suatu garis lurus yang melalui pusat lingkaran inversi. Adapun kedua kasus tersebut akan dirumuskan dalam teorema-teorema berikut ini. Teorema-teorema ini adalah untuk menjawab pengertian inversi suatu garis terhadap ⊙(O, r).

Teorema 3.2

Inversi suatu garis lurus yang tidak melalui pusat lingkaran inversi adalah lingkaran yang melalui pusat lingkaran inversi.

Diketahui

⊙(O, r) adalah lingkaran inversi.

l garis lurus yang tidak melalui O.

Dibuktikan

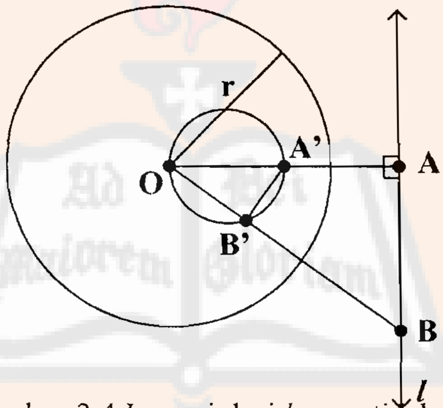
Inversi garis lurus yang tidak melalui O adalah suatu lingkaran yang melalui O

Bukti

Suatu garis lurus tidak melalui pusat lingkaran inversi berarti akan terdapat tiga kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu:

1. Kemungkinan I

   Garis l tidak memotong lingkaran inversi, ini berarti l berada di luar $\odot(O, r)$.



Gambar 3.4 Inversi dari l yang tidak memotong $\odot$ (O,r)

Untuk membuktikannya, langkah pertama digambar garis yang melalui O dan tegak lurus pada garis l. Misalkan titik A adalah perpotongan garis tersebut dengan garis l, maka dapat dicari inversi dari titik A terhadap $\odot(O, r)$, yaitu titik A'. Ambil sembarang titik B pada l yang bukan titik A. Dengan langkah yang sama dapat dicari inversi titik B terhadap $\odot$ (O, r), yaitu titik B'. Titik A'dan B' dihubungkan dengan sebuah garis. Berdasarkan definisi inversi suatu titik terhadap ⊙(O, r), maka berlaku :

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$$

Sehingga,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

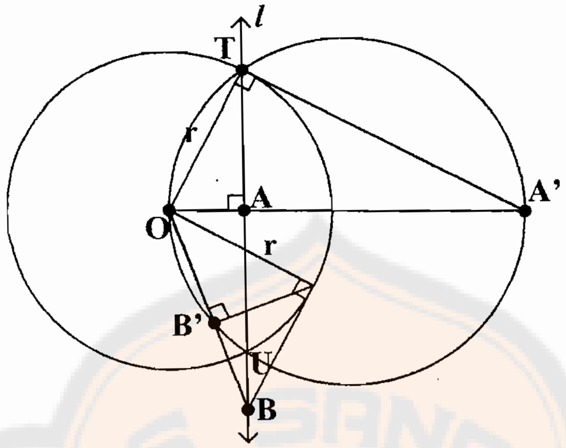
Atau

$$OA : OB = OB' : OA'$$

Karena ∠AOB ≅ ∠B'OA', berdasarkan teorema kesebangunan (teorema 2.3) perbandingan tersebut menyatakan bahwa △OAB ~ △OB'A'. Akibatnya △ OB'A' adalah segitiga siku-siku dengan B' sebagai titik sudut siku-sikunya. Karena B' adalah titik sudut siku-siku dari △ OB'A' maka B' juga merupakan titik sudut keliling pada setengah lingkaran dengan OA' sebagai diameternya. Jadi inversi garis ℓ yang tidak memotong ⊙(O, r) adalah lingkaran yang melalui O. Titik B adalah titik sebarang pada garis ℓ, maka setiap titik pada lingkaran dengan diameter OA' merupakan inversi dari suatu titik pada garis ℓ.

2. Kemungkinan II

   Garis lurus memotong lingkaran ⊙(O, r) di dua titik.



Gambar 3.5 Inversi dari Garis l yang memotong $\odot$ (O,r)

Misalkan titik perpotongan tersebut adalah titik T dan U. Dengan langkah yang sama seperti pada kemungkinan I maka akan diperoleh pasangan titik-titik inversi A, A' dan B, B'. Berdasarkan definisi inversi suatu titik, maka:

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB' \text{ atau } OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

Sehingga

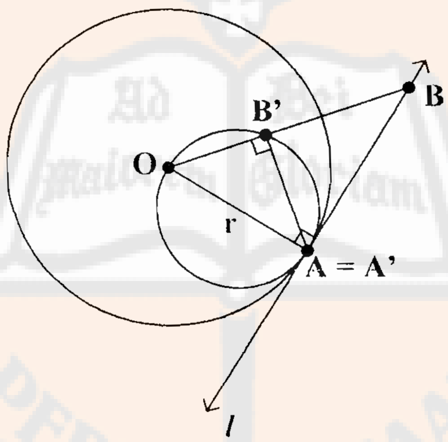
$$OA : OB = OB' : OA'$$

Dan karena $\angle$ AOB $\cong$ $\angle$ B'OA' maka berdasarkan teorema 2.3, $\triangle$ OAB ~ $\triangle$OB'A'. Akibatnya $\triangle$ OB'A' adalah segitiga siku-siku dengan B' sebagai titik sudut siku-sikunya. B' juga merupakan titik sudut keliling pada setengah lingkaran dengan OA' sebagai diameternya. Pada kemungkinan II ini inversi suatu garis ℓ adalah berupa lingkaran yang melalui O dan juga berpotongan dengan $\odot(O, r)$ di titik T dan U.

3. Kemungkinan III

Garis lurus ℓ menyinggung ⊙(O, r) sebagai lingkaran inversi di titik A.

Langkah yang ditempuh sama dengan langkah-langkah sebelumnya, sehingga diperoleh pasangan titik-titik inversi A, A' dan B, B'.



Gambar 3.6 Inversi dari Garis l yang menyinggung ⊙(O,r)

Dengan menggunakan definisi inversi suatu titik terhadap ⊙(O, r) dan juga karena ∠AOB ≅ ∠B'OA', maka berdasarkan teorema kesebangunan (teorema 2.3) dapat dinyatakan bahwa △ OAB ~ △ OB'A'

Pada kemungkinan III ini inversi suatu garis lurus yang menyinggung lingkaran inversi juga berupa sebuah lingkaran yang melalui O dan mempunyai titik singgung A dengan garis singgungnya adalah garis ℓ.

Jadi inversi suatu garis lurus yang tidak melalui pusat lingkaran inversi adalah suatu lingkaran yang melalui pusat inversi.

Kasus kedua untuk inversi suatu garis terhadap $\odot(O, r)$ adalah jika garis lurus ℓ melalui pusat lingkaran inversi. Kasus kedua ini merupakan kejadian khusus dari inversi suatu garis terhadap $\odot(O, r)$. Adapun kejadian tersebut dirumuskan dalam teorema berikut ini:

Teorema 3.3

Inversi suatu garis lurus yang melalui pusat lingkaran inversi adalah garis itu sendiri.

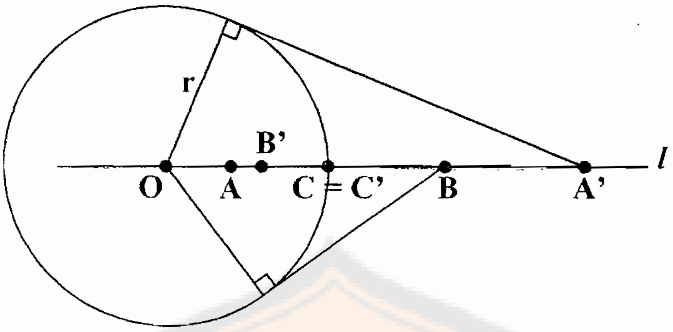
Diketahui

$\odot(O, r)$ adalah lingkaran inversi.

ℓ garis lurus melalui O.

Dibuktikan

Inversi garis ℓ yang melalui O adalah garis ℓ



Gambar 3.7 Inversi dari Garis *l* yang melalui O

Bukti

Misalkan titik A pada ℓ dan berada di dalam ⊙(O, *r*) maka inversi titik A terhadap ⊙(O, *r*) adalah titik A' yang terletak di luar ⊙(O, *r*) pada $\overleftrightarrow{OA}$. Demikian juga jika diambil sebarang titik pada ℓ, misalnya titik B. Jika B berada di luar ⊙(O, *r*) maka inversi titik B adalah B' yang terletak di dalam ⊙(O, *r*) pada $\overleftrightarrow{OA}$, sedangkan jika titik C pada ⊙(O, *r*) maka inversinya adalah titik C' pada ⊙(O, *r*).

Jadi garis ℓ tidak invarian setitik sebab titik A' dan B' merupakan inversi dari titik A dan B yang diketahui, kecuali untuk titik pada ⊙(O, *r*) inversinya adalah titik itu sendiri. Oleh sebab itu titik-titik inversi dan pusat lingkaran inversi adalah segaris sebab hal ini merupakan akibat dari definisi inversi titik terhadap ⊙(O, *r*).

Berdasarkan pembuktian-pembuktian di atas dapat dinyatakan bahwa secara umum bayangan suatu garis lurus oleh transformasi inversi adalah suatu lingkaran. Kecuali untuk garis lurus yang melalui pusat lingkaran inversi bayangannya berupa garis lurus itu sendiri.

C. Transformasi Inversi suatu Lingkaran terhadap Lingkaran

Pada subbab sebelumnya telah dipelajari pengertian inversi suatu titik dan garis terhadap lingkaran. Di dalam subbab ini akan dipelajari pengertian inversi suatu lingkaran terhadap lingkaran. Adapun kemungkinan yang bisa terjadi adalah, pertama inversi suatu lingkaran yang melalui pusat lingkaran inversi dan yang kedua adalah inversi suatu lingkaran yang tidak melalui pusat lingkaran inversi. Untuk lebih jelasnya kedua kejadian tersebut akan dirumuskan di dalam teorema-torema berikut ini.

Teorema 3.4

Inversi suatu lingkaran yang melalui pusat lingkaran inversi adalah suatu garis lurus.

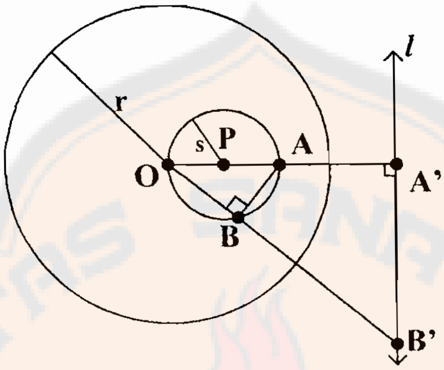
Diketahui

$\odot(O, r)$ adalah lingkaran inversi.

$\odot(P, s)$ adalah lingkaran yang melalui O dengan diameter $\overline{OA}$.

Dibuktikan

Inversi ⊙(P, s) yang melalui O adalah suatu garis



Gambar 3.8 Inversi dari ⊙(P,s) yang melalui O

Bukti

Untuk membuktikan teorema ini, langkah yang ditempuh adalah merupakan kebalikan dari langkah yang digunakan dalam teorema 3.2. Diambil titik A, yaitu titik pada ⊙(P, s) dengan $\overline{OA}$ merupakan diameter dari ⊙(P, s). Diambil sebarang titik B pada ⊙(P, s) yang bukan titik A, maka A, A' dan B, B' adalah pasangan titik-titik inversi terhadap ⊙(O, r). Titik A dan titik B dihubungkan dengan sebuah garis, maka titik B merupakan titik sudut dari sudut keliling pada setengah lingkaran ⊙(P, s) sehingga ini berarti $m\angle B = 90$. Sedangkan berdasar definisi titik-titik inversi, maka:

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$$

sehingga

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

atau

$$OA : OB = OB' : OA'$$

Dan karena $\angle BOA \cong \angle A'OB'$, maka perbandingan di atas menyatakan bahwa $\triangle\ OBA \sim \triangle\ OA'B'$. Dan akibatnya $\triangle\ OA'B'$ adalah segitiga siku-siku dengan A' sebagai titik sudut siku-sikunya, sehingga tampak bahwa titik-titik inversi, yaitu titik A' dan B' dihubungkan oleh sebuah garis yang tegak lurus dengan $\overline{OA'}$.

Jadi terbukti bahwa inversi dari ⊙(P, s) terhadap ⊙(O, r) adalah suatu garis lurus yang melalui titik A' dan B'.

Bagaimana inversi suatu lingkaran yang tidak melalui pusat lingkaran inversi? Untuk mencari inversi suatu lingkaran ⊙(P, s) yang tidak melalui O dari ⊙(O, r) sebagai lingkaran inversi, secara lebih jelas akan dibahas di dalam teorema berikut.

Teorema 3.5

Inversi suatu lingkaran yang tidak melalui pusat lingkaran inversi adalah suatu lingkaran yang tidak melalui pusat lingkaran inversi.

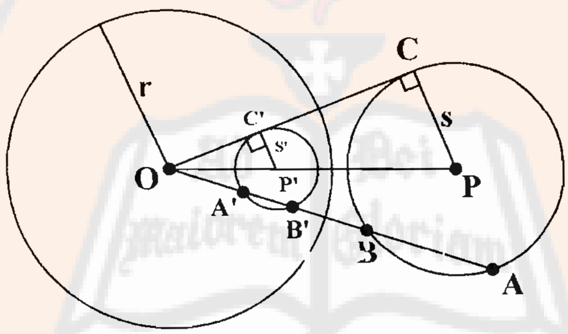
Diketahui

⊙(O, r) adalah lingkaran inversi.

⊙(P, s) adalah lingkaran yang tidak melalui O.

Dibuktikan

Inversi ⊙(P, s) yang tidak melalui O adalah suatu lingkaran.



Gambar 3.9 Inversi dari ⊙(P,s)
yang tidak melalui O

Bukti

Misalkan $\overleftrightarrow{OB}$ adalah sebarang garis yang memotong ⊙(P, s) di dua titik, yaitu titik A dan titik B. Jika B' dan A' adalah titik hasil inversi suatu titik B dan A, maka berdasarkan definisi titik-titik inversi berlaku:

$$OB \cdot OB' = r^2 = OA \cdot OA'$$

Misalkan $\overleftrightarrow{OC}$ adalah garis singgung pada ⊙(P, s) dengan C sebagai titik singgungnya, maka berdasarkan teorema 2.10 dinyatakan bahwa :

$$OB \cdot OA = (OC)^2 = k \text{ .... (i)}$$

Sehingga,

$$(OB \cdot OB') : (OB \cdot OA) = (OA \cdot OA') : (OB \cdot OA) = r^2 : (OB \cdot OA)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$OB' : OA = OA' : OB = r^2 : k \text{ .... (ii)}$$

Jika dilatasi O(r^2 / k) mentransformasikan ⊙(P, s) dengan jari-jari s menjadi lingkaran lain dengan jari-jari s' yang sejajar dengan s, maka dari (ii) dan (i) diperoleh bahwa

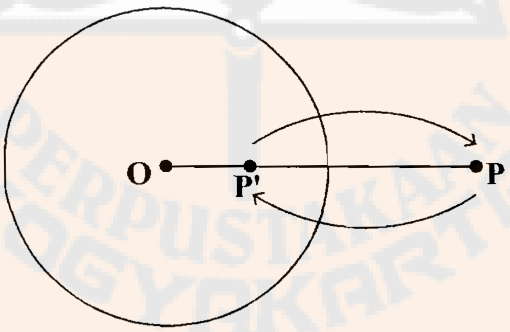
$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$$

Jadi A' adalah inversi dari titik A dan ⊙(P', s') adalah inversi dari ⊙(P, s). Jadi terbukti bahwa inversi suatu lingkaran yang tidak melalui pusat lingkaran inversi adalah suatu lingkaran yang juga tidak melalui pusat lingkaran inversi.

D. Sifat Invarian dan Sifat Tambahan dari Transformasi Inversi

Dalam membahas transformasi penting untuk mempelajari apa saja yang invarian terhadap transformasi tersebut. Sifat invarian dari suatu transformasi ialah sifat yang berlaku bagi suatu unsur di bidang tersebut akan berlaku juga bagi unsur hasil transformasi tersebut. Demikian juga dalam transformasi inversi terdapat beberapa sifat invarian dan beberapa sifat tambahan.

Salah satu sifat yang penting dari transformasi inversi adalah involusi. P dan P' adalah titik-titik inversi terhadap $\odot(O, r)$. Hasil transformasi inversi dari titik P adalah titik P'. Jika transformasi inversi yang sama diterapkan lagi, maka transformasi dari titik P' adalah titik P. Hal ini berarti bahwa hasil dari inversi yang diikuti oleh inversi yang sama adalah transformasi identitas. Transformasi inversi disebut sebagai transformasi berperiode dua, sebab jika dua transformasi yang sama diterapkan hasil transformasinya adalah trasformasi identitas. Transformasi berperiode dua inilah yang disebut suatu involusi.

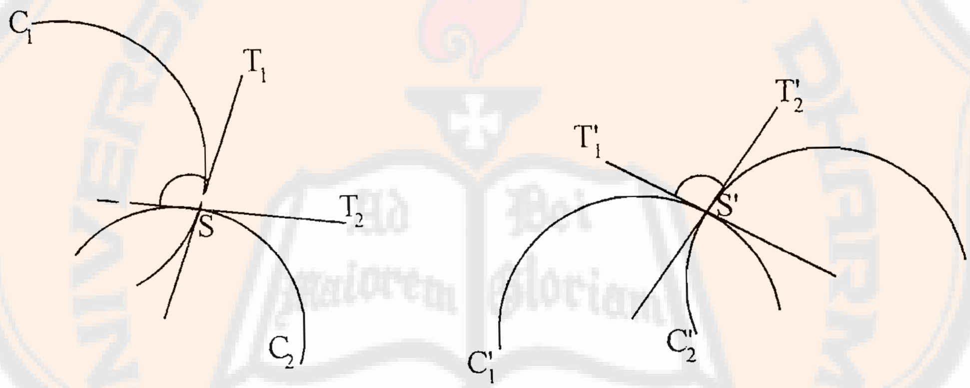


Gambar 3.10 Transformasi
Periode Dua

Teorema 3.1 telah dibuktikan bahwa suatu lingkaran inversi adalah invarian setitik oleh transformasi inversi. Teorema 3.3 juga menyatakan bahwa suatu garis yang melalui pusat inversi adalah invarian tetapi tidak invarian setitik oleh transformasi inversi. Di dalam subbab ini akan dicoba untuk menemukan sifat invarian lain yang juga berlaku dalam transformasi inversi, yang dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

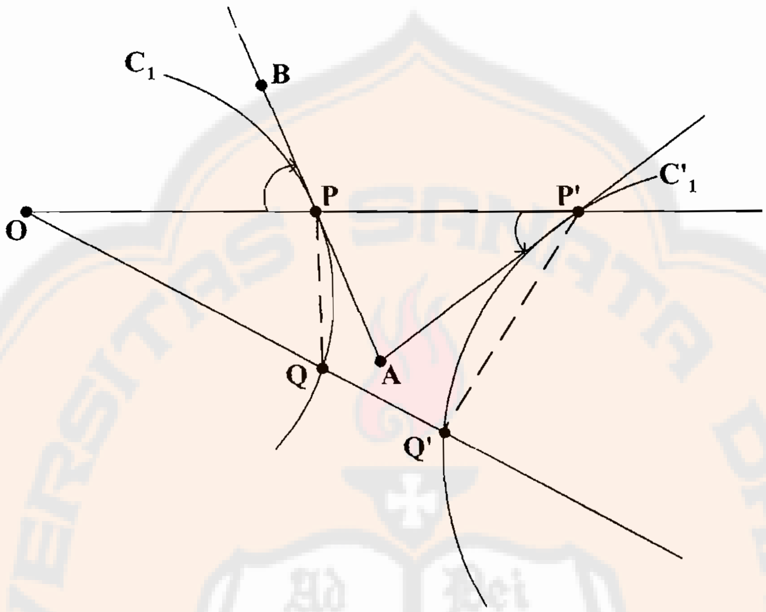
Teorema 3.6

Besar sudut antara dua buah kurva yang saling berpotongan adalah invarian oleh transformasi inversi.



Gambar 3.11 Ilustrasi Teorema 3.6

Teorema tersebut menyatakan bahwa sudut antara dua buah kurva C_1 dan C_2 adalah sudut yang terbentuk diantara garis singgung-garis singgung yang melalui perpotongan kedua kurva. Sudut tersebut dinyatakan oleh salah satu dari dua sudut yang saling berpelurus. Hasil transformasi inversi kurva C_1 dan C_2 yang saling berpotongan adalah kurva C'_1 dan C'_2 yang juga saling berpotongan. Sudut antara garis singgung-garis singgung yang melalui titik perpotongan kurva C_1 dan C_2 jika diinversikan hasilnya adalah sudut yang besarnya sama dengan sudut semula.



Gambar 3.12 Ilustrasi Bukti Teorema 3.6

Bukti

Untuk membuktikan teorema di atas, akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa sudut yang terbentuk oleh kurva dan garis yang melalui pusat inversi, yaitu garis $\overline{OP}$, adalah kongruen dengan sudut yang terbentuk oleh kurva hasil inversi dan garis yang melalui pusat inversi. Dari gambar 3.12 andaikan kurva PQ ditransformasikan terhadap ⊙(O, r) dan P'Q' adalah kurva hasil transformasi inversinya. Titik P, P' dan Q, Q' adalah pasangan titik-titik inversi. Keempat titik P, P', Q', dan Q terletak pada sebuah lingkaran, sehingga dari segiempat PP'Q'Q diperoleh bahwa ∠P'PQ pelurus dari ∠P'Q'Q dan

∠PQQ' adalah pelurus dari ∠PP'Q'. Sehingga diperoleh bahwa ∠OPQ ≅ ∠P'Q'O.

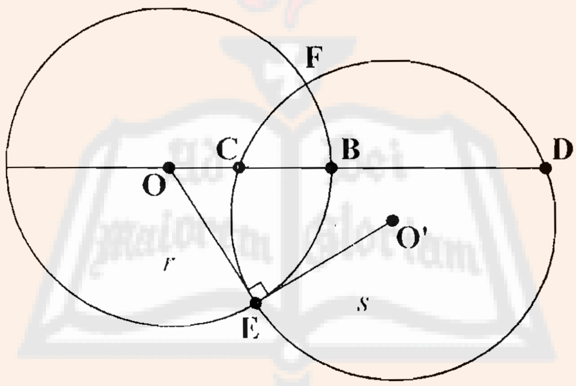
Jika Q mendekati P melintasi kurva semula maka $\overrightarrow{OQ}$ semakin mendekati $\overrightarrow{OP}$ dan Q' juga mendekati P' melintasi kurva hasil inversi sehingga $\overrightarrow{OQ'}$ mendekati $\overrightarrow{OP'}$. Demikian juga $\overleftrightarrow{PQ}$ dan $\overleftrightarrow{P'Q'}$ mendekati $\overleftrightarrow{PA}$ dan $\overleftrightarrow{P'A}$. Akibatnya adalah sudut yang terbentuk dari $\overrightarrow{OP}$ ke kurva semula adalah ∠OPA yang merupakan pelurus dari ∠OPB. ∠OP'A adalah sudut yang terbentuk dari $\overrightarrow{OP}$ ke kurva hasil inversi. Sehingga ∠OPB ≅ ∠OP'A. Jadi sudut yang terbentuk oleh kurva dan garis yang melalui pusat inversi, yaitu $\overrightarrow{OP}$ akan kongruen dengan sudut yang dibentuk oleh kurva hasil inversi dengan garis $\overrightarrow{OP'}$. Sehingga dapat dibuktikan bahwa besar sudut antara dua kurva yang saling berpotongan adalah invarian oleh transformasi inversi.

Terbukti bahwa besar sudut invarian (bertahan) oleh transformasi inversi, tetapi arah sudut tidak dipertahankan. Dari gambar di atas, sudut dari $\overrightarrow{OP}$ ke $\overrightarrow{PB}$ diukur searah jarum jam, sedangkan sudut dari $\overrightarrow{OP'}$ ke $\overrightarrow{P'A}$ diukur berlawanan dengan arah jarum jam. Seperti halnya refleksi, inversi juga merupakan contoh dari transformasi berlawanan.

Berdasarkan teorema 3.6 di atas, misalkan sudut perpotongan dari dua buah kurva adalah sudut siku-siku, maka sudut hasil inversinya juga merupakan sudut siku-siku. Pada bab II telah dibahas lingkaran berpotongan tegak lurus, yaitu lingkaran yang saling berpotongan pada sudut siku-siku. Lingkaran berpotongan tegak lurus sangat menarik untuk dibicarakan dalam pembahasan transformasi inversi, seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.7

Sebuah lingkaran yang berpotongan tegak lurus dengan lingkaran inversi adalah himpunan titik-titik yang invarian tetapi bukan invarian setitik oleh transformasi inversi.



Gambar 3.13 Ilustrasi Bukti Teorema 3.7

Diketahui

⊙(O, r) lingkaran inversi $\perp$ ⊙(O', s).

Dibuktikan

⊙(O', s) invarian tetapi tidak invarian setitik oleh transformasi inversi terhadap ⊙(O, r)

Bukti

Akan dibuktikan bahwa ⊙(O', s) adalah himpunan titik-titik invarian tetapi bukan invarian setitik oleh transformasi inversi. Sebuah garis melalui O dan memotong ⊙(O', s) di titik C dan titik D. Jika titik E dan titik F adalah titik potong ⊙(O, r) dan ⊙(O', s), maka berdasarkan teorema 2.10 diperoleh bahwa $OC \cdot OD = (OE^2)$. Karena OE juga merupakan jari-jari ⊙(O, r), maka $OC \cdot OD = r^2$. Ini berarti bahwa titik C dan titik D merupakan pasangan titik-titik inversi sebab memenuhi definisi titik-titik inversi.

Selanjutnya akan dipenuhi juga bahwa setiap titik pada $\overset{\frown}{FDE}$ jika ditransformasikan terhadap ⊙(O, r) hasil inversinya adalah titik-titik pada $\overset{\frown}{FCE}$. Titik –titik E dan F adalah titik-titik invarian oleh transformasi inversi dan merupakan titik ujung $\overset{\frown}{FCE}$.

Jadi terbukti bahwa ⊙(O', s) adalah invarian tetapi tidak invarian setitik oleh transformasi inversi terhadap ⊙(O, r).

Lingkaran berpotongan tegak lurus menarik untuk dibahas, ini dapat juga dilihat dari teorema di bawah ini.

Teorema 3.8

Jika dua buah lingkaran masing-masing berpotongan tegak lurus dengan lingkaran inversi, dan kedua lingkaran tersebut saling berpotongan, maka titik perpotongannya adalah titik-titik inversi.

Diketahui

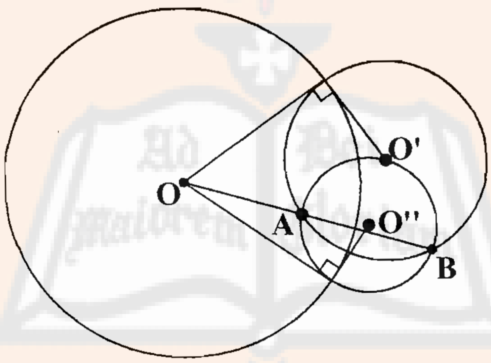
⊙(O, r) adalah lingkaran inversi

⊙(O', s) dan ⊙(O", t) berpotongan di titik A dan titik B

Masing-masing ⊙(O', s) dengan ⊙(O", t) berpotongan tegak lurus pada ⊙(O,r).

Dibuktikan

Titik A dan B adalah titik-titik inversi



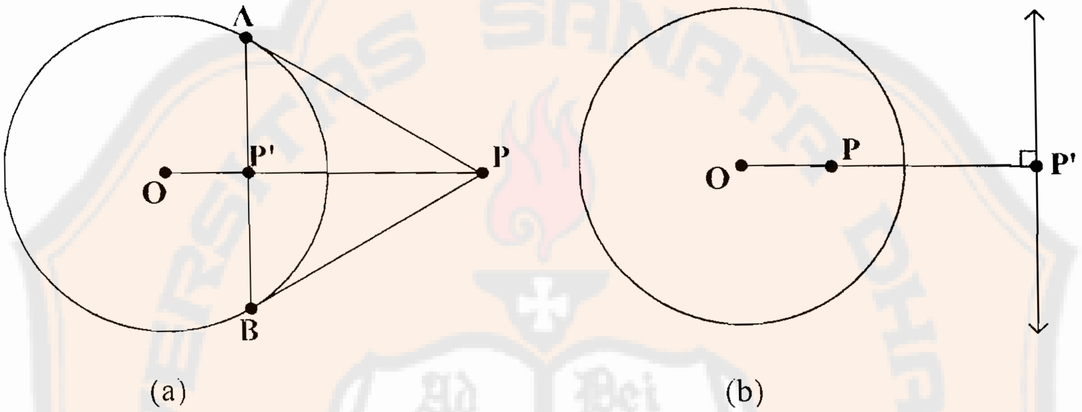
Gambar 3.14 Ilustrasi Bukti
Teorema 3.8

Bukti

Akan dibuktikan bahwa titik A dan B merupakan pasangan titik-titik inversi. Titik O terletak segaris dengan titik A dan titik B, sebab garis singgung dari O pada ⊙(O', s) dan garis singgung dari titik O pada ⊙(O",t) sama panjang. Berdasarkan teorema 3.7 dapat dibuktikan bahwa titik A dan titik B adalah titik-titik inversi.

Definisi 3.2

Garis kutub dari sebuah titik terhadap ⊙(O, r) adalah garis yang melalui inversi dari titik tersebut dan tegak lurus pada garis yang menghubungkan titik yang diketahui dengan pusat inversi. Titik yang diketahui disebut kutub dari suatu garis.



Gambar 3.15 Ilustrasi Definisi 3.2

Dari Gambar 3.15 (a) tampak $\overleftrightarrow{AB}$ adalah garis kutub dari titik P, dan titik P tersebut adalah kutub dari $\overleftrightarrow{AB}$. Sedangkan dari Gambar 3.15 (b) di atas, P dan P' adalah pasangan titik-titik inversi. Jika ditarik sebuah garis yang melalui P' dan tegak lurus pada $\overleftrightarrow{OP}$, maka garis tersebut adalah garis kutub dari P dan P adalah kutub dari garis tersebut.

Teorema 3.9

Jika titik kedua terletak pada garis kutub dari titik pertama terhadap lingkaran inversi, maka titik pertama terletak pada garis kutub dari titik kedua terhadap lingkaran inversi yang sama.

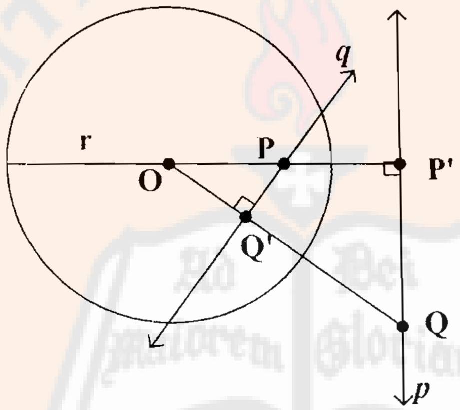
Diketahui

⊙(O, r) lingkaran inversi.

Q terletak pada garis kutub dari P

Dibuktikan

Titik P terletak pada garis kutub dari Q terhadap lingkaran inversi yang sama



Gambar 3.16 Ilustrasi Bukti Teorema 3.9

Bukti

P,P' dan Q,Q' adalah pasangan titik-titik inversi terhadap ⊙(O, r). Dari Gambar 3.16 di atas $\overleftrightarrow{P'Q}$ adalah garis kutub dari P, ini berarti $\overleftrightarrow{P'Q} \perp \overleftrightarrow{OP}$. Jika Q' adalah inversi dari Q, maka akan diperlihatkan bahwa $\overleftrightarrow{Q'P} \perp \overleftrightarrow{OQ}$. Pasangan titik-titik inversi P, P' dan Q, Q' terletak pada suatu lingkaran, dan karena ∠PP'Q adalah sudut siku-siku maka sudut dihadapannya yaitu ∠QQ'P juga merupakan sudut siku-siku, sehingga titik P merupakan titik yang terletak pada garis $\overleftrightarrow{PQ'}$. Jadi terbukti bahwa P pada garis kutub dari Q.

BAB IV

PENERAPAN

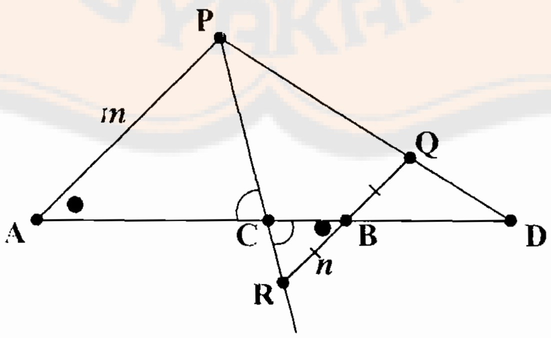
A. Lingkaran Apollonius

Lingkaran Apollonius ditemukan oleh seorang matematikawan Yunani, yang dikenal dengan Apollonius dari Perga. Apollonius (262-190 SM) sering disebut sebagai seorang ahli geometri besar, salah satu hasil karyanya adalah irisan kerucut yang ditulis dalam 8 buku dan 400 dalil. Apollonius juga yang memberi nama hasil irisan kerucut dengan istilah elips, parabola dan hiperbola.

Di dalam bab ini akan dipelajari tentang tempat kedudukan yang dikenal dengan Lingkaran Apollonius. Sebelum membahas lingkaran Apollonius, terlebih dahulu akan dipecahkan suatu permasalahan yang membantu kita dalam mempelajari lingkaran Apollonius.

Masalah 1

Bagilah segmen garis di dalam dan di luar sesuai dengan rasio yang diberikan.



Gambar 4.1 Ilustrasi Masalah 1

Penyelesaian

Diketahui bahwa segmen garis yang diberikan $\overline{AB}$, dan rasio yang diberikan adalah $m : n$. Melalui titik A digambar sebuah garis AP yang membentuk sudut tertentu terhadap segmen garis $\overline{AB}$. AP = m, melalui titik B digambar sebuah garis yang sejajar dengan AP dan besar BR = BQ = n. Garis AB akan memotong garis PR dan PQ di titik yang dicari, yaitu titik C dan titik D.

$$\triangle ACP \sim \triangle BCR \text{ dan } \triangle ADP \sim \triangle BDQ,$$

sehingga diperoleh

$$AP : BR = PC : CR = AC : CB = m : n$$

dan

$$AP : BQ = -(PD : DQ) = -(AD : DB) = m : n$$

Jadi $AC : CB = -(AD : DB) = m : n$

C dan D dipisahkan harmonis oleh A dan B.

Teorema di bawah ini juga akan sangat membantu kita dalam mempelajari lingkaran Apollonius.

Teorema 4.1

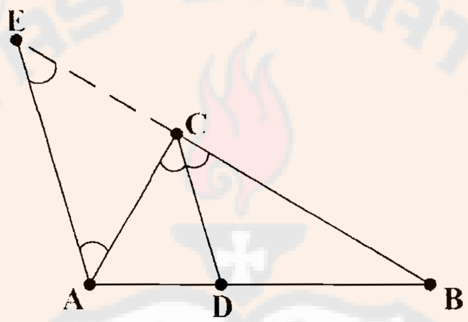
Membagi sama besar sebuh sudut dalam dari suatu segitiga akan membagi sisi dihadapannya menjadi dua segmen garis yang sebanding terhadap sisi-sisi yang membentuk sudut tersebut.

Diketahui

$\triangle$ ABC

Dibuktikan

$AD : DB = AC : CB$



Gambar 4.2 Ilustrasi Bukti Teorema 4.1

Bukti

Misalkan $\overline{CD}$ adalah garis bagi dalam sudut C dari $\triangle$ ABC. Digambar $\overline{AE}$ // $\overline{CD}$, dengan E pada $\overleftrightarrow{CB}$. $\angle EAC \cong \angle ACD \cong \angle AEC$ sehingga $\triangle EAC$ adalah segitiga sama kaki dan $\overline{EC} \cong \overline{AC}$. Dari gambar 4.2, karena $\overline{AE}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ maka akan dipenuhi $AD : EC = DB : CB$ dan $AD : AC = DB : CB$. Sehingga $AD : DB = AC : CB$.

Teorema 4.2

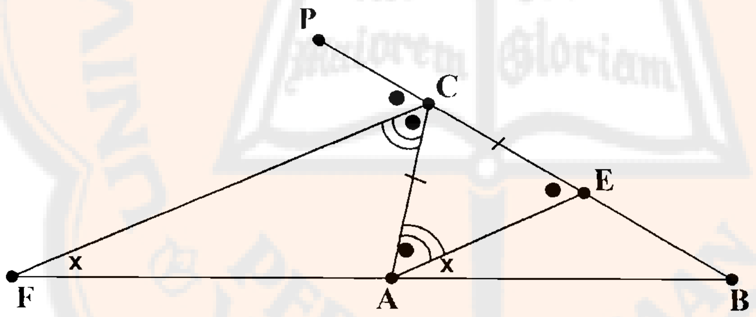
Membagi sama besar sebuah sudut luar dari suatu segitiga (kecuali segitiga sama kaki) akan membagi sisi-sisi dihadapannya menjadi dua segmen garis yang sebanding dengan sisi-sisi segitiga yang membentuk sudut tersebut.

Diketahui

$\triangle$ ABC

Dibuktikan

FB : FA = AC : CB



Gambar 4.3 Ilustrasi Bukti Teorema 4.2

Bukti

Misalkan $\overline{CF}$ adalah garis bagi $\angle$ACP dan berpotongan dengan $\overrightarrow{BA}$ di titik F.

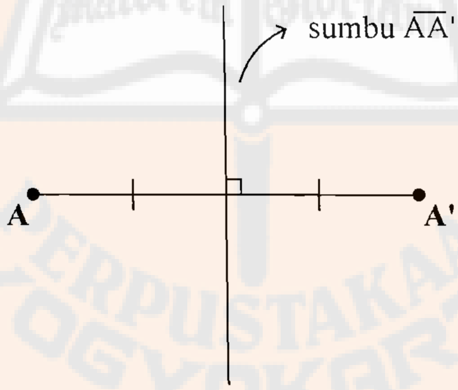
Digambar $\overline{AE}$ // $\overline{CF}$, dengan A pada $\overleftrightarrow{BF}$ sehingga $\angle$BAE $\cong$ $\angle$BFC. Karena

$\overline{CF} \parallel \overline{EA}$, maka $\angle FCA \cong \angle CAE$ dan $\angle PCF \cong \angle CEA$. Dan diketahui $\angle PCF \cong \angle FCA$, maka $\angle CAE \cong \angle PCF$ sehingga diperoleh $\angle CAE \cong \angle CEA$. Jadi $\overline{CA} \cong \overline{CE}$. Maka pada Δ BCF akan dipenuhi $FB : FA = AC : CB$. Jadi $FB : FA = AC : CB$.

Garis bagi dalam dan garis bagi luar suatu sudut akan saling tegak lurus.

Tempat kedudukan adalah himpunan titik-titik yang memenuhi suatu tempat kedudukan, oleh karena itu selanjutnya dalam pembahasan ini digunakan istilah himpunan titik.

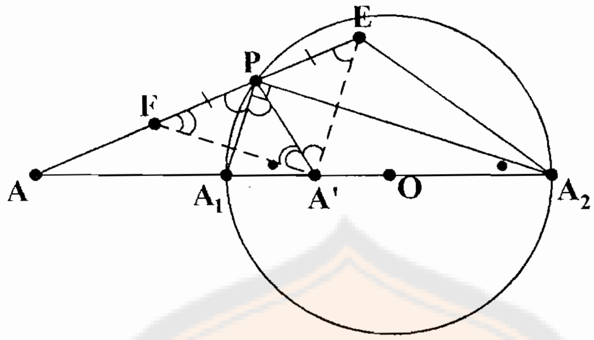
Himpunan titik-titik yang berjarak sama dari A dan A' adalah sumbu $\overline{AA'}$, yaitu garis yang melalui titik tengah $\overline{AA'}$ dan tegak lurus pada $\overline{AA'}$.



Gambar 4.4 Sumbu $\overline{AA'}$

Teorema 4.3

Himpunan semua titik dengan perbandingan jarak tertentu terhadap dua titik yang diketahui adalah sebuah lingkaran yang disebut Lingkaran Apollonius.



Gambar 4.5 Lingkaran Apollonius

Diketahui

Dua buah titik A dan A'.

Dibuktikan

Himpunan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap A dan A' sama dengan 1 : μ adalah sebuah lingkaran.

Bukti

Jika μ 1, maka himpunan titik yang berjarak sama dari A dan A' adalah sumbu $\overline{AA'}$. Sumbu $\overline{AA'}$ tersebut akan merefleksikan titik A ke titik A'. Bagaimana jika $\mu \neq 1$? Dimisalkan P adalah sebarang titik sehingga akan dipenuhi A'P = μ AP. Garis bagi dalam dan garis bagi luar $\angle$APA' akan berpotongan dengan AA' di titik A_1 dan A_2 (seperti pada gambar 4.5). Misal E dan F pada $\overleftrightarrow{AP}$ sedemikian sehingga $\overline{A'E}$ // $\overline{A_1P}$ dan $\overline{A'F}$ // $\overline{A_2P}$, dengan $\overline{A_2P} \perp \overline{A_1P}$.

$$FP = PA' = PE,$$

maka

$$AP : PA' = 1 : \mu = AA_1 : A_1A' = (AA_2 : A_2A')$$

$$AA_1 : A_1A' = AP : PE = AP : PA'$$

$$(AA_2 : A_2A') = (AP : PF) = AP : PA'$$

Jadi titik A_1 dan A_2 membagi segmen AA' di dalam dan di luar dengan perbandingan $1 : \mu$, dengan letaknya tidak tergantung dari posisi titik P. Karena $\angle A_1PA_2$ adalah suatu sudut siku-siku, maka P akan terletak pada lingkaran dengan diameter A_1A_2.

Sebaliknya jika A_1 dan A_2 diperoleh dari membagi segmen garis AA' di dalam dan di luar dengan perbandingan $1 : \mu$, dan P sebagai titik pada lingkaran dengan diameter A_1A_2, maka

$$AP : PE = AA_1 : A_1A'$$

$$(AP : PF) = (AA_2 : A_2A')$$

Di atas telah diketahui bahwa $AA_1 : A_1A' = (AA_2 : A_2A') = 1 : \mu$ sehingga PF = PE dan P merupakan titik tengah FE, dan P merupakan titik tengah sisi di depan sudut siku-siku dari Δ EA'F. Oleh karena itu PA' = PE dan $AP : PA' = AP : PE = 1 : \mu$

Lingkaran luar ΔA_1A_2P adalah lingkaran Apollonius yang menginversikan titik A ke titik A'. Jika O merupakan titik pusat lingkaran luar

$\triangle A_1A_2P$ dan k adalah jari-jarinya, jarak $AO = a$ dan $A'O = a'$, maka akan dipenuhi:

$$AA_1 : A_1A' = (AA_2 : A_2A')$$

$$(AO - OA_1) : (A_1O - OA') = (AO + OA_2) : (A_2O + OA')$$

$$(a - k) : (k - a') = (a + k) : (k + a')$$

$$(a - k)(k + a') = (k - a')(a + k)$$

$$aa' = k^2$$

atau

$$AO \cdot A'O = k^2.$$

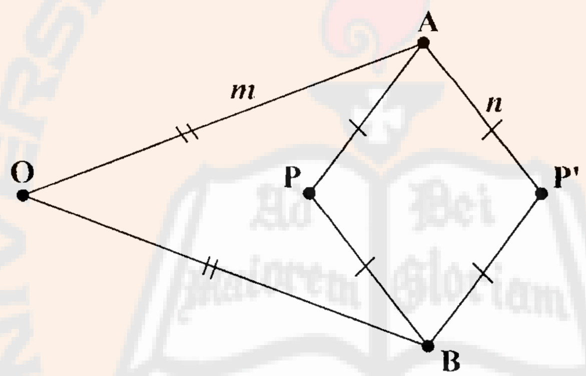
Jadi lingkaran Apollonius yaitu $\odot(O, k)$ menginversikan A ke A'.

B. Sel Peaucellier

Beberapa bangun geometri dipergunakan dalam menyusun peralatan mekanik, seperti alat berikut ini yang selalu terdiri atas batang-batang lurus yang secara bebas saling dihubungkan. Alat tersebut dikenal dengan nama Sel Peaucellier.

A. Peaucellier seorang kapten tentara Perancis, pada tahun 1873 menemukan alat yang dikenal dengan nama Sel Peaucellier. Alat tersebut bertujuan untuk menggambar inversi dari beberapa himpunan titik-titik yang diketahui. Ini berarti bahwa suatu garis lurus dapat digambar tanpa menggunakan penggaris.

Sel ini terdiri atas empat batang lurus sama panjang, dengan panjang n, dihubungkan (disambungkan) membentuk belah ketupat APBP' dan dua batang lurus sama panjang dengan panjang m yang menghubungkan dua sudut belah ketupat yang saling berhadapan, A dan B terhadap O seperti pada gambar 4.6.



Gambar 4.6 Sel Peaucellier

Jika ditarik garis melalui titik-titik O, P, P' yang membagi dua tegak lurus $\overline{AB}$, maka :

$$
\begin{aligned}
OP \cdot OP' &= (OC - PC)(OC + CP') \\
&= (OC)^2 - (PC)^2 \\
&= (OA)^2 - (AC)^2 - [(PA)^2 - (AC)^2] \\
&= (OA)^2 - (PA)^2 - (AC)^2 + (AC)^2
\end{aligned}
$$

$$= (OA)^2 - (PA)^2$$

$$= m^2 - n^2$$

Jadi $OP \cdot OP' = k^2$

Karena m dan n konstan, hasil kali $OP \cdot OP'$ adalah konstan. Jadi P dan P' adalah titik-titik inversi terhadap O sebagai pusat inversi, dengan salah satu titik menggambarkan suatu kurva khusus, maka titik yang lain akan menggambarkan inversi kurva terhadap titik O sebagai pusat inversi.

Jika P bergerak pada suatu lingkaran yang melalui O, maka inversi dari himpunan titik-titik akan menggambarkan suatu garis lurus dan sebaliknya.

Sel Peaucellier ini memberikan penyelesaian secara tepat terhadap masalah mekanik, yang akan mengubah gerak linear menjadi gerak kurvilinear atau sebaliknya.

C. Penerapan Lain dari Transformasi Inversi

Dalam pembahasan ini akan dibicarakan penerapan transformasi inversi yang lain dengan penerapan yang sudah dibahas sebelumnya. Penerapan ini dikatakan lain sebab akan dicari terorema-teorema baru yang diperoleh dengan cara menginversikan teorema-teorema yang sudah ada sebelumnya. Lebih tepatnya, bentuk – bentuk dari teorema yang sudah ada sebelumnya di dalam geometri Euclides ketika diinversikan akan membentuk sebuah teorema baru dengan masih memperhatikan sifat-sifat yang berkorespondensi. Pembuktian teorema baru ini tidak akan dimulai dari awal, hal ini benar sebab sudah dimiliki bukti dari teorema asli dan sifat-sifat transformasi inversi yang sudah diterima oleh umum.

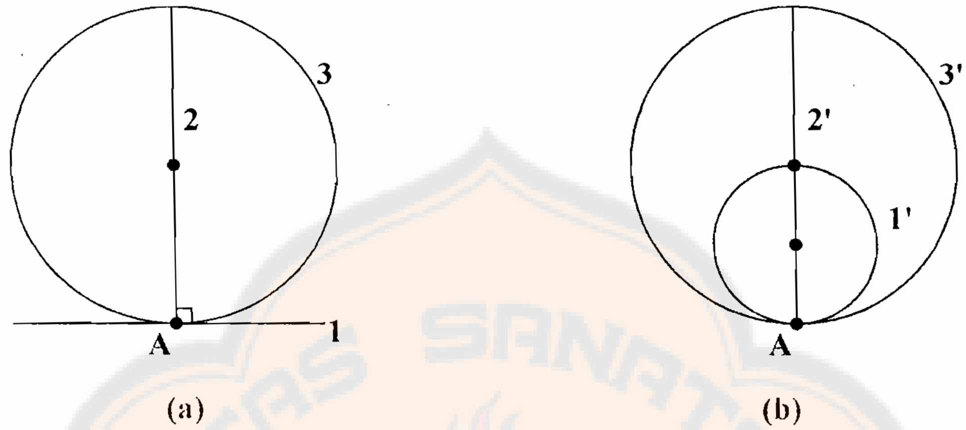
Masalah menciptakan teorema baru ini merupakan hal yang sangat menarik sebab merupakan suatu kebanggaan tersendiri membantu mengembangkan struktur geometri. Adapun contoh-contoh penerapan ini dapat dilihat di bawah ini.

Contoh 4. 1

Jika sebuah garis berpotongan tegak lurus pada jari-jari lingkaran di titik ujungnya, maka garis tersebut merupakan garis singgung pada lingkaran.

Pernyataan tersebut merupakan salah satu teorema dasar geometri yang sudah kita kenal sebelumnya. Himpunan titik-titik dalam teorema tersebut dapat kita nomori untuk memudahkan identifikasi dengan himpunan titik-titik seperti pada gambar 4.7 (a), sebagai berikut:

① ②
Jika sebuah garis berpotongan tegak lurus pada jari-jari lingkaran di titik
③
ujungnya, maka garis tersebut merupakan garis singgung pada lingkaran.



Gambar 4.7 Ilustrasi contoh 4.1

Selanjutnya bentuk dari teorema tersebut dapat kita inversikan. Di dalam contoh ini dianggap lingkaran yang diberikan merupakan lingkaran inversi, sehingga hasil inversinya diperoleh seperti pada gambar 4.7 (b). Dengan himpunan titik-titik diberi nomor dengan angka dasar yang sama untuk menunjukkan himpunan-himpunan yang berkorespondensi.

Garis 2 (garis yang melalui pusat inversi) adalah invarian. Lingkaran 3 (lingkaran inversi) adalah invarian oleh transformasi inversi. Garis 1 (garis yang tidak melalui pusat inversi) oleh transformasi terhadap lingkaran 3 hasilnya adalah lingkaran yang melalui pusat inversi. Ketiga himpunan titik-titik tersebut masih mempunyai titik perpotongan yang sama, dan besar sudut perpotongan yang sama. Kesimpulan dari teorema baru adalah 1' dan 3' adalah bersinggungan. Teorema baru tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 4.4

Lingkaran yang garis tengahnya merupakan jari-jari dari lingkaran kedua adalah bersinggungan di dalam dengan lingkaran kedua.

Diketahui

Lingkaran 3 merupakan lingkaran inversi

Dibuktikan

Lingkaran 1' dan 3' bersinggungan dalam

Bukti

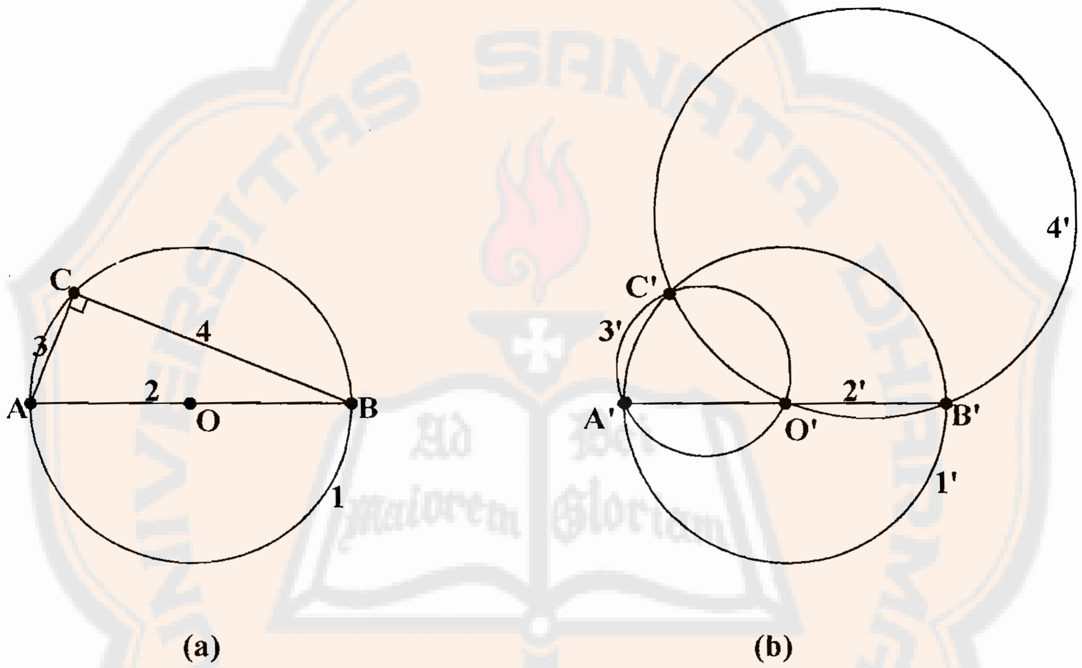
Jika lingkaran 1' garis tengahnya adalah jari-jari untuk lingkaran 3', akan dibuktikan bahwa 1' dan 3' bersinggungan di dalam. Inversi garis 1 adalah lingkaran 1'. Karena garis 1 $\perp$ 2, berdasarkan teorema 3.6 lingkaran 1' $\perp$ 2'. Jadi terbukti bahwa 1' dan 3' bersinggungan di dalam.

Dalam mencari teorema baru, sangat penting untuk menyadari bahwa bentuk baru seperti gambar 4.7(b) hanya berkaitan dengan hubungan antara himpunan titik-titik hasil inversi dan tidak berkaitan dengan hubungan antara bentuk asli dan bentuk baru, atau mengenai daerah dan faktor-faktor lainnya. Jadi yang penting hanyalah mengenai hubungan dalam bentuk baru yang membuat suatu teorema baru mungkin untuk dinyatakan.

Contoh 4. 2

Contoh lainnya diperlihatkan dalam gambar 4.8(a), yang merupakan penjelasan pernyataan teorema bahwa:

Sudut keliling pada setengan lingkaran adalah sudut siku-siku.



Gambar 4.8 Ilustrasi contoh 4.2

Seperti halnya pada contoh 1, langkah yang dilakukan adalah sama yaitu memberi nomor untuk setiap himpunan titik-titik seperti pada gambar 4.8(a). Di dalam contoh ini lingkaran yang diberikan dianggap sebagai lingkaran inversi. Gambar 4.8(a) tersebut selanjutnya diinversikan terhadap lingkaran 1, sehingga diperoleh hasil inversinya seperti pada gambar 4.8(b). Lingkaran 1 adalah invarian. $\overleftrightarrow{AC}$ diinversikan menjadi sebuah lingkaran 3', $\overleftrightarrow{AB}$ adalah invarian, sedangkan inversi $\overleftrightarrow{BC}$ adalah lingkaran 4'. Kesimpulan teorema baru adalah:

Teorema 4.5

Dua lingkaran yang berpotongan sedemikian sehingga tali busur persekutuannya sama dengan jari-jari lingkaran ketiga yang dipotongnya dan garis penghubung titik-titik potongnya dengan lingkaran ketiga sama dengan garis tengahnya, akan berpotongan tegak lurus.

Diketahui

Lingkaran 1 adalah lingkaran inversi

Dibuktikan

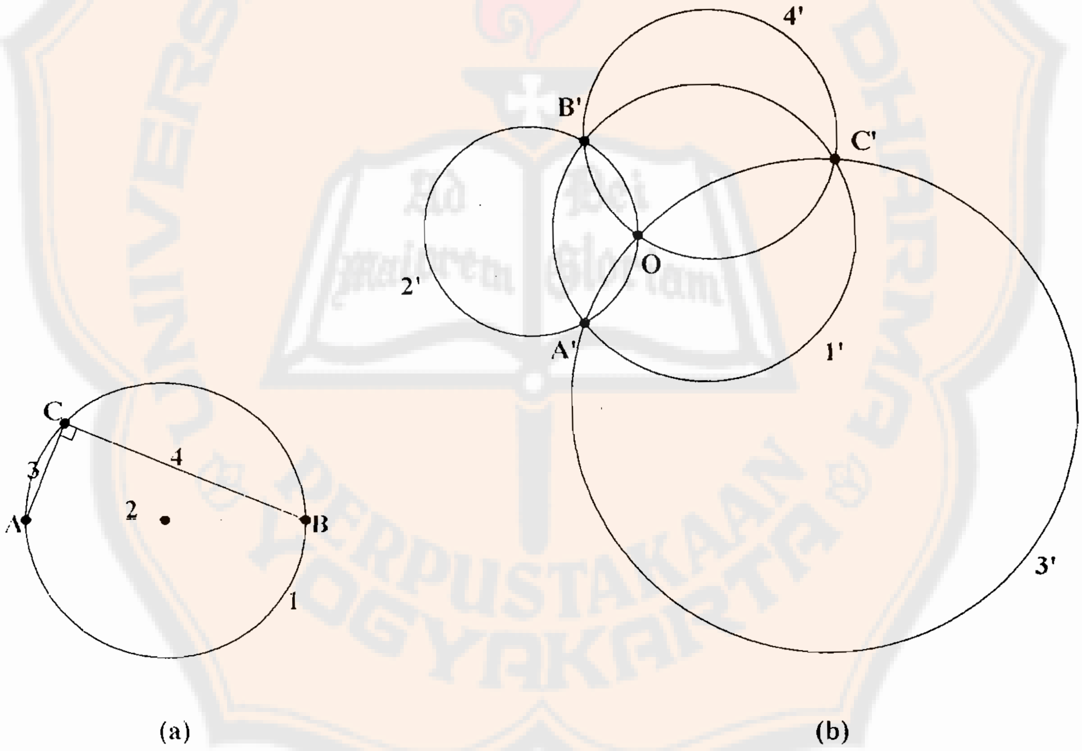
Lingkaran 3' dan 4' berpotongan tegak lurus

Bukti

Titik A, titik B dan titik C adalah invarian. Titik C adalah titik sudut keliling pada setengah lingkaran, berarti $m\angle C = 90$. Berdasar teorema 3.6 diperoleh bahwa sudut perpotongan antara kedua lingkaran hasil inversi tersebut besarnya adalah 90. Jadi terbukti bahwa lingkaran 3' dan 4' berpotongan tegak lurus.

Contoh 4. 3

Contoh berikut ini akan memperlihatkan akibat dari inversi terhadap titik yang tidak terletak pada garis atau lingkaran yang diberikan. Misalkan ⊙(O, r) merupakan lingkaran inversi (pada gambar 4.9 lingkaran inversi tidak digambarkan) dengan O tidak terletak pada garis atau lingkaran yang diberikan. Langkah pertama adalah memberi nomor untuk setiap himpunan titik-titik seperti pada gambar 4.9(a).



Gambar 4.9 Ilustrasi contoh 4.3

Pernyataan berikut merupakan penjelasan gambar 4.9(a) :

1. Lingkaran 1' adalah hasil inversi dari lingkaran 1 yang tidak melalui pusat lingkaran inversi.
2. $\overleftrightarrow{AB}$ diinversikan menjadi lingkaran 2' yang melalui pusat lingkaran inversi dan tegak lurus pada lingkaran 1'.
3. Inversi $\overleftrightarrow{AC}$ adalah lingkaran 3' yang melalui salah satu perpotongan lingkaran 1' dan 2' dan juga melalui pusat lingkaran inversi.
4. Inversi $\overleftrightarrow{BC}$ adalah lingkaran 4' yang melalui salah satu perpotongan 1' dan 2' serta perpotongan 1' dan 3' dan juga melalui pusat lingkaran inversi.

Teorema baru meliputi empat lingkaran, dan kesimpulannya bahwa dua diantaranya adalah tegak lurus.

Teorema 4.6

Empat lingkaran di bidang jika:

1. 1' dan 2' tegak lurus.
2. Lingkaran 3 melalui salah satu titik potong dari 1' dan 2' dan memotong lingkaran 1' di titik yang lain.
3. Lingkaran 4' melalui titik potong kedua dari 1' dan 2' dan melalui titik potong kedua 1' dan 3'.
4. Lingkaran 3' dan 4' adalah tegak lurus.

Sehingga diperoleh kesimpulan teorema baru adalah:

Teorema 4.7

Jika dua lingkaran (lingkaran 3' dan lingkaran 4') berpotongan dan salah satu titik potongnya terletak pada suatu lingkaran (lingkaran 1') sedangkan titik potongnya yang kedua terletak pada busur lingkaran (lingkaran 2') yang memotong tegak lurus lingkaran 1', dan lingkaran 3' dan lingkaran 4' melalui titik potong-titik potong yang berlainan dari lingkaran 1' dan lingkaran 2', maka lingkaran-lingkaran itu (lingkaran 3' dan lingkaran 4') berpotongan tegak lurus.

Sejauh ini di dalam pembahasan, inversi digunakan untuk menemukan teorema baru dari teorema yang sudah diketahui sebelumnya. Secara umum teorema baru akan lebih kompleks sebab beberapa garis lurus diinversikan menjadi lingkaran.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

1. Transformasi inversi adalah refleksi terhadap lingkaran. Pembahasan transformasi inversi diawali dengan membahas titik-titik inversi. Jika ⊙(O, r) adalah lingkaran inversi, maka inversi dari titik P adalah titik P' yang terletak pada $\overrightarrow{OP}$ yang memenuhi persamaan OP · OP' = r^2. Akibat dari definisi tersebut, setiap titik di luar ⊙(O, r) hasil inversinya adalah titik-titik di dalam ⊙(O, r), sedangkan setiap titik di dalam ⊙(O, r) hasil inversinya adalah titik-titik di luar ⊙(O, r), kecuali untuk titik O hasil inversinya adalah titik di tak berhingga. Setiap titik yang terletak pada ⊙(O, r) hasil inversinya adalah dirinya sendiri. Titik-titik pada ⊙(O, r) adalah titik-titik invarian.
2. Dua kemungkinan yang bisa terjadi oleh inversi dari sebuah garis, yaitu:
   a. Jika garis tidak melalui titik pusat lingkaran inversi,dan
   b. Jika garis melalui titik pusat lingkaran inversi.

   Hasil inversi garis yang tidak melalui O adalah sebuah lingkaran yang melalui O, sedangkan hasil inversi dari garis yang melalui O adalah garis itu sendiri. Oleh transformasi inversi, garis yang melalui O bersifat invarian tetapi tidak invarian setitik.

3. Kemungkinan yang terjadi oleh inversi dari suatu lingkaran, yaitu:
   a. Inversi dari suatu lingkaran yang melalui titik pusat lingkaran inversi.
   b. Inversi dari suatu lingkaran yang tidak melalui titik pusat lingkaran inversi.

   Hasil inversi dari suatu lingkaran yang melalui O adalah sebuah garis lurus yang melalui titik-titik inversi dari titik-titik yang diketahui, sedangkan hasil inversi dari suatu lingkaran yang tidak melalui O adalah sebuah lingkaran lain yang juga tidak melalui O.
4. Sifat invarian oleh transformasi inversi berlaku juga untuk sudut, yaitu dinyatakan bahwa besar sudut antara dua kurva yang saling berpotongan adalah invarian oleh transformasi inversi. Lingkaran yang berpotongan tegak lurus pada lingkaran inversi adalah himpunan titik-titik yang invarian, tetapi tidak invarian setitik oleh transformasi inversi.
5. Himpunan semua titik dengan perbandingan jarak tertentu terhadap dua titik yang diketahui adalah sebuah lingkaran, yang disebut dengan lingkaran Apollonius. Jika diketahui titik A dan A', diperoleh himpunan titik-titik yang perbandingan jarak terhadap A dan A' sama dengan $1 : \mu$ adalah sebuah lingkaran yang disebut lingkaran Apollonius yang akan menginversikan titik A menjadi A'. Transformasi inversi menjadi dasar dalam mempelajari lingkaran Apollonius, oleh karena itu dapat dikatakan bahwa Lingkaran Apollonius merupakan penerapan dari transformasi inversi. Penerapan lain yang menggunakan prinsip transformasi inversi sebagai dasar dalam prinsip kerjanya adalah sebuah alat yang disebut Sel

Peaucellier. Suatu garis lurus dengan menggunakan sel Peaucellier ini dapat digambar tanpa mempergunakan alat bantu penggaris. Teorema-teorema geometri Euclides yang sudah kita kenal dapat kita inversikan menjadi sebuah teorema baru yang akan lebih rumit.

B. Saran

Setelah menyelesaikan skripsi ini, penulis dapat mengenal dan mendalami topik-topik geometri Euclides. Penulis melihat bahwa topik transformasi inversi ini sungguh menarik untuk dipelajari.

Banyak aspek lain dari transformasi inversi yang tidak diangkat dalam skripsi ini, misalnya sel Peaucellier tidak dibahas lebih mendalam. Teorema yang diinversikan menjadi sebuah teorema baru hanya diberikan sebagai contoh. Topik tersebut dapat diangkat menjadi topik skripsi yang menarik.

DAFTAR PUSTAKA

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Branan, David A., Esplen, Matthew F. & Gray, Jeremy J. 2000. *Geometry*. The Press Syndicate of the University of Cambridge.

Coxeter, H.S.M. 1967. *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Davis, David R. 1957. *Modern College Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Jacobs, Harold R. 1974. *Geometry*, San Francisco: W.H. Freeman and Company.

Smart, James R. 1998. *Modern Geometries, 5th ed.* San Jose Sate University: brooks / Cole Publishing Company.

Wallace, Edward C & West, Stephen F. 1992. *Roads to Geometry*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Simon and Schuster Company.