METODE BAYES DAN TERAPANNYA PADA PENDUGAAN PARAMETER

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

OLEH

EVARISTUS DANANG KUSNADI

NIM: 981414039

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2003

METODE BAYES DAN TERAPANNYA PADA PENDUGAAN PARAMETER

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

OLEH

EVARISTUS DANANG KUSNADI

NIM: 981414039

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2003

SKRIPSI

METODE BAYES DAN TERAPANNYA PADA PENDUGAAN PARAMETER

Yang disusun oleh:

EVARISTUS DANANG KUSNADI
NIM: 981414039

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Ir. Ig. Aris Dwiatmoko. M. Sc

Tanggal: 18 Des 2013

SKRIPSI

METODE BAYES DAN TERAPANNYA PADA PENDUGAAN PARAMETER

Telah dipertahankan dihadapan panitia penguji
pada tanggal 8 Desember 2003
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan panitia penguji

		Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	:	Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, MT.	....
Anggota	:	1. Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc.	....
		2. M. Andy Rudhito, S.pd.,M.Si.	....
		3. Drs. A. Mardjono	....

Yogyakarta, 8 Desember 2003
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

. . . Biarlah Dalam kelemahanku
nama Tuhan dipermuliakan. . .

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

Keluarga Kudus -"Yesus, Maria dan Santo Yosef".

Keluarga Mc. Sumardi.

Widya Dwi Hapsari.

ABSTRAK

Metode Bayes merupakan metode pengambilan keputusan statistik yang mempertimbangkan unsur subyektifitas yang dinyatakan dalam *Peluang Subyektif*. Peluang Subyektif mengukur derajat keyakinan pengambil keputusan tentang nilai parameter θ yang tidak diketahui. Peluang Subyektif selanjutnya digunakan untuk mendefinisikan *Distribusi Prior* $f_{\Theta}(\theta)$ untuk suatu parameter θ. Sehingga Metode Bayes memandang parameter θ sebagai variabel random yang mempunyai distribusi Prior (sebelum penarikan sampel). Distribusi Prior ini merangkum derajat keyakinan pengambil keputusan mengenai nilai parameter θ yang tidak diketahui. Setelah Distribusi Prior $f_{\Theta}(\theta)$ dan distribusi hasil observasi sampel $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ tertentu, selanjutnya digunakan untuk mendefinisikan *Distribusi Posterior* $f_{\Theta|X}(\theta|x)$. Distribusi Posterior ini tersusun atas informasi prior yang subyektif (derajat keyakinan pengambil keputusan) tentang parameter θ dan informasi sampel yang obyektif. Distribusi Posterior selanjutnya digunakan untuk menduga parameter atau menyusun selang kepercayaan tentang parameter yang tidak diketahui.

ABSTRACT

Bayesian Method is a statistical dicision method in which the subjective aspect is considered in *Subjective Probability*. Subjective Probability measure the degree of belief of decision maker about the value of the unknowen parameter θ. Subjective Probability is used to define the *Prior Distribution* $f_{\Theta}(\theta)$ of the parameter θ. Thus Bayesian Method assuming the θ as a random variable with a spesific prior distribution (prior to taking a sample). This Prior Distribution summeraize degree of belief of decision maker about value of the unknown parameter θ. After Prior Distribution $f_{\Theta}(\theta)$ and the distribution of observed sample $f_{\Theta|X}(\theta \mid x)$ specified, then it can be used to define *Posterior Distribution* $f_{X|\Theta}(x \mid \theta)$. The Posterior Distribution is Contructed from subjective prior information (the degree of belief of decision maker) about parameter θ and objective sample information. Finally Posterior Distribution is used to estimate the parameter or to contruct the confidence interval of anknown parameter.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebut dalam kutipan daftar pustaka.

Yogyakarta, 6 Desember 2003
Penulis

Evaristus Danang Kusnadi.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan karena hanya atas berkat dan kasihnya skripsi dengan judul "Metode Bayes dan Terapannya pada Pendugaan Parameter" dapat penulis selesaikan.

Tujuan dari penyusunan skripsi ini adalah untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar sarjana pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.

Banyak rintangan dam hambatan yang penulis alami selama proses penyusunan sekripsi ini. Namun atas bantuan berbagai pihak penulis akhirnya dapat menyelesaikan dengan baik. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini dengan penuh rasa syukur dan tulus penulis mengucapkan terima kasih atas segala bantuan, dukungan dan perhatiannya kepada:

1. Ir. Ig. Aris Dwiatmoko M.Sc., selaku dosen pembimbing yang dengan penuh kesabaran dan perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi.
2. Drs. Th. Sugiarto, MT., selaku Kaprodi, atas dukungannya selama ini.
3. Segenap dosen JP. MIPA, khususnya PSPM USD atas pengetahuan yang penulis dapatkan.
4. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng (sekretariat JP. MIPA), atas keramahannya dalam melayani kepentingan mahasiswa.
5. Kedua orang tuaku Bapak/Ibu MC. Sumardi atas kesempatan belajar dan dorongan yang diberikan baik material maupun spiritual.
6. Widya Dwi Hapsari, atas dukungan kasih dan kesetiannya selama ini.

7. Teman-teman "mahasiswa P. Mat angkatan '98" atas kebersamaannya selama kuliah.
8. Teman-teman Mudika "PETERPANIC" terutama "3-man", "Gepeng" dan Eky, atas kebersamaannya selama ini.
9. Dan semua pihak-pihak lain yang belum disebutkan.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini belum sempurna. Oleh karena itu segala kritik demi kebaikan skripsi ini akan dterima dengan senang hari.

Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Penulis.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Metode pengambilan keputusan statistik dibagi menjadi dua bagian yaitu *Metode Klasik* dan *Metode Bayes*. *Metode Klasik* adalah metode pengambilan keputusan statistik yang hanya didasarkan pada informasi dari sampel sedangkan *Metode Bayes* adalah metode pengambilan keputusan statistik selain didasarkan pada informasi sampel juga didasarkan pendapat subyektif pengambil keputusan. Pendapat subyektif dapat diperoleh dari pengalaman atau pengetahuan dari pengambil keputusan.

Pendapat subyektif ini kemudian digabungkan dengan informasi hasil pengamatan dari sebagian data dan digunakan sebagai dasar dalam mengambil keputusan. Metode pengambilan keputusan statistik yang mempertimbangkan pendapat subyektif dari pengambil keputusan disebut sebagai ***Metode Bayes***.

Karena Metode Bayes mempunyai kekhasan dibandingkan dengan Metode Klasik maka penulis berkeinginan membahasnya lebih dalam melalui skripsi ini. Metode Bayes mempertimbangkan unsur subyektifitas pengambil keputusan yang dinyatakan dalam *Peluang subyektif*. Peluang subyektif ini kemudian digunakan untuk menyusun *distribusi prior (awal)* dari suatu parameter θ (sehingga θ diperlakukan sebagai variabel random). Distribusi prior ini kemudian digabung dengan distribusi hasil observasi sampel (yang dinyatakan dalam fungsi *likelihood*) dengan bantuan teorema Bayes guna mendapatkan *distribusi posterior*.

Distribusi posterior tersebut kemudian digunakan sebagai dasar dalam menyusun pendugaan atau selang kepercayaan suatu parameter θ yang tidak diketahui.

Pendugaan atau selang kepercayaan yang disusun berdasarkan distribusi posterior ini disebut sebagai *dugaan menurut Bayes* atau *selang kepercayaan menurut Bayes*.

Untuk mempelajari Metode Bayes, diperlukan pengetahuan dasar teori peluang. Pada Bab II membahas teori peluang, variabel random yang meliputi variabel random diskrit dan kontinu, nilai harapan variabel random, momen dan fungsi pembangkit momen, beberapa distribusi yang penting (distribusi Bernoulli, distribusi Binomial, distribusi Poison, distribusi Eksponensial, distribusi Gamma, distribusi Beta dan distribusi Normal), sampel dan distribusi sampling, pendugaan parameter, statistik cukup, teori keputusan statistik.

Bab III membahas Metode Bayes yang meliputi distribusi prior dan distribusi posterior, beberapa distribusi prior sekawan dan distribusi posteriornya yaitu distribusi Bernoulli, distribusi Binomial, distribusi Poisson, distribusi Eksponensial, distribusi Gamma, distribusi Beta dan distribusi Normal dengan menggunakan konsep keluarga sekawan.

Bab IV membahas terapan dari Metode Bayes yaitu pada pendugaan untuk parameter tunggal dan selang kepercayaan dua arah untuk mean populasi.

Bab V diberikan kesimpulan yang berkaitan dengan pembahasan Metode Bayes pada bab-bab sebelumnya.

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk memberikan wawasan kepada para pembaca bahwa di dalam statistik inferensia selain terdapat Metode Klasik juga terdapat metode alternatif yang lain yaitu Metode Bayes yang dapat dipakai dalam penelitian statistik.

Sebagai batasan masalah, teorema Faktorisasi Neymen-Fisher dan teorema limit pusat tidak akan dibuktikan, karena diluar cakupan skripsi ini penulis akan menerapkan secara langsung kedua teorema tersebut. Selanjutnya pada bab III hanya dibahas fungsi kerugian error kuadrat.

Metode yang dipakai dalam tulisan ini adalah metode studi pustaka, sehingga tidak ada hal-hal yang baru yang ditemukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Teori Peluang

Dalam kehidupan sehari-hari kita biasa menghadapi kejadian-kejadian yang timbul diluar dugaan atau harapan. Misalnya, pada suatu ketika kita pergi memancing ke suatu tempat karena menurut kata orang di tempat tersebut banyak ikan, tetapi selama seharian kita memancing ada kalannya kita mendapat banyak ikan atau sebaliknya tidak dapat ikan sama sekali. Demikian pula, apabila kita melempar sekeping uang logam, adakalanya sisi muka yang muncul, ada kalanya lagi sebaliknya. Jika pelemparan dilakukan berulang-ulang misalnya sebanyak 100 kali, tiada seorang pun yang dapat meramal dengan tepat sisi apa yang akan timbul pada setiap pelemparan. Tetapi kita mengetahui semua kemungkinan hasil untuk setiap pelemparan.

Dari persoalan-persoalan semacam ini timbul suatu pengertian yang merupakan ukuran bagi kemustahilan atau kemungkinan timbulnya suatu kejadian yang dinamakan **peluang**.

Definisi 2.1.1 Ruang Sampel

Ruang sampel (S) adalah himpunan yang unsur-unsurnya menyatakan semua kemungkinan hasil suatu percobaan.

Setiap unsur dari ruang sampel disebut **titik sampel**.

Contoh 2.1.1

Sebuah percobaan bertujuan mengamati sisi apa yang muncul dari percobaan pelemparan dua mata uang logam bersama-sama sekali. Ruang sampelnya adalah : $S = \{MM, MB, BM, BB\}$, M (sisi muka) dan B (sisi belakang).

Contoh 2.1.2

Sebuah percobaan melempar sekeping uang logam berulang-ulang sampai sisi muka muncul. $S = \{M, BM, BBM, MBM, BBBM, \ldots\}$.

Sebuah ruang sampel S dikatakan *berhingga* (finite). Jika himpunan S memuat sejumlah berhingga titik sampel, misalnya $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sedangkan jika himpunan S dapat dikorespodensikan 1-1 dengan himpunan bilangan cacah maka S disebut *tak hingga terbilang* (Countably infinite).

Definisi 2.1.2 Ruang Sampel Diskrit

Ruang sampel diskrit adalah ruang sampel yang berhingga atau tak berhingga terbilang.

Sedangkan ruang sampel yang tidak diskrit disebut ruang sampel **kontinu.**

Contoh 2.1.3

Percobaan pada contoh 2.1.1 dan 2.1.2 akan menghasilkan ruang sampel diskrit

Contoh 2.1.4

Percobaan mengamati daya hidup (dalam satuan waktu)lampu, akan menghasilkan ruang sampel kontinu.

□

Definisi 2.1.3 Kejadian (Event)

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

□

Contoh 2.1.5

Dari contoh 2.1.1. Jika A adalah kejadian munculnya sisi sama maka $A = \{BB, MM\}$, jelas bahwa A adalah himpunan bagian dari ruang sampel S.

□

Jika S adalah ruang sampel suatu percobaan maka ϕ dan S adalah himpunan bagian dari S, ϕ adalah kejadian yang *tidak mungkin* terjadi dan S adalah kejadian yang *pasti* terjadi.

Definisi 2.1.4 Kelas Kejadian

Kelas kejadian adalah himpunan yang anggotanya berupa kejadian-kejadian, yang dilambangkan dengan β.

□

Pada definisi berikut akan didefinisikan medan $-\sigma$ yaitu suatu kelas kejadian yang mempunyai syarat tertentu. Medan $-\sigma$ penting untuk dibahas sebab dalam definisi ukuran peluang medan $-\sigma$ merupakan domain dari fungsi peluang.

Definisi 2.1.5 Medan $-\sigma$

Jika β adalah kelas kejadian, maka β disebut *medan* $-\sigma$ jika β memenuhi syarat-syarat berikut :

i. $\phi \in \beta$.

ii. Jika $A \in \beta$ maka $A^C \in \beta$.

iii. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \beta$ maka $A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \in \beta$.

□

Untuk selanjutnya lambang β menyatakan suatu medan $-\sigma$.

Contoh 2.1.6

Jika sebuah dadu dilempar sekali, maka ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, jika A menyatakan kejadian munculnya mata dadu ganjil dan B menyatakan kejadian munculnya mata dadu genap maka $\beta = \{\phi, A, B, S\} = \{\phi, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, S\}$ adalah medan $-\sigma$, karena :

$i. \phi \in \beta.$

$ii. \phi \in \beta, \phi^c = S \in \beta.$

$\{1,3,5\} \in \beta, \{1,3,5\}^c = \{2,4,6\} \in \beta.$

$\{2,4,6\} \in \beta, \{2,4,6\}^c = \{1,3,5\} \in \beta.$

$S \in \beta, S^C = \phi \in \beta.$

$iii. \bullet \phi \cup \{1,3,5\} \in \beta.$

$\phi \cup \{2,4,6\} \in \beta.$

$\{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \in \beta.$

$\{1,3,5\} \cup S \in \beta.$

$\{2,4,6\} \cup S \in \beta.$

$\bullet \phi \cup \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} = S \in \beta.$

$\phi \cup \{1,3,5\} \cup S = S \in \beta.$

$\phi \cup \{2,4,6\} \cup S = S \in \beta.$

$\bullet \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \cup S = S \in \beta.$

$\bullet \phi \cup \{1,3,5 \cup\}\{2,4,6\} \cup S = S \in \beta.$

□

Definisi 2.1.7 Ukuran Peluang

Misalkan S ruang sampel dan β adalah medan $-\sigma$ Suatu fungsi P yang memetakan unsur-unsur β ke himpunan bilangan real $R(P:\beta \to R)$ disebut ukuran peluang jika :

i. $P(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \beta$.

ii. $P(S) = 1$.

iii. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \beta$ dengan $A_j \cap A_k = \phi; j \neq k; j = 1,2,\ldots$ dan $k = 1,2,\ldots$

maka $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

□

Jika S berhingga maka *iii* dapat diturunkan menjadi *iii'* yaitu :

iii'. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \beta$ dengan $A_j \cap A_k = \phi; j \neq k; j = 1,2,\ldots,n$ dan $k = 1,2,\ldots,n$

maka $P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) = \sum_{n=1}^{n} P(A_n)$.

Definisi 2.1.8 Ruang Peluang

Ruang peluang adalah tigaan (S, β, P) dengan S adalah ruang sampel, β adalah medan $-\sigma$, dan P adalah ukuran peluang.

□

Teorema 2.1.1

Untuk setiap kejadian A, $P(A) = 1 - P(A^c)$

Bukti:

$$\left.\begin{aligned} A \cup A^c &= S \\ A \cap A^c &= \phi \end{aligned}\right\} \text{ karena } P \text{ fungsi maka } P(A \cup A^c) = P(S) \tag{2.1}$$

$$\text{akibatnya, } P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \tag{2.2}$$

dari (2.1) dan (2.2) didapat : $P(A) + P(A^c) = P(S) \Leftrightarrow P(A) + P(A^c) = 1$

$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$

□

Teorema 2.1.2

$P(\phi) = 0$

Bukti:

Dari teorema 2.1.1 ambil $A = \phi$ sehingga $A^c = S$ jadi $P(\phi) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$

$\therefore P(\phi) = 0$

□

Teorema 2.1.3 (Kemonotonan Peluang).

Jika kejadian-kejadian A dan B sedemikian sehingga $A \subseteq B$ maka $P(A) \leq P(B)$.

Bukti :

$A \subseteq B$

$B = A \cup (B \cap A^c)$ dan $A \cap (B \cap A^c) = \phi$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{dari } (2.2) \\ P(B \cap A^c) \geq 0\end{array}\right\} P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$$

$\therefore P(A) \leq P(B)$.

□

Teorema 2.1.4

Untuk setiap kejadian A ; $P(A) \leq 1$.

Bukti :

$A \subseteq S$, dengan teorema 2.1.3 dan mengambil $B = S$ maka $P(A) \leq P(S) = 1$

$\therefore P(A) \leq 1$.

□

Teorema 2.1.5

Jika A dan B merupakan dua kejadian sembarang, maka :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:

$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$

$P(A \cup B) = P[(A \cap B^c) \cup B]$ (2.3)

$(A \cap B^c) \cap B = \phi$

maka : $P[(A \cap B^c) \cup B] = P(A \cap B^c) + P(B)$ (2.4)

dari (2.3) dan (2.4) didapat $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$ (2.5)

sementara :

$$\left.\begin{array}{l} A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = \phi \end{array}\right\} \text{dengan (2.2) } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \quad (2.6)$$

dari (2.5) dan (2.6) didapat: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

□

Contoh 2.1.7

Dari contoh 2.1.6 jika diasumsikan peluang kemunculan setiap mata dadu adalah sama maka peluang kejadian munculnya mata dadu genap $P(A)$ adalah:

$P(A) = P(\{1,3,5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

□

Definisi 2.1.9 Peluang Bersyarat

Misal A dan B adalah kejadian di dalam β dan diberikan ruang peluang (S, β, P). Peluang bersyarat B jika A diketahui, dinotasikan dengan $P(B \mid A)$ didefinisikan sebagai : $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A) > 0$.

□

Contoh 2.1.8

Sebuah dadu dilempar sekali, maka peluang munculnya bilangan genap jika diketahui telah muncul bilangan prima adalah $\frac{1}{6}$ yang didapat sebagai berikut : Misalkan : B kejadian munculnya bilangan genap, maka $B=\{2,4,6\} \Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}$.

A kejadian munculnya bilangan prima, maka $A=\{2,3,5\}$ dan $P(A)=\frac{3}{6}$.

$A \cap B=\{2\}$ dan $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$, maka peluang munculnya bilangan genap jika diketahui bilangan yang muncul bilangan prima adalah : $P(B \mid A)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}$.

□

Teorema 2.1.6 Teorema Penggandaan

Jika $A_j \in \beta, j=1,2,\ldots,n,$ Sedemikian sehingga $P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)>0,$ maka :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)=P(A_1 \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \times P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \ldots P(A_2 \mid A_1) P(A_1).$$

Bukti:

Pandang ruas kanan :

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \times P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \ldots P(A_2 \mid A_1) P(A_1) \\
&=\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2})} \times \cdots \times \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \times P(A_1) \\
&=P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)=P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right).
\end{aligned}$$

□

Contoh 2.1.9

Dalam sebuah kantong terdapat 10 manik-manik, 5 hitam, 3 merah dan 2 putih. 4 manik diambil satu-persatu tanpa pengembalian, maka peluang bahwa kejadian $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap_4$ terjadi, bila A_1 kejadian memperoleh manik hitam pada pengambilan pertama, A_2 kejadian memperoleh manik merah pada pengambilan ke-2, A_3 kejadian memperoleh manik putih pada pengambilan ke-3 dan A_4 kejadiam memperoleh manik hitam pada pengambilan ke-4, adalah :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_1)$$
$$= \tfrac{4}{7} \times \tfrac{2}{8} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{5}{10} = \tfrac{1}{42}$$

□

Jika $A_j \in \beta,\ j = 1,2,\ldots$ sedemikian sehingga $A_j \cap A_i = \phi,\ i = 1,2,\ldots$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S,$ himpunan dari kejadian seperti itu disebut partisi dari S. ($\sum$ untuk hal ini adalah notasi gabungan himpunan yang saling asing).

Teorema 2.1.7 Teorema Jumlah Peluang

Andaikan $\{A_j : j = 1,2,\ldots\}$ partisi dari S dengan $P(A_j > 0)$ untuk semua j maka untuk $B \in \beta$ berlaku $P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j) P(A_j)$

Bukti:

$B = S \cap B = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)$ karena $A_j \cap B = \phi$ maka $P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B)$

; dengan teorema penggandaan peluang didapat $P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j) P(A_j)$ □

Teorema 2.1.8 Teorema Bayes

Jika $\{A_j : j = 1,2,\ldots\}$ adalah partisi S , $P(A_j) > 0$, $j = 1,2,\ldots$ jika $P(B) > 0$ maka:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j) P(A_j)}.$$

Bukti :

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j) P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j) P(A_j)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j) P(A_j)}.$$

($P(A_j \mid B)$ kadang disebut sebagai peluang posterior).

□

Contoh 2.1.10

Tiga anggota koperasi dicalonkan menjadi ketua. Peluang A terpilih 0.3, peluang B terpilih 0.5, peluang C terpilih 0.2. Jika A terpilih maka peluang kenaikan iuran koperasi 0.8, jika B atau C yang terpilih maka peluang kenaikan iuran masing-masing 0.1 dan 0.4. Misalkan D adalah kejadian orang yang terpilih menaikkan iuran, B_1 adalah kejadian A terpilih, B_2 kejadian B terpilih, B_3 kejadian C yang terpilih maka $P(A \mid B_1)P(B) = (0.3)(0.8) = 0.24$; $P(A \mid B_2)P(B_2) = (0.5)(0.1) = 0.05$; $P(A \mid B_3)P(B_3) = (0.2)(0.4) = 0.08$ dan dapat pula ditentukan peluang iuran akan naik yaitu : $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j) = (0.24) + (0.05) + (0.08) = 0.37.$

□

Contoh 2.1.11

Dari contoh 2.10 bila seseorang akan merencanakan jadi anggota koperasi tersebut, tetapi menundanya beberapa minggu dan kemudian mengetahui bahwa iuran telah naik maka peluang C terpilih ketua adalah :

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)P(B_3)}{\sum_{j=1}^{3} P(A \mid B_j)P(B_j)} = \frac{0{,}08}{0{,}37} = \frac{8}{37}.$$

□

Tentu tidak beralasan untuk membatasi hanya untuk satu partisi di S. Sebagai contoh dua partisi $\{A_i,\ i=1,2,\ldots\}$ dan $\{B_j,\ j=1,2,\ldots\}$ maka $A_i = \sum_{j=1}^{\infty}(A_i \cap A_j)$; $B_j = \sum_{i=1}^{\infty}(A_j \cap A_i)$ dan $\{A_i \cap B_j : i=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots\}$ adalah partisi dari S karena $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \phi$ jika $(i,j) \neq (i',j')$ dan $\sum_{(i,j)=1}^{\infty}(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = S.$ Notasi $P(A_i \cap B_j)$ disebut sebagai peluang bersama dari kejadian A_i dan B_j.

□

Di lain pihak dari bentuk $A_i = \sum_{j=1}^{\infty}(A_i \cap B_j)$ dan $B_j = \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B_j)$, didapat $P(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i \mid B_j)P(B_j),\ P(B_j) > 0,\ j=1,2,\ldots$ dan $P(B_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_j \mid A_i)P(A_i),\ P(A_i) > 0,\ i=1,2,\ldots.$ Peluang $P(A_i), P(B_j)$ disebut peluang marjinal. Hal ini analog untuk kasus lebih dari dua partisi dari S.

Definisi 2.1.9 Kejadian Bebas

Kejadian A dan B disebut dua buah kejadian yang saling bebas bila dan hanya bila $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

□

Contoh 2.1.12

Sebuah dadu bersisi enam yang seimbang dilempar, kejadian A adalah kejadian banyaknya dadu yang muncul adalah bilangan ganjil, B adalah kejadian banyaknya mata dadu yang muncul adalah lebih dari 4, maka $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{5,6\}$ dan $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, dan $P(A)P(B) = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{6}$. Karena $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ menurut definisi 2.1.9 maka A dan B dua kejadian yang saling bebas.

□

2.2 Variabel Random

Dalam suatu percobaan, sering kali, kita tidak tertarik pada keterangan rinci setiap titik sampel, namun hanya pada suatu keterangan numerik hasil percobaan, maka timbul ide untuk mendefinisikan sebuah fungsi yang dikenal sebagai variabel random yang memetakan setiap titik sampel dengan sebuah bilangan real.

Definisi 2.2.1 Variabel Random

Diberikan ruang peluang (S, β, P). Variabel random yang dinotasikan dengan X adalah fungsi yang memetakan setiap anggota ruang sampel S ke anggota himpunan bilangan real.

□

Fungsi X diatas merupakan suatu fungsi yang sedemikian sehingga untuk setiap himpunan A_r yang didefinisikan $A_r = \{\omega \in S \mid X(\omega) \le r\}$ merupakan himpunan bagian dari β, untuk setiap bilanga real r.

Contoh 2.2.1

Sebuah mata uang dilempar, maka $S = \{M, B\}$, M : muka, B : belakang X didefinisikan sebagai banyaknya sisi muka yang muncul maka, jika $\omega = M$ maka $X(M) = 1$ dan jika $\omega = B$ maka $X(\omega) = 0$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $A_r = \{\omega \in S \mid X(\omega) \le r\} \subseteq \beta$ untuk setiap bilangan real r. dengan $\beta = \{\phi, \{M\}, \{B\}, S\}$. Jika $r < 0$ maka $A_r = \phi$, jika $0 \le r < 1 \Rightarrow A_r = \{B\}$ jika $r > 1$ maka $A_r = \{M, B\} = S$ sehingga $\forall_r, A_r \subseteq \beta$. Jadi $X(\bullet)$ adalah variabel random. □

Definisi 2.2.2 Fungsi Distribusi Kumulatif (F.d.k)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X dinotasikan $F_X(\bullet)$ adalah fungsi dengan domain bilangan real dan kodomain interval $[0,1]$ yang memenuhi : $F_X(x) = P[X \le x] = P(\{\omega \in S \mid X(\omega) \le x\})$ untuk setiap bilangan real r.

□

Contoh 2.2.2

Pada pelemparan 3 mata uang logam secara serentak, jika X didefinisikan sebagai jumlah sisi muka yang muncul, maka F.d.k-nya adalah :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad x < 0 \\ 1/8 & \text{untuk} \quad 0 \le x < 1 \\ 4/8 & \text{untuk} \quad 1 \le x < 2 \\ 7/8 & \text{untuk} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{untuk} \quad x \ge 3. \end{cases}$$

Teorema 2.2.1

Jika $F_X(x)$ adalah F.d.k maka :

i. $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, dan $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
ii. $F_X(\bullet)$ adalah monoton naik, yaitu $F_X(a) \le F_X(b)$ untuk $a \le b$.
iii. $F_X(\bullet)$ kontinu dari kanan, yaitu $\lim\limits_{0<h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Bukti :

i. Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le \infty\} = \{X \le \infty\} = F_X(\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le -\infty\} = \{X \le -\infty\} = F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
ii. Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le b\} = \{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$
dan $\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \phi$; maka $F_X(b) = P[X \le b] = P[X \le a] +$
$P[a < X \le b] \ge P[X \le a] = F_X(a)$.
iii. Kekontinuan fungsi $F_X(\bullet)$ dari kanan, merupakan akibat langsung dari definisi
$F_X(x) = P[X \le x]$

□

Definisi 2.2.3 Variabel Random Diskret
Variabel random diskret adalah variabel random yang didefinisikan pada ruang sample diskret.

□

Contoh 2.2.3

Jika X menyatakan banyaknya sisi muka yang muncul pada percobaan (contoh 2.2.2) maka X adalah variabel random diskret.

□

Definisi 2.2.4 Fungsi Peluang Variabel Random Diskret
Jika X adalah variabel random diskret dengan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ yang berbeda, maka fungsi :

$$f_X(x) \begin{cases} P[X = x_j], & \text{jika } x = x_j;\ j = 1,2,\ldots \\ 0, & \text{jika } x \ne x_j \ \ j = 1,2,\ldots \end{cases}$$ adalah fungsi peluang dari X.

□

Definisi 2.2.5 Variabel Random Kontinu

Variabel random X disebut kontinu jika ada fungsi $f_X(\bullet)$ sedemikian sehingga $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ untuk setiap bilangan real x.

□

Definisi 2.2.6 Fungsi Densitas Peluang Variabel Random Kontinu

Jika X adalah variabel random kontinu maka fungsi $f_X(\bullet)$ dalam $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ disebut fungsi densitas peluang x.

□

Contoh 2.2.4

Diketahui $F_X(x) = \begin{cases} 0 \;, & x \le -1 \\ \frac{x^3+1}{9}, & -1 \le x < 2, \\ 1 \;, & x \ge 2. \end{cases}$ maka dapat dicari $f_X(x)$ yaitu sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{untuk } x \le 1 \;, & \frac{d[0]}{dx} = 0 \\ \text{untuk } -1 \le x < 2, & \frac{d\left[\frac{x^3+1}{9}\right]}{dx} = \frac{x^2}{3} \\ \text{untuk } x \ge 2 \;, & \frac{d[1]}{dx} = 0. \end{array}\right\rangle \quad \therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 \le x < 2 \\ 0, x < -1 \text{ atau } x \ge 2. \end{cases}$$

□

Pada keadaan-keadaan praktis kita sering kali berhadapan dengan lebih dari satu variabel random, misal pengukuran umur, jenis kelamin, tinggi badan, dan berat badan mahasiswa atau pengukuran sisi muka yang muncul dari pelemparan sekeping mata uang sebanyak n kali. Untuk itu perlu dibicarakan fungsi distribusi peluang bersama.

Definisi 2.2.7 Variabel Random Berdimensi-k

Jika $X_1, \ldots, X_k$ adalah k-variabel random yang didefinisikan pada ruang peluang (S, β, P) yang sama, maka $(X_1, \ldots, X_k)$ disebut variabel random berdimensi-k.

□

Definisi 2.2.8 Fungsi Distrbusi Kumulatif Bersama

Jika $(X_1,\ldots,X_k)$ variabel random berdimensi-k, maka fungsi distribusi kumulatif bersama dari $X_1,\ldots,X_k$ didefinisikan sebagai :

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(.,\ldots,.) = P[X_1 \le x_1,\ldots,X_k \le x_k]$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x_1,\ldots,x_k} f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots x_k) & \text{, bila } x \text{ diskret.} \\ \int\limits_{-\infty}^{x_k}\cdots\int\limits_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_n}(u_1,\ldots,u_k)\,du_1\ldots du_k & \text{, bila } x \text{ kontinu.} \end{cases}$$

□

Contoh 2.2.5

Dalam sebuah kotak terdapat 4 manik merah, 3 manik putih dan 2 manik biru. Diambil 3 sekaligus. Jika X menyatakan banyaknya manik yang terambil berwarna putih dan Y menyatakan banyaknya manik yang terambil berwarna biru maka fungsi distribusi kumulatif bersama $F_{X,Y}(x,y)$ adalah :

$y \le 3$	0	$20/84$	$65/84$	$83/84$	1
$2 \le y < 3$	0	$20/84$	$65/84$	$83/84$	1
$1 \le y < 2$	0	$16/84$	$58/84$	$76/84$	$77/84$
$0 \le y < 1$	0	$4/84$	$22/84$	$34/84$	$35/84$
$y \le 0$	0	0	0	0	0
	$x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x < 2$	$2 \le x < 3$	$x \le 3$

□

Teorema 2.2.2

Jika $F_{X,Y}(x,y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif bersama maka :

i. $F_{X,Y}(-\infty, y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$; $F_{X,Y}(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ dan $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$.

ii. Jika $x_1 < x_2$ dan $y_1 < y_2$ maka $F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)$ dan

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_2) + F_{X,Y}(x_1,y_1) \ge 0.$$

iii. $F_{X,Y}(x,y)$ kontinu kanan yaitu :

$$\lim_{0<h\to 0} F_{X,Y}(x+h,y) = \lim_{0<h\to 0} F_{X,Y}(x,y+h) = F_{X,Y}(x,y).$$

Bukti :

i. Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le -\infty \text{ dan } Y(\omega) \le y\} = \{X \le -\infty, Y \le y\} = F_{X,Y}(-\infty, y)$

$$= \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$$

Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le x \text{ dan } Y(\omega) \le -\infty\} = \{X \le x, Y \le -\infty\} = F_{X,Y}(x,-\infty)$

$$= \lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0.$$

Kejadian $\{\omega \in S \mid X(\omega) \le +\infty \text{ dan } Y(\omega) \le +\infty\} = \{X \le +\infty, Y \le +\infty\}$

$$= F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1.$$

ii. Karena kejadian $\{X \le x_1, Y \le y_1\} \subseteq \{X \le x_2, Y \le y_2\}$ menurut teorema (2.1.3) kemonotonan peluang maka $F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)$ dan

$$F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_2) + F_{X,Y}(x_1,y_1)$$
$$= P(X \le x_2, Y \le y_2) - P(X \le x_2, Y \le y_1) - P(X \le x_1, Y \le y_2) + P(X \le x_1, Y \le y_1)$$
$$= P(X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) - P(X \le x_1, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) \ge 0.$$

iii. Kekontinuan fungsi $F_{X,Y}(x,y)$ dari kanan merupakan akibat langsung dari definisi fungsi distribusi kumulatif bersama.

Definisi 2.2.9 Fungsi Distribusi Kumulatif Marjinal

Jika $F_{X_1,\ldots,X_k}(\bullet,\ldots,\bullet)$ adalah fungsi distribusi kumulatif bersama dan $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ himpunan bagian dari k-variabel random $X_1,\ldots,X_k$ maka $F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ disebut fungsi distribusi komulatif marjinal.

□

Definisi 2.2.10 Variabel Random Diskret Berdimensi-k

Variabel random berdimensi-k didefinisikan sebagai variabel random diskret berdimensi-k jika variabel random $X_1,\ldots,X_k$ terdefinisi pada ruang sampel diskret yang sama.

□

Definisi 2.2.11 Fungsi Peluang Bersama Variabel Random Diskret

Jika $(X_1,\ldots,X_k)$ adalah varaiabel random berdimensi-k, maka fungsi peluang bersama variabel random diskret $(X_1,\ldots,X_k)$ didefinisikan sebagai :

$$f_{X_1;\ldots;X_k}(x_1;\cdots;x_k)=\begin{cases}P[X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k], & \text{untuk } X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k\\ 0 & \text{, untuk yang lain.}\end{cases}$$

□

Pada notasi $[X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k]$ merupakan notasi bagi irisan k-buah kejadian $[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_k=x_k]$.

Contoh 2.2.6

Tabel fungsi peluang bersama $f_{X;Y}(x;y)$ dari contoh 2.2.5 adalah :

$y\setminus x$	0	1	2	3
0	$4/84$	$18/84$	$12/84$	$1/84$
1	$12/84$	$24/84$	$6/84$	0
2	$4/84$	$3/84$	0	0
3	0	0	0	0

□

Definisi 2.2.12 Fungsi Peluang Marjinal Diskret

Jika $(X_1,\ldots,X_k)$ adalah variabel random diskret berdimensi-k dan $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ adalah himpunan bagian dari k-variabel random diskret $X_1,\ldots,X_k$, maka fungsi $f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ disebut fungsi peluang marjinal diskret.

□

Contoh 2.2.7

Dari contoh 2.2.5 maka fungsi peluang marjinal $f_X(x_k)$, $k = 1,2,3$ adalah :

$$
\begin{aligned}
f_X(0) &= \tfrac{4}{84} + \tfrac{12}{84} + \tfrac{4}{84} = \tfrac{20}{84} \\
f_X(1) &= \tfrac{18}{84} + \tfrac{24}{84} + \tfrac{3}{84} = \tfrac{45}{84} \\
f_X(2) &= \tfrac{12}{84} + \tfrac{6}{84} \qquad = \tfrac{13}{84} \\
f_X(3) &= \qquad\qquad\qquad = \tfrac{1}{84}
\end{aligned}
$$

□

Definisi 2.2.13 Variabel Random Kontinu Berdimensi- k

Variabel random berdimensi-k $(X_1,\ldots,X_k)$ didefinisikan sebagai variabel random kontinu berdimensi-k, jika ada fungsi $f_{X_1,\ldots,X_k}(\bullet,\ldots,\bullet) \geq 0$ sedemikian sehingga :

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_k}(u_1,\ldots,u_k)\, du_1 \cdots du_k, \text{untuk semua}(x_1,\ldots,x_k)$$

□

Definisi 2.2.14 Fungsi Densitas Bersama Variabel Random Kontinu

Jika $(X_1,\ldots,X_k)$ adalah variabel random kontinu berdimensi-k, maka fungsi $f_{X_1;\ldots;X_k}(\bullet;\ldots;\bullet)$ dalam $F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1;\ldots;X_k}(u_1;\ldots u_k)\, du_1 \cdots du_k$ didefinsikan fungsi densitas bersama variabel random kontinu.

□

Definisi 2.2.15 Fungsi Densitas Marjinal

Jika $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ adalah himpunan bagian dari k-variabel random kontinu $X_1,\ldots,X_k$ maka $f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ didefinisikan sebagai fungsi densitas marjinal dari variabel random berdimensi-m $(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})$

□

Contoh 2.2.8

Jika X,Y memiliki fungsi densitas bersama :

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}9x^2y^2, 0<x<1, 0<y<1.\\ 0 \quad , \text{Selainnya.}\end{cases}$, maka : $f_X(x)=9x^2\int_0^1 y^2dy=3x^2$ untuk $0<x<1$ dan sama dengan 0 untuk x lainya, $f_Y(y)=3y^2$ untuk $0<y<1$ dan sama dengan 0 untuk y lainnya.

□

Defnisi 2.2.16 Fungsi Peluang Bersyarat dan Fungsi Densitas Bersyarat

Jika $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ adalah himpunan bagian dari k-variabel random (kontinu atau diskret) $X_1,\ldots,X_k$ maka fungsi :

i. $$f_{X_{j_1},\ldots,X_{j_n}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}\mid x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\right)=\frac{f_{X_1;\ldots;X_k}(x_1;\ldots;x_k)}{\sum\limits_{x_{j_1},\ldots,x_{j_n}} f_{X_1;\ldots;X_k}(x_1;\ldots;x_k)}$$

disebut fungsi peluang bersyarat $x_{j_1},\ldots,x_{j_n}$ bila diketahui $X_{i_1}=x_{i_1},\cdots,X_{i_m}=x_{i_m}$, untuk X yang diskret.

ii. $$f_{X_{j_1},\ldots,X_{j_m}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}\mid x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\right)=\frac{f_{X_1;\ldots;X_k}(x_1;\ldots;x_k)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1;\ldots;X_k}(x_1;\ldots;x_k)\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_n}}$$

disebut fungsi densitas bersyarat $x_{j_1},\ldots,x_{j_n}$ bila diketahui $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$, untuk X yang kontinu.

□

Contoh 2.2.9

Kembali ke contoh 2.2.5, distribusi bersyarat X jika diketahui $Y=1$ adalah :

$$f_{X|Y}(0\mid 1)=\frac{f_{X;Y}(0;1)}{\sum\limits_{x=0}^{3} f_{X;Y}(x;1)}=\frac{12/84}{12/84+24/84+6/84}=\frac{12/84}{42/84}=\frac{6}{21}.$$

$$f_{X|Y}(1\mid 1)=\frac{f_{X;Y}(1;1)}{\sum\limits_{x=0}^{3} f_{X;Y}(x;1)}=\frac{24/84}{12/84+24/84+6/84}=\frac{24/84}{42/84}=\frac{12}{21}.$$

$$f_{X|Y}(2\,|\,1)=\frac{f_{X,Y}(2,1)}{\sum_{x=0}^{3}f_{X,Y}(x,1)}=\frac{6/84}{12/84+24/84+6/84}=\frac{6/84}{42/84}=\frac{3}{21}.$$

$$f_{X|Y}(3\,|\,1)=\frac{f_{X,Y}(3,1)}{\sum_{x=0}^{3}f_{X,Y}(x,1)}=\frac{0}{12/84+24/84+6/84}=\frac{0}{42/84}=0.$$

□

Contoh 2.2.10

Jika diketahui $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<y,\ 0<y<1\\ 0 &, \text{ selainnya.}\end{cases}$ maka :

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy}=\frac{4xy}{\int_0^1 4xy\,dy}=\frac{4xy}{2xy^2\big]_0^1}=\frac{4xy}{2x}=2y,\ 0<y<1 \text{ dan sama}$$

dengan 0 untuk yang lain.

□

Definisi 2.2.17 Fungsi Distribusi Bersyarat

Jika $f_{X_{j_1},\ldots,X_{j_n}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}\,|\,x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ adala fungsi densitas (peluang) bersyarat $X_{j_1},\ldots,X_{j_n}$ bila diketahui $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ maka fungsi distribusi bersyarat didefinisikan sebagai :

$$F_{X_{j_1},\ldots,X_{j_n}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}\,|\,x_{i_1},\ldots,x_{i_m})=$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{(x'_{j_1},\ldots,x'_{j_n})\le(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})} f_{X_{j_1},\ldots,X_{j_n}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x'_{j_1},\ldots,x'_{j_n}\,|\,x_{i_1},\ldots,x_{i_m}) & \text{untuk } X \text{ diskret.}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x_{j_n}}\cdots\int_{-\infty}^{x_{j_1}} f_{X_{j_1},\ldots,X_{j_n}|X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x'_{j_1},\ldots,x'_{j_n}\,|\,x_{i_1},\ldots,x_{i_m})dx'_{j_1}\ldots d'_{j_n}, & \text{untuk } X \text{ kontinu.}\end{cases}$$

□

Contoh 2.2.11

Kembali ke contoh 2.2.9 maka : $F_{X|Y=1}(x\,|\,1)=\begin{cases}0 &, x<0\\ 6/21, & 0\le x<1\\ 18/21, & 1\le x<2\\ 1 &, x\ge 2.\end{cases}$

Contoh 2.2.112

Kembali ke contoh 2.2.10 maka : $F_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ x^2 \ , & 0 \le x < 1 \\ 1 \ , & x \ge 1. \end{cases}$

Ketika dibicarakan peluang bersyarat didepan, juga dibicarakan kejadian yang saling bebas. Sekarang akan dibicarakan variabel random yang saling bebas.

Definisi 2.2.18 Variabel random yang saling bebas

Jika $(X_1,\ldots,X_k)$ adalah variabel random diskret (kontinu) bedimensi-k dengan fungsi peluang (densitas) bersama $f_{X_1;\ldots;X_k}(\bullet;\ldots;\bullet)$. $X_1,\ldots,X_k$ disebut saling bebas jika dan hanya jika : $f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_{X_i}(x_i)$.

Ada hubungan yang erat antara fungsi peluang (densitas) bersyarat dengan variabel random yang saling bebas, yaitu misalkan jika X dan Y dua variabel random yang saling bebas, maka menurut definisi 2.2.18 maka $f_{X;Y}(x;y) = f_X(x)f_Y(y)$, sedangkan menurut definisi fungsi peluang (densitas) bersyarat $f_{X;Y}(x;y) = f_{Y|X}(y \mid x)f_X(x)$. Dari dua definisi tersebut berakibat : $f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)$. Jadi untuk menunjukkan dua variabel random saling bebas cukup diperlihatkan bahwa $f_{Y|X}(y \mid x)$ sama dengan $f_Y(y)$.

Contoh 2.2.13

Kembali ke contoh 2.2.7 dan 2.2.9, dari contoh 2.2.7 didapat $f_X(0) = {}^{20}\!/\!_{84}$ dan dari contoh 2.2.9 $f_{X|Y}(0 \mid 1) = {}^{6}\!/\!_{21}$, jadi $f_{X|Y}(0 \mid 1) \ne f_X(0)$ sehingga variabel random X dan Y tidak saling bebas.

Contoh 2.2.14

Diketahui : $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 \quad ,\ x \text{ yang lain.} \end{cases}$, maka X dan Y saling bebas karena $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(y)$, untuk semua (x,y).

□

2.3 Nilai Harapan Variabel Random.

Salah satu konsep yang berkaitan erat dengan variabel random adalah nilai harapan variabel random. Nilai harapan variabel random dapat digunakan untuk mendefinisikan rata-rata variabel random dan variansi variabel random.

Definisi 2.3.1 Nilai Harapan

Andaikan $(X_1,\ldots,X_k)$ adalah varaiabel random berdimensi-k dengan fungsi densitas (peluang) $f_{X_1,\ldots,X_k}(\bullet,\cdots,\bullet)$. Nilai harapan fungsi dari varaiabel random berdimensi-k, $g(X_1,\cdots,X_k)$ dinotasikan dengan $\mathrm{E}[g(X_1,\ldots,X_k)]$, didefinisikan sebagai :

$$\mathrm{E}[g(X_1,\ldots,X_k)] = \begin{cases} \sum g(x_1,\cdots,x_k)\, f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k), & \text{jika } (X_1,\ldots X_k) \text{ diskret.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_k) f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots,dx_k, & \text{jika } (X_1,\ldots,X_k) \text{ kontinu.} \end{cases}$$

□

Jika $g(x_1,\cdots,x_k) = x$ sehingga $\mathrm{E}[g(X_1,\ldots,X_k)] = \mathrm{E}[X] = \mu_X$. μ_X sering disebut sebagai *nilai rata-rata variabel random* X. Jika $g(x_1,\ldots,x_k) = (x-\mu_X)^2$ sehingga $\mathrm{E}[g(X_1,\ldots,X_k)] = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] = \sigma_X^2$. σ_X^2 sering disebut sebagai *variansi dari varaiabel random* X, dan $\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}$ disebut sebagai *standar deviasi (simpangan baku) dari vareabel random* X.

Contoh 2.3.1

Dalam percobaan pelemparan 2 dadu, jika X adalah jumlah dari dua mata dadu yang muncul maka :

$$\begin{aligned}\mu_{X_i} &= \sum_{i=2}^{12} x_i f_{X_i}(x_i)\\ &= 2\left(\tfrac{1}{36}\right)+3\left(\tfrac{2}{36}\right)+4\left(\tfrac{3}{36}\right)+5\left(\tfrac{4}{36}\right)+6\left(\tfrac{5}{36}\right)+7\left(\tfrac{6}{36}\right)+8\left(\tfrac{5}{36}\right)+9\left(\tfrac{4}{36}\right)+10\left(\tfrac{3}{36}\right)+11\left(\tfrac{2}{36}\right)+12\left(\tfrac{1}{36}\right)\\ &= \tfrac{252}{36} = 7.\end{aligned}$$

□

Contoh 2.3.2

Andai X kontinu dengan fungsi densitas :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untu } 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainya.} \end{cases}$$, maka μ_X adalah :

$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$, karena bentuk integralnya tak wajar maka akan diselesaikan sebagai berikut:

$$\int x\lambda e^{-\lambda x}dx = x(-e)^{-\lambda x} - \int (-e)^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x} + \tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + c.$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\mu_X = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-xe^{-\lambda x} + \tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^t &= \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-\lambda t} + \tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right) + \tfrac{1}{\lambda}\\ &= \tfrac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

□

Contoh 2.3.3

Kembali ke contoh 2.3.1 maka :

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \sum_{j=2}^{12} \left(x_j - \mu_X\right)^2 f_X\left(x_j\right) \\
&= (2-7)^2\left(\tfrac{1}{36}\right) + (3-7)^2\left(\tfrac{2}{36}\right) + (4-7)^2\left(\tfrac{3}{36}\right) + (5-7)^2\left(\tfrac{4}{36}\right) + (6-7)^2\left(\tfrac{5}{36}\right) + (7-7)^2\left(\tfrac{6}{36}\right) + \\
&\quad (8-7)^2\left(\tfrac{5}{36}\right) + (9-7)^2\left(\tfrac{4}{36}\right) + (10-7)^2\left(\tfrac{3}{36}\right) + (11-7)^2\left(\tfrac{2}{36}\right) + (12-7)^2\left(\tfrac{1}{36}\right) \\
&= \tfrac{210}{36}
\end{aligned}
$$

$\square$

Contoh 2.3.4

Kembali ke contoh 2.3.2 maka :

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu_X\right)^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Karena bentuk integralnya tak wajar maka akan diselesaikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\int \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx &= \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - e^{-\lambda x} + 2\int e^{-\lambda x}\left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)dx \\
&= \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - e^{-\lambda x} + 2\left(\left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)\left(-\tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) + \int \tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\,dx\right) \\
&= \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - e^{-\lambda x} + 2\left(\left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)\left(-\tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) - \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\right) + c \\
&= \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x} + 2\left(-x\tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\right) + c \\
&= -x^2 e^{-\lambda x} - 2\left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} - 2x\tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + c \\
&= -x^2 e^{-\lambda x} - 2x e^{-\lambda x} + 2\tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} - 2x\tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + c \\
&= -x^2 e^{-\lambda x} + \left(-2\tfrac{1}{\lambda^2} + 2\tfrac{1}{\lambda} - 2\right)x e^{-\lambda x} - \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + c
\end{aligned}
$$

Sehingga :

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-x^2 e^{-\lambda x} + \left(-2\tfrac{1}{\lambda^2} + 2\tfrac{1}{\lambda} - 2\right)x e^{-\lambda x} - \tfrac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-t^2 e^{-\lambda t} + \left(-2\tfrac{1}{\lambda^2} + 2\tfrac{1}{\lambda} - 2\right)t e^{-\lambda t}\right) + \tfrac{1}{\lambda^2} = \tfrac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 2.3.1

Andaikan X adalah variabel random maka $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mu_X^2$, asalkan $\mathrm{E}[X^2]$ ada.

Bukti :

Untuk hal yang kontinu dapat ditulis :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X^2) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu_x x + \mu_X^2) f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx.$$

karena $\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ maka

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mu_X^2.$$

□

Berikut akan didefinisikan nilai harapan bersyarat dari suatu variabel random, yang nanti berguna dalam bab IV :

Definisi 2.3.2 Nilai Harapan Bersyarat

Jika X dan Y adalah variabel random (diskret atau kontinu). Nilai harapan bersyarat dari Y jika diketahui $X = x$ adalah :

$$\mathrm{E}[Y \mid X = x] = \begin{cases} \sum_y y P(Y = y \mid X = x), & \text{untuk X dan Y diskret.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y \mid x) dy, & \text{untuk X dan Y kontinu.} \end{cases}$$

□

Salah satu bagian yang penting dalam pembahasan variabel random adalah teorema chebyshev (1821-1894). Teorema Chebyshev memberikan tafsiran yang kolot (konservatif) tentang peluang, bahwa suatu variabel random mendapat nilai dalam jarak k simpangan baku dari nilai rata-ratanya untuk setiap bilangan real k.

Teorema 2.3.2 Teorema Chebyshev

Misalkan X sebuah varaiabel random (diskret atau kontinu), dan k merupakan sembarang bilangan real positif, maka :

$$P\{(\mu_X - k\sigma_x \le X \le \mu_X + k\sigma_X) \ge k\sigma_X\} \ge 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Bukti :

Untuk X kontinu, dan $k > 0$ maka $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\mu_X - k\sigma_X} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx + \int_{\mu_X - k\sigma_X}^{\mu_X + k\sigma_X} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx + \int_{\mu_X + k\sigma_X}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$, karena $\int_{\mu_X - k\sigma_X}^{\mu_X + k\sigma_X} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx \ge 0$ maka $\sigma_X^2 \ge \int_{-\infty}^{\mu_X - k\sigma_X} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx + \int_{\mu_X + k\sigma_X}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx.$

karena $|x-\mu_X| \ge k\sigma_X$, asalkan $x \ge \mu_X + k\sigma_X$ atau $x \le \mu_X - k\sigma_x$ diperoleh $(x-\mu_X)^2 \ge k^2\sigma_X^2$, maka $\sigma_X^2 \ge \int_{-\infty}^{\mu_X - k\sigma_X} k^2\sigma_X^2 f_X(x)dx + \int_{\mu_X - k\sigma_X} k^2\sigma_X^2 f_X(x)dx$ atau setelah kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{k^2\sigma_X^2}$ didapat $\int_{-\infty}^{\mu_X - k\sigma_X} f_X(x)dx + \int_{\mu_X + k\sigma_X}^{\infty} f_X(x)dx \le \frac{1}{k^2}$

sehingga $P(\mu_X - k\sigma_X \le X \le \mu_X + k\sigma_X) = \int_{\mu_X - k\sigma_X}^{\mu_X + k\sigma_X} f_X(x)dx \ge 1 - \frac{1}{k^2}.$

□

2.4 Momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Salah satu konsep yang berkaitan dengan nilai harapan adalah momen dan fungsi pembangkit momen. Pembahasan tentang konsep ini menjadi penting sebab konsep ini akan digunakan dalam menentukan mean dan variansi suatu distribusi.

Pembahasann tentang momen dan fungsi pembangkit momen akan dimulai dengan definisi berikut.

Definisi 2.4.1 Momen

Jika X adalah variabel random, maka momen ke-r dari variabel random X dinotasikan dengan M_r didefinisikan sebagai $M_r = \mathrm{E}\left[X^r\right]$, jika nilai harapannya ada. Jika $r = 1$ maka momen ke-1, yaitu $M_1 = \mathrm{E}[X] = \mu_X$ yang merupakan nilai rata-rata variabel random X.

□

Definisi 2.4.2 Momen pusat

Jika X adalah variabel random, maka momen pusat ke-r disekitar a didefinisikan sebagai $\mathrm{E}\left[(X-a)^r\right]$. Jika $a = \mu_X$ maka momen pusat ke-r disekitar μ_X dinotasikan dengan $M_r^{'}$ didefinisikan sebagai $M_r^{'} = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^r\right]$.

□

Dari definisi 2.4.2 jika $r = 1$ maka $M_1^{'} = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^1\right] = \mathrm{E}[X] - \mu_X = 0$, jadi momen pusat ke-1 disekitar μ_X sama dengan nol. Sedangkan momen pusat ke- 2 disekitar μ_X atau $M_2^{'} = \left[(X-\mu_X)^2\right] = \sigma_X^2$ yang merupakan variansi dari variabel random X.

Definisi 2.4.3 Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan X adalah variabel random dengan fungsi densitas (peluang) $f_X(\bullet)$. Nilai harapan dari e^{tx} didefinisikan sebagai fungsi pembangkit momen dari variabel random X, jika nilai harapan tersebut ada untuk nilai t dalam interval $-h < t < h,\ h > 0$. Fungsi pembangkit momen yang dinotasikan $m_X(t)$ adalah :

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tx}\right] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) & \text{, jika } X \text{ diskret.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{, jika } X \text{ kontinu.} \end{cases}$$

□

Jika X adalah varaiabel random (kontinu atau diskret) maka akan diperoleh hubungan antara fungsi pembangkit momen dengan momen itu sendiri yaitu : jika X adalah variabel random dan r adalah bilangan bulat positif maka

e^{tX} dapat dinyatakan dalam bentuk deret kuasa taylor-maclaurin sebagai :

$e^{tX} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[1 + tX + \tfrac{(tX)^2}{2!} + \tfrac{(tX)^3}{3!} + \cdots\right] \\
&= \mathrm{E}[1] + \mathrm{E}[tX] + \mathrm{E}\left[\tfrac{(tX)^2}{2!}\right] + \mathrm{E}\left[\tfrac{(tX)^3}{3!}\right] + \cdots \\
&= 1 + t\mathrm{E}[X] + \tfrac{t^2}{2!}\mathrm{E}\left[X^2\right] + \tfrac{t^3}{3!}\mathrm{E}\left[X^3\right] + \ldots \\
&= 1 + tM_1 + \tfrac{t^2}{2!}M_2 + \tfrac{t^3}{3!}M_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Apabila $M_1, M_2, \cdots$ adalah momen-momen dari variabel random X maka

$$
\begin{aligned}
\frac{dm_X(t)}{dt} &= M_1 + tM_2 + \tfrac{t^2}{2!}M_3 + \cdots \\
\frac{dm_X(t)}{dt^2} &= M_2 + tM_3 + \tfrac{t^2}{2!}M_4 + \cdots
\end{aligned}
$$

Apabila derivatif-derivatif ini dievaluasi pada saat $t = 0$ maka akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
m_X^{(1)} \frac{dm_X(t)}{dt} &= M_1 \\
m_X^{(2)} \frac{dm_X(t)}{dt^2} &= M_2
\end{aligned}
$$

Jika proses ini diteruskan sampai ke-r dan kemudian derivatif ke-r tersebut dievaluasi pada $t = 0$ maka didapat $m_X^{(r)}(0) = \mathrm{E}\left[X^r\right] = M^r$. Dengan demikian derivatif ke-r yang dievaluasi pada $t = 0$ dari fungsi pembangkit momen variabel random X adalah momen ke-r dari variabel random. X.

2.5 Beberapa Distribusi yang Penting

2.5.1 Distribusi Bernoulli

Definisi 2.5.1. Disribusi Bernoulli

Suatu variabel random X mempunyai distribusi Bernoulli jika (untuk suatu p, $0 \le p \le 1$)

$$P[X = x] = p_X(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{bila } x = 0,1. \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

□

Fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli ini adalah :

$$m_X(t) = e^{t.0}(1-p) + e^{t.1} p = 1 + p(e^t - 1)$$

dan $\quad m_X^{(1)}(t) = m_X^{(2)}(t) = pe^t$.

sehingga $\mu_X = m_X^{(1)}(0) = p$ dan $\sigma_X^2 = m_X^{(2)}(0) - p^2 = p(1-p)$.

2.5.2 Distribusi Binomial

Definisi 3.5.2. Distribusi Binomial

Suatu variabel random X mempunyai distribusi Binomial jika (untuk suatu p, $0 \le p \le 1$)

$$P[X = x] = p_X(x) = b(n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{bila } x = 0,1,\ldots,n \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

□

Suatu variabel random Binomial dapat dipandang sebagai n variabel random Bernoulli, yakni, *sebagai banyaknya keberhasilan dalam n percobaan.*

Fungsi pembangkit momen distribusi binomial ini adalah :

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$
$$= [pe^t + (1-p)]^n = [1 + p(e^t - 1)]^n$$

sedangkan

$$m_X^{(1)}(t) = n\left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^{n-1} pe^t,$$

dan

$$m_X^{(2)}(t) = \left\{npe^t\left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^{n-1} + npe^t\right\} \times \left\{pe^t(n-1)\left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^{n-2}\right\}$$

dengan demikian maka $m_X^{(1)}(0) = np$ dan $m_X^{(2)}(0) = n(n-1)p^2 + np$,

sehingga $\mu_X = np$ dan $\sigma_X^2 = np(1-p)$.

2.5.3 Distribusi Poisson

Definisi 2.5.3. Distribusi Poisson

Suatu variabel random X mempunyai distribusi Poisson bila (untuk suatu $\lambda > 0$, disebut parameter distribusi)

$$P[X = x] = p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{, bila } x = 0,1,\ldots,n \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Fungsi pembangkit momen sebaran ini adalah :

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, {}^{e^{-\lambda}\lambda^x}\!/_{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} {}^{(\lambda e^t)^x}\!/_{x!}.$$

Dengan mengingat bahwa :

$$e^a = \sum_{x=0}^{\infty} {}^{a^x}\!/_{x!}, \text{adalah deret Taylor maka } m_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}.$$

sedangkan $m_X^{(1)}(t) = \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t}$

dan $m_X^{(2)}(t) = \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t}\left[\lambda e^t + 1\right]$

dengan demikian maka $\mu_X = m_X^{(1)}(0) = \lambda.$,

dan $\sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mu_X)^2 = m_X^{(2)}(0) - \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda.$

2.5.4 Distribusi Eksponensial

Definisi 2.5.4.1. Distribusi Eksponensial

Suatu variabel random X berdistribusi eksponensial bila (untuk suatu $\lambda > 0$)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

□

Fungsi pembangkit momennya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tx}\right] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \tfrac{\lambda}{\lambda - t}, \text{ untuk } t < \lambda.$$

$$m_X^{(1)}(t) = \tfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \text{ dan } m_X^{(2)}(t) = \tfrac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}.$$

Sehingga $\mu_X = m_X^{(1)}(0) = \frac{1}{\lambda}$ dan $\sigma_X^2 = m_X^{(2)}(0) - (\mu_X)^2 = \frac{2\lambda}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Teorema 2.5.4.1

Jika $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx,\ \alpha > 0$ adalah fungsi Gamma maka berlaku :

i. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ untuk $\alpha > 0$,

ii. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ jika $\alpha > 0$ bilangan bulat,

iii. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Bukti :

$i.\ \Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$, misalkan $u = x^\alpha$ maka $du = \alpha x^{\alpha-1} dx$, $dv = e^{-x} dx$ maka $v = -e^{-x}$

sehingga $\Gamma(\alpha+1) = -x^\alpha e^{-x}\Big]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\Gamma(\alpha)$

$ii.\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \cdots = \alpha(\alpha-1)\cdots 2(1) = \alpha!$.

$iii.\ \Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$, misal : $x = y^2 \Rightarrow dx = 2y\,dy$

maka $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2} 2y\,dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

ingat :

Andai $I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy,\quad I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx,\quad I^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, misal: $r^2=x^2+y^2$,

$x=r\cos\theta$ dan $y=r\sin\theta$, maka $I^2=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{4}\pi$, jadi $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

□

2.5.5. Distribusi Gamma.

Definisi 2.5.5.1 Distribusi Gamma

Suatu variabel random X dikatakan berdisribusi Gamma bila fungsi densitasnya (dengan $\alpha,\beta>0$)

$$f(x;r,\lambda)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & 0\le x<\infty\\ 0, & \text{selainnya.}\end{cases}$$

sedang yang dimaksud dengan $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi gamma :

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ \alpha>0.$$

□

Fungsi pembangkit momen distribusi Gamma adalah :

$$m_X(t)=' \mathrm{E}\left[e^{tx}\right]=\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{tx}x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)}dx$$

$$=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha\int_0^\infty \frac{(\beta-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}dx=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha.$$

$$m_X^{(1)}(t)=\alpha\beta^\alpha(\beta-t)^{-(\alpha+1)}$$
$$m_X^{(2)}(t)=\alpha(\alpha+1)\beta^\alpha(\beta-t)^{-(\alpha+2)}$$

sehingga :

$$\mu_X=m_X^{(1)}(0)=\frac{\alpha}{\beta}\ \text{dan}\ \sigma_X^2=m_X^{(2)}(0)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Terdapat hubungan antara distribusi Eksponensial dan distribusi Gamma yaitu : Jika diambil $\alpha=1$ maka distribusi Gamma berubah menjadi distribusi Eksponensial dan jika variabel random X adalah jumlah dari r variabel random bebas yang berdistribusi Eksponensial, masing-masing dengan parameter λ , maka X mempunyai fungsi densitas Gamma dengan parameter r dan λ.

2.5.6 Distribusi Beta

Definisi 2.5.6.1 Distribusi Beta

Jika variabel random X memiliki fungsi densitas $(\text{dengan } \alpha, \beta > 0)$: :

$$f_X(x) = f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

maka X berdistribusi secara Beta.

Fungsi $$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad (2.5.6)$$

disebut fungi beta

□

Teorema 2.6.6.1

Untuk setiap $\alpha > 0, \beta > 0$ *berlaku* $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Bukti :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2(\alpha-1)}(\cos\theta)^{2(\beta-1)} 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}\,d\theta$$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,$ misal : $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$, sehingga

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{2(\alpha-1)}e^{-x^2}\,2x\,dx = 2\int_0^\infty x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,dx.$$

$\Gamma(\beta)=\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$, misal : $t=y^2 \Rightarrow dt=2y\,dy$, sehingga

$$\Gamma(\beta)=\int_0^\infty y^{2(\beta-1)}e^{-y^2}\,2y\;dy=2\int_0^\infty y^{2\beta-1}e^{-y^2}\,dy.$$

Jika $\Gamma(\alpha)$ dikalikan dengan $\Gamma(\beta)$ maka didapat :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=2\int_0^\infty x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,dx\times 2\int_0^\infty y^{2\beta-1}e^{-y^2}\,dy$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

dengan mengambil $x=r\cos\theta$ dan $y=r\sin\theta$ maka :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}r^{2(\alpha+\beta-1)}r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{(2\alpha+2\beta-1)}dr\times 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}d\theta$$

$$=\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

$$\therefore B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Berikut akan dicari mean dan variansi dari distribusi Beta:

$$\mathrm{E}\left[X^k\right]=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{k+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$=\frac{B(k+\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\alpha+\beta)}\times\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+\alpha+\beta)}$$

sehingga :

$$\mathrm{E}[X]=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

dan

$$\operatorname{var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+2)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

□

2.5.7 Distribusi Normal

Distribusi peluang kontinu yang sangat penting peranannya dalam bidang statistik adalah distribusi Normal. Grafik distribusi Normal disebut kurva normal dan berbentuk seperti genta (lonceng). Pada tahun 1933 De-moivre berhasil menemukan persamaan matematis bagi kurva normal ini.

Distribusi Normal sering disebut sebagai distribusi Gauss, untuk menghormati Gauss (1777-1855) yang juga berhasil menurunkan persamaan matematis dari kurva normal berdasarkan atas studi tentang kesalahan dalam pengukuran yang berulang-ulang terhadap benda yang sama.

Definisi 2.5.7.1 Distribusi normal

Variabel random X berdistribusi Normal, jika fungsi densitasnya adalah :

$$f_X(x) = f_X(x, \mu_X, \sigma_X) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \qquad (2.5.7.1)$$

dengan parameter μ_X dan σ_X dan $-\infty < X < +\infty$, $-\infty < \mu_X < +\infty$ dan $\sigma_X > 0$.

□

Jika suatu variabel random X berdisribusi normal dengan rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2 maka ditulis dengan $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

Fungsi distribusi komulatif dari distribusi normal ditunjukkan oleh : $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu_X)^2}{2\sigma^2}} dt$. Jika dilakukan transformasi $Z = \frac{(X-\mu_X)}{\sigma_X}$ maka fungsi densitasnya bebas dari parameter μ_X dan σ_X, sehingga :

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(Z \le \tfrac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}} \varphi(Z) dz = \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right).$$

Fungsi densitas $F_X(x)$ diatas mempunyai mean 0 dan variasi 1 yang akan ditunjukkan sebagai berikut :

Jika diberikan $Z = \frac{(X-\mu_X)}{\sigma_X}$ maka :

$$\mu_X = \mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}\left[\left(\tfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right] = \tfrac{1}{\sigma_X}\left(\mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[\mu_X]\right) = \tfrac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0.$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[\left(Z^2 - (\mathrm{E}[Z])^2\right)\right] = \mathrm{E}\left[\left(\tfrac{(X-\mu_X)^2}{\sigma^2}\right)\right] - 0 = \tfrac{1}{\sigma_X^2}\left(\mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^2\right]\right) = \tfrac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1.$$

Variabel random Z yang berdistribusi Normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1 disebut *distribusi normal standar* dan ditulis $Z \sim N(0,1)$.

Teorema 2.5.7.1

Jika $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ maka $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu_X}{\sigma_X}\right)$

Bukti :

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx = \int_{\frac{a-\mu_X}{\sigma_X}}^{\frac{b-\mu_X}{\sigma_X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{b-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu_X}{\sigma_X}\right).$$

□

Pada berbagai sumber dapat ditemukan tabel yang memuat nilai-nilai fungsi $\Phi(Z)$. Nilai-nilai tersebut menyatakan luas dibawah kurva normal diantara atau diluar suatu selang tertentu dari variabel random Z.

Contoh 2.5.7.1

Seorang guru mengasumsikan nilai final mata pelajaran matematika (X) berdistribusi normal. Guru menetapkan kriteria nilai sebagai berikut :

$A > \mu_X + \sigma_X \quad \mu_X + \sigma_X > B > \mu_X \ , \mu_X > C > \mu_X - \sigma_X ,$

$\mu_X - \sigma_X > D > \mu_X - 2\sigma_X \quad \mu_X - 2\sigma_X > E.$ Maka peluang mahasiswa yang mendapat nilai A adalah :

$$P(X > \mu_X + \sigma_X) = 1 - P(X < \mu_X + \sigma_X) = 1 - \Phi\left(\tfrac{\mu_X + \sigma_X - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \Phi(1) = 0.8413.$$

□

2.6 Sampel dan Distribusi Sampling

Untuk mendapatkan data seorang peneliti harus mengadakan suatu pengamatan terhadap obyek penelitian. Keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian seorang peneliti disebut *populasi*.

Misalkan sebuah perusahaan yang memproduksi botol minuman ringan ingin mengetahui daya tahan botol hasil produksiya. Tidaklah menguntungkan apabila menguji semua daya tahan botol hasil produksinya, sebab hal itu akan menyita waktu yang lama dan biaya yang mahal. Untuk membantu menarik kesimpulan tentang populasi daya tahan botol, maka diambil sebagian produk botol dan berdasarkan penelitian tentang daya tahan sebagian botol akan ditarik kesimpulan. Suatu himpunan bagian pengamatan yang dipilih dari suatu populsi disebut *sampel*.

Dalam kasus botol minuman ringan diatas, maka haruslah diusahakan agar sebagian produk botol yang dipilih cukup "representatif" atau mewakili untuk populasinya artinya hasil penelitian atas sebagian produk botol tersebut dapat memberi gambaran yang relatif "tepat" untuk populasinya.

Definisi 2.6.1. Sampel Random

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah variabel random dengan fungsi peluang bersama $f_{X_1,\cdots,X_n}(\bullet,\cdots,\bullet)$. Jika $f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$ dengan $f(\bullet)$ adalah fungsi peluang untuk setiap X_i, maka $X_1,\cdots,X_n$ didefinisikan sebagai sampel random berukuran n dari suatu populasi dengan fungsi peluang $f(\bullet)$.

□

Bagian yang penting dari definisi sampel random adalah arti dari variabel random $X_1,\cdots,X_n$. Variabel random X_i menyatakan nilai numerik dari elemen sampel ke-i. Setelah sampel diobservasi, maka nilai $X_1,\cdots,X_n$ diketahui yaitu $x_1,\cdots,x_n$. $x_1,\cdots,x_n$ juga disebut sebagai nilai dari $X_1,\cdots,X_n$ dimana $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random.

Definisi 2.6.1. Distribusi Sampel Random

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah variabel random berukuran n dengan fungsi densitas $f(\bullet)$ maka distribusi sampel random $X_1,\cdots,X_n$ didefinisikan sebagai distribusi bersama dari $X_1,\cdots,X_n$, yaitu $f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$.

□

Salah satu masalah statistik inferensia adalah mempelajari populasi yang memiliki fungsi densitas $f(\bullet;\theta)$, dimana persamaannya diketahui tetapi memuat parameter θ yang tidak diketahui (jika θ diketahui maka fungsi densitasnya tertentu).

Langkah yang dapat ditempuh adalah mengambil sampel random $X_1,\cdots,X_n$ dari fungsi densitas $f(\bullet;\theta)$, dan diobservasi sehingga didapatkan nilai $t(x_1,\cdots,x_n)$ yang kemudian akan digunakan untuk menduga parameter θ yang tidak diketahui.

Fungsi hasil observasi sampel yang akan digunakan untuk menduga parameter θ yang tidak diketahui disebut *statistik*, yang akan didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.6.2 Statistik

Statistik adalah fungsi variabel random yang diobservasi (observable) dari suatu sampel, yang tidak memuat parameter yang tidak diketahui.

□

Pengertian (observable) adalah nilai dari variabel random harus dapat diobservasi yang kemudian dapat digunakan untuk menentukan fungsi densitasnya, dan jika variabel random tersebut tidak dapat diobservasi maka fungsi densitasnya tidak dapat ditentukan.

Contoh 2.6.1

Andaikan variabel random X berdistribusi normal dengan μ_X dan σ_X^2 yang tidak diketahui maka $X-\mu_X$ bukan statistik, demikian pula X/σ_X^2 karena bukan fungsi yang dieroleh dari observasi variabel random X dan memuat parameter yang tidak diketahui. Tetapi X, $X+3$, $\log X^2$ adalah statistik.

□

Definisi 2.6.3 Mean Sampel

Jika $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari fungsi densitas $f(\bullet)$, maka mean sampel didefinisikan sebagai $\overline{X}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$

□

Definisi 2.6.4 Variansi Sampel

Jika $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari fungsi densitas $f(\bullet)$, maka variansi sampel didefinisikan sebagai $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, untuk $n>1$.

□

Teorema 2.6.1. Distribusi Sampling, Rata-Rata dan Variansi

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan fungsi peluang $f(\bullet)$ yang memiliki rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2, Bila $\overline{X}=\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}X_i$ adalah rata-rata sampel maka $\mathrm{E}\left[\overline{X}\right]=\mu_{\overline{X}}=\mu_X$ dan $\mathrm{var}\left(\overline{X}\right)=\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma_X}{n}$.

Bukti :

$$E[\overline{X}] = \left(\tfrac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i = \tfrac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \tfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right)$$
$$= \tfrac{1}{n}(n\mu_X) = \mu_X.$$

$$\operatorname{var}(\overline{X}) = \operatorname{var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \operatorname{var}\left[\tfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right]$$
$$= \operatorname{var}\left(\tfrac{X_1}{n} + \cdots + \tfrac{X_n}{n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{n^2}\sigma_X^2 + \cdots + \tfrac{1}{n^2}\sigma_X^2$$
$$= \tfrac{\sigma_X^2}{n}$$

□

Teorema 2.6.1 berlaku apabila pemilihan sampel dilakukan dengan pengembalian. Jika suatu populasi berhingga dan pemilihan sampel dilakukan tanpa pengembalian maka : $\operatorname{var}(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$ dengan N ukuran populasi dan n adalah ukuran sampel. Faktor $\frac{N-n}{N-1}$ disebut *faktor koreksi populasi terbatas*. Untuk N yang relatif besar dibandingkan dengan ukuran sampel n, faktor koreksi tersebut akan mendekati 1, sehingga nilai $\sigma_{\overline{X}}^2$ akan menghampiri $\frac{\sigma_X^2}{n}$.

Secara tegas teorema 2.6.1 mengatakan apabila $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random dari sembarang distribusi dengan rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2 maka $E[\overline{X}] = \mu_{\overline{X}} = \mu_X$ dan $\operatorname{var}(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$. Teorema ini tidak mengatakan apakah $\overline{X}$ berdistribusi normal atau tidak. Apabila distribusi dari $\overline{X}$ dijadikan pusat perhatian maka teorema berikut ini, dikenal sebagai teorema limit pusat akan menjawab pertanyaan bagaimana $\overline{X}$ berdistribusi.

Teorema 2.6.2 Teorema Limit Pusat

Misalkan $f(\bullet)$ adalah fungsi peluang dengan rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2 dan $\overline{X}$ adalah rata-rata sampel berukuran n dari $f(\bullet)$. Jika Z_n adalah variabel random yang didefinisikan sebagai $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}}$ maka Z_n berdistribusi mendekati distribusi Normal standar jika n menuju ke tak hingga.

□

Teorema limit pusat mempunyai arti bahwa distribusi Z_n akan mendekati distribusi Normal baku untuk n mendekati tak hingga. Dengan kata lain berdistribusi normal dengan mean μ_X dan variansi σ_X^2/n.

Aspek penting dari teorema limit pusat adalah bahwa mean sampel $\overline{X}$ yang berasal dari suatu populasi yang berdistribusi sembarang dan dengan variansi σ_X^2 berhingga dan mean μ_X akan didistribusikan mendekati distribusi Normal dengan mean μ_X dan variansi σ_X^2/n.

Penulis tidak akan membuktikan teorema limit pusat tetapi akan mengaplikasikan secara langsung.

Selanjutnya akan didefinisikan fungsi likelihood sebagai berikut

Definisi 2.6.5 Fungsi Likelihood

Untuk sampel random yang terobservasi, X, fungsi $f_{X|\Theta}(x \mid \theta)$ dengan θ adalah suatu parameter disebut sebagai fungsi likelihood

□

2.7 Pendugaan Parameter

Statistitika inferensia adalah proses memperoleh informasi dari sampel yang digunakan untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari sampel yang dipilih tersebut.

Teknik statistika inferensia dapat dibagi dalam dua golongan besar yaitu : Pendugaan parameter dan uji hipotesis. Pada bagian ini hanya akan dibicarakan pendugaan parameter saja, yang terdiri atas dua bagian yaitu pendugaan titik dan pendugaan selang.

Masalah pendugaan parameter adalah sebagai berikut: Andaikan karakteristik suatau populasi dapat diwakili oleh variabel random X yang mempunyai fungsi peluang $f(x;\theta)$ dimana bentuk fungsi peluang tersebut diketahui kecuali parameternya. Jika $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan fungsi peluang $f(x;\theta)$ maka berdasarkan sampel tersebut dapat ditentukan penduga bagi parameter θ atau penduga bagi fungsi dari parameter θ misalnya $\tau(\theta)$.

Definisi 2.7.1 Penduga

Sembarang statistik dimana nilai-nilai dari statistik ini digunakan untuk menduga parameter θ disebut sebagai penduga bagi θ.

□

Dari definisi diatas, dapat diketahui bahwa setiap penduga adalah statistik , sehingga penduga merupakan variabel random.

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan fungsi peluang $f(x;\theta)$ maka statistik $T = t(X_1,\cdots,X_n)$ adalah penduga bagi θ, sedangkan nilai-nilai hasil observasi dari statistik $t = t(x_1,\cdots,x_n)$ disebut nilai dugaan dari θ.

Contoh 2.7.1

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ adalah penduga bagi mean populasi μ_X sedangkan $\bar{x}$ adalah nilai dugaan dari μ_X.

Suatu penduga titik bagi suatu parameter populasi adalah nilai tunggal numerik dari suatu statistik yang relevan dengan parameter tersebut.

Agar dapat menentukan penduga titik yang "baik " bagi suatu parameter tertentu maka perlu diuji sifat-sifat penduga titik tersebut. Penduga yang "baik" adalah penduga yang memiliki kriteria sebagi berikut:

i . Tak bias.
ii . Konsisten.
iii. Variansi minimum.
iv. Efisien.

Berkut ini akan dibahas, sifat-sifat penduga titik yang "baik" yang dimulai dengan definisi berikut:

Definisi 2.7.2 Penduga Tak Bias

Suatu Penduga $T=t(X_1,\cdots,X_n)$ disebut sebagai penduga tak bias dari θ jika $\mathrm{E}[T]=\theta$ untuk setiap $\theta\in\Theta$, Θ adalah ruang parameter.

□

Contoh 2.7.2

Mean sampel berukuran *n*, $(\overline{X})$, adalah penduga tak bias bagi μ_X sebab menurut teorema 2.6.1 $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mu_X$.

□

Contoh 2.7.3

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dengan $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mu_X$ dan $\mathrm{var}(X_i)=\sigma_X^2$, $i=1,2,\cdots,n$. Akan ditunjukkan bahwa $s'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ adalah penduga yang bias untuk σ_X^2 dan $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ adalah penduga yang tak bias untuk σ_X^2.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{2\overline{X}}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\overline{X}^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}^2+\overline{X}^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]-n\mathrm{E}\left[\overline{X}^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[X_i^2\right]-n\mathrm{E}\left[\overline{X}^2\right]\end{aligned}$$

$$\mathrm{var}(X_i) = \mathrm{E}[X_i^2] - \mu_X^2$$

Diketahui : $\mathrm{E}[X_i^2] = \mathrm{var}(X_i) + \mu_X^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}[X_i^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

$$\mathrm{var}(\overline{X}) = \mathrm{E}[\overline{X}^2] - \mu_X^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}[\overline{X}^2] = \mathrm{var}(\overline{X}) + \mu_X^2 = \sigma_X^2/_n + \mu^2$$

sehingga : $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - n\left(\sigma_X^2/_n + \mu_X^2\right)$

$$= n(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - \sigma_X^2 - n\mu_X^2$$

$$= n\sigma_X^2 + n\mu_X^2 - \sigma_X^2 - n\mu_X^2$$

$$= (n-1)\sigma_X^2$$

ini berakibat: $\mathrm{E}[S'^2] = \left(n-1/_n\right)\sigma_X^2$.

Karena $\mathrm{E}[S'^2] \neq \sigma_X^2$ maka S'^2 merupakan penduga yang bias untuk σ_X^2.

Sekarang akan ditujukkan bahwa S^2 adalah penduga yang tak bias untuk σ_X^2.

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)S'^2$$

$$\mathrm{E}[S^2] = \left(\frac{n}{n-1}\right)\mathrm{E}[S'^2]$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\sigma_X^2\right)$$

$$= \sigma_X^2.$$

Terbukti bahwa S^2 adalah penduga tak bias bagi σ_X^2

□

Definisi 2.7.3 Penduga yang Konsisten

Jika $T_n = t(X_1, \cdots, X_n)$ adalah penduga bagi θ yang didasarkan atas sampel random berukuran n maka T_n adalah penduga yang konsisten bila :

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| \le \varepsilon) = 1$$

atau $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| > 1) = 0$ untuk $\varepsilon > 0$

□

Definisi 2.7.3 mempunyai arti bahwa peluang dari jarak antara penduga T_n dengan parameter θ yang akan diduga, akan kurang dari atau sama dengan bilangan positif yang cukup kecil ε, apabila n mendekati tak hingga, adalah satu, demikian juga sebaliknya.

Teorema 2.7.1 Penduga yang Konsisten

Penduga tak bias T_n adalah penduga yang konsisten untuk θ jika $\lim_{n\to\infty}(T_n) = 0$.

Bukti :

Misalkan X adalah variabel random dengan $\mathrm{E}[X] = \mu_X$ dan $\mathrm{var}(X) = \sigma_X^2 < \infty$.

Jika k adalah konstanta yang tidak negatif maka berdasarkan teorema Chebyshev

$$P(|X - \mu_X| \ge k\sigma_X) \le \tfrac{1}{k^2}$$

Karena T_n adalah penduga tak bias untuk θ maka $\mathrm{E}[T_n] = \theta$. Jika teorema Chebyshev diterapkan untuk variabel random T_n maka :

$$P(|T_n - \theta|) \ge k\sqrt{\mathrm{var}(T_n)} \le \tfrac{1}{k^2}, \quad k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{var}(T_n)}} \quad \varepsilon > 0$$

$$P(|T_n - \theta|) \ge \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{var}(T_n)}} \times \sqrt{\mathrm{var}(T_n)} \le \frac{\mathrm{var}(T_n)}{\varepsilon^2}$$

jika $\lim_{n\to\infty} \text{var}(T_n) = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta|) \geq \varepsilon = 0$ untuk $\varepsilon > 0$

□

Contoh 2.7.4

Misalkan $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi berdistribusi normal dengan rata-rata μ_X dan variansi $\sigma_X^2 < \infty$. $\overline{X}$ adalah penduga yang konsisten untuk μ_X karena $\overline{X}$ adalah penduga tak bias untuk μ_X (contoh 2.7.2) dan $\lim_{n\to\infty} \text{var}(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_X^2}{n} = 0$.

□

Definisi 2.7.4 Penduga dengan Variansi Minimum

Suatu penduga tak bias T disebut mempunyai variansi minimum jika $\text{var}(T) \leq \text{var}(T')$ dengan T' adalah penduga tak bias lainnya.

□

Sesuai dengan definisi 2.7.4 apabila untuk suatu parameter terdapat lebih dari satu macam penduga tak bias, maka penduga yang dipilih sebagai penduga yang terbaik ialah yang memiliki variansi terkecil. Hal ini disebabkan karena variansi penduga tersebut adalah ukuran penyebaran penduga disekitar nilai rata-rata populasi.

Definisi 2.7.5 Penduga yang Efisien

Suatu penduga T_n disebut efisien bagi parameter θ jika memenuhi :

i. Untuk $n \to \infty$ maka $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ_X^2.

ii. σ^2 mempunyai nilai minimum diantara variansi penduga yang lainnya.

□

Akibat dari syarat pertama $\text{E}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) = 0$, sehingga T_n haruslah merupakan penduga tak bias.

2.8 Pendugaan Selang Kepercayaan

Nilai dugaan suatu parameter berdasarkan pendugaan titik bukanlah suatu konstanta yang menunjukkan dengan tepat berapa nilai parameter yang sebenarnya. Hal ini disebabkan penduga titik adalah variabel random. Oleh karena itu, penduga titik haruslah didampingi oleh beberapa ukuran dari kesalahan-kesalahan yang mungkin dari penduga titik tersebut. Sebagai contoh, suatu penduga titik mungkin didampingi oleh beberapa selang kepercayaan dan dengan beberapa ukuran keyakinan bahwa selang tersebut memuat nilai parameter yang sesungguhnya.

Definisi 2.8.1 Pendugaan Selang Kepercayaan

Andaikan $X_1,\cdots,X_n$ sampel random dari fungsi densitas $f(*;\theta)$. Andaikan $T_1 = t(X_1,\cdots,X_n)$ dan $T_2 = t(X_1,\cdots,X_n)$ adalah dua statistik dengan $T_1 < T_2$ dan $P(T_1 < \theta < T_2) = 1-\alpha$ dimana $1-\alpha$ tidak tergantung pada θ, maka selang random (T_1,T_2) disebut selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk parameter θ. $(1-\alpha)$ disebut sebagai koefisien kepercayaan dan T_1 dan T_2 disebut batas bawah dan batas atas untuk parameter θ. Nilai (t_1,t_2) dari selang random (T_1,T_2) juga disebut sebagai selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk parameter θ.

□

Untuk memperoleh informasi tentang parameter θ yang cukup berkualitas dari sampel maka harus diperhatikan panjang selang kepercayaan hasil observasi. Semakin panjang selang kepercayaan, semakin diyakini bawa selang tersebut memuat parameter yang sesungguhnya. Walaupun diyakini bahwa dengan selang yang panjang tersebut nilai parameter θ termuat didalamnya, tetapi selang yang panjang akan membuat informasi tentang nilai parameter θ yang sesungguhnya menjadi kabur. Idealnya, diperoleh selang kepercayaan yang relatif pendek dengan tingkat kepercayaan tinggi. Sebagai ilustrasi tentang hal ini misalnya dengan tingkat kepercayaan 95% diyakini bahwa umur rata-rata suatu transistor televisi adalah antara 6 dan 7 tahun. Tingkat kepercayaan tersebut tentu lebih baik dari pada tingkat kepercayaan 99%, bahwa umur transistor televisi antara 5 dan 8 tahun.

Contoh 2.8.1

Andaikan diketahui variabel random $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^n\right)$. Untuk memperoleh selang kepercayaan bagi μ_X adalah sebagai berikut. Menurut teorema 2.6.1 dan teorema limit pusat distribusi sampling dari $\overline{X} \sim N\left(\mu_X, {}^{\sigma_X^2}\!/_{n}\right)$. Dengan melambangkan $z_{\alpha/2}$ bagi nilai z yang luas daerah di sebelah kanan dan di bawah kurva normalnya adalah $\alpha/2$, maka didapat :

$$P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

sedangkan dalam hal ini, $\quad Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}}$

dengan demikian

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

dengan berturut-turut menggandakan setiap suku ketaksamaan tersebut dengan $\sigma_X / \sqrt{n}$ diikuti dengan mengurangkan $\overline{X}$ dari setiap suku, dan terakhir menggandakan ketaksamaan tersebut dengan –1 diperoleh :

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi μ_X adalah :

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

□

2.9 Statistik Cukup

Pada bagian terdahulu telah dijelaskan bahwa bahwa yang dijadikan sebagai penduga suatu paramater adalah statistik. Sebagai contoh salah satu penduga yang digunakan untuk menduga parameter μ_X adalah $\overline{X}$. Jika statistik $\overline{X}$ dianggap telah cukup memberi informasi yang dibutuhkan untuk pendugaan parameter μ_X maka statistik $\overline{X}$ disebut statistik cukup. Dengan demikian untuk menduga parameter μ_X, keterangan lengkap tentang nilai-nilai $x_1,\cdots,x_n$ tidak diperlukan lagi tetapi cukup dengan satu nilai mean $\overline{X}$ saja.

Statistik cukup statistik yang meringkas karakteristik suatu populasi sedemikian sehingga tidak ada informasi tentang parameter θ yang hilang. Jadi jika dikatakan bahwa suatu statisistik cukup tidak kehilangan informasi tentang parameter θ, maka hal ini berarti pula bahwa statistik cukup memuat informasi tentang parameter θ yang berada dalam sampel.

Definisi 2.9.1 Statistik Cukup

Jika $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan parameter θ, $\theta\in\Theta$ yang tidak diketahui maka statistik $T=t(X_1,\cdots,X_n)$ disebut sebagi statistik cukup untuk parameter θ, jika fungsi peluang bersyarat dari $X_1,\cdots,X_n$ yang diberikan oleh $T=t$ tidak tergantung (bebas dari) parameter θ.

Untuk beberapa kasus, ada kemungkinan terdapat lebih dari satu statistik cukup maka diperlukan definisi dari statistik cukup bersama.

Definisi 2.9.2 Statistik Cukup Bersama

Jika $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan parameter θ, $\theta \in \Theta$ yang tidak diketahui maka statistik $T_1, \cdots, T_n$ disebut sebagi statistik cukup bersama untuk parameter θ, jika fungsi peluang bersyarat dari $X_1, \cdots, X_n$ yang diberikan oleh $T_1 = t_1, \cdots, T_n = t_n$ tidak tergantug (bebas dari) parameter θ.

□

Dari definisi statistik cukup diatas, dapat dilihat bahwa sampel random $X_1, \cdots, X_n$ itu sendiri merupakan statistik cukup, tetapi dimensi sampel random adalah n lebih besar dari dimensi mean sampel yang berdimensi satu. Pengurangan dimensi statistik cukup menjadi sekecil-kecilnya tanpa menghilangkan informasi yang diperlukan dalam menduga parameter suatu distribusi, memegang peranan penting dalam statistik inferensia. Statistik cukup yang mempunyai dimensi terkecil ini disebut statistik cukup minimum. Berikut ini akan diberikan definisi formal dari statistik cukup minimum.

Definisi 2.9.3 Satistik Cukup Minimum

Suatu himpunan dari statistik cukup bersama didefinisikan sebagai statistik cukup minimum jika himpunan dari statistik cukup bersama tersebut adalah fungsi dari setiap himpunan yang lain dari statistik cukup.

□

Definisi 2.9.1 mempunyai kegunaan utama untuk menguji apakah suatu statistik merupakan statistik cukup atau bukan bagi suatu parameter. Definisi tersebut tidak menunjuk bagaimana cara memperoleh statistik cukup bagi parameter. Teorema berikut ini, yang dikenal sebagai teorema faktorisasi Neyman-Firsher memberikan suatu metode untuk menentukan statistik cukup. Statistik cukup yang diperoleh dengan menggunakan metode faktorisasi ini merupakan statistik cukup minimum. Teorema ini tidak akan dibuktikan (diluar cakupan skripsi ini namun akan digunakan dalam aplikasi.

Teorema 2.9.1 Faktorisasi Neymen-Fisher

Misalkan $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random berukuran n dari suatu populasi yang mempunyai fungsi peluang $f(\bullet;\theta)$ dengan θ adalah suatu parameter. Suatu statistik $T = t(X_1, \cdots, X_n)$ disebut statistik cukup jika dan hanya jika fungsi peluang bersama dari $X_1, \cdots, X_n$ yaitu : $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ dapat difaktorkan sedemikian sehingga :

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n;\theta) = g[t(x_1,\cdots,x_n;\theta)]h(x_1,\cdots,x_n) = g(t;\theta)h(x_1,\cdots,x_n) \quad (2.9.1.1)$$

Dengan fungsi $h(x_1, \cdots, x_n)$ bukan fungsi negatif dan tidak tergantug pada parameter θ, dan fungsi $g(t;\theta)$ adalah fungsi tidak negatif dan tergantung pada $x_1, \cdots, x_n$ hanya melalui fungsi t.

□

Contoh 2.9.1

Misalkan $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random dari populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2 yang diketahui. Jika $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ maka akan ditujukkan bahwa $\overline{X}$ adalah statistik cukup bagi μ_X.

Untuk menunjukkannya, diperlukan kesamaan berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu_X)\right]^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X})^2+2(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu_X)+(\overline{X}-\mu_X)^2\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu_X)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu_X)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu_X)+n(\overline{X}-\mu_X)^2$$

tetapi :

$$\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu_X)=2(\overline{X}-\mu_X)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$$
$$=2(\overline{X}-\mu_X)\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)-n\overline{X}\right]$$
$$=2(\overline{X}-\mu_X)\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)-\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$$
$$=2(\overline{X}-\mu_X)[0]=0$$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_X)^2$

Fungsi densitas kontinu bersama dari $X_1,\cdots,X_n$ adalah :

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n;\mu_X,\sigma_X^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-(X_i-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}$$
$$=\frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_X)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}n(\overline{X}-\mu_X)^2\right\}$$
$$=\left\{\frac{\exp\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)}{2\sigma_X^2}}{\left(\sigma_X\sqrt{2\pi}\right)^n}\right\}\exp\left\{\frac{-n(\overline{X}-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

Jika dipilih $h(X)=\dfrac{\exp\left(\dfrac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right)}{\left(\sigma_X\sqrt{2\pi}\right)^2}$ dan $g(\bar{X},\mu_X)=\exp\left\{\dfrac{-n(\bar{X}-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}$ maka menurut teorema faktorisasi Neymen-Fiser $T=\bar{X}$ adalah statistik cukup bagi μ_X.

□

Contoh 2.9.2

Misalkan $X_1,\cdots,X_n$ adalah sampel random dari populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ_X dan variansi σ_X^2 dan andaikan μ_X dan σ_X^2 tidak diketahui maka $\theta=(\mu_X,\sigma_X^2)\in\Theta=\{-\infty<\mu_X<+\infty,\sigma_X^2>0\}$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n;\mu_X,\sigma_X^2) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-(X_i-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} \\
&= \frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2X_i\mu_X+\mu_X^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_X^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu_X\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu_X^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Jika diambil :

$g\left(\sum X_i,\sum X_i^2;\mu_X,\sigma_X^2\right)=\sigma_X^{-n}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma_X^2}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu_X\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu_X^2\right]\right\}$ dan

$h(x)=(2\pi)^{-n/2}$ maka $T=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ adalah statistik cukup bersama bagi μ_X dan σ_X^2.

□

2.10 Teori Keputusan Statistik

2.10.1 Pengantar

Teori Keputusan Statistik merupakan perluasan dari teori statistik klasik (uji hipotesis, pendugaan parameter, dan selang kepercayaan). Teori ini muncul karena teori statistik klasik tidak cukup memadai untuk menyelesaikan permasalahan yang ada, seperti beberapa permasalahan berikut :

a. Sebuah perusahaan sepatu, berdasarkan hasil penjualannya ingin menentukan apakah: *meningkatkan produksi, mengurangi produksi, atau tetap berproduksi seperti sekarang.* Untuk ketiga kemungkinan nilai potensi pasar yang sesungguhnya dari hasil produksi, pihak perusahaan dapat menyediakan perhitungan kasar dari kemungkinan untung atau rugi. Dilihat dari kemungkinan tindakan atau keputusan tidak cukup untuk menggunakan kerangka kerja teori hipotesis.

b. Ada kalanya suatu masalah sepintas tampak sebagai masalah uji hipotesis dua-arah tetapi ternyata menunjuk satu dari tiga kemungkinan tindakan, seperti contoh berikut : Seorang dokter ingin mengetahui pengaruh dari obat baru terhadap tekanan darah. Hal yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan uji hipotesis dua-arah dengan hipotesis : obat baru tersebut tidak mempunyai pengaruh, lawan hipotesis alternatif : obat baru tersebut berpengaruh. Jika hipotesis ditolak, dan ingin mengetahui apakah tekanan darah itu ‘naik’ atau ‘turun’ maka pengaruh sebenarnya dari obat baru tersebut adalah salah satu dari tiga kemungkinan yaitu : ‘tidak berpengaruh’, ‘tekanan darah turun’ atau ‘tekanan darah naik’.

c. Sebuah organisasi konsumen ingin menyediakan laporan hasil test dari beberapa merek AC. Berdasarkan beberapa sampel AC organisasi ini ingin memberikan rangking dari merek-merek AC tersebut. Jika ada k merek AC yang berbeda maka ada $k!$ kemungkinan rangking atau tindakan. Masalah ini tidak dapat diselesaikan dengan teori statistik klasik (uji hipotesisi dan pendugaan parameter).

Tentunya dalam mengambil keputusan perlu dipertimbangkan akibat dari keputusan yang diambil dan tentu saja dipilih keputusan dengan akibat atau kerugian yang paling kecil. Masalah-masalah keputusan selanjutnya lebih lanjut dibicarakan dalam subbab ini yaitu Teori Keputusan Statistik.

2.10.2 Elemen-Elemen Teori Keputusan Statistik

Elemen-elemen dari teori keputusan statistik adalah :

1. Varibel random X.
2. $\aleph$ yang menyatakan himpunan semua nilai variabel random X.
3. Parameter θ yang menyatakan ‘keadaan alam’ (“*State of nature*”).
4. Ruang parameter Θ, yang menghimpun semua kemungkinan nilai parameter $\theta_k, k = 1,2,\ldots,n.$
5. Ruang keputusan D, yang menghimpun semua kemungkinan tindakan atau keputusan yang dapat diambil $d_j, j = 1,2,\ldots,m.$

6. Aturan keputusan $\delta(X)$, merupakan suatu fungsi $\delta(x)$ yang mengaitkan setiap $x \in \aleph$ dengan $d \in D$ sedemikian hingga $\delta(x) = d$.
7. Fungsi kerugian $\ell(\theta, d)$, yang menyatakan kerugian yang terjadi bila dipilih suatu keputusan d.
8. Fungsi resiko $R(\theta, \delta) = \mathrm{E}[\ell(\theta, \delta(\aleph))]$

Selajutnya masing-masing elemen akan dibahas lebih lanjut sebagai berikut. Elemen pertama dari teori keputusan statistik adalah variabel random X yang mempunyai distribusi yang tergantung pada parameter θ yaitu $f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)$. Parameter θ menyatakan *"keadaan alam" (State of nature)* dan himpunan dari semua kemungkinan nilai θ disebut *ruang parameter* dan dilambangkan dengan Θ. Himpunan semua kemungkinan nilai variabel random X dilambangkan dengan $\aleph$.

Pengambil keputusan memiliki himpunan D disebut *sebagai Ruang keputusan*, yang anggotanya adalah semua kemungkinan tindakan atau keputusan. Berikut diberikan ruang keputusan untuk beberapa contoh masalah dikaitkan dengan pengujian hipotesis dan pendugaan parameter.

Contoh 2.10.2.1

Dari contoh **a** diatas, $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ dimana d_1 adalah keputusan untuk menaikkan produksi, d_2 adalah keputusan untuk tetap berproduksi seperti biasa, dan d_3 adalah keputusan untuk menurunkan produksi.

Contoh 2.10.2.2

Dari contoh **c,** jika dicoba untuk AC yang berjumlah 3 maka $D = \{(d_1, d_2, d_3) : 1 \le d_1 \ne d_2 \ne d_3 \le 3\}$, dimana (d_1, d_2, d_3) mempunyai arti d_1 lebih baik dari d_2 dan d_2 lebih baik dari d_3. Jika ingin melakukan uji hipotesis dan pendugaan maka :

Uji Hipotesis :

$D = \{0,1\}$ dimana 0 berarti 'hipotesis diterima' dan 1 berarti 'hipotesis ditolak'.

Pendugaan :

$D = R$, R garis real.

□

Elemen selanjutnya adalah *fungsi kerugian (loss Function)* ℓ yang menyatakan kerugian yang terjadi bila dipilih suatu keputusan d, dan pada setiap $\theta \in \Theta$ dan $d \in D$ terkait suatu bilangan $\ell(\theta, d)$ dengan syarat: $\ell(\theta, d) \ge 0$, $\forall \theta \in \Theta \wedge x \in \aleph$ dan $\ell(\theta, d) = 0$ jika $d = \theta$, $\forall \theta \in \Theta \wedge x \in \aleph$. Untuk tujuan teoritis dapat dipilih fungsi kerugian yang sesuai dengan permasalahan. Fungsi kerugian yang biasa digunakan dalam pengujian hipotesis maupun pendugaan parameter θ adalah "kerugian kuadrat" dan "kerugian 0-1", yaitu :

a. Fungsi kerugian kuadrat : $\ell(\theta, d) = (\theta - d)^2$, untuk menduga parameter θ.

b. Fungsi kerugian 0-1 : $\ell(\theta, d) = 1$ jika $\theta \in \Theta_d$ (keputusan benar)

$\ell(\theta, d) = 0$ untuk yang lain (keputusan salah).

untuk menguji Hipotesis $H : \theta \in \Theta_0$ lawan $K : \theta \in \Theta_1$.

Selanjutnya akan dibicarakan proses pengambilan keputusan yang dimulai dengan definisi berikut :

Definisi 2.10.2.1 Masalah Keputusan

Suatu Masalah keputusan yang umum adalah suatu tigaan (Θ, D, ℓ) dan variabel random X. Variabel random X mempunyai fungsi densitas $f_{X_1,\ldots,X_n|\theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)$, θ tidak diketahui tetapi $\theta \in \Theta$.

□

Untuk mengambil suatu keputusan tentunya diperlukan suatu aturan. Aturan keputusan tersebut akan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.10.2.2 Aturan Keputusan teracak dan tak teracak

Untuk Suatu masalah keputusan $(\Theta, D, \ell), X$, suatu aturan keputusan (*tak teracak*) yaitu, suatu fungsi $\delta(x)$ yang mengaitkan setiap $x \in \aleph$ dengan suatu anggota d dari D sedemikian hingga $\delta(x) = d$.

Suatu aturan *keputusan teracak* ialah suatu fungsi $\delta(\bullet)$ yang menentukan suatu distribusi peluang untuk setiap $x \in \aleph$ sehingga berdasarkan itu dipilih suatu anggota d dari D. Ditribusi peluang ini akan dinyatakan dengan $\delta(x)$.

□

Seorang penduga tidak dapat mengharap untuk menentukan kerugian minimum untuk setiap sampel, tetapi dapat dicoba agar kerugian menjadi minimum secara rata-rata. Sehingga untuk memilih penduga yang meminimumkan kerugian setiap sampel sama saja memilih penduga yang meminimumkan kerugian secara rata-rata. Penduga yang meminimumkan kerugian secara rata-rata disebut sebagai *fungsi resiko* yang akan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.10.2.3 Fungsi Resiko *(Risk function)*

Andaikan diketahui fungsi kerugian $\ell(\theta;\delta(x))$. Fungsi resiko (dinotasikan dengan $R(\theta,\delta)$) dari suatu aturan keputusan $\delta(X)$ untuk suatu masalah keputusan $(\Theta, D, \ell), X$ (harapan kerugian atau rata-rata kerugian bila θ menyatakan keadaan alam yang sebenarnya dan keputusan dipilih menurut aturan $\delta(\bullet)$) adalah :

$$R(\theta,\delta) = \mathrm{E}[\ell(\theta,\delta(X))]$$

□

Contoh 2.10.2.3

Seorang tuan tanah menduga bahwa tanah miliknya mengandung minyak. Dia memiliki 3 pilihan yaitu mengebornya, menjual seluruhnya dan menjual sebagian, untuk menentukan pilihan maka diselesaikan sebagai berikut : Andaikan ada 2 kemungkinan dari nilai θ yang dinyatakan dengan θ_1 jika suatu daerah mengandung minyak bumi dan θ_2 jika tidak. Andaikan juga diketahui 3 kemungkinan dari tindakan (keputusan) yaitu d_1 jika diputuskan untuk mengebornya, d_2 jika diputuskan untuk menjual seluruhnya, dan d_3 jika diputuskan untuk menjual sebagian. Kerugian dari masing-masing tindakan dinyatakan dalam tabel fungsi kerugian berikut :

Tabel 2.10.2.1. Fungsi kerugian $\ell(\theta,d)$.

		d_1	d_2	d_3
(ada minyak)	θ_1	0	10	15
(tidak ada minyak)	θ_2	12	1	6

Dari penelitian didapat informasi tentang susunan batuan yang hasilnya dinyatakan dalam variabel random X yang mempunyai kemungkinan nilai kode 0 dan 1, dan peluang $p(x,\theta)$ dinyatakan dalam tabel berikut

Tabel 2.10.2.2. $p(x,\theta_i)$ $i=1,2$.

		$x=0$	$x=1$
(ada minyak)	θ_1	0.3	0.7
(tidak ada minyak)	θ_2	0.6	0.4

Sehingga X menyatakan susunan batuan, dan ketika tanah itu mengandung minyak, jika diketahui susunan batuan berkode 0 $(x=0)$ dengan peluang 0.3 dan susunan batuan berkode 1 $(x=1)$ dengan peluang 0.7. Tanah itu tidak mengandung minyak jika diketahui susunan batuan berkode 0 dan 1 dengan peluang 0.6 dan 0.4.

Semua kemungkinan aturan keputusan (tak teracak) dinyatakan ditabel berikut :

Tabel 2.10.2.3. Kemungkinan aturan keputusan (tak teracak) $\delta_i(x)$.

δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x=0$	d_1	d_1	d_1	d_2	d_2	d_2	d_3	d_3	d_3
$x=1$	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3

Kemungkinan nilai resiko dapat dinyatakan dalam tabel berikut :

Tabel 2.10.2.4. Titik-titik resiko $(R(\theta_1,\delta_i), R(\theta_2,\delta_i))$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R(\theta_1,\delta_i)$	0	7	3.5	3	10	6.5	1.5	8.5	5
$R(\theta_2,\delta_i)$	12	7.6	9.6	5.4	1	3	8.4	4.0	6

Nilai-nilai resiko tersebut dihitung sebagai berikut :

resiko δ pada saat θ adalah :

$$R(\theta,\delta) = \mathrm{E}[\ell(\theta,\delta(X))] = \ell(\theta,d_1)P[\delta(X)=d_1] + \ell(\theta,d_2)P[\delta(X)=d_2] + \ell(\theta,d_3)P[\delta(X)=d_3]$$

Sebagai contoh :

$$R(\theta_1, d_2) = 0(0.3) + 10(0.7) = 7.$$
$$R(\theta_1, d_2) = 12(0.6) + 1(0.4) = 7.6.$$

□

Masalah selanjutnya adalah memilih salah satu yang terbaik dari sekian kemungkinan aturan keputusan. Tentunya dalam memilih akan dipilih aturan keputusan dengan resiko yang terkecil, yang lebih jelasnya akan dimulai dengan definisi berikut.

Definisi 2.10.2.4 Keputusan yang Lebih Baik

Untuk setiap masalah keputusan $(\Theta, D, \ell), X$, aturan keputusan $\delta_2(\bullet)$ dikatakan lebih baik dari pada aturan keputusan $\delta_1(\bullet)$ bila :

$$\begin{cases} R(\theta, \delta_2) \le R(\theta, \delta_1), & \text{untuk semua } \theta \in \Theta. \\ R(\theta^*, \delta_2) < R(\theta^*, \delta_1), & \text{untuk paling sedikit satu } \theta^* \in \Theta. \end{cases}$$

Dikatakan $\delta_1(\bullet)$ tidak lebih baik dari pada $\delta_2(\bullet)$ bila :

$$R(\theta, \delta_2) \le R(\theta, \delta_1), \text{ untuk semua } \theta \in \Theta.$$

□

Dalam praktik, jika dipilih aturan keputusan pada definisi 2.10.2.4 akan mengalami kesulitan, karena dengan definisi 2.10.2.4 tidak ada aturan keputusan δ yang terbaik untuk seluruh keputusan. Jika δ_1 dan δ_2 adalah dua aturan keputusan , dapat terjadi δ_1 lebih baik dari δ_2 pada θ tertentu tetapi tidak pada θ lainya. Sebagai contoh δ_4 dan δ_6 dari contoh 2.10.2.3 (tabel titik-titik resiko) terlihat bahwa $R(\theta_1, \delta_4) < R(\theta_1, \delta_6)$ tetapi $R(\theta_2, \delta_4) > R(\theta_2, \delta_6)$.

Salah satu jalan untuk menentukan aturan keputusan yang terbaik dapat diperoleh dengan menggunakan *kriteria menurut Bayes*

2.10.3 Kriteria Bayes

Sudut pandang Bayes memandang θ secara khusus, yaitu : θ dipandang sebagai varaiabel random. Jika diketahui $f_{X_1,\ldots,X_n|\theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)$ adalah distribusi bersyarat dari variabel random X untuk $\theta = \theta$. Selanjutnya dapat dicari $R(\theta,\delta) = \mathrm{E}[\ell(\theta,\delta(X)) \mid \theta = \theta]$ yaitu harapan kerugian jika dipilih aturan keputusan δ dan $\theta = \theta$. Karena θ dipandang sebagai variabel random maka lebih lanjut dapat menentukan harapan kerugian secara rata-rata dari θ yang berbeda-beda. Harapan kerugian ini disebut sebagai *Resiko Bayes dari* aturan keputusan δ, yang akan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.10.3.1 Resiko Bayes

Resiko Bayes dari aturan keputusan δ (dilambangkan dengan $r(\delta)$) adalah nilai rata-rata dari $R(\theta,\delta)$ yaitu : $r(\delta) = \mathrm{E}[R(\theta,\delta)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\ell(\theta,\delta(X))]]$.

□

Contoh 2.10.3.1

Kembali ke contoh 2.10.2.3. Jika berdasarkan pengalamannya seorang ahli minyak menyatakan bahwa peluang menemukan minyak di tempat tersebut adalah 0.2. Maka parameter θ dapat dipandang sebagai variabel random dengan kemungkinan nilai θ_1 dan θ_2 dengan peluang $\pi(\theta_1) = 0.2$ dan $\pi(\theta_2) = 0.8$.

Resiko Bayes dari aturan keputusan δ adalah : $r(\delta) = 0.2R(\theta_1,\delta) + 0.8R(\theta_2,\delta)$, yang selengkapnya dinyatakan dalam tabel berikut :

Tabel 2.10.3.1 Resiko Bayes

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r(\delta_i)$	9.6	7.48	8.38	4.92	2.8	3.7	7.02	4.9	5.8

Dalam pandangan Bayes aturan keputusan δ lebih baik dari aturan keputusan δ' jika dan hanya jika δ memiliki resiko Bayes terkecil. Berikut akan didefinisikan *aturan Bayes*.

Definisi 2.10.3.2 Aturan Bayes

Aturan keputusan δ^* disebut *aturan Bayes*, jika meminimumkan resiko Bayes yakni:

$r(\delta^*) = \min_{\delta} r(\delta)$.

Contoh 2.10.3.2

Kembali ke contoh 2.10.3.1 dari tabel 2.10.3.1 dapat dilihat bahwa aturan δ_5 adalah aturan Bayes.

Sebagai catatan : penentuan aturan keputusan Bayes didasarkan atas $r(\delta) = \sum_{\theta} R(\theta,\delta)\pi(\theta)$, jika θ diskret dengan fungsi peluang $\pi(\theta)$ dan $r(\delta) = \int R(\theta,\delta)\pi(\theta)\, d\theta$, jika θ kontinu dengan fungsi densitas $\pi(\theta)$. Perbandingan seperti itu dapat pula dibuat dengan interprestasi π yang berbeda. π tidak diinterprestasikan sebagai densitas prior, tetapi diinterprestasikan sebagai fungsi "pembobot" untuk nilai rata-rata dari fungsi $R(\theta,\delta)$.

Contoh 2.10.3.1.3

Kembali ke contoh 2.10.2.3. Seorang ahli minyak merasa bahwa kedua nilai resiko sama. Maka dalam membandingkan aturan keputusan menggunakan rata-rata kedua resiko yaitu : $\frac{1}{2}[R(\theta_1,\delta)+R(\theta_2,\delta)]$. Tetapi ini hanya untuk membandingkan aturan keputusan dengan peluang θ_1 dan θ_2 sama.

BAB III
METODE BAYES

3.1 Pengantar

Kekhasan Metode Bayes, terletak pada interprestasi peluang suatu kejadian. Peluang (menurut Bayes) diinterprestasikan sebagai ukuran derajat keyakinan seseorang tentang nilai suatu parameter yang tidak diketahui, yang disebut sebagai **peluang subyektif.** Peluang subyektif dapat didasarkan atas pengalaman, pengetahuan, atau keyakinan seseorang tentang suatu nilai parameter yang tidak diketahui.

Peluang subyektif selanjutnya digunakan untuk mendefinisikan apa yang disebut sebagai **disribusi prior (awal)** suatu parameter populasi, sehingga Inferensi Bayesian memandang parameter sebagai *variabel random* yang diketahui distribusi priornya. Distribusi prior merangkum derajat keyakinan seseorang tentang nilai parameter yang tidak diketahui. Setelah distribusi prior tertentu, maka bersama dengan hasil observasi dari sampel digunakan untuk menyusun **distribusi posterior**. Distribusi posterior ini disusun berdasarkan informasi awal subyektif (derajat keyakinan seseorang) tentang parameter populasi dan informasi sampel obyektif. Distribusi posterior kemudian digunakan untuk menduga parameter atau menentukan selang kepercayaan suatu parameter yang tidak diketahui.

Pembahasan pada bab ini akan dimulai dengan membahas distribusi prior dan distribusi posterior, distribusi prior sekawan dan distribusi posteriornya.

3.2 Distribusi Prior (awal) dan Distribusi Posterior

Dalam masalah pendugaan parameter suatu populasi θ dapat didasarkan semata-mata pada informasi yang diperoleh dari suatu sampel random yang ditarik dari suatu populasi tersebut. Dalam banyak situasi, tambahan informasi mengenai nilai parameter θ yang tidak diketahui mungkin tersedia. Informasi tambahan ini dapat digunakan untuk menyusun distribusi prior parameter θ, yang bersama-sama informasi dari sampel dapat digunakan untuk menyusun distribusi posterior yang berguna sebagai dasar dalam menyusun dugaan suatu nilai paramater atau menyusun selang kepercayaan suatu nilai parameter θ yang tidak diketahui.

Definisi 3.2.1 Distribusi Prior

Distribusi prior suatu parameter θ adalah fungsi peluang atau densitas yang menggambarkan derajat keyakinan mengenai nilai θ . Berdasarkan observasi (awal) variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ yang distribusinya tergantung pada θ.

□

Distribusi prior dinotasikan dengan $f_\Theta(\theta)$ untuk kontinu atau $P_\Theta(\theta)$ diskrit dimana Θ adalah ruang parameter yang berhubungan dengan variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ dan θ sebagai nilai observasi dari parameter θ.

Contoh 3.2.1

3 orang menemukan sekeping uang logam 50-an baru, dan tertarik untuk menduga parameter θ yaitu peluang munculnya sisi gambar pada pelemparan sekali. Orang pertama berpendapat nilai θ haruslah terletak antara 0 dan 1, sehingga distribusi prior menurutnya adalah :

$$f_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}1\,,\ 0<\theta<1\\ 0\,,\ \text{Yang lain.}\end{cases}$$

Orang ke-2 berpendapat, bahwa peluang nilai θ adalah sama yaitu ½, sehingga menurut pendapatnya distribusi prior bagi θ adalah :

$$p_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,, & \theta=1\\ \frac{1}{2}\,, & \theta=0\\ 0\,, & \text{yang lain.}\end{cases}$$

Orang ke-3 berpendapat bahwa peluang nilai θ tidak sama (menurutnya uang tersebut tidak simetris), maka distribusi prior menurutnya adalah :

$$p_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{4}\,, & \theta=0.4 \text{ atau } \theta=0.6\\ \frac{1}{2}\,, & \theta=0.5\\ 0\,, & \text{yang lain.}\end{cases}$$

Dari contoh di atas ada 3 distribusi prior yang berbeda dari parameter yang sama, demikian pula ada kemungkinan dua atau lebih orang mengamati sampel yang sama akan sampai pada nilai dugaan yang berbeda, karena perbedaan interprestasi informasi prior.

□

Distribusi prior dapat pula dinyatakan dalam fungsi peluang tertentu, seperti contoh berikut:

Contoh 3.2.2

Diterima 1000 buah barang dari perusahaan pemasok barang. Di dalamnya terdapat sejumlah barang cacat sebanyak θ (yang tidak diketahui). Dari pengalaman transaksi terdahulu ditemukan bahwa 5% dari barang tersebut cacat. Jika diasumsikan setiap barang mempunyai peluang cacat sebesar 0.05 dan setiap barang yang cacat saling bebas, maka distribusi prior θ adalah distribusi binom dengan $n = 1000$, $p = 0{,}05$ yaitu :

$$p_\Theta(\theta) = \binom{1000}{\theta}(0.05)^\theta (0.95)^{1000-\theta} \quad , \theta = 0,1,\ldots,1000.$$

□

Definisi 3.2.2 Distribusi Posterior

Distribusi posterior untuk θ adalah fungsi peluang atau densitas bersyarat dari θ ,jika diketahui nilai sampelnya, yaitu :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n) = \frac{f_{X_1,\ldots,X_n;\Theta}(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta) f_\Theta(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta) f_\Theta(\theta)} & \text{, untuk kasus kontinu.} \\ \dfrac{f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta) p_\Theta(\theta)}{\sum_\Theta f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta) p_\Theta(\theta)} & \text{, untuk kasus diskrit.} \end{cases}$$

□

Distribusi prior θ menggambarkan derajat keyakinan seseorang tentang lokasi nilai θ sebelum penarikan sampel, dan distribusi posterior menggambarkan derajat keyakinan seseorang tentang lokasi nilai θ berdasarkan distribusi prior dan informasi yang terkandung dalam sampel.

Contoh 3.2.3

Kembali ke contoh 3.2.1. Jika uang 50-an dilempar sekali dan didefinisikan $x = 1$ jika diperoleh muka, dan $x = 0$ jika diperoleh belakang , maka fungsi peluang untuk sampel ini adalah : $P_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x \mid \theta) = \begin{cases} 1-\theta \text{ , } & x = 0 \\ \theta \text{ , } & x = 1 \end{cases}$

Jika diasumsikan distribusi priornya : $\quad f_\Theta(\theta) = 1 \quad , 0 < \theta < 1$

maka fungsi densitas bersama untuk $X_1,\ldots,X_n$ dan Θ adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x\,|\,\theta) = \begin{cases} 1-\theta\,, & x=0\,,\,0<\theta<1 \\ \theta\,, & x=1\,,\,0<\theta<1 \end{cases}$$

fungsi densitas marjinal untuk $X_1,\ldots,X_n$ adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x) = \begin{cases} \int_0^1 (1-\theta)d\theta, & x=0,\,0<\theta<1 \\ \int_0^1 \theta d\theta & ,x=1,\,0<\theta<1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,x=0,\,0<\theta<1 \\ \frac{1}{2} & ,x=1,\,0<\theta<1 \end{cases}$$

Karena $\int_0^1 (1-\theta)d\theta = \frac{1}{2}$ dan $\int_0^1 \theta\, d\theta = \frac{1}{2}$ maka $f_{X_1,\ldots,X_n}(x) = \dfrac{1}{2}$ $,0<\theta<1\,, x=0,1$

distribusi posterior untuk Θ adalah :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n} = \begin{cases} 2(1-\theta)\,, & x=0\,,\,0<\theta<1 \\ 2\theta & ,\,x=1\,,\,0<\theta<1 \end{cases}$$

sebelum melempar koin diperkirakan peluang θ yang lebih dari $\frac{1}{2}$ adalah $\frac{1}{2}$, setelah melempar koin dan diperoleh sisi muka $(x=1)$, peluangnya adalah : $\int_{1/2}^1 2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}$, atau jika diperoleh sisi belakang $(x=0)$, peluangnya adalah : $\int_{1/2}^1 2(1-\theta)d\theta = \frac{1}{4}$. Jadi menurut distribusi posterior bahwa peluang θ yang lebih dari $\frac{1}{2}$ adalah $\frac{3}{4}$ atau $\frac{1}{4}$, tergantung apakah sisi muka muncul ketika koin dilempar.

Jika diasumsikan distribusi priornya adalah :

$$p_{\Theta}(\theta)\begin{cases}\frac{1}{4} \text{ , } \theta = 0.4 \text{ atau } \theta = 0.6 \\ \frac{1}{2} \text{ , } \theta = 0.5\end{cases}$$

maka fungsi densitas bersama untuk $X_1,\ldots,X_n$ dan Θ adalah :

$$f_{X_1,\ldots X_n;\Theta}(x;\theta) = \begin{cases}\frac{1}{4}(1-\theta) \text{ , } x = 0 \text{ , } \theta = 0.4 \text{ atau } \theta = 0.6 \\ \frac{1}{2}(1-\theta) \text{ , } x = 0 \text{ , } \theta = 0.5 \\ \frac{1}{4}\theta \text{ , } x = 1 \text{ , } \theta = 0.4 \text{ atau } \theta = 0.6 \\ \frac{1}{2}\theta \text{ , } x = 1 \text{ , } \theta = 0.5\end{cases}$$

fungsi densitas marjinal untuk $X_1,\ldots,X_n$ akan dihitung sebagai berikut :

	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.6$
$x = 0$	$\frac{1}{4}(1-0.4) = \frac{1}{4}(0.6) = 0.15$	$\frac{1}{2}(1-0.5) = \frac{1}{2}(0.5)$ $= 0.25$	$\frac{1}{4}(1-0.6) = \frac{1}{4}(0.4) = 0.1$
$x = 1$	$\frac{1}{4}(0.4) = 0.1$	$\frac{1}{2}(0.5) = 0.25$	$\frac{1}{4}(0.6) = 0.15$

Jadi fungsi densitas marjinal untuk $X_1,\ldots,X_n$ adalah:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x) = \begin{cases}\frac{1}{4}(1-0.4)+\frac{1}{2}(1-0.5)+\frac{1}{4}(1-0.6) & \text{, } x = 0 \\ \frac{1}{4}(0.4)+\frac{1}{2}(0.5)+\frac{1}{4}(0.6) & \text{, } x = 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\frac{1}{4}(0.6)+\frac{1}{2}(0.5)+\frac{1}{4}(0.4) & \text{, } x = 0 \\ \frac{1}{4}(0.4)+\frac{1}{2}(0.5)+\frac{1}{4}(0.6) & \text{, } x = 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}0.15+0.25+0.1 & \text{, } x = 0 \\ 0.1+0.25+0.15 & \text{, } x = 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{, } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, } x = 1\end{cases}$$

Distribusi posterior untuk Θ dihitung sebagai berikut :

	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.6$
$x = 0$	$\frac{0.15}{0.5} = 0.3$	$\frac{0.25}{0.5} = 0.5$	$\frac{0.1}{0.5} = 0.2$
$x = 1$	$\frac{0.1}{0.5} = 0.2$	$\frac{0.25}{0.5} = 0.5$	$\frac{0.15}{0.5} = 0.3$

Jadi distribusi posterior untuk Θ adalah :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x=0) = \begin{cases} 0.3 & , \theta = 0.4 \\ 0.5 & , \theta = 0.5 \\ 0.2 & , \theta = 0.6 \end{cases}$$

dan $$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x=1) = \begin{cases} 0.2 & , \theta = 0.4 \\ 0.5 & , \theta = 0.5 \\ 0.3 & , \theta = 0.6 \end{cases}$$

□

Contoh 3.2.4

Kembali ke contoh 3.2.2. 1000 barang diterima dari perusahaan pemasok barang, dengan jumlah cacat θ. Distribusi prior untuk θ adalah :

$$p_\Theta(\theta) = \binom{1000}{\theta}(0.05)^\theta (0.95)^{1000-\theta} \quad , \theta = 0,1,\ldots,1000$$

jika diambil sampel (acak) sebanyak 10 barang dari 1000 barang tersebut dan andaikan $X_1,\ldots,X_n$ adalah jumlah barang yang cacat dalam sampel, maka distribusi untuk $X_1,\ldots,X_n$, jika diketahui $\Theta=\theta$ adalah distribusi hipergeometrik,

yaitu : $$p_{X_1,\ldots,X_n;\Theta}(x\mid\theta)=\frac{\binom{\theta}{x}\binom{1000-\theta}{10-x}}{\binom{1000}{10}}\ ,\ x=0,1,2,\ldots,10$$

dan fungsi peluang untuk $X_1,\ldots,X_n$ dan Θ adalah :

$$p_{X_1,\ldots,X_n;\Theta}(x;\theta)=\frac{\binom{\theta}{x}\binom{1000-\theta}{10-x}}{\binom{1000}{10}}\binom{1000}{\theta}(0.05)^{\theta}(0.95)^{1000-\theta}$$

$$=\binom{10}{x}\binom{990}{\theta-x}(0.05)^{\theta}(0.95)^{1000-\theta}\ ,\ x=0,1,2,\ldots,10$$

fungsi peluang marjinal untuk $X_1,\ldots,X_n$ adalah :

$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\theta=x}^{990+x}\binom{10}{x}\binom{990}{\theta-x}(0.05)^{\theta}(0.95)^{1000-\theta}$$

$$=\binom{10}{x}(0.05)^{x}(0.95)^{10-x}\sum_{\theta-x}^{990}\binom{990}{\theta-x}(0.05)^{\theta-x}(0.95)^{1000-(\theta-x)}$$

$$=\binom{10}{x}(0.05)^{x}(0.95)^{10-x}\ ,\ x=0,1,\ldots,10$$

yaitu $X_1,\ldots,X_n$ berdistribusi Binomial dengan $n=10$, $p=0.05$.

Distribusi posterior untuk Θ adalah :

$$f_{\Theta|X}(\theta\mid x)=\frac{p_{X_1,\ldots,X_n,\Theta}(x;\theta)}{p_{X_1,\ldots,X_n}(x)}=\binom{990}{\theta-x}(0.05)^{\theta-x}(0.95)^{990-(\theta-x)},\ \theta=x,x+1,\ldots,990+x,$$

binomial dengan $n=990,\ p=0.05$, digeser x satuan ke kanan. □

3.3 Distribusi Prior Sekawan dan Distribusi Posteriornya

Definisi 3.2.2 merupakan suatu cara untuk memperbaiki fungsi densitas karena adanya informasi sampel. Tetapi dalam praktik banyak dijumpai kesulitan dalam memperoleh distribusi posterior dengan definisi 3.2.2. Sebagai contoh jika distribusi $X_1,\cdots,X_n$ adalah $N(\theta,\sigma^2)$ dan distribusi θ adalah $B(\mu,\beta)$ maka sulit untuk menentukan distribusi posteriornya. Satu cara untuk menghindari kesulitan ini adalah dengan *membatasi diri pada distribusi prior dalam keluarga distribusi tertentu yang tergantung pada bentuk fungsi likelihoodnya*. Hal ini akan dibicarakan lebih lanjut dibawah ini.

Karena kesulitan-kesulitan yang mungkin dihadapi dalam menggunakan definisi 3.2.2, statistisi Bayesian telah mengembangkan konsep tentang *distribusi prior sekawan*, yang merupakan keluarga distribusi yang memudahkan beban hitungan apabila digunakan sebagai distribusi prior. Tentu saja distribusi posterior tergantung pada fungsi likelihood dan distribusi prior. Biasanya apabila anggapan tentang populasi atau proses yang diambil sampelnya telah dibuat, misalnya anggapan bahwa populasi beristribusi Normal atau anggapan bahwa proses itu merupakan proses bernoulli, maka fungsi likelihoodnya tertentu. Dengan kata lain apabila model yang menghasilkan data telah dinyatakan, maka fungsi likelihoodnya diketahui. Untuk setiap model dan fungsi likelihood statistisi Bayesian berusaha menentukan keluarga distribusi prior sekawannya. Ini adalah himpunan yang tiap anggotanya dapat dikombinasikan dengan fungsi likelihood yang dipunyai tanpa menimbulkan kesulitan. Perlu ditegaskan bahwa sifat "sekawan " suatu keluarga distribusi dalam setiap situasi tergantung pada bentuk fungsi likelihood, dan fungsi likelihood ini tergantung pada model statistik yang dipilih. Berikut akan didefinisikan keluarga disribusi sekawan.

Definisi 3.3.1 Keluarga Distribusi Prior Sekawan

Andaikan **F** didefinisikan sebagai kelas dari fungsi densitas $f_{X_1,\cdots,X_n|\Theta}(x_1,\cdots,x_n \mid \theta)$. Kelas **P** dari distribusi prior disebut keluarga sekawan untuk **F** jika distribusi posterior $\pi_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)$ ada dalam kelas **P** untuk semua $x \in S$ dimana S adalah ruang sampel dan $\pi \in$ **P.**

□

Tiga sifat yang penting dari keluarga distribusi sekawan yaitu :

1. **Secara matematis dapat ditelusuri.**

   Sifat ini adalah sifat yang mendorong dikembangkannya distribusi prior sekawan. Suatu distribusi prior dapat ditelusuri secara matematis apabila :

   a. Cukup mudah untuk menentukan distribusi posteriornya dari distribusi prior dan fungsi likelihood yang dipunyai.

   b. Menghasilkan distribusi posterior yang juga merupakan anggota keluarga sekawan yang sama, sehingga tidak sulit menentukan teorema Bayes berturut-turut.

   c. Dengan mudah dapat dihitung nilai harapan dari distribusi prior

2. **Keluasan.**

   Tentu saja distribusi prior harus mencerminkan informasi prior dari statistisi. Karena statistisi yang berbeda biasanya mempuyai informasi prior yang berbeda, keluarga distribusi sekawan sejauh mungkin harus meliputi ditribusi dengan parameter-parameter yang berbeda, sehingga dapat memiliki berbagai macam informasi prior yang berbeda-beda. Sifat ini dinamakan “keluasan”. Apabila suatu keluarga distribusi tidak cukup luas dalam arti ini, mungkin akan tidak terdapat anggota keluarga yang mencerminkan dengan baik informasi prior statistisi. Apabila demikian halnya, maka statistisi tidak dapat mengambil manfaat sifat "secara matematis dapat ditelusuri keluarga itu".

3. **Mudah diinterprestasikan.**

Keluarga disribusi sekawan harus sedemikian rupa sehingga dapat dinterprestasikan dengan mudah oleh orang yang mempunyai informasi prior. Informasi prior biasannya tediri dari paling tidak sebagian dari hasil sampel sebelumnya. Jadi, cara termudah untuk menginterprestasikan distribusi prior adalah dalam bentuk hasil sampel sebelumnya. Umumnya distribusi prior sekawan diinterprestasikan dengan cara ini.

Hal Penting yang perlu diingat bahwa distribusi prior sekawan adalah "sekawan" hanya terhadap fungsi likelihood yang dipunyai (yakni dengan model statistik tertentu). Keluarga-keluarga distribusi sekawan yang bersesuaian dengan fungsi likelihoodnya telah banyak dikembangkan. Pada tulisan ini akan dibahas keluarga sekawan untuk distribusi binomial, poison, eksponensial dan normal.

3.3.1 Distribusi Prior Sekawan untuk Distribusi Binomial.

Proses bernoulli adalah proses penghasil data dengan dua hasil yang mungkin ("sukses" dan "gagal") untuk tiap percobaan (trial), sedemikian sehingga peluang untuk hasil-hasil ini tetap sama dari percobaan ke satu ke percobaan berikutnya (stasioner), dan hasil-hasil percobaan ini saling bebas. Alternatifnya suatu proses bernoulli dapat dipikirkan dalam bentuk "dapatnya ditukar", yang berarti bahwa barisan percobaan-percobaan bernoulli yang dapat dipertukarkan, atau berkemungkinan sama, apabila barisan-barisan ini terdiri dari banyak sukses yang sama dan banyak gagal yang sama. Yakni, barisan yang berbeda berkemungkinan sama tanpa memandang pola sukses gagal dalam urutan itu, dan ini benar untuk setiap banyak percobaan dengan sembarang banyak sukses. Disini dianggap peluang sukses P dapat menjalani setiap nilai real antara 0 dan 1, sehingga distribusi prior untuk proses bernoulli adalah kontinu.

Variabel random X yang menyatakan banyaknya "sukses" dalam n ulangan suatu percobaan/proses bernoulli disebut variabel random binomial. Distribusi peluang bagi variabel random binomial ini disebut distribusi Binomial, yang rumusnya adalah : $B(x,n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ untuk $x=1,2,3,\ldots,n$

Dengan menggunakan definisi 3.2.2, statistisi dapat memilih distribusi prior kontinu, dan kemudian mendapatkan distribusi posterior setelah memperoleh observsi sampel. Hal ini dapat merupakan tugas yang sulit, kecuali distribusi prior itu adalah anggota keluarga distribusi yang sekawan dengan proses bernoulli, yakni keluarga distribusi Beta.

Fungsi densitas distribusi Beta serupa dengan distribusi peluang Binomial. Apabila distribusi peluang P adalah distribusi Beta dengan parameter r dan n dimana $n>r>0$ maka :

$$f(P)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}P^{r-1}(1-P)^{n-r-1}\ ;\ 0\leq P\leq 1$$

ungkapan matematik ini bersesuaian dengan fungsi peluang binom dengan $(n-1)$ mengganti n, dan $(n-r-1)$ mengganti $(r-1)$. Tetapi distribusi Beta adalah kontinu, sedangkan distribusi Binom diskrit. Penjelasan tentang perbedaan ini sangat sederhana; dalam distribusi Binom kuantitas yang tidak diketahu adalah r, yakni banyaknya sukses dan jelas r hanya dapat menjalani bilangan bulat, maka diskrit. Dalam distribusi Beta, kuantitas yang tidak diketahui adalah P yang merupakan peluang sukses dalam suatu percobaan bernoulli. Yang membatasi nilai peluang ini hanyalah bahwa nilainya haruslah dari 0 sampai dengan 1. Maka cukup beralasan untuk menganggap bahwa P dapat menjalani banyak tak hingga nilai-nilai real dari 0 sampai dengan 1 dan menggunakan distribusi kontinu (seperti distribusi Beta) sebagai distribusi P.

Berikut akan dibuktikan kebenaran pernyataan bahwa anggota keluarga distribusi yang sekawan dengan distribusi Binom adalah keluarga disribusi Beta. Akan digunakan notasi $(.')$ untuk distribusi prior dan semua parameternya. Sedangkan untuk distribusi posterior akan digunakan notasi $(.'')$. Misalnya, $f'_{\Theta}(\theta)$ dan $f''_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta \mid x_1,\cdots,x_n)$ masing masing menunjukkan distribusi prior dan posterior untuk θ, sedangkan $\mathrm{E}'[\theta]$ dan $\mathrm{E}''[\theta]$ atau μ'_{Θ} dan μ''_{Θ} masing-masing merupakan nilai rata-rata atau mean distribusi prior dan posterior.

Andaikan diambil sampel dari proses dikotomi dan dianggap bahwa proses itu bertingkah laku seperti proses bernoulli. Selanjutnya, apabila dipilih sebagai distribusi prior untuk P (peluang "sukses" pada suatu percobaan) adalah distribusi Beta, maka distribusi posteriornya adalah juga distribusi Beta. Pertama-tama kita tulis fungsi likelihoodnya yaitu:

$$f(P) = \binom{n}{r} P^r \, (1-P)^{n-r} \; ; 0 \le P \le 1.$$

Selanjutnya, fungsi densitas prior Beta dengan parameter r dan n, dimana $n > r > 0$ adalah : $f'(P) = \dfrac{(n'-1)!}{(r'-1)!(n'-r'-1)}\, P^{r'-1}\,(1-P)^{n-r};\ 0 \le P \le 1.$

selanjutnya, andaikan bahwa sampel menghasilkan r "sukses" dalam n percobaan, maka fungsi densitas posterior adalah juga anggota keluarga distribusi Beta yaitu :

$$f''(P \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{f'(P)f(x_1,\cdots,x_n \mid P)}{\int f'(P)f(x_1,\cdots,x_n \mid P)dp}$$

$$= \frac{\frac{(n'-1)!}{(r'-1)!(n'-r'-1)!}P^{r'-1}\,(1-P)^{n'-r'-1} \times \frac{n!}{r!(n-r)!}P^{r}\,(1-P)^{n-r}}{\int_0^1 \frac{(n'-1)!}{(r'-1)!(n'-r'-1)!}P^{r'-1}(1-P)^{n'-r'-1} \times \frac{n!}{r!(n-r)!}P(1-P)^{n-r}dp}$$

$$= \frac{P^{(r+r')-1}\,(1-P)^{(n+n')-(r+r')-1}}{\int_0^1 P^{(r+r')-1}(1-P)^{(n+n')-(r+r')-1}dp}$$

dari definisi 2.5.6.1 yaitu mengenai fungsi beta ,

diketahui $\int_0^1 P^{(r+r)-1}\ P^{(n+n')-(r+r')-1}dp = B((r+r'),((n+n')-(r+r')))$ dan

$$\beta((r+r'),((n+n')-(r+r'))) = \frac{\Gamma(r+r')\Gamma((n+n')-(r+r'))}{\Gamma(n+n')}$$

$$= \frac{((r+r')-1)!((n+n')-(r+r')-1)!}{((n+n')-1)!}$$

dan dimisalkan $r'+r = r''$ dan $n+n' = n''$ maka:

$$f''(P \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{(n''-1)!}{(r''-1)!(n''-r''-1)!}P^{r''-1}\ P^{n''-r''-1}$$

Jadi untuk menentukan parameter distribusi posterior Beta dengan parameter n'' dan r'', dilakukan dengan menambah statistik sampel n dan r pada parameter prior n' dan r'.

Contoh 3.3.1

Andaikan θ menunjukkan kekuatan pemasaran merek baru suatu produk tertentu (yang dinyatakan sebagai bilangan pecahan desimal bukan prosentase). Merek baru perbedaannya cukup banyak dengan merek lama produk itu. Sehingga kita sangat tidak pasti akan kekuatan pemasarannya. Kita berpikir mungkin pemasaran produk itu berhasil (yakni, θ akan dekat nilai 1), atau mungkin pemasarannya tidak berhasil sama sekali (yakni, θ dekat dengan 0), atau mungkin cukup berhasil (yakni, θ sebuah bilangan yang tidak dekat pada keduanya). Dalam hal seperti ini cukup beralasan untuk menganggap bahwa θ kontinu. Lebih dari itu, mungkin kita berpikir bahwa nilai θ yang rendah lebih mungkin dari pada nilai θ yang tinggi, dan kita menentukan distribusi prior untuk θ adalah distribusi "segitiga" yaitu: $f(\theta) = 2(1-\theta)$; $0 < \theta < 1$.

Untuk mendapatkan informasi lebih banyak tentang θ, diambillah suatu sampel dengan lima orang konsumen produk itu, seorang membeli merek baru dan empat orang lain membeli merek yang lain. Dianggap bahwa proses pembelian produk ini dapat dipandang sebagai proses bernoulli dengan peluang bahwa seorang pembeli yang terpilih secara acak akan membeli merek baru adalah θ. Informasi ini (satu "sukses" dalam lima percobaan) dapat disajikan dalam fungsi likelihood sebagai distribusi Binomial, yaitu :

$$f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta) = P[r = 1 \mid n = r : \theta = \theta] = \binom{5}{1} \theta\,(1-\theta)^4 = 5\,\theta(1-\theta)^4.$$

Menurut definisi 3.2.2 didapat :

$$f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{f_\Theta(\theta) f_{X_1,\cdots,X_n|\Theta}(x_1,\cdots,x_n \mid \theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\Theta(\theta) f_{X_1,\cdots,X_n|\Theta}(x_1,\cdots,x_n \mid \theta) d\theta}$$

$$= \frac{[2(1-\theta)]\left[5\theta(1-\theta)^4\right]}{\int_0^1 [2(1-\theta)]\left[5\theta(1-\theta)^4\right] d\theta}$$

$$= \frac{10\theta(1-\theta)^5}{\int_0^1 10\theta(1-\theta)^5 d\theta}$$

Integral dalam penyebut sama dengan $^{1!5!}/_{7!} = 1/_{42}$, jadi distribusi posteriornya adalah : $f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n) = 42\theta(1-\theta)^5; \;\; 0 < \theta < 1.$

Jika menggunakan definisis 3.1.1 maka :

Distribusi prior adalah distribusi Beta dengan $r' = 1$ dan $n' = 3$; hasil observasi sampel adalah $r = 1$ dan $n = 5$. Maka distribusi posterior adalah distribusi beta dengan $r'' = r' + r = 1 + 1 = 2$ dan $n'' = n' + n = 3 + 5 = 8$.

□

3.3.2 Distribusi Prior Sekawan untuk Distribusi Poisson.

Distribusi peluang lain yang kerap timbul dalam praktik dan berhubungan dengan distribusi Binomial adalah distribusi Poisson. Distribusi Poisson dapat dipandang timbul dari percobaan poisson, yakni eksperimen yang menghasilkan variabel random X, banyaknya sukses yang terjadi selama interval waktu tertentu atau dalam daerah tertentu. Panjang interval waktu itu sembarang, dapat menit, jam, hari, dan seterusnya misalnya, X menunjukkan banyaknya panggilan telepon per jam yang diterima oleh suatu kantor. Daerah tertentu yang dimaksud dapat dapat berupa suatu segmen garis, suatu luasan, suatu volume atau mungkin sepotong bahan. Dalam hal ini X menunjukkan banyaknya tikus sawah per hektar, banyaknya bakteri dalam suatu kultur jaringan atau kesalahan cetak dalam satu halaman buku.

Misalnya $X_1, \cdots, X_n$ sampel random dari populasi berdistribusi poisson dengan parameter λ. Maka $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ adalah statistik cukup untuk λ. Fungsi likelihoodnya adalah :

$$f_{Y_1,\cdots,Y_n|\lambda}(y_1,\cdots,y_n \mid \lambda) = \tfrac{1}{y!} e^{-n\lambda} (n\lambda)^y \;; y > 0$$

Sekarang, andaikan diambil sampel random $X_1, \cdots, X_n$ dari suatu populasi berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Selanjutnya, apabila dipilih sebagai distribusi prior untuk λ adalah distribusi Gamma maka distribusi posteriornya adalah juga distribusi Gamma. Kebenaran pernyataan ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan definisi 3.2.2 sebagai berikut:

Pertama-tama ditulis fungsi likelihoodnya:

$$f_{Y_1,\cdots,Y_n|\lambda}(y_1,\cdots,y_n \mid \lambda) = \tfrac{1}{y!} e^{-n\lambda} (n\lambda)^y, \text{ dengan } y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Selanjutnya, dipilih unuk distribusi priornya adalah distribusi Gamma yang fungsi densitasnya ditulis sebagai berikut (dengan parameter α dan β):

$$f'_\lambda(\lambda) = \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \lambda^{\alpha'-1} e^{-\beta'\lambda}.$$

Maka dengan definisi 3.2.2 fungsi densitas posterior untuk λ dapat diperoleh sebagai berikut :

$$f''_{\lambda|Y_1,\cdots,Y_n}(\lambda \mid y_1,\cdots,y_n) = \frac{\frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')}\lambda^{\alpha'-1}e^{-\beta'\lambda} \times \frac{1}{y!}e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{\int_0^{+\infty}\frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')}\lambda^{\alpha'-1}e^{-\beta'\lambda} \times \frac{1}{y!}e^{-n\lambda}(n\lambda)^y\,d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{y+\alpha'-1}e^{-(\beta'+n)\lambda}}{\int_0^{+\infty}\lambda^{y+\alpha'-1}e^{-(\beta'+n)\lambda}\,d\lambda}$$

Akan diselesaikan dulu $\int_0^{+\infty}\lambda^{y+\alpha'-1}e^{-(\beta'+n)\lambda}\,d\lambda$:

Misalkan : $u = (\beta'+n)\lambda$ maka $du = (\beta'+n)d\lambda$

$$\int_0^{+\infty}\lambda^{y+\alpha'-1}e^{-(\beta'+n)\lambda}\,d\lambda = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{(\beta'+n)}\right)^{y+\alpha'-1}e^{-u}\,\frac{du}{(\beta'+n)}$$

$$= \int_0^{+\infty}(\beta'+n)^{-(y+\alpha')+1}(\beta'+n)^{-1}u^{y+\alpha'-1}e^{-u}\,du$$

$$= (\beta'+n)^{-(y+\alpha')}\int_0^{+\infty}u^{y+\alpha'-1}e^{-u}\,du$$

$$= (\beta'+n)^{-(y+\alpha')}\Gamma(y+\alpha')$$

Sehingga : $f''_{\lambda|Y_1,\cdots,Y_n}(\lambda \mid y_1,\cdots,y_n) = \frac{(\beta'+n)^{y+\alpha'}}{\Gamma(y+\alpha')}\lambda^{y+\alpha'-1}e^{-(\beta'+n)\lambda}$; $\lambda > 0$.

Jadi menurut definisi 3.2.2, jika distribusi prior untuk λ adalah disitribusi Gamma dengan $\mathrm{E}[\lambda] = \alpha'/\beta'$ dan $\mathrm{var}[\lambda] = \alpha'/(\beta')^2$, maka distribusi posterior untuk λ adalah distribusi Gamma dengan fungsi densitas :

$f_{\lambda|Y_1,\cdots,Y_n}(\lambda \mid y_1,\cdots,y_n) = \frac{(\beta'')^{\alpha''}}{\Gamma(\alpha'')}\lambda^{\alpha''-1}e^{-\beta''\lambda}$; $\lambda > 0$, dengan $\beta'' = \beta' + n$; $\alpha'' = \alpha' + y$.

Maka untuk memperoleh parameter distribusi Gamma pasterior α'' dan β'', hanya dengan menambah parameter prior α' dan β' masing-masing dengan statistik sampel y dan n.

Contoh 3.3.2

Banyaknya partikel radio aktif yang melalui suatu counter selama satu milidetik dalam suatu percobaan laboratori merupakan variabel random X yang berdistribusi poisson dengan parameter λ. Misalkan dalam percobaan itu telah diamati $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 6$; $x_4 = 5$ dan $x_5 = 0$. Maka $n = 5$ dan $y = 2+4+6+5+0 = 17$. Misalkan pula sebagai distribusi prior λ dipilih distribus Gamma dengan parameter $\alpha' = 8$ dan $\beta' = 2$. Maka distribusi posterior λ adalah distribusi Gamma dengan parameter $\alpha'' = \alpha' + y = 8+17 = 25$ dan $\beta'' = \beta' + n = 2+5 = 7$.

□

3.3.3 Distribusi Prior Sekawan untuk Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial, mempunyai banyak aplikasi dalam statistika, khususnya dalam bidang teori reliabilitas dan waktu tunggu atau masalah antrian. Berikut akan dijabarkan distribusi sekawan untuk distribusi Eksponensial dengan dengan contoh sebagai berikut. Misalkan suatu sistem memuat komponen tipe tertentu yang daya tahan hidupnya dalam tahun adalah variabel random X yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ. Misalkan pula bahwa dalam suatu percobaan telah diamati $X_1, \cdots, X_n$. Maka $Y = X_1 + \cdots + X_n$ adalah statistik cukup untuk λ. Diketahui bahwa variabel random y berdistribusi Gamma dengan paramter n dan λ. Sehingga fungsi likelihoodnya adalah :

$$f_{Y_1,\cdots,Y_n|\lambda}(y_1,\cdots,y_n \mid \lambda) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} \; ; \; y > 0.$$

Dengan fungsi likelihood seperti ini, maka distribusi prior sekawannya adalah distribusi Gamma dengan parameter α' dan β'. Selanjutnya dengan definisi 3.2.2 akan didapat distribusi posterior untuk λ adalah distribusi Gamma pula dengan parameter $\alpha'' = \alpha' + n$ dan $\beta'' = \beta' + y$, yang akan dijabarkan sebagai berikut :

$$f''_{\lambda|Y_1,\cdots,Y_n}(\lambda \mid y_1,\cdots,y_n) = \frac{f'_\lambda(\lambda) \times f_{Y_1,\cdots,Y_n|\lambda}(y_1,\cdots,y_n \mid \lambda)}{\int f'_\lambda(\lambda) \times f_{Y_1,\cdots,Y_n|\lambda}(y_1,\cdots,y_n \mid \lambda) d\lambda}$$

$$= \frac{\frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \lambda^{\alpha'-1} e^{-\beta'\lambda} \times \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y}}{\int_0^{+\infty} \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \lambda^{\alpha'-1} e^{-\beta'\lambda} \times \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha'+n-1} e^{-(\beta'+y)\lambda}}{\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha'+n-1} e^{-(\beta'+y)\lambda} d\lambda}$$

Akan diselesaikan dulu $\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha'+n-1} e^{-(\beta'+y)\lambda} d\lambda$

Misalkan : $u = (\beta' + y)\lambda$ maka $du = (\beta' + y)d\lambda$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha'+n-1} e^{-(\beta'+n)\lambda} d\lambda = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{(\beta'+y)}\right)^{\alpha'+n-1} e^{-u} \frac{du}{(\beta'+n)}$$

$$= \int_0^{+\infty} (\beta'+y)^{-(\alpha'+n)+1} (\beta'+y)^{-1} u^{\alpha'+n-1} e^{-u} du$$

$$= (\beta'+y)^{-(\alpha'+n)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha'+n-1} e^{-u} du$$

$$= (\beta'+y)^{-(\alpha'+n)} \Gamma(\alpha'+n)$$

Jadi : $f''_{\lambda|X_1,\cdots,X_n}(\lambda \mid x_1,\cdots,x_n) = \dfrac{(\beta'+y)^{\alpha'+n}}{\Gamma(\alpha'+n)} \lambda^{\alpha'+n-1} e^{-(\beta'+y)\lambda}, \ \lambda > 0.$

Ini adalah distribusi Gamma dengan parameter $\alpha'' = \alpha' + n$ dan $\beta'' = \beta' + y$.

Contoh 3.3.3

Misalkan diketahui daya tahan suatu lampu dari suatu abservasi diketahui :

$x_1 = 6.3; x_2 = 4.5; x_3 = 5.7$; $x_4 = 3.9$; $x_5 = 5.1$; $x_6 = 4.8$; $x_7 = 4.4$; $x_8 = 7.3$

maka $y = 6.3 + 4.5 + 5.7 + 3.9 + 5.1 + 4.8 + 4.4 + 7.3 = 42.0$. Selanjutnya apabila distribusi prior Gamma itu mempunyai parameter $\alpha' = 4$ dan $\beta' = 20$, maka distribusi posterior untuk λ adalah distribusi Gamma dengan parameter $\alpha'' = \alpha' + n = 4 + 8 = 12$ dan $\beta'' = \beta' + y = 20.0 + 42.0 = 62.0$.

□

3.3.4 Distrbusi Prior Sekawan Untuk Distribusi Normal

Disini akan dipelajari prosedur dengan informasi prior yang dengan mudah dapat dikombinasikan dengan informasi sampel dari suatu proses normal apabila informasi prior dapat dinyatakan dalam bentuk distribusi Normal. Distribusi Peluang x adalah distribusi Normal dengan mean μ_X dan variansi $\sigma_X{}^2$ apabila fungsi densitas berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_X{}^2}} \quad , -\infty < x < +\infty$$

dengan $e = 2.71828$ dan $\pi = 3.1415$ adalah konstan. Grafik fungsi densitas ini simetrik, berbentuk lonceng .

Berikut akan dijabarkan distribusi posterior jika distribusi prior sekawan untuk distribusi Normal . Andaikan seorang statistisi mengambil sampel dari suatu populasi yang berdistribusi normal yang variansinya σ^2 diketahui. Tetapi meannya μ tidak diketahui. Apabila distribusi prior untuk μ adalah :

$$f'_{\mu_X}(\mu_X) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma'^{\,2}_X}\right)^2} \exp - \tfrac{1}{2\sigma'^2}(\mu_X - m')^2 .$$

Ini adalah fungsi densitas normal dengan mean m' dan variansi σ'^2_X. Apabila diambil sampel berukuran n dan diketahui mean sampelnya adalah $\bar{x} = m$ maka fungsi likelihoodnya adalah :

$$\begin{aligned} f_{X_1,\cdots,X_n|\mu_X}(x_1,\cdots,x_n \mid \mu_X) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma_X^{\,2}}\right)^n} \exp - \tfrac{1}{2\sigma_X^{\,2}} \sum (x_i - \mu_X)^2 \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma_X^{\,2}}\right)^n} \exp - \tfrac{1}{2\sigma_X^{\,2}} \left[\sum (x_i - m)^2 + n(m - \mu_X)^2\right] \end{aligned}$$

Maka dengan definisi 3.2.2 fungsi densitas posterior untuk μ_X dapat diperoleh sebagai :

$$f''_{\mu_X|X_1,\cdots,X_n}(\mu_X \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{f'_{\mu_X}(\mu_X) \times f_{X_1,\cdots,X_n|\mu_X}(x_1,\cdots,x_n \mid \mu_X)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f'_{\mu_X}(\mu_X) \times f_{X_1,\cdots,X_n|\mu_X}(x_1,\cdots,x_n \mid \mu_X)\, d\mu_X}$$

$$= \frac{\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma'^2_X}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma'^2_X}(\mu_X - m')^2\right\} \times \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2_X}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_X}\left[\sum (x_i - m)^2 + n(m - \mu_X)^2\right]\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma'^2_X}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma'^2_X}(\mu_X - m')^2\right\} \times \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2_X}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_X}\left[\sum (x_i - m)^2 + n(m - \mu_X)^2\right]\right\} d\mu_X}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma'^2_X}\left(\mu_X^{\,2} - 2\mu_X m' + m'^2\right)\right\} \times \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma_X^{\,2}}\left(\mu_X^{\,2} - 2m\mu_X + m^2\right)\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma'^3_X}\left(\mu_X^{\,2} - 2\mu_X m' + m'^2\right)\right\} \times \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu_X^{\,2} - 2m\mu_X + m^2\right)\right\} d\mu_X}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_X^{\,2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}}\right) - \frac{1}{2}(2\mu_X)\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m' + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m'^2 + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m^2\right)\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_X^{\,2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}}\right) - \frac{1}{2}(2\mu_X)\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m' + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m'^2 + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m^2\right)\right\} d\mu_X}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_X^{\,2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}}\right) - \mu_X\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m' + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m\right)\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_X^{\,2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}}\right) - \mu_X\left(\frac{1}{\sigma'^2_X} m' + \frac{n}{\sigma_X^{\,2}} m\right)\right\} d\mu_X}$$

$$= \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)^2}{\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)^2\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)^2}{\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)^2\right\}d\mu_X}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)^2\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)^2\right\}d\mu_X}$$

Akan diselesaikan dulu $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)\right\}d\mu_X$

Diketahui dari fungsi Gamma bahwa :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{dan} \quad \Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}\,ds$$

misalkan $x = \frac{1}{2}$ maka $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^0 e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$ sehingga $\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

sekarang,

$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)\right\}d\mu_X$,misal $p = \mu_X - \frac{\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{1}{\sigma_X^2}m}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{1}{\sigma_X^2}}$

maka $dp = d\mu_X$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)\left(\mu_X - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_X'^2}m' + \frac{n}{\sigma_X^2}m\right)}{\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}}\right)\right\}d\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)p^2\,dp$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_X'^2} + \frac{n}{\sigma_X^2}\right)p^2\,dp = 2\int_0^{+\infty}\exp -\left(\sqrt{\frac{\sigma^2 + n\sigma'^2}{2\sigma_X'^2\sigma_X^2}}\,p\right)^2 dp$$

misal $z=\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}{2\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}}\,p$ maka $dz=\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}{2\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}}\,dp$ sehinga ,

$$2\int_0^{+\infty}\exp-\left(\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}{2\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}}\,P\right)^2 dp=2\sqrt{\frac{2\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}}\int_0^{+\infty}\exp-z^2dz=2\sqrt{\frac{2\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{2\pi\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}}.$$

Jadi :

$$f''_{\mu_X|X_1,\cdots,X_n}(\mu_X\mid x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma'_X{}^2\sigma_X{}^2}{\sigma_X{}^2+n\sigma'_X{}^2}}}\exp-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sigma'_X{}^2}+\tfrac{n}{\sigma_X{}^2}\right)\left(\mu-\frac{\frac{1}{\sigma'_X{}^2}m'+\frac{n}{\sigma_X{}^2}m}{\frac{1}{\sigma'_X{}^2}+\frac{n}{\sigma_X{}^2}}\right)\quad(3.3.4.1)$$

Jika variansi dan mean distribusi posterior (3.4.4.1) dinyatakan sebagai :

$$\frac{1}{\sigma''_X{}^2}=\frac{1}{\sigma'_X{}^2}+\frac{n}{\sigma_X{}^2}\qquad(3.3.4.2)$$

Dan $$m''=\frac{\frac{1}{\sigma'_X{}^2}m'+\frac{n}{\sigma_X{}^2}m}{\frac{1}{\sigma'_X{}^2}+\frac{n}{\sigma_X{}^2}}\qquad(3.3.4.3)$$

Sehingga persamaan (3.3.4.1) dapat ditulis kembali sebagai

$$f''_{\mu_X|X_1,\cdots,X_n}(\mu_X\mid x_1,\cdots,x_n)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sigma'_X{}^2}+\frac{n}{\sigma_X{}^2}\right)}\exp-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sigma''_X{}^2}\right)(\mu_X-m'')^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma''_X{}^2}}\exp-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mu_X-m''}{\sigma''_X}\right)^2.$$

Perhatikan bahwa n dan m, ukuran dan mean sampel, adalah statistik-statistik sampel yang diperlukan guna menentukan distribusi posterior sehingga dalam keadaan ini statistik-statistik itu adalah statistik cukup.

Dari (3.3.4.2) dapat dikatakan bahwa kebalikan variansi posterior sama dengan jumlah kebalikan variansi prior dan kebalikan variansi m yakni $\sigma_X{}^2/n$. Dari (3.3.4.3) dapat pula dikatakan bahwa mean posterior adalah rata-rata bertimbang mean prior dan mean sampel, nilai timbangnya adalah kebalikan masing-masing variansi. Apabila variansi distribusi prior σ'^2_X menurun, kuantitas ketidakpastian menurun juga, dan informasi prior diberikan bobot yang lebih, dalam menentukan distribusi posterior. Hal yang sama juga benar bagi informasi sampel dengan mengingat σ_X^2/n adalah variansi mean sampel.

Sebagai contoh misalnya diketahui variansinya $\sigma_X^2 = 400$, tetapi μ_X tidak diketahui. Distribusi prior untuk μ_X adalah distribusi normal dengan mean 225 dan variansi 25. Sampel berukuran 4 diambil dan mean sampel tersebut adalah 200. Jadi $m' = 225$, $\sigma'^2_X = 25$, $m = 200$, $n = 4$. Maka :

$$\frac{1}{\sigma''^2_X} = \frac{1}{25} + \frac{4}{400} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \quad \text{dan } m'' = \frac{(1/25)225 + (4/400)200}{(1/25) + (4/400)} = \frac{9+2}{(1/20)} = 220.$$

Jadi parameter posterior adalah $m'' = 200$ dan $\sigma''^2_X = 20$. Pada kasus distribusi Normal *selalu* benar bahwa mean posterior terletak antara mean prior dan mean sampel dan variansi posterior selalu kurang dari variansi prior. Ini dapat dilihat dari $(3.3.4.1)$ Jika $n > 0$, suku kedua ruas kanan persamaan itu lebih dari nol; jadi kebalikan variansi posterior lebih besar dari kebalikan variansi prior. Ini berarti bahwa variansi posterior lebih kecil dari variansi prior.

Selanjutnya, pandang paramter n' yang didefinisikan sebagai :

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^2_X} \tag{3.3.4.4}$$

maka

$$\sigma'^2_X = \frac{\sigma_X^2}{n}. \tag{3.3.4.5}$$

Sehingga variansi prior dapat ditulis dalam n' dan variansi proses $\sigma_X{}^2$. Jadi, distribusi prior adalah distribusi Normal dengan mean m' dan variansi ${\sigma_X{}^2}/{n'}$. Sekarang, apabila didefinisikan sebagai :

$$n'' = \frac{\sigma_X{}^2}{\sigma_X''^2} \tag{3.3.4.6}$$

maka persamaan (3.3.4.2) menjadi

$$\frac{n''}{\sigma_X{}^2} = \frac{n'}{\sigma_X{}^2} + \frac{n}{\sigma_X{}^2}$$

atau $n'' = n' + n$ (3.3.4.7)

Selanjutnya, persamaan (3.3.4.3) menjadi

$$m'' = \frac{\left({n'}/{\sigma_X{}^2}\right)m' + \left({n}/{\sigma_X{}^2}\right)m}{\left({n'}/{\sigma_X{}^2}\right) + \left({n}/{\sigma_X{}^2}\right)}$$

$$m'' = \frac{n'm' + nm}{n' + n} \tag{3.3.4.8}$$

Membandingkan persamaan (3.3.4.7) dan (3.3.4.8) dengan persamaan (3.3.4.2) dan (3.3.4.3) dapat dilihat bahwa distribusi prior dinyatakan dalam m' dan n' bukannya m' dan $\sigma_X'^2$, dan distribusi posterior dinyatakan dalam m'' dan n'' bukannya dalam m'' dan $\sigma_X''^2$. Bagaimana n' (dan n'') diinterprestasikan? Dari persamaan (3.3.4.5) n' adalah ukuran sampel yang diperlukan guna menghasilkan variansi $\sigma_X'^2$ untuk mean sampel, sebab variansi mean sampel dari suatu sampel berukuran n' adalah ${\sigma_X{}^2}/{n'}$. Ini membawa interprestasi bagi distribusi prior sebagai berikut : Distribusi prior kira-kira ekuivalen dengan informasi yang dimuat dalam sampel berukuran n' dengan mean sampel m'. Dengan interprestasi ini, persamaan (3.3.4.7) dan(3.3.4.8) dapat dipikirkan sebagai rumus-rumus guna menggabungkan informasi dari dua sampel. Ukuran sampel gabungan sama dengan jumlah dua ukuran sampel itu (satu dari distribusi prior dan satu dari sampel itu), dan mean sampel gabungan sama dengan rata-rata bertimbang dua mean sampel (satu dari prior, satu dari sampel). Ini tidak berarti bahwa informasi prior harus hanya terdiri dari sampel prior dari proses itu; tetapi semata-mata menunjukkan bahwa informasi prior dapat dpikirkan kira-kira ekuivalen dengan informasi sampel seperti itu. Sebagai catatan n' tidak harus bilangan bulat (misalnya pada distribusi Beta, r' dan n' tidak harus bilangan bulat). Misalnya apabila proses pembentuk data adalah $\sigma_X{}^2 = 110$ dan variansi distribusi prior adalah $\sigma'^2 = 4$ maka $\sigma_X{}^2 / \sigma_X'^2 = 110/4 = 27.5$.

Dengan menggunakan parameter baru yang dikenalkan dalam persamaan (3.3.4.4) dapat diselidiki bobot relatif informasi prior dan informasi sampel. Apabil kita ingin diduga μ_X, penduga yang baik adalah mean posterior m'', yang nilainya berada diantara mean prior m' dan mean sampel m. Dalam keadaan yang bagimana m'' lebih dekat terhadap m' dari pada terhadap m, dan dalam keadaan yang bagaimana pula m'' lebih dekat dengan m? Dari persamaan (3.3.4.8) m'' adalah rata-rata tertimbang dari m' dan m, dengan bobot timbang masing-masing sama dengan $n'/(n'+n)$ dan $n/(n'+n)$. Dengan demikian apabila $n' > n$ maka mean prior diberi bobot lebih dan m'' lebih dekat kepada m'. Apabila $n' < n$ maka mean sampel diberi bobot lebih, dan m'' lebih dekat kepada m. Apabila $n' = n$ maka m'' tepat di tengah-tengah antara m' dan m.

Dapat dikatakan bahwa dalam hubungan dengan interprestasi distribusi prior seperti diatas, dalam penggabungan dua sampel, sampel yang berukuran lebih besar akan mendapat bobot lebih dalam penentuan mean gabungan. Dengan mengingat bahwa variansi distribusi prior sama dengan ${\sigma_X}^2/_{n'}$ dan variansi bersyarat mean sampel m sama dengan ${\sigma_X}^2/_{n}$, perhatikan bahwa informasi prior menerima bobot lebih dari informasi sampel apabila variansi prior lebih kecil dari variansi m atau sebaliknya informasi prior menerima bobot kurang dari informasi sampel apabila variansi prior lebih besar dari variansi m. Apabila ini dipandang dari sudut informasinya, variansi yang lebih kecil berarti informasi yang lebih. Dalam menentukan distribusi posterior maka statistisi Bayesian menggabungkan informasi. Apabila informasi prior lebih dari pada informasi sampel, maka distribusi posterior lebih dipengaruhi oleh informasi prior (yang dinyatakan dalam bentuk distrtibusi prior) dari pada informasi sampel (yang dinyatakan dalam bentuk fungsi likelihood).

Pandang kembali contoh yang dipelajari dimuka. Dalam contoh ini $n' = \dfrac{{\sigma_X}^2}{{\sigma'_X}^2} = \dfrac{400}{25} = 16$ dan $n = 4$ sehingga $n'' = n' + n = 16 + 4 = 20$ dan

$$m'' = \frac{n'm' + nm}{n' + n} = \frac{16(225) + 4(200)}{16 + 4} = 220.$$

Perhatikan bahwa mean posterior adalah 220 lebih dekat pada mean prior 225 dari pada mean sampel 200. Ini disebabkan karena $n' > n$. Informasi prior kira-kira ekuivalen dengan informasi yang terkandung dalam suatu sampel berukuran 16 dari proses yang mempunyai mean sampel 225. Perhatikan juga bahwa hasil-hasil itu identik dengan yang diperoleh dengan menggunakan parameterisasi aslinya. Mean posterior sama dalam hal tersebut, dan $n'' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X'^2} = \frac{400}{20} = 20$.

Perlu dicatat bahwa kadang-kadang penotasian parameter yang berbeda digunakan untuk model normal. Dalam parameterisasi ini, "banyak informasi" yang terkandung dalam distribusi peluang, atau "ketepatan" distribusi itu, dinyatakan dengan kebalikan variansi distribusi itu. Jadi banyaknya informasi prior (ketepatan informasi) adalah :

$$I' = \frac{1}{\sigma_x'^2}$$

Banyak informasi yang termuat dalam sampel (ketepatan sampel) adalah :

$$I = \frac{1}{\sigma_X^2}$$

Dan banyaknya informasi posterior (ketepatan posterior) adalah :

$$I'' = \frac{1}{\sigma_X''^2}$$

Dalam bentuk ukuran informasi ini, maka persamaan (3.3.4.2) dan (3.3.4.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$I'' = I' + I$$

dan

$$m'' = \frac{I'm' + I\,m}{I' + I}$$

Untuk contohdi atas, $I' = 1/25$, $I = 4/400$ dan $I'' = 1/20$. Tentu saja, tiga parameterisasi yang berbeda, hanya merupakan tiga cara yang berbeda dalam melihat modelnya, tetapi hasil numeriknya sama.

Contoh 3.3.4

Misalnya seorang pedagang eceran tertarik dengan distribusi penjualan mingguan pada salah satu tokonya. Khususnya, dia akan menganggap bahwa variabel random X, penjualan mingguan yang dinyatakan dalam ribuan rupiah), berdistribusi normal dengan mean tidak diketahui dan variansi diketahui $\sigma_X{}^2 = 90{,}000$. Harus ditegaskan bahwa ini adalah anggapan subyektif. Mungkin bahwa pedagang eceran itu merasa bahwa anggapan normalitas itu beralasan karena dia telah mendapatkan bahwa toko-toko lain yang dia selidiki, X cenderung mendekati distribusi Normal. Lagi pula, pada berbagai toko lain yang sangat serupa dengan toko yang dipelajari, mean penjualan mingguan berbeda dari toko ke toko, tetapi variansinya relatif stabil pada kira-kira 90000. Maka pedagang eceran itu membuat anggapan yang sederhana, yakni variansi $\sigma_X{}^2$ diketahui dan juga mengganggap (secara implisit) tidak adanya efek trend atau musim yang dikhawatirkan. Yakni, dia merasa bahwa bagi tipe toko yang dipelajari, umumnya penjualan tidak berubah besar dari waktu ke waktu dan tidak terpengaruh oleh hal-hal seperti cuaca, hari libur dan sebagainya.

Andaikan pula pedagang eceran itu menganggap bahwa distribusi prior untuk μ_X adalah kontinu. Dari percakapan informal dengan manajer dan dari pengetahuan tentang penjualan pada toko-toko serupa, dia memutuskan mean distribusi prior sama dengan $m' = 1200$ dan deviasi standarnya $\sigma'_X = 50$. Lagi pula dia merasa bahwa distribusi priornya simetrik terhadap meannya dan bentuknya mendekati fungsi kepadatan normal, sehingga dia menganggap bahwa distribusi itu normal. Harus dibedakan antara $\sigma_X{}^2 = 90000$ yang menunjukkan variansi penjualan mingguan, dengan $\sigma'_X{}^2 = 2.500$ yang menunjukkan variansi distribusi prior untuk μ_X, mean penjualan mingguan.

Pedagang eceran itu tertarik mempelajari distribusi penjualan mungkin karena beberapa alasan. Mungkin dia harus memutuskan apakah dia harus menjual tokonya itu atau tetap memilikinya, apakah dia harus membuka toko lagi yang sama, atau apakah dia harus mengangkat manajer baru, dan sebagainya. Tentu saja untuk mengambil keputusan semacam itu pedagang eceran tersebut harus memperhatikan banyak faktor, antara lain faktor penjualan, dan ini dipelajari melalui mean distribusi penjualan mingguan.

Berdasarkan sampel dengan 60 minggu dengan mean sampel $m = 1240$, pedagang eceran itu dapat memperbaiki distribusi priornya. Dengan sampel itu, distribusi posterior untuk μ_X adalah distribusi Normal dengan mean m'' dan variansi $\sigma''_X{}^2$, dengan

$$\frac{1}{\sigma''_X{}^2} = \frac{1}{\sigma'_X{}^2} + \frac{n}{\sigma_X{}^2} = \frac{1}{2500} + \frac{60}{90000} = \frac{96}{90000}$$

$$m'' = \frac{\left(1/\sigma'_X{}^2\right)m' + \left(n/\sigma_X{}^2\right)m}{1/\sigma'_X{}^2 + n/\sigma_X{}^2} = \frac{\left(1/2500\right)1200 + \left(60/90000\right)1240}{1/2500 + 60/9000} = 1225$$

mean dan variansi distribusi posterior adalah 1225 dan $90000/60 = 937.5$.

Dalam bentuk parameterisasi lain seperti yang kita pelajari dimuka

$$n' = \frac{\sigma_X{}^2}{\sigma'_X{}^2} = \frac{90000}{60} = 36$$

$$I' = \frac{1}{\sigma'^{2}_{X}} = \frac{1}{2,500} = 0.0004$$

$$I = \frac{n}{\sigma_X^{2}} = \frac{60}{90,000} = 0.00067$$

Dengan persamaan (3.3.4.7) dan (3.3.4.8)

$$n'' = n' + n = 36 + 60 = 96$$

$$I'' = I' + I = 0.0004 + 0.00067 = 0.00107.$$

Jadi "ukuran sampel prior ekuivalen" adalah 36, sedangkan ukuran sampel sebenarnya adalah 60. "Banyak informasi sampel", sebagaimana diukur dengan I lebih besar dari "banyak informasi prior" sebagaimana diukur dengan I'. Ini menjelaskan mengapa mean distribusi posterior lebih dekat ke m dari pada ke m'.

□

BAB IV

TERAPAN METODE BAYES PADA PENDUGAAN PARAMETER

Dalam bab ini akan dibahas terapan Metode Bayes pada pendugaan parameter yang meliputi pendugaan titik dan selang kepercayaan

4.1 Pendugaan Titik Menurut Bayes

Pembahasan terapan Metode Bayes ada pendugaan parameter pada subbab ini akan dilakukan dengan pendekatan *teori keputusan.*

Misalkan $X_1,\ldots,X_n$ adalah sampel random dari variabel random X yang memiliki fungsi densitas $f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)$. Akan ditentukan penduga bagi θ . Misalkan $f_\Theta(\theta)$ merupakan distribusi prior (awal) untuk Θ dan $\ell(\theta;\hat{\theta})$ merupakan fungsi kerugian, yang memiliki fungsi resiko $R(t;\theta)=\mathrm{E}\left[\ell(\theta;\hat{\theta})\right]$ Karena Θ dianggap sebagai variabel random maka resikonya adalah sebuah variabel random. Akan dicari fungsi keputusan **t** yang meminimkan harapan resiko, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 4.1.1. Harapan Resiko

Harapan dari fungsi resiko $R(\theta;t)$, dinotasikan dengan $B(t)$ adalah :

$$B(t)=\mathrm{E}[R(\theta;t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\theta;t) f_\Theta(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\ell\{\theta;t(x_1,\ldots,x_n)\} f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots x_n \mid \theta)\prod_{i=1}^{n} dx_i\right\}\times f_\Theta(\theta)\,d\theta$$

Akan didefinisikan Penduga Bayes bagi parameter θ sebagai fungsi **t** dari sampel $X_1,\ldots,X_n$ yang meminimumkan harapan fungsi resikonya. Dengan mengubah susunan integral dalam definisi (4.1.1) diperoleh :

$$B(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\ell\{\theta;t(x_1,\ldots,x_n)\}f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n\mid\theta)f_\Theta(\theta)\,d\theta\right\}\prod_{i=1}^{n}dx_i \quad (4.1.1)$$

Fungsi $B(t)$ akan minimum jika dapat ditentukan fungsi **t** yang meminimumkan $\int_{-\infty}^{+\infty}\ell\{\theta;t(x_1,\ldots,x_n)\}f_{X_1,\ldots,X_n}(x\mid\theta)f_\Theta(\theta)\,d\theta$ pada persamaan (4.1.1). Untuk setiap himpunan nilai nilai $X_1,\ldots,X_n$, penduga Bayes bagi θ adalah suatu fungsi **t** dari X_i yang meminimumkan:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\ell\{\theta;t(x_1,\ldots,x_n)\}\,f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n\mid\theta)f_\Theta\,(\theta)d\theta\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\ell(\theta;\hat{\theta})f_{X_1,\ldots,X_n;\Theta}(x_1,\ldots,x_n;\theta)f_\Theta(\theta)d\theta\\
&=f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\int_{-\infty}^{+\infty}\ell(\theta;\hat{\theta})f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta\mid x_1,\ldots,x_n)\,d\theta \qquad .(4.1.2)
\end{aligned}$$

maka dapat didefinisikan Penduga Bayes sebagai berikut

Definisi 4.1.2 Penduga Bayes

Penduga bayes dari θ adalah nilai $\hat{\theta}$ yang meminimumkan :

$$Q=\int_{-\infty}^{+\infty}\ell(\hat{\theta},\theta)f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta\mid x_1,\ldots,x_n)\;d\theta\,.$$

□

Teorema 4.1.1

Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ adalah sampel random dengan fungsi densitas atau peluang $f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta)$ dan andaikan Θ memiliki distribusi prior $f_\Theta(\theta)$, jika $\ell(\theta;\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$ maka nilai dugaan dari θ, yang meminimumkan harapan resiko $R(\theta;t)=\mathrm{E}\left[(\theta-\hat{\theta})^2\right]$ adalah $\hat{\theta}=\mathrm{E}[(\theta\,|\,x)]$ yang merupakan mean dari distribusi posterior.

Bukti:

Jika $\ell(\theta;\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$ maka fungsi resikonya adalah $R(\theta;t)=\mathrm{E}\left[(\theta-\hat{\theta})^2\right]$dengan memperhatikan persamaan (4.1.1) dan (4.1.2), harapan resikonya adalah :

$$B(t)\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta-\hat{\theta})^2 f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\ldots,x_n)\,d\theta \qquad (4.1.3)$$

Peminimuman (4.1.3) sama dengan peminimuman :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta-\hat{\theta})^2 f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\ldots,x_n)\,d\theta \qquad (4.1.4)$$

selanjutnya persamaan 4.1.4 diurai menjadi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2 f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\cdots,x_n)d\theta-2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\cdots,x_n)d\theta$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}^2 f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\cdots,x_n)d\theta$$

Turunan pertama terhadap $\hat{\theta}$ adalah : $\quad 2\hat{\theta}-2\int_{-\infty}^{+\infty}\theta f_{\Theta|X_1,\cdots,X_n}(\theta\,|\,x_1,\cdots,x_n)d\theta$

yang jika disamakan dengan nol memberi nilai minimum (4.1.4) yaitu :

$$\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta f_{\Theta, X_1, \cdots, X_n}(\theta \mid x_1, \cdots, x_n) d\theta = \mathrm{E}[\theta \mid x]$$

yang merupakan mean dari distribusi poseterior.

Contoh 4.1.1

Kembali ke contoh 3.2.3. jika diketahui bahwa distribusi posterior :

$$f_{\Theta; X_1, \ldots, X_n} = \begin{cases} 2(1-\theta), & x = 0, \ 0 < \theta < 1 \\ 2\theta & , x = 1, \ 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

Menurut teorema 4.1.1 didapat nilai dugaan dari θ yaitu $\hat{\theta}$ adalah:

untuk $x = 0$

$$\hat{\theta} = \int_0^1 \theta(2(1-\theta))\, d\theta = \int_0^1 \left(2\theta - 2\theta^2\right) d\theta = \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \Big]_0^1 = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$

untuk $x = 1$

$$\hat{\theta} = \int_0^1 \theta 2\theta \, d\theta = \int_0^1 2\theta^2 \, d\theta = \tfrac{2}{3}\theta^3 \Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}$$

Jika diketahui distribusi posteriornya adalah :

$$f_{\Theta; X_1, \ldots, X_n}(\theta \mid x = 0) = \begin{cases} 0.3 & , \ \theta = 0.4 \\ 0.5 & , \ \theta = 0.5 \\ 0.2 & , \ \theta = 0.6 \end{cases}$$

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x=1)=\begin{cases}0.2 & , \theta=0.4\\ 0.5 & , \theta=0.5\\ 0.3 & , \theta=0.6\end{cases}$$

Menurut teorema 4.1.1 didapat nilai dugaan dari θ yaitu $\hat{\theta}$ adalah:

Untuk $x=0$

$$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(f_{\theta_i|x}(\theta_i \mid x)\right)=(0.3)(0.4)+(0.5)(0.5)+(0.2)(0.6)$$
$$=0.12+0.25+0.12=0.49$$

Untuk $x=1$

$$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(f_{\theta_i|x}(\theta_i \mid x)\right)=(0.2)(0.4)+(0.5)(0.5)+(0.3)(0.6)$$
$$=0.08+0.25+0.25=0.51$$

Contoh 4.1.2

Kembali ke contoh 3.2.4. Didapat distribusi posterior untuk jumlah barang yang rusak, θ dalam 1000 barang yang diterima, jika jumlah barang yang cacat ditemukan $X=x$ dalam sampel random berjumlah 10 adalah :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x)=\frac{p_{X_1,\ldots,X_n,\Theta}(x,\theta)}{p_{X_1,\ldots,X_n}(x)}$$
$$=\binom{990}{\theta-x}(0,05)^{\theta-x}(0,95)^{999-(\theta-x)} \quad , \theta=x,x+1,\ldots,990+x$$

dimana $x=1,2,3,\ldots,10$. $\Theta-x$ berdistribusi Binomial, $n=990$, $p=0,05$, jadi :

$$\mathrm{E}[\Theta - x \mid x] = \mathrm{E}[\Theta \mid x] - x = 990(0.05) = 49.50 \qquad (4.1.3)$$

Dari persamaan (4.1.3) Penduga Bayes untuk θ adalah : $\hat{\theta} = E[\Theta \mid x] = 49.50 + x$ dimana x adalah jumlah barang yang cacat dalam 10 sampel. □

Contoh 4.1.3

Bila $X_1, \ldots, X_n$ merupakan sampel random dari distribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi 1, dimana μ_X tidak diketahui. Diasumsikan distribusi prior untuk μ adalah normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1 yaitu :

$$f_\mu(\mu_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\left(\tfrac{1}{2}\right)\mu_X^{\,2} \quad , -\infty < \mu_X < +\infty.$$

Densitas gabungan bersyarat pada sampel dengan μ tertentu yaitu :

$$f_{x_1,\ldots,x_n \mid \mu_X}(x_1, \ldots, x_n \mid \mu_X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp -\left(\tfrac{1}{2}\right)\sum (x_i - \mu_X)^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp -\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\sum x_i^{\,2} - 2\mu_X \sum x_i + n\mu_X^{\,2}\right)$$

Kemudian fungsi densitas gabungan sampel dengan μ_X tertentu adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n;\mu}(x_1, \ldots, x_n; \mu_X) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\sum x_i^{\,2} + (n+1)\mu_X^{\,2} - 2\mu_X n\bar{x}\right]\right\}$$

Fungsi densitas marjinal sampel adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum x_i^{\,2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[(n+1)\mu_X^{\,2} - 2\mu_X n\bar{x}\right]\right\} d\mu_X$$

Dengan mengkuadratkan eksponen dalam integral, didapat :

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{(n)/2}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\sum x_i^{\,2}-\tfrac{n^2\bar{x}^2}{n+1}\right]\times$$

$$\left[\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(n+1)\left(\mu_X-\tfrac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}d\mu_X\right]$$

akan diselesaikan dulu bentuk integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(n+1)\left(\mu-\tfrac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}d\mu_X$

diketahui dari fungsi gamma bahwa :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\text{dan } \Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}s^{2x-1}e^{-s^2}\,ds$$

misalkan $x=\frac{1}{2}$ maka $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}s^0e^{-s^2}\,ds=2\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds=\sqrt{\pi}$ sehingga $\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

sekarang: $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\mu_X-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}d\mu_X$, misal $p=\mu_X-\frac{n\bar{x}}{n+1}$ sehingga $dp=d\mu_X$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(n+1)\left(\mu_X-\tfrac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}d\mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp-\tfrac{1}{2}(n+1)p^2dp=2\int_0^{+\infty}\exp-\tfrac{1}{2}(n+1)p^2dp$$

$$=2\int_0^{+\infty}\exp-\left(\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\,p\right)^2dp,\text{ misal } z=\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\,p\text{ maka } dz=\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\,dp$$

sehingga, $2\int_0^{+\infty}\exp-\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,p\right)^2dp=2\sqrt{\frac{2}{n+1}}\int_0^{+\infty}-z^2dz=2\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{2\pi^{1/2}}{(n+1)^{1/2}}$, sehingga

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(n+1)^{1/2}(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\sum x_i^2-\tfrac{n^2\bar{x}^2}{n+1}\right)\right]$$

Distribusi posterior untuk μ_X adalah :

$$f_{\mu|X_1,\cdots,X_n}(\mu \mid x_1,\cdots,x_n)=\frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum x_i^2+(n+1)\mu^2{}_X-2n\bar{x}\mu_X\right]\right\}}{(2\pi)^{-n/2}(n+1)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum x_i^2-\frac{n^2\bar{x}^2}{(n+1)}\right)\right\}}$$

$$=\frac{(n+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left[\mu_{X}{}^2-\frac{2n\bar{x}\mu_X}{n+1}+\frac{n^2\bar{x}^2}{(n+1)^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{(n+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left[\mu_X-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right]^2\right\}$$

Distribusi posterior untuk μ merupakan distribusi normal dengan mean $\frac{n\bar{x}}{(n+1)}$ dan variansi $\frac{1}{(n+1)}$. Jika fungsi kerugian $\ell(\mu_X;\hat{\mu}_X)$ merupakan error kuadrat, maka menurut teorema 4.1.1 penduga Bayes bagi μ adalah : $\hat{\mu}_X=\frac{n\bar{x}}{n+1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n+1}$.

□

Contoh 4.1.4

Waktu untuk kerusakan sebuah transistor diketahui berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Untuk sebuah sampel random n transistor, fungsi densitas gabungan elemen-elemen sampelnya dengan λ tertentu adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n|\lambda}(x_1,\ldots,x_n \mid \lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}.$$

Misalkan distribusi prior yang cocok untuk λ adalah :

$$f(\lambda)=\begin{cases} ke^{-k\lambda} & ,\ \lambda>0 \\ 0 & ,\ \text{yang lain}\end{cases}$$

dimana k akan dipilih tergantung kepada pengetahuan atau tingkat kepercayaan seseorang tentang nilai λ.

Fungsi densitas gabungan antara sampel dan λ adalah :

$$f_{X_1,\dots,X_n;\lambda}(x_1,\dots,x_n;\lambda)=k\lambda^n e^{-\lambda(\sum x_i+k)}$$

Fungsi densitas marjinalnya adalah :

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=\int_0^\infty k\lambda^n e^{-\lambda(\sum x_i+k)}\,d\lambda=\frac{k\Gamma(n+1)}{(\sum x_i+k)^{(n+1)}}$$

Destribusi posterior untuk λ adalah :

$$f_{\lambda|X_1,\dots,X_n}(\lambda\mid x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\sum x_i+k\right)^{n+1}\lambda^n e^{-\lambda(\sum x_i+k)}$$

merupakan sebuah distribusi Gamma dengan parameter $n+1$ dan $\sum_{i=1}^{n} x_i+k$.

Selanjutnya jika fungsi kerugian diasumsikan error kuadrat, menurut Teorema 4.1.1 penduga Bayes untuk λ adalah nilai rata-rata dari distribusi Gamma yaitu : $\hat{\lambda}=\frac{n+1}{\sum_{i=1}^{n} x_i+k}$. □

4.2 Selang Kepercayaan Menurut Bayes

Di subab 4.1 dibahas bagaimana distribusi posterior digunakan dalam menduga suatu parameter (pendugan titik) yang tidak diketaui. Nilai dugaan suatu parameter berdasarkan pendugaan titik bukanlah suatu konstanta yang menunjukkan dengan tepat berapa nilai parameter yang sebenarnya, oleh karena itu penduga titik haruslah didampingi oleh beberapa ukuran kesalahan yang mungkin dari penduga titik tersebut. Sebagai contoh suatu penduga titik mungkin didampingi beberapa selang tentang penduga titik bersama dengan beberapa ukuran yang meyakinkan bahwa nilai parameter yang sebenarnya terletak pada selang tersebut.

Pada subbab ini akan dibahas penggunaan distribusi prior untuk menentukan selang kepercayaan suatu parameter. Selang kepercayaan ini disebut sebagai selang kepercayaan menurut Bayes.

Definisi 4.2.1 Selang Kepercayaan menurut Bayes.

Jika diketahui distribusi posterior untuk Θ jika diketahui $(X_1,\ldots,X_n)=(x_1,\ldots,x_n)$ adalah :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)=\frac{f_{X_1,\ldots,X_n,\Theta}(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}$$

untuk setiap nilai tetap $1-\alpha$, sembarang selang, katakan (t_1,t_2) yang memenuhi :

$\int_{t_1}^{t_2} f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)\, d\theta = 1-\alpha$, didefinisikan sebagai selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk parameter θ menurut Bayes. □

Dalam praktik untuk menentukan t_1 dan t_2 yang memenuhi persamaan $\int_{t_1}^{t_2} f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)\, d\theta = 1-\alpha$, tentunya dipilih t_1 dan t_2 sedemikian hingga nilai t_1-t_2 terkecil. $t_i = t_i(x_1,\ldots,x_n)$ adalah fungsi-fungsi hasil observasi $x_1,\ldots,x_n$.

Contoh 4.2.1

Kembali kecontoh 3.3.3, dari contoh ini diketahui bahwa distribusi posterior untuk Θ adalah normal dengan rata-rata $\frac{n\bar{x}}{(n+1)}$ dan variansi $\frac{1}{n+1}$. Menentukan selang kepercayaan Bayes bagi θ berarti mencari t_1 dan t_2 yang memenuhi :

$$1-\alpha=\int_{t_1}^{t_2} f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)\, d\theta = \Phi\left(\frac{t_2-\frac{n\bar{x}}{(n+1)}}{\sqrt{1/(n+1)}}\right)-\Phi\left(\frac{t_1-\frac{n\bar{x}}{(n+1)}}{\sqrt{1/(n+1)}}\right)$$

Jika ditentukan Z sedemikian hingga $\Phi(Z_{\alpha/2})-\Phi(-Z_{\alpha/2})=1-\alpha$, maka :

$$t_1=\frac{n\bar{x}}{(n+1)}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{1}{n+1}} \text{ dan } t_2=\frac{n\bar{x}}{(n+1)}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{1}{n+1}}$$

memberikan selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ terpendek menurut Bayes yang dapat ditulis kembali sebagai $\left(\frac{n\bar{x}}{(n+1)}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{1}{n+1}}, \frac{n\bar{x}}{(n+1)}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{1}{n+1}}\right)$.

□

Contoh 4.2.2

Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ adalah sampel random dari variabel random yang berdistribusi seragam, yaitu :

$$f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta}(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0<\max x_i<\theta \\ 0, & \text{untuk yang lain.}\end{cases}$$

Jika diketahui distribusi prior untuk Θ adalah :

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases} \frac{\theta^n e^{-\theta}}{n!}, & \theta>0 \\ 0, & \text{untuk yang lain.}\end{cases}$$

maka distribusi marjinalnya adalah :

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots x_n)=\frac{1}{n!}\int_{\max x_i}^{\infty}\theta^n e^{-\theta}\left(\tfrac{1}{\theta^n}\right)d\theta=\frac{1}{n!}e^{-\max x_i}.$$

dan distribusi posteriornya adalah :

$$f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} e^{-\theta+\max x_i}, & \theta>\max x_i \\ 0, & \text{untuk yang lain.}\end{cases}$$

Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ terpendek menurut Bayes diberikan oleh (t_1, t_2), dimana :

$$1-\alpha = \int_{t_1}^{t_2} f_{\Theta|X_1,\ldots,X_n}(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)\,d\theta = e^{\max x_i}\left[e^{-t_1} - e^{-t_2}\right]$$

Nilai terkecil dari $t_2 - t_1$ terjadi jika dipilih $t_1 = \max x_i$ (yang merupakan nilai terkecil dari θ), dan t_2 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&1-\alpha = e^{\max x_i}\left[e^{-\max x_i} - e^{-t_2}\right] = e^0 - e^{\max x_i - t_2} = 1 - e^{\max x_i - t_2} \\
&\Leftrightarrow \ln 1 - \ln\alpha = \ln 1 - (\max x_i - t_2) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) = 0 - \max x_i + t_2 \\
&\Leftrightarrow t_2 = \max x_i + \ln\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Jadi selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ terpendek menurut Bayes adalah :

$$\left(\max x_i, \max x_i + \ln\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)\right)$$

Contoh 4.2.3

Kembali ke contoh 3.3.4. Dari contoh 3.3.4 dapat diketahui $m'' = 1{,}225$ dan $\sigma_X''^2 = 937.5$, $\sigma_X'' = \sqrt{\sigma_X''^2} = \sqrt{937.5} \cong 30.6$ Jika berdasarkan distribusi posterior contoh 3.3.4 dibuat selang kepercayaan 95% menurut Bayes bagi μ_X maka didapat:

$$\begin{aligned}
&m'' - z_{\alpha/2}\sigma_X'' < \mu_X < m'' + z_{\alpha/2}\sigma_X'' \\
&\Leftrightarrow 1{,}225 - 1.96(30.6) < \mu_X < 1{,}225 + 1.96(30.6) \\
&\Leftrightarrow 1{,}165 < \mu_X < 1{,}286
\end{aligned}$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Bayes adalah metode pengambilan keputusan statistik yang memadukan antara unsur subyektifitas pengambil keputusan dan informasi yang diperoleh dari observasi sampel.

Metode Bayes memandang parameter θ sebagai varaiabel random yang mempunyai distribusi peluang. Distribusi peluang dari parameter θ disebut sebagai distribusi prior. Distribusi prior merangkum derajat keyakinan seseorang tentang parameter θ yang tidak diketahui. Dengan teorema Bayes, distribusi prior ini kemudian digabung dengan informasi yang diperoleh dari observasi sampel yang dinyatakan dalam distribusi likelihood. Hasil penggabungan ini menghasilkan distribusi posterior.

Berbeda halnya dengan metode Klasik. Dalam pengambilan keputusan Metode Klasik hanya mempertimbangkan hasil observasi sampel dan mengabaikan unsur subyektifitas statistisi, serta memandang parameter θ hanya sebagai konstanta bukan sebagi variabel random.

Kesulitan dalam menghitung distribusi marjinal dapat diatasi dengan konsep keluarga distribusi piror sekawan dimana sifat "sekawan" distibusi prior tergantung pada bentuk fungsi likelihoodnya.

Distribusi posterior dapat digunakan dalam menyusun dugaan suatu parameter tunggal dan selang kepercayaan suatu mean populasi. Pendugaan dan penyusunan selang berdasarkan distribusi posterior ini disebut sebagai pendugaan menurut Bayes dan selang kepercayaan menurut Bayes.

Dalam membahas pendugaan parameter, pendekatan yang dipakai adalah dengan teori keputusan statistik dan jika fungsi kerugian adalah error kuadrat maka penduga bagi mean populasi adalah mean dari distribusi posterior.

5.2 Saran

Metode perhitungan aturan Bayes adalah dengan mendaftar semua kemungkinan keputusan dan resiko Bayesnya. Dalam praktik aturan Bayes secara umum tidak praktis. Jalan lain yang dapat ditempuh yaitu dengan menggunakan kriteria minimaks. Kriteria ini dapat digunakan untuk menentukan kemungkinan resiko terjelek dari semua kemungkinan resiko yang ada.

DAFTAR PUSTAKA

Edward, J. Dudewicz dan Satya N. Misha. (1995). *Statistik Matematik Modern.* Bandung: Penerbit ITB.

Horald, D. Larson. (1982). *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*. Third Edition. New York: John Wiley and Sons.

James, O. Berger. (1980). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.* Second Edition. New York: Springer-Verlag.

Mood, A.M.,F.A. Graybill and D.C Boes. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* Third Edition. New York: McGraw-Hill.

Nasoetion A.H. dan Abdurrauf Rambe. (1984). *Teori Statistik untuk Ilmu-Ilmu Kuantitatif.* Jakarta: Penerbit Bhratara karya Aksara.

Peter, J. Bickkel and Kjell A. Doksum. (1977). *Mathematical Statistics Basic Ideals and Selected Topics*. Sanfransisco; Holden-Day Inc.

Rohatgi, V.k. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistic.* New York: Wiley.

Ronald E.Walpole (1990). *Pengantar Statistik.* Edisi ketiga. Jakarta: Penerbit Gramedia Pustaka Utama.

Wiliam, W. Hines dan Doglas C. Montgomery. (1990). *Probabilita dan Statistika dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen.* Edisi Kedua. Jakarta: Penerbit UI.

Zanzawi Soejoeti. Ph.D. dan Soebanar. Ph.D. (1988). *Materi pokok Inferensi Bayesian*. Jakarta: Penerbit Karunia. Universitas Terbuka.

LAMPIRAN

Table A Normal distribution

Each table entry is the cumulative probability P, right tail from the value of z to plus infinity, and also left tail from minus infinity to $-z$, for all $P \leqslant .50$. Read down the first column to the first decimal value of z, and over to the correct column for the second decimal value; the number at the intersection is P.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002

Source: Adapted from Table 1 of Pearson, E. S., and H. O. Hartley, eds. (1954), *Biometrika Tables for Statisticians*, Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, England, with permission of the Biometrika Trustees.

BAGAN KETERKAITAN ANTAR POKOK BAHASAN