GEOMETRI HINGGA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Bernadus

NIM : 981414040

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

SKRIPSI

GEOMETRI HINGGA

Yang disusun oleh :

Bernadus

NIM : 981414040

Telah disetujui oleh :

Pembimbing,

Drs. B. Susanta

Tanggal 13 - 9 - 2003

Pengesahan Skripsi Berjudul

GEOMETRI HINGGA

Yang disusun dan dipersiapkan oleh:

Bernadus

NIM : 981414040

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Penguji Skripsi

Pada tanggal, 2 September 2003

Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji :

	Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT	....
Anggota	: Drs. B. Susanta	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Wanty Widjaja, M.Ed	....

Yogyakarta, 2 September 2003

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

"Jika kamu melakukan sesuatu dengan keyakinan,
maka akan terjadi seperti yang kamu inginkan".

Skripsi ini kupersembahkan untuk:
Tarekat Bruder-bruder Maria Tak Bernoda komunitas Alverna Yogyakarta,
Bapak dan Ibuku tercinta,
Kakak-kakakku beserta segenap keluarganya,
Adik-adikku semua,
Bapak Petrus Wahyudi sekeluarga.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 2 September 2003

Penulis

Bernadus

ABSTRAK

Geometri Hingga merupakan contoh geometri yang dapat dipelajari dengan struktur yang sederhana, hal ini tampak dari sistem aksioma yang menyusun geometri tersebut. Dari sistem yang sederhana tersebut kita dapat meningkat ke yang lebih rumit, misalnya dengan membuat perubahan pada salah satu aksiomanya. Dengan demikian kita dapat menemukan beragam macam contoh dari Geometri Hingga. Dari beragam macam contoh Geometri Hingga tersebut kita dapat melihat kaitan antara geometri satu dengan yang lainnya.

Beberapa Geometri Hingga termasuk Geometri Insidensi. Terkait dengan aksioma paralelnya, Geometri Hingga dapat bersifat Afin atau bersifat Projektif.

ABSTRACT

Finite Geometry is one of geometry examples that can be learned with simple structure, it appeared from axiom system which constitute the geometry. From the simple system we can proceed to the more complex one, for instance by changed one of its axiom. Therefore, we can find variety examples of Finite Geometry. From these examples, we can see the relationship between one geometry and another.

Some of the Finite Geometry includes Incidence Geometry. Relating to its parallel axiom, Finite Geometry could be has Affine or Projective properties.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Kasih dan Maha Baik atas rahmat dan berkatNya yang berlimpah sehingga skripsi yang berjudul Geometri Hingga dapat terselesaikan.

Dalam menyusun dan menyelesaikan skripsi ini, banyak pihak yang ikut berperan baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Tarekat Bruder Maria Tak Bernoda yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk studi di Universitas Sanata Dharma, khususnya komunitas Alverna Yogyakarta atas segala dukungan dan fasilitas yang boleh penulis terima selama studi dan menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak, Ibu serta Kakak dan Adikku semua, atas kesempatan belajar dan dorongan yang diberikan baik secara material maupun spiritual.
3. Bapak Petrus Wahyudi sekeluarga atas dorongan yang diberikan baik secara material maupun spiritual.
4. Bapak Drs. B. Susanta selaku pembimbing skripsi atas segala kesabaran dan masukan berharga yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Drs. A. Atmadi, M.Si selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma.
6. Bapak Drs.Th. Sugiarto, MT selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang selalu memberikan dorongan dalam menyelesaikan skripsi ini.

7. Bapak dan Ibu dosen atas pengetahuan yang penulis dapatkan.
8. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng beserta Bapak, Ibu karyawan/wati atas keramahannya dalam melayani kepentingan mahasiswa.
9. Sahabatku Beti, Drajat, Wuri, dan Sr. Olinda, atas doa dan dorongan yang diberikan.
10. Rekan-rekan mahasiswa pendidikan matematika, khususnya angkatan '98 atas kebersamaannya selama kuliah.

Penulis menyadari kekurangan dan keterbatasan dalam penyusunan skripsi ini, maka saran dan kritik akan diterima dengan senang hati.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Alasan Pemilihan Topik

Geometri sudah kita pelajari sejak di Sekolah Dasar, Sekolah Menengah sampai di Perguruan Tinggi. Jelas bahwa kita mengenal berbagai macam geometri, baik ditinjau dari segi bahasa (lambang), sistem aksioma, dimensi maupun metode penyampaiannya.

Di antara sekian banyak geometri yang sudah kita kenal, **Geometri Hingga** (*Finite Geometry*) yaitu geometri dengan banyak unsur berhingga, merupakan salah satu topik yang kurang terdengar bahkan tidak dipelajari secara mendalam. Padahal dengan mempelajari Geometri Hingga dimaksudkan untuk mempelajari geometri dengan struktur yang sederhana. Dari struktur yang sederhana ini memudahkan kita untuk lebih mengenal dan memahami geometri secara aksiomatik. Oleh karena itu Geometri Hingga cocok sebagai bahan pendahulu untuk Sistem-Sistem Geometri.

B. Latar Belakang Topik

Konsep mengenai Geometri Hingga muncul pada tahun 1856. Namun baru pada tahun 1892, Gino Fano orang yang pertama kali mempelajari geometri tersebut. Kemudian dalam tahun 1906, geometri-geometri Proyektif Hingga dipelajari oleh Veblen dan Bussey. Sejak saat itu sejumlah Geometri Hingga mulai dipelajari. Banyak kombinasi titik dan garis yang sudah dikenal dalam Geometri Euclides diusut kembali dengan memandangnya dari sudut pandang yang baru ini.

C. Ruang Lingkup Penulisan

Pembahasan Geometri Hingga dalam skripsi ini yakni geometri yang mencakup studi mengenai sifat dan hubungan serangkaian berhingga "titik" dan "garis" dalam bidang.

Dalam Bab II penulis akan menguraikan beberapa materi prasyarat yang nantinya akan digunakan untuk memahami konsep Geometri Hingga. Materi prasyarat yang dimaksud adalah sistem aksioma beserta contoh abstraknya, sifat-sifat sistem aksioma, serta model dan isomorfisme.

Bab III merupakan isi utama dari karya tulis ini. Di sini penulis mulai dengan Geometri Empat Titik dan Geometri Empat Garis, kemudian dilanjutkan dengan Geometri Hingga Fano dan Geometri Hingga Young, serta Geometri Hingga Pappus dan Geometri Hingga Desargues.

Bab IV membahas Geometri Insidensi sekaligus melihat hubungan antara Geometri Hingga dan Geometri Insidensi. Dari sini kita akan melihat bagaimana sebuah Geometri Hingga dapat bersifat Afin atau Projektif.

Bab terakhir yaitu bab V berisi kesimpulan.

D. Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk lebih mengenal dan memahami geometri secara aksiomatik (berlatih mengenal sistem aksioma dengan struktur yang sederhana), sehingga dengan mengenal dan memahami geometri secara aksiomatik kita lebih mudah memahami atau mempelajari Sistem-Sistem Geometri.

E. Materi Prasyarat

Beberapa materi yang harus dikuasai dalam mempelajari Geometri Hingga ini adalah:

1. Logika Matematika
2. Model dan Isomorfisme

F. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan penulis dalam menyusun skripsi ini adalah studi pustaka.

BAB II

SISTEM AKSIOMA DAN SIFAT-SIFATNYA

Begitu memulai studi tentang geometri secara aksiomatik, penting bahwa kita harus memiliki suatu pemahaman mendasar mengenai Sistem Aksioma yang akan menyusun geometri tersebut. Guna memahami Sistem Aksioma, maka dalam Bab II ini penulis akan membahas apa yang dimaksud dengan Sistem Aksioma dan menyelidiki sifat-sifat yang dimiliki Sistem Aksioma.

A. Sistem Aksioma

Sebagaimana akan sulit untuk membayangkan sebuah mobil baru yang mengkilap dengan terlebih dahulu memeriksa onderdilnya yang tak terpasang, demikian juga sulit untuk menguasai ide tentang Sistem Aksioma dengan menganalisa masing-masing bagiannya secara terpisah. Akan lebih baik untuk melihat produk yang telah terangkai dan kemudian memisahkan bagian-bagiannya.

Bayangkan sekarang kita sedang mengamati sebuah perhiasan S yang sudah jadi. Anggaplah sebuah perhiasan S tersebut terdiri dari sejumlah manik-manik yang tersusun pada rangkaian kawat yang sesuai dengan aturan sebagai berikut:

(1) : Ada tepat tiga manik-manik yang berbeda.

(2) : Tiap dua manik-manik yang berbeda ditembusi tepat satu kawat.

(3) : Tidak semua manik-manik ditembusi oleh kawat yang sama.

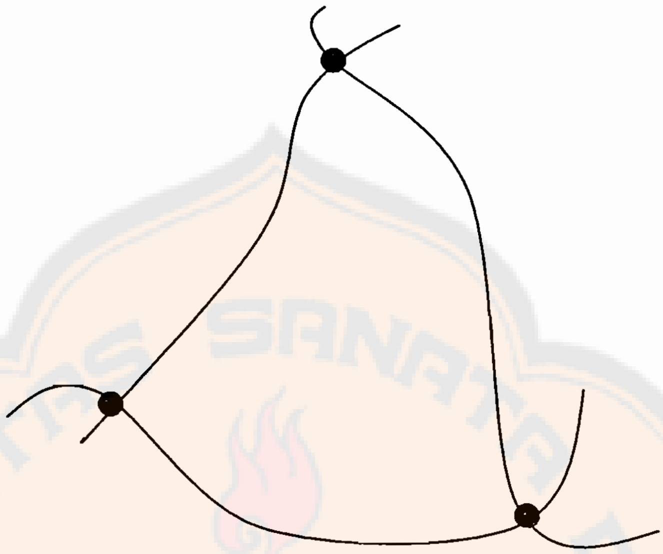
(4) : Tiap dua kawat yang berbeda menembusi paling sedikit satu manik-manik yang sama.

Pernyataan (1) sampai (4) di atas kita terima dan kita anggap benar. Selanjutnya informasi apa yang dapat ditarik dari fakta-fakta di atas.

Dari pernyataan (4) kita andaikan bahwa dua kawat yang berbeda menembusi lebih dari satu manik-manik. Andaikan dua kawat yang berbeda menembusi dua manik-manik, maka sebagai akibat, dua manik-manik yang berbeda, ditembusi oleh dua kawat. Namun ini bertentangan dengan pernyataan (2). Ini berarti pengandaian kita salah. Sehingga pernyataan lain yang dapat kita tarik sebagai kesimpulan yaitu pernyataan kelima adalah (5) : *Tiap dua kawat yang berbeda menembusi tepat satu manik-manik yang sama.*

Untuk menarik informasi selanjutnya, dari pernyataan (1) kita mempunyai tiga manik-manik. Dan dengan pernyataan (2) tiap dua manik-manik yang berbeda ditembusi tepat satu kawat. Ini berarti pasangan manik-manik dapat dipilih dari tiga manik-manik yang ada. Dengan kombinasi dua unsur yang diambil dari tiga unsur, maka kita dapatkan tiga pasang manik-manik, sehingga terdapat tepat tiga kawat. Jadi kesimpulan keenam yang dapat kita ambil adalah (6) : *Ada tepat tiga kawat.*

Jika sekarang manik-manik diwakili oleh noktah pada kertas dan kawat diwakili oleh kurva, Gambar 1.1 menunjukkan sebuah perhiasan S yang merefleksikan enam pernyataan di atas.



Gambar 1.1

Baca kembali pernyataan (1) sampai (4) di atas tetapi ubah "manik-manik" dengan "titik" dan "kawat" dengan "garis". Demikian juga ubah "ditembusi" dengan "dilalui" dan "menembusi" dengan "memuat", maka pernyataannya menjadi:

(1) : Ada tepat tiga titik yang berbeda.

(2) : Tiap dua titik yang berbeda dilalui tepat sebuah garis.

(3) : Tidak semua titik dilalui garis yang sama.

(4) : Tiap dua garis yang berbeda memuat paling sedikit satu titik yang sama.

Di sini "titik" dan "garis" merupakan istilah yang tidak didefinisikan (*undifined terms*), jadi sekedar nama. Mengingat unsur-unsur tersebut yaitu titik dan garis yang merupakan unsur yang tidak terdefinisikan, maka sistem ini disebut abstrak.

Dari pengalaman kita terhadap pengamatan sesuatu yang mengandaikan pertimbangan fisik, kita bawa ke yang abstrak, kita dapat melihat bahwa bagaimana geometri itu disusun berdasarkan sistem aksioma. Lalu apa sebenarnya sistem aksioma itu. Mari kita mencoba untuk melihat kembali produk yang telah jadi tersebut dengan menganalisis bagian-bagiannya.

1. Pengertian Pangkal dan Aksioma

Pada pembahasan mengenai sistem aksioma di atas, kita melihat ada beberapa hal penting yang fundamental dari suatu sistem aksioma yaitu **pengertian pangkal** (*primitif concept*) dan **aksioma**.

Pengertian pangkal (terdiri dari unsur pangkal dan relasi pangkal) tidak didefinisikan. Hal ini dimaksudkan untuk menghindari lingkaran dari definisi. Dari pengertian pangkal didefinisikan pengertian lain (non pangkal).

Sebagaimana pengertian-pengertian tertentu dipilih sebagai pengertian pangkal di mana semua pengertian lain didefinisikan, maka beberapa pernyataan yang juga sehubungan dengan pengertian pangkal, dipilih sebagai pernyataan pangkal. Pernyataan-pernyataan pangkal yang diterima tanpa pembuktian ini disebut **aksioma**. Jadi pernyataan (1) sampai (4) di atas kita sebut aksioma.

2. Induktif, Deduktif dan Teorema

Apa yang kita bahas mengenai sistem aksioma di atas kita awali dengan suatu pengamatan terhadap benda-benda konkret yang sudah barang tentu melibatkan pertimbangan fisik dari pengamatan kita. Sekarang bayangkan kita sedang membuat pengamatan dan melakukan percobaan yang mengarah pada suatu kesimpulan sehingga kita membuat empat pernyataan. Dalam kasus-kasus yang demikian kita mengatakan kesimpulan telah dicapai melalui **induksi**. Jadi induksi adalah proses dari perumusan sesuatu yang diangkat dari yang khusus ke yang umum.

Selain kesimpulan induktif, kita juga telah menarik dua kesimpulan lainnya yaitu pernyataan (5) dan (6). Dua pernyataan terakhir ini kita turunkan dari pernyataan-pernyataan sebelumnya yang diketahui benar. Proses pencapaian kesimpulan yang demikian disebut **deduksi**. Hal yang pasti tentang kesimpulan deduktif adalah jika pernyataan diterima sebagai kebenaran, maka kesimpulan yang secara logika diturunkan dari pernyataan yang benar juga diterima sebagai kebenaran. Jika pernyataan (1) sampai (4) adalah pernyataan yang benar, maka benar bahwa *tiap dua garis yang berbeda memuat tepat satu titik yang sama*, demikian juga benar bahwa *ada tepat tiga garis*. Dan seperti yang telah kita sebutkan di atas, kita menggunakan deduksi untuk mencapai dua kesimpulan terakhir ini. Saat kita menggunakan deduksi untuk menunjukkan bahwa sebuah pernyataan adalah benar, maka pernyataan tersebut di sini disebut **teorema**. Jadi pernyataan (5) dan (6) adalah teorema.

Dari seluruh uraian kita mengenai sistem aksioma di atas maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

1. Sistem aksioma harus memuat pengertian pangkal yang dengan sengaja dipilih.
2. Semua pengertian lain dalam sistem didefinisikan dengan menggunakan pengertian pangkal dan non-pangkal (pengertian sebelumnya).
3. Sistem aksioma memuat pernyataan yang tidak dibuktikan. Ini merupakan aksioma dalam sistem.
4. Semua pernyataan lain dalam sistem harus berupa konsekuensi logis dari aksioma atau teorema sebelumnya. Pernyataan yang diperoleh ini disebut teorema dalam sistem.

Di sini kita dapat melihat bahwa sistem aksioma merupakan kumpulan aksioma beserta konsep pangkal dan non pangkal serta teorema-teorema yang dapat diturunkan dari aksioma dan teorema sebelumnya dan semuanya itu saling terkait satu sama lain.

B. Sifat-Sifat Sistem Aksioma

Sifat sistem aksioma yang paling penting dan mendasar adalah konsisten. Artinya dalam satu sistem aksioma, tidak boleh ada dua pernyataan (aksioma) yang bertentangan, demikian juga tidak boleh ada dua teorema yang bertentangan yang diturunkan dari himpunan aksioma atau teorema tersebut.

Selain sifat konsisten, sebuah aksioma juga harus independen. Aksioma dikatakan independen jika tidak dapat diturunkan dari aksioma lainnya.

C. Model dan Isomorfisme

Dalam bagian sebelumnya kita telah membahas sistem aksioma dan sebuah contoh abstrak dari sistem aksioma. Setiap sistem aksioma memuat unsur-unsur yang tidak didefinisikan. Unsur-unsur yang tidak didefinisikan ini memungkinkan kita untuk menapsirkannya dengan cara kita sendiri. Jika dalam penapsiran semua pernyataan "benar" , maka penapsiran ini disebut **model**. Model tidak lain adalah penapsiran kita secara "benar" terhadap sistem yang abstrak tersebut.

Tentang manik-manik dan kawat, kita dapat melihat bahwa kumpulan pernyataan tersebut adalah "benar" dan ini adalah contoh model. Jika sekarang kita menapsirkan "titik" dan "garis" dengan buku dan rak, maka aksiomanya menjadi:

(1) : Ada tepat tiga buku.

(2) : Tiap dua buku yang berbeda ada pada satu rak.

(3) : Tidak semua buku ada pada rak yang sama.

(4) : Dua rak yang berbeda memuat satu buku yang sama.

Dari empat aksioma di atas, Aksioma (4) bukan pernyataan yang "benar", sebab dari pertimbangan fisik, tidak mungkin satu buku berada pada dua rak yang berbeda. Maka penapsiran ini bukan model dalam sistem tersebut.

Apa yang kita lakukan yaitu dengan menapsirkan "titik" dan "garis" dengan manik-manik dan kawat, memberikan informasi tentang satu situasi. Lalu apa penapsiran lain pada "titik" dan "garis" sehingga menghasilkan model lain. Model lain dapat diperoleh dengan menapsirkan:

"titik"	: orang
"garis"	: panitia
"titik dilalui garis"	: orang menjadi anggota panitia
"garis memuat titik"	: panitia beranggotakan orang

Maka akan diperoleh sistem aksioma sebagai berikut:

Aksioma 1 : Ada tepat tiga orang.

Aksioma 2 : Tiap dua orang menjadi anggota satu panitia

Aksioma 3 : Tidak semua orang menjadi anggota panitia yang sama.

Aksioma 4 : Tiap dua panitia beranggotakan paling sedikit satu orang yang sama

Jika suatu teorema sudah dibuktikan secara abstrak, maka otomatis akan berlaku dalam setiap bentuk modelnya, sehingga dalam sistem di atas berlaku kesimpulan:

Teorema 1 : Tiap dua panitia beranggotakan tepat satu orang yang sama.

Teorema 2 : Ada tepat tiga panitia.

Kembali ke sistem abstrak di atas, suatu sistem aksioma yang menyusun geometri kadang-kadang tidaklah tunggal, misalnya sistem aksioma (1), (2), (3), (4), ekuivalen dengan sistem terdiri dari aksioma (2), (3), (4), (6), dan dalam sistem ini, pernyataan (5) dan (1) menjadi teorema yang dapat dibuktikan. Dua sistem disebut ekuivalen jika geometri yang dibentuk adalah sama.

Jika antara model satu dengan yang lain terjadi korespondensi satu-satu dan sekaligus memenuhi sistem aksioma yang sama, maka model satu dengan yang lain tersebut disebut saling **isomorfik**.

BAB III

GEOMETRI HINGGA

Telah diuraikan pada bagian pendahuluan bahwa dengan mempelajari Geometri Hingga dimaksudkan untuk mempelajari geometri dengan struktur yang sederhana. Maka dalam Bab III ini penulis akan meneliti beberapa Geometri Hingga yang disusun berdasarkan sistem aksioma.

A. Beberapa Geometri Hingga

Geometri Hingga memiliki "titik" dan "garis" sebagai unsur yang tidak didefinisikan, dan relasi "pada" (yang dalam penggunaan sehari-hari dapat ditapsirkan sebagai: terletak; memuat; melalui) merupakan relasi yang tidak didefinisikan. Relasi "pada" disebut juga relasi insidensi.

Untuk pembuktian teorema-teorema dapat digunakan bukti paragraf atau bukti dua kolom. Namun dalam skripsi ini kita akan menggunakan bukti paragraf. Kemudian diperlukan beberapa definisi yang nantinya akan kita gunakan dalam pembahasan selanjutnya:

Definisi 1.1 : Dua garis berbeda memuat titik yang sama disebut garis berpotongan dan titik yang sama dari kedua garis yang berbeda tersebut disebut titik potong (titik persekutuan).

Definisi 1.2 : Dua garis yang tidak berpotongan disebut garis paralel satu sama lain. (pasangan garis paralel = pasangan garis yang tidak berpotongan).

Tiga titik segaris (kolinear) : tiga titik pada satu garis yang sama.

Tiga garis setitik (konkuren) : tiga garis melalui satu titik yang sama.

Titik potong : titik persekutuan dua garis atau lebih.

Garis hubung : garis yang menghubungkan dua titik atau lebih.

Dualitas : sepasang pengertian/pernyataan yang untuk relasinya hanya digunakan "pada" disebut saling dual jika yang satu diperoleh dari yang lain dengan mempertukarkan istilah "titik" dan "garis".

Prinsip dualitas : Jika suatu teorema terbukti betul, maka dualnya pun betul.

Model noktah-kurva : model yang terjadi dengan menapsirkan "titik" dengan noktah dan "garis" dengan kurva.

1. Geometri Empat Titik

Aksioma- aksioma untuk Geometri Empat titik:

Aksioma 1 : Ada tepat empat titik

Aksioma 2 : Tiap dua titik berbeda dilalui tepat satu garis hubung.

Aksioma 3 : Setiap garis memuat tepat dua titik.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita turunkan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Jika dua garis berbeda berpotongan, maka terdapat tepat satu titik potong.*

Bukti :

Dari Definisi 1.1 : dua garis berbeda memuat titik yang sama disebut garis berpotongan. Ini berarti paling sedikit ada satu titik potong dari kedua garis tersebut. Andaikan ada dua titik potong, maka sebagai akibat dua titik berbeda dilalui dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 2. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga jika dua garis berbeda berpotongan, maka terdapat tepat satu titik potong. ∎

Teorema 2 : *Terdapat tepat enam garis*

Bukti:

Dari Aksioma 1, ada tepat empat titik. Kemudian dengan kombinasi dua unsur yang diambil dari empat unsur maka kita dapatkan enam pasang titik. Dengan Aksioma 2, setiap pasangan titik menghasilkan tepat satu garis. Dengan Aksioma 3 tidak ada tiga titik yang segaris. Oleh karena itu ada tepat enam garis. ∎

Teorema 3 : *Setiap titik dilalui tepat tiga garis.*

***Bukti*:**

Aksioma 1 menjamin ada tepat empat titik. Dengan Aksioma 2, setiap titik masing-masing memiliki satu garis dengan setiap titik lainnya. Oleh karena itu setiap titik dilalui paling banyak tiga garis. Andaikan ada titik yang hanya dilalui dua garis, dengan Aksioma 2, titik tersebut terhubung dengan setiap titik lain yang ada. Sebagai akibat, ada garis yang memuat tiga titik. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 3. Ini berarti pengandaian kita salah. Oleh karena setiap titik dilalui tepat tiga garis. ■

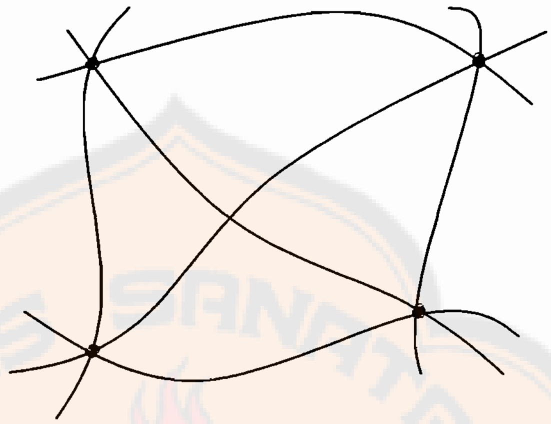
Teorema 4 *: Setiap garis mempunyai tepat satu garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Teorema 2 ada tepat enam garis. Ambil sebarang garis namakan garis g. Dengan Aksioma 3, garis g memuat dua titik. Dari Aksioma 1 ada tepat empat titik. Ini berarti ada dua titik di luar garis g. Dengan Aksioma 2, kedua titik tersebut dilalui tepat satu garis namakan misalnya garis m. Garis m dan garis g tidak mungkin berpotongan karena akan melanggar Aksioma 3.

Jadi setiap garis mempunyai tepat satu garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva untuk geometri empat titik tampak seperti pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1

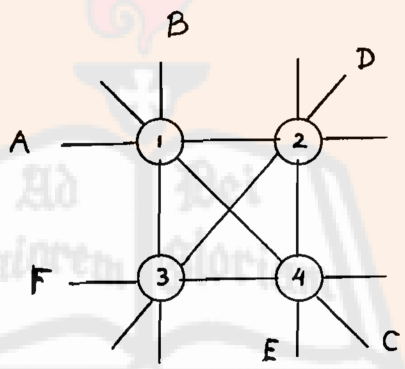
Dalam model tampak bahwa ketiga aksioma dipenuhi. Dan dari model juga, kita dapat menentukan jumlah total garis.

Cara lain menggambarkan Geometri Empat Titik adalah dengan alat tabel sederhana. Misalnya "titik" dinyatakan dengan kolom, dan "garis" dinyatakan dengan huruf kapital. Maka konfigurasi untuk Geometri Empat Titik dapat ditunjuk seperti pada Tabel 3.1

Tabel 3.1

1	2	3	4
A	A	B	C
B	D	D	E
C	E	F	F

Dalam Tabel 3.1 di atas tampak bahwa ketiga aksioma juga dipenuhi. Tabel semacam Tabel 3.1 dapat digunakan untuk menjawab banyak pertanyaan mengenai geometri yang dapat dijawab dengan mempelajari suatu model. Misalnya kita dapat menunjukkan bahwa tiap garis hanya memuat tepat dua titik dengan menemukan tiap huruf yang sama hanya menempati tepat dua kolom. Kombinasi antara model pada Gambar 3.1 dan model pada Tabel 3.1 tampak seperti pada Gambar 3.2. Kita dapat melihat bahwa antara model pada Gambar 3.1 dengan model pada Tabel 3.1 terjadi korespondensi satu-satu dan sekaligus memenuhi sistem aksioma yang sama, maka kedua model saling isomorfik.



Gambar 3.2

Seperti kita ketahui, suatu sistem aksioma yang menyusun suatu geometri hingga kadang-kadang tidaklah tunggal. Sekarang bagaimana kalau sistem aksioma untuk Geometri Empat Titik di atas kita ubah susunannya sehingga menjadi sistem aksioma baru. Sebagai kesepakatan, sistem aksioma yang baru ini kita namakan sistem aksioma Geometri Enam Garis.

2. Geometri Enam Garis

Aksioma-aksioma untuk Geometri Enam Garis:

Aksioma 1 : Ada tepat enam garis

Aksioma 2 : Dua titik yang berbeda dilalui tepat satu garis hubung.

Aksioma 3 : Setiap garis memuat tepat dua titik

Aksioma 4 : Tiap titik dilalui tepat tiga garis.

(Aksioma 1 dari Teorema 2, sedangkan Teorema 3 menjadi Aksioma 4). Pernyataan lainnya menjadi teorema yang dapat dibuktikan.

Teorema 1 *: Jika dua garis yang berbeda berpotongan, maka terdapat tepat satu titik potong.*

Bukti :

Dari Definisi 1.1 : dua garis berbeda memuat titik yang sama disebut garis berpotongan. Ini berarti paling sedikit ada satu titik potong dari kedua garis tersebut. Andaikan ada dua titik potong, maka sebagai akibat dua titik berbeda dilalui dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 2. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga jika dua garis berbeda berpotongan, maka terdapat tepat satu titik potong. ∎

Teorema 2 : *Terdapat tepat empat titik*

***Bukti*:**

Dari Aksioma 1 dan Aksioma 3, keberadaan titik terjamin. Dengan Aksioma 4, tiap titik dilalui tepat tiga garis dan dengan Aksioma 3 tiap garis memuat dua titik, sehingga paling sedikit ada empat titik. Andaikan ada lima titik, maka menurut Aksioma 2 titik kelima ini akan menentukan masing-masing satu garis dengan setiap titik lainnya, sebagai akibat ada titik yang dilalui oleh empat garis yang berbeda. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah. Oleh karena itu terdapat tepat empat titik.

■

Teorema 3 : *Setiap garis mempunyai tepat satu garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Aksioma 1 ada tepat enam garis. Ambil sebarang garis namakan garis *g* Dengan Aksioma 3, garis *g* memuat dua titik dan dari Teorema 2 ada tepat empat titik. Ini berarti ada dua titik di luar garis *g*. Dengan Aksioma 2, kedua titik tersebut dilalui tepat satu garis namakan misalnya garis *h* dan dengan Aksioma 3, tidak ada tiga titik yang segaris. Jadi setiap garis mempunyai tepat satu garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva untuk Geometri Enam Garis sama dengan model noktah-kurva untuk Geometri Empat Titik (lihat Gambar 3.1), maka kedua sistem aksioma tersebut ekuivalen.

Sistem aksioma baru juga dapat ditimbulkan dari aksioma-aksioma Geometri Empat Titik yaitu dengan mengganti Aksioma 1 dengan : *ada tepat lima titik*, sedangkan aksioma 2 dan 3 tetap. Sistem aksioma yang terjadi kita namakan sistem aksioma Geometri Lima Titik.

3. Geometri Lima Titik

Aksioma-aksioma Geometri Lima Titik:

Aksioma 1 : Ada tepat lima titik

Aksioma 2 : Dua titik berbeda dilalui tepat satu garis hubung.

Aksioma 3 : Setiap garis memuat tepat dua titik.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita turunkan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 *: Terdapat tepat sepuluh garis*

Bukti**:**

Dari Aksioma 1, ada tepat lima titik. Kemudian dengan kombinasi dua unsur yang diambil dari lima unsur maka kita dapatkan sepuluh pasang titik. Dengan Aksioma 2, setiap pasangan titik dilalui tepat satu garis dan dengan aksioma 3, tidak ada tiga titik yang segaris, oleh karena itu ada tepat sepuluh garis. ■

Teorema 2 : *Setiap titik dilalui tepat empat garis*

***Bukti*:**

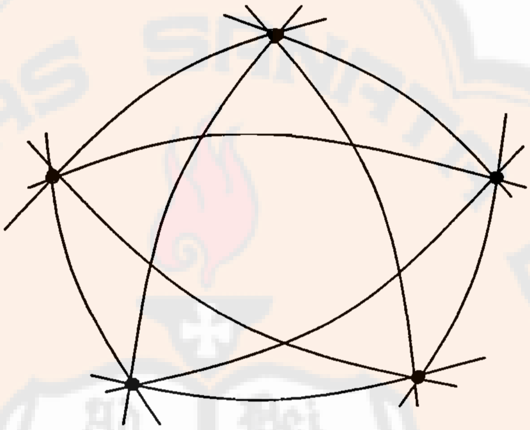
Dari Aksioma 1, ada tepat lima titik. Ambil sebarang titik namakan titik P. Dengan Aksioma 2, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik lain yang ada dan dengan Aksioma 3, tidak ada tiga titik yang segaris, sehingga ada tepat empat garis yang melalui P. Titik P di sini mewakili sebarang garis, oleh karena setiap titik dilalui tepat empat garis. ■

Teorema 3 : *Setiap garis memiliki tepat tiga garis yang paralel dengannya*

Bukti :

Dari Teorema 1, ada tepat sepuluh garis. Ambil sebarang garis, namakan misalnya garis g. Dengan Aksioma 3, garis g memuat dua titik dan dengan Teorema 2, setiap titik pada g dilalui tiga garis lagi selain garis g, sehingga ada enam garis yang memotong garis g. Ini berarti paling banyak ada tiga garis yang paralel dengan g. Andaikan hanya ada dua garis yang paralel dengan g. Sebagai akibat, terdapat tepat sembilan garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 1. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga setiap garis memiliki tepat tiga garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva untuk Geometri Lima Titik tampak seperti pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3

Sistem aksioma baru juga dapat ditimbulkan dengan menggunakan aksioma-aksioma Geometri Empat Titik yaitu dengan membuat dualnya. Sistem aksioma baru ini menghasilkan Geometri Empat Garis.

4. Geometri Empat Garis

Aksioma-aksioma Geometri Empat Garis:

Aksioma 1 : Ada tepat empat garis.

Aksioma 2 : Dua garis yang berbeda berpotongan pada tepat satu titik.

Aksioma 3 : Setiap titik dilalui tepat dua garis

Mengingat prinsip dualitas maka teorema-teorema yang ada pada Geometri Empat Titik dapat kita temukan dualnya pada Geometri Empat Garis.

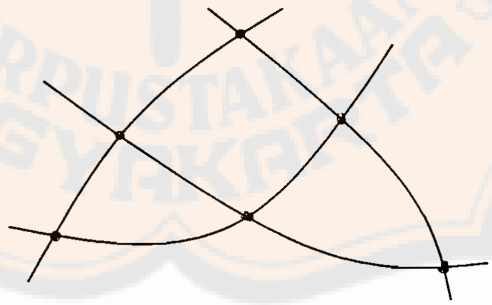
***Teorema 1** : Jika dua titik yang berbeda terhubung (ada garis penghubung), maka kedua titik tersebut dilalui oleh tepat satu garis.*

***Teorema 2** : Terdapat tepat enam titik.*

***Teorema 3** : Setiap garis memuat tepat tiga titik.*

***Teorema 4** : Setiap titik mempunyai tepat satu titik yang tidak terhubung (tidak ada garis penghubung) dengannya.*

Model noktah-kurva untuk Geometri Empat Garis seperti tampak pada Gambar 3.4.



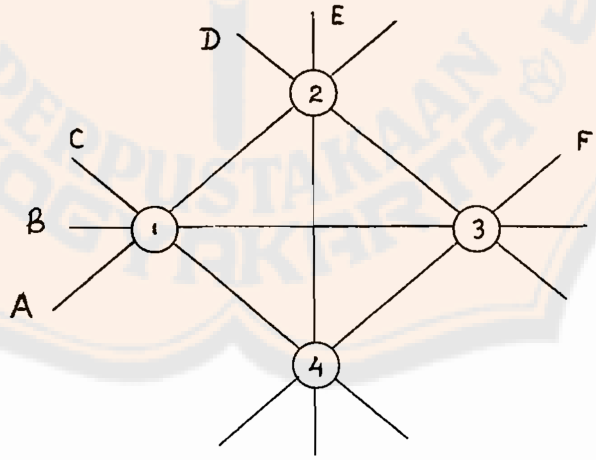
Gambar 3. 4

Apa yang terjadi jika sekarang "titik" kita nyatakan dengan huruf kapital dan "garis" dinyatakan dengan kolom. Maka konfigurasi untuk Geometri Empat Garis dapat ditunjukkan seperti pada Tabel 3. 2.

Tabel 3. 2

1	2	3	4
A	A	B	C
B	D	D	E
C	E	F	F

Dalam tabel 3.2 tampak bahwa ketiga aksioma dipenuhi. Kombinasi antara model pada Gambar 3.4 dan model pada Tabel 3.2 tampak seperti pada Gambar 3.5. Kita juga dapat melihat bahwa antara model pada gambar 3.4 dengan model pada tabel 3.2 terjadi korespondensi satu-satu dan sekaligus memenuhi sistem aksioma yang sama, maka kedua model saling isomorfik.



Gambar 3.5

Seperti kita ketahui, Geometri Empat Titik dan Geometri Empat Garis adalah saling dual. Maka geometri lain yang kita peroleh dari Geometri Empat Titik juga dapat kita temukan dualnya yang kita peroleh dari Geometri Empat Garis.

5. Geometri Hingga Fano

Geometri hingga Fano berbeda dari geometri hingga sebelumnya, yakni dalam aksiomanya tidak disebutkan secara ekplisit jumlah titik maupun jumlah garis.

Aksioma-aksioma untuk Geometri Fano:

Aksioma 1 : Ada paling sedikit satu garis.

Aksioma 2 : Setiap garis memuat tepat tiga titik.

Aksioma 3 : Tidak semua titik segaris.

Aksioma 4 : Melalui dua titik berbeda terdapat tepat satu garis.

Aksioma 5 : Untuk setiap dua garis berbeda paling sedikit ada satu titik potong.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita buktikan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Tiap dua garis berbeda memuat tepat satu titik potong.*

Bukti :

Dari Aksioma 5, untuk dua garis yang berbeda paling sedikit ada satu titik potong. Andaikan ada dua titik potong, maka sebagai akibat melalui dua titik berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga tiap dua garis berbeda memuat tepat satu titik potong. ■

Teorema 2 : *Setiap titik dilalui tepat tiga garis.*

Bukti :

Dari Aksioma 1, ada paling sedikit satu garis namakan misalnya garis g. Dengan Aksioma 2, garis g memuat tepat tiga titik. Dengan Aksioma 3, ada titik di luar garis g, namakan misalnya titik P. Dengan Aksioma 4, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada garis g, sehingga paling sedikit ada tiga garis yang melalui *P*. Andaikan ada garis keempat yang melalui P. Dengan Teorema 1, garis keempat memotong garis g di titik namakan misalnya titik Q. Titik Q tidak mungkin berbeda dengan titik yang ada pada g karena akan melanggar Aksioma 2. Ini berarti titik Q sama dengan salah satu titik yang ada pada g. Sebagai akibat melalui dua titik berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga titik P dilalui tepat tiga garis. Titik P di sini mewakili sebarang titik, oleh karena itu setiap titik dilalui tepat tiga garis. ■

Teorema 3 : *Terdapat tepat tujuh titik.*

Bukti :

Dari Aksioma 1 sampai Aksioma 3, paling sedikit ada empat titik, tiga di antaranya berada pada garis *l* dan sebuah titik *P* yang tidak terletak pada garis *l*. Dengan Aksioma 4, titik *P* akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik pada garis *l*, dan dengan Aksioma 2 tiap garis tersebut harus memuat tiga titik, karena itu minimal ada tujuh titik. Andaikan ada delapan titik. Dengan Aksioma 4, titik kedelapan ini akan menentukan satu garis dengan tiap titik lain yang ada. Sebagai akibat titik *P* dilalui empat garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 2. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga ada tepat tujuh titik. ■

Teorema 4 : *Terdapat tepat tujuh garis.*

Bukti :

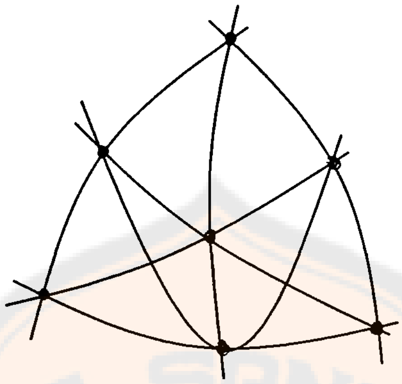
Dari Teorema 3, ada tepat tujuh titik namakan misalnya titik A, B, C, D, E, F, G. Ambil sebarang titik misalnya titik A. Kemudian dengan Teorema 2, terdapat tiga garis berbeda yang melalui A namakan misalnya garis g_1, g_2, g_3. Dengan Aksioma 2, garis-garis tersebut masing-masing memuat tiga titik, misalnya garis g_1 memuat titik A, B, C ; garis g_2 memuat titik A, D, E; garis g_3 memuat titik A, F, G. Kemudian dengan Aksioma 4 dan Aksioma 2, terdapat garis misalnya garis g_4 yang memuat titik C, E, G ; juga terdapat garis g_5 yang memuat titik misalnya titik B, D, G; terdapat garis g_6 yang memuat titik misalnya titik C, D, F; dan terdapat garis g_7 yang memuat titik B, E, F, sehingga minimal ada tujuh garis dan tujuh titik. Andaikan ada garis kedelapan, maka dengan Aksioma 2 garis kedelapan ini memuat tiga titik, namun ketiga titik tersebut tidak mungkin dari tujuh titik yang ada karena akan melanggar Teorema 2. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga ada tepat tujuh garis. ■

Teorema 5 : *Geometri Fano tidak memiliki pasangan garis paralel*

Bukti :

Dari Aksioma 5 untuk setiap dua garis yang berbeda paling sedikit ada satu titik potong. Ini berarti setiap garis tidak mempunyai pasangan garis paralel. ■

Model noktah-kurva Geometri Fano tampak seperti pada Gambar 3.6



Gambar 3.6

Cara lain untuk membuktikaan teorema-teorema di atas adalah dengan membuat tabel (lihat Tabel 3.3) yang menunjukkan hubungan antar titik dan garis. Langkah-langkahnya sebagai berikut:

1) Dari Aksioma 1 minimal ada satu garis namakan misalnya garis g_1, kemudian dengan Aksioma 2, garis g_1 memuat tepat tiga titik namakan misalnya titik T_1, T_2,, T_3
2) Dari Aksioma 3 terdapat titik T_4 yang tidak berada pada g_1 dan dengan Aksioma 4, titik T_4 akan menentukan satu garis dengan tiap titik yang ada pada g_1 sehingga terdapat garis g_2, g_3, dan g_4. garis g_2 memuat titik T_1 dan T_4, garis g_3 memuat titik T_2 dan T_4, dan garis g_4 memuat titik T_3 dan T_4

3) Sekarang periksa garis g_2. Diketahui garis g_2 memuat titik T_1 dan T_4 Dari aksioma 2, setiap garis memuat tepat tiga titik, ini berarti g_2 harus memuat satu titik lagi. Titik T_2 maupun T_3 tidak mungkin terletak pada g_2 karena akan melanggar aksioma 4, maka harus ada titik T_5 yang terletak pada g_2, sehingga g_2 memuat tepat tiga titik.
4) Sekarang periksa garis g_3. Diketahui garis g_3 memuat titik T_2 dan T_4 Dari aksioma 2, setiap garis memuat tepat tiga titik, ini berarti g_3 harus memuat satu titik lagi. Titik T_1, T_3 dan T_5 tidak mungkin terletak pada g_3 karena akan melanggar aksioma 4, maka harus ada titik T_6 yang terletak pada g_3, sehingga g_3 memuat tepat tiga titik.
5) Sekarang periksa garis g_4. Diketahui garis g_4 memuat titik T_3 dan T_4 Dari aksioma 2, setiap garis memuat tepat tiga titik, ini berarti g_4 harus memuat satu titik lagi. Titik T_1, T_2, T_5 dan T_6 tidak mungkin terletak pada g_4 karena akan melanggar aksioma 4, maka harus ada titik T_7 yang terletak pada g_4, sehingga g_4 memuat tepat tiga titik.
6) Dari aksioma 4 dan aksioma 2, terdapat garis g_5 yang memuat titik T_1, T_6 dan T_7; juga terdapat garis g_6 yang memuat titik T_2, T_5 dan T_7; dan terdapat garis g_7 yang memuat titik T_3, T_6 dan T_7.
7) Semua garis dan titik telah diselidiki dan semua memenuhi aksioma di atas.
8) Tidak mungkin ada titik atau garis lain.

Tabel 3.3

g \ T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
g_1	x	x	x	0	0	0	0
g_2	x	0	0	x	x	0	0
g_3	0	x	0	x	0	x	0
g_4	0	0	x	x	0	0	x
g_5	x	0	0	0	0	x	x
g_6	0	x	0	0	x	0	x
g_7	0	0	x	0	x	x	0

Keterangan x : Garis memuat titik atau titik berada pada garis

0 : Garis tidak memuat titik atau titik tidak berada pada garis

Jika geometri Fano kita dualkan maka kita akan memperoleh geometri yang sama dengan geometri Fano itu sendiri. Suatu geometri yang dualnya sama dengan geometri itu sendiri disebut self dual. Self dual hanya mungkin terjadi pada suatu geometri jika jumlah titik sama dengan jumlah garis dan jumlah garis yang melalui setiap titik sama dengan jumlah titik yang terletak pada setiap garis.

6. Geometri Hingga Young

Geometri Hingga Young diperoleh dari Geometri Hingga Fano yaitu dengan mengubah aksioma terakhirnya. Sistem aksiomanya sebagai berikut:

Aksioma 1 : Ada paling sedikit satu garis.

Aksioma 2 : Setiap garis memuat tepat tiga titik.

Aksioma 3 : Tidak semua titik segaris.

Aksioma 4 : Melalui dua titik berbeda terdapat tepat satu garis.

Aksioma 5 : Untuk tiap garis l dan tiap titik P yang tidak terletak pada garis l, terdapat tepat satu garis melalui P yang paralel dengan l.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita turunkan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Melalui setiap titik terdapat tepat empat garis.*

Bukti :

Dari Aksioma 1, paling sedikit ada satu garis namakan misalnya garis g. Dengan Aksioma 2, garis g memuat tepat tiga titik. Kemudian dengan Aksioma 3 ada titik P di luar garis g. Dengan aksioma 4, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada garis g. Dengan Aksioma 5, ada satu garis melalui P yang paralel dengan garis g. Sehingga paling sedikit ada empat garis yang melalui P. Andaikan ada garis kelima yang melalui P, maka garis kelima ini harus memotong garis g, karena jika tidak memotong garis g, maka sebagai akibat ada dua garis yang paralel dengan garis g, dan ini bertentangan dengan Aksioma 5; garis kelima ini memotong g di titik misalnya titik T. Titik T tidak mungkin berbeda dengan titik yang ada pada g karena akan melanggar Aksioma 2, ini berarti titik T sama dengan salah satu titik yang ada. Sebagai akibat melalui dua titik yang berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga melalui titik P terdapat tepat empat garis. Titik P di sini mewakili sebarang titik, oleh karena itu melalui setiap titik terdapat tepat empat garis. ■

***Teorema 2 :** Terdapat tepat sembilan titik.*

Bukti :

Dari Aksioma 1 sampai Aksioma 3, ada paling sedikit empat titik, tiga di antaranya berada pada garis g dan sebuah titik *P* yang tidak terletak pada garis g. Dengan Aksioma 4, titik *P* akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik pada garis g, dan dengan Aksioma 2 tiap garis tersebut harus memuat satu titik lagi yang berbeda dengan titik yang ada, karena itu paling sedikit ada tujuh titik. Kemudian dengan Aksioma 5, melalui titik *P* ada sebuah garis yang paralel dengan garis *g*, dan dengan Aksioma 2, garis ini memuat dua titik lagi yang berbeda dari titik yang ada, sehingga paling sedikit ada sembilan titik. Andaikan ada sepuluh titik. Dengan Aksioma 4, titik kesepuluh ini harus terhubung dengan tiap titik lain yang ada. Jika garis hubung tersebut berbeda dengan garis yang ada maka sebagai akibat titik *P* dilalui lima garis dan ini bertentangan dengan Teorema 1. Namun jika garis hubung tersebut sama dengan salah satu garis yang ada maka sebagai akibat ada garis yang memuat lebih dari tiga titik dan ini bertentangan dengan Aksioma 2. Ini berarti pengandaian kita salah sehingga ada tepat sembilan titik. ■

Teorema 3 : *Terdapat tepat dua belas garis.*

Bukti :

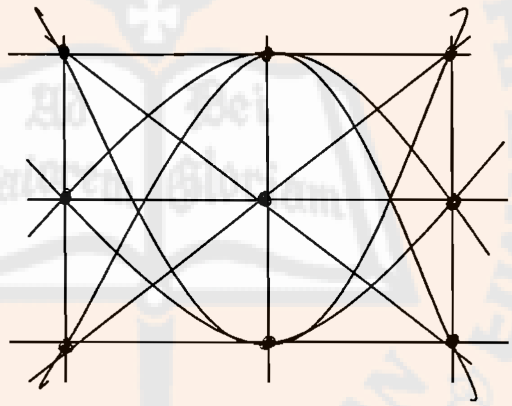
Dari Teorema 2 ada tepat sembilan titik dan dengan Teorema 1 setiap titik dilalui tepat empat garis sehingga ada 36 garis kemudian dengan Aksioma 2, setiap garis memuat tepat tiga titik. Ini berarti satu garis dihitung tiga kali, karena satu garis dihitung tiga kali maka 36 garis harus dibagi tiga sehingga ada tepat 12 garis. ■

Teorema 4 : *Setiap garis memiliki tepat dua garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Teorema 3, ada tepat dua belas garis. Ambil sebarang garis namakan garis *l*. Dengan Aksioma 2, garis *l* memuat tepat tiga titik dan dengan Teorema 1 masing-masing titik pada garis *l*, dilalui oleh tiga garis lagi selain garis *l*, sehingga paling banyak ada dua garis yang paralel dengan *l*. Andaikan hanya ada satu garis yang paralel dengan *l*, maka sebagai akibat terdapat tepat sebelas garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 3. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga setiap garis memiliki tepat dua garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva Geometri Young tampak seperti pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7

Dari sistem aksioma Geometri Young di atas dapat kita temukan sistem aksioma baru yaitu dengan mengubah aksioma 2 dengan : *Setiap garis memuat tepat dua titik.* Sebagai kesepakatan sistem aksioma yang terjadi kita namakan sistem aksioma Geometri Young-A.

7. Geometri Young-A

Aksioma-aksioma untuk Geometri Young-A:

Aksioma 1 : Ada paling sedikit satu garis.

Aksioma 2 : Setiap garis memuat tepat dua titik.

Aksioma 3 : Tidak semua titik segaris.

Aksioma 4 : Melalui dua titik berbeda terdapat tepat satu garis

Aksioma 5 : Untuk tiap garis l dan tiap titik P yang tidak terletak pada garis l, terdapat tepat satu garis melalui P yang paralel dengan l.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita buktikan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Melalui setiap titik terdapat tepat tiga garis.*

Bukti :

Aksioma 1, ada paling sedikit satu garis namakan garis l. Dengan Aksioma 2, garis l memuat dua titik dan dengan Aksioma 3, ada titik P di luar garis l. Dengan Aksioma 4, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada garis l. Dengan Aksioma 5, ada satu garis yang melalui P dan paralel dengan garis l, sehingga paling sedikit ada tiga garis yang melalui P. Andaikan ada empat garis yang melalui P, maka garis keempat ini harus memotong garis l, karena jika tidak memotong l, maka sebagai akibat ada dua garis yang paralel dengan garis l, dan ini bertentangan dengan Aksioma 5; garis keempat ini memotong garis l di titik misalnya titik Q. Titik Q tidak mungkin berbeda dengan titik yang ada pada l karena akan melanggar Aksioma 2, ini berarti titik Q sama dengan salah satu titik yang ada. Sebagai akibat melalui dua titik yang berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga melalui titik P terdapat tepat tiga garis. Titik P di sini mewakili sebarang titik, oleh karena itu melalui setiap titik terdapat tepat tiga garis. ■

Teorema 2 : *Terdapat tepat empat titik.*

Bukti :

Dari Aksioma 1 sampai Aksioma 3, ada paling sedikit tiga titik, dua di antaranya berada pada garis l dan sebuah titik P yang tidak terletak pada garis l. Dengan Aksioma 4, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik pada garis l. Dengan Aksioma 2 tiap garis tersebut memuat tepat dua titik. Kemudian dengan Aksioma 5, melalui titik P ada sebuah garis yang paralel dengan garis l, dan dengan Aksioma 2, garis ini harus memuat satu titik lagi selain titik P. Sehingga minimal ada empat titik.

Andaikan ada lima titik. Dengan Aksioma 4, titik kelima ini akan menentukan satu garis dengan tiap titik lain yang ada. Maka sebagai akibat, titik P dilalui empat garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 1. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga ada tepat empat titik. ■

Teorema 3 : *Terdapat tepat enam garis.*

Bukti :

Dari Teorema 2 ada tepat empat titik dan dengan Teorema 1 setiap titik dilalui tepat tiga garis sehingga ada 12 garis kemudian dengan Aksioma 2, setiap garis memuat tepat dua titik. Ini berarti satu garis dihitung dua kali, karena satu garis dihitung dua kali maka 12 garis harus dibagi dua sehingga ada tepat 6 garis. ■

Teorema 4 : *Setiap garis memiliki tepat satu garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Teorema 3, ada tepat enam garis. Ambil sebarang garis namakan garis l. Dengan Aksioma 2, garis l memuat dua titik dan dengan Teorema 1 masing-masing titik pada garis l, dilalui oleh dua garis lagi selain garis l, sehingga ada lima garis yaitu garis l

dan empat garis yang memotong *l*. Ini berarti paling banyak ada satu garis yang paralel dengan *l*. Andaikan tidak ada garis yang paralel dengan *l*, sebagai akibat ada tepat lima garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 3, ini berarti pengandaian kita salah, sehingga setiap garis memiliki tepat satu garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva Geometri Young-A sama dengan model noktah-kurva Geometri Empat Titik (lihat Gambar 3.1), maka kedua sistem aksioma tersebut ekuivalen.

Apa yang terjadi jika kita ganti aksioma 2 dengan: *setiap garis memuat tepat empat titik*, sedangkan aksioma yang lain tetap, maka akan kita dapatkan suatu sistem aksioma yang lain. Sebagai kesepakatan sistem aksioma ini kita namakan sistem aksioma Geometri Young-B.

8. Geometri Young-B

Aksioma-aksioma untuk Geometri Young-B:

Aksioma 1 : Ada paling sedikit satu garis.

Aksioma 2 : Setiap garis memuat tepat empat titik.

Aksioma 3 : Tidak semua titik segaris.

Aksioma 4 : Melalui dua titik berbeda terdapat tepat satu garis.

Aksioma 5 : Untuk tiap garis *l* dan tiap titik *P* yang tidak terletak pada garis *l*, terdapat tepat satu garis melalui *P* yang paralel dengan *l*.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat kita buktikan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Melalui setiap titik terdapat tepat lima garis.*

Bukti :

Dari Aksioma 1, ada paling sedikit satu garis namakan garis g. Dengan Aksioma 2, garis g memuat empat titik dan dengan Aksioma 3, ada titik *T* di luar garis g. Dengan Aksioma 4, titik *T* akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada garis g. Dengan Aksioma 5, terdapat satu garis yang melalui *T* dan paralel dengan garis g, sehingga paling sedikit ada lima garis yang melalui *T*. Andaikan ada garis keenam yang melalui *T*, garis keenam ini harus memotong garis g, karena jika tidak memotong garis g, maka sebagai akibat ada dua garis yang paralel dengan g, dan ini bertentangan dengan Aksioma 5; garis keenam ini memotong g di titik misalnya titik *S*. Titik *S* tidak mungkin berbeda dengan titik yang ada pada g karena akan melanggar Aksioma 2, ini berarti titik *S* sama dengan salah satu titik yang ada. Sebagai akibat melalui dua titik yang berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4.

Ini berarti pengandaian kita salah. Sehingga melalui titik T terdapat tepat lima garis. Titik T di sini mewakili sebarang titik, oleh karena itu melalui setiap titik terdapat tepat lima garis. ■

Teorema 2 : *Terdapat tepat enam belas titik.*

Bukti :

Dari Aksioma 1 sampai Aksioma 3, ada paling sedikit lima titik, empat di antaranya berada pada garis g dan sebuah titik T yang tidak terletak pada garis g. Dengan Aksioma 4, titik T akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada garis g, dan dengan Aksioma 2 tiap garis tersebut harus memuat dua titik lagi yang berbeda dengan titik yang ada, karena itu ada tiga belas titik. Kemudian dengan Aksioma 5, melalui titik T terdapat sebuah garis yang paralel dengan *l*, dan dengan aksioma 2, garis ini harus memuat tiga titik lagi selain titik T dan ketiga titik tersebut berbeda dengan titik yang telah ada, sehingga paling sedikit ada enam belas titik. Andaikan ada tujuh belas titik. Dengan aksioma 4, titik ketujuh belas ini akan menentukan satu garis dengan tiap titik yang ada. Maka sebagai akibat, titik T dilalui enam garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 1. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga ada tepat enam belas titik. ■

Teorema 3 : *Terdapat tepat dua puluh garis.*

Bukti :

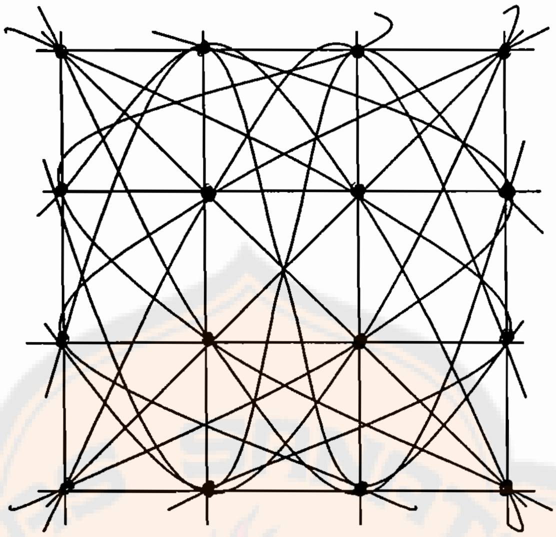
Dari Teorema 2 ada tepat enam belas titik dan dengan Teorema 1 setiap titik dilalui tepat lima garis sehingga ada 80 garis, kemudian dengan Aksioma 2, setiap garis memuat tepat empat titik. Ini berarti satu garis dihitung empat kali, karena satu garis dihitung empat kali maka 80 garis harus dibagi empat sehingga ada tepat 20 garis. ■

Teorema 4 : *Setiap garis memiliki tepat tiga garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Teorema 3, ada tepat dua puluh garis. Ambil sebarang garis namakan garis *l*. Dengan Aksioma 2, garis *l* memuat empat titik dan dengan Teorema 1 masing-masing titik pada garis *l*, dilalui oleh empat garis lagi selain garis *l*, sehingga paling sedikit ada tujuh belas garis yaitu garis *l* dan 16 garis yang memotong *l*. Ini berarti ada tepat tiga garis yang paralel dengan *l*, sehingga setiap garis memiliki tepat tiga garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva untuk geometri Young-B tampak seperti pada Gambar 3.8



Gambar 3.8

9. Geometri Hingga Pappus

Aksioma-aksioma Geometri Hingga Pappus:

Aksioma 1 : Terdapat paling sedikit satu garis.

Aksioma 2 : Setiap garis memuat tepat tiga titik.

Aksioma 3 : Tidak semua titik segaris.

Aksioma 4 : Untuk sebarang dua titik berbeda paling banyak terdapat satu garis hubung.

Aksioma 5 : Bila titik T di luar garis g maka terdapat tepat satu garis g' yang melalui T dan paralel dengan g.

Aksioma 6 : Bila titik T di luar garis g maka terdapat tepat satu titik pada g yang tidak terhubung dengan T (oleh garis).

Dari aksioma-aksioma di atas dapat diturunkan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *Dua garis akan berpotongan paling banyak di satu titik.*

Bukti :

Andaikan dua garis berpotongan di dua titik. Maka sebagai akibat, melalui dua titik berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 4. Ini berarti pengandaian kita salah. Sehingga dua garis akan berpotongan paling banyak di satu titik. ■

Teorema 2 : *Tidak semua garis setitik.*

Bukti :

Dari Aksioma 1, ada paling sedikit satu garis namakan misalnya garis g. Dengan Aksioma 3, ada titik T di luar garis g kemudian dengan Aksioma 5 terdapat garis namakan garis l yang melalui T dan paralel dengan g. Ini berarti g dan l tidak setitik, sehingga terbukti bahwa tidak semua garis setitik. ■

Teorema 3 : *Melalui setiap titik terdapat tepat tiga garis.*

Bukti :

Dari Aksioma 1, ada paling sedikit satu garis namakan garis g. Dengan Aksioma 2, garis g memuat tiga titik dan dengan Aksioma 3, ada titik T di luar garis g. Dengan Aksioma 6, dua dari tiga titik yang ada pada garis g masing-masing akan menentukan satu garis dengan titik *T*, sehingga paling sedikit ada dua garis yang melalui *T*. Dengan Aksioma 5, ada satu garis yang melalui *T* dan paralel dengan g, sehingga paling sedikit ada tiga garis yang melalui *T*. Andaikan ada empat garis yang melalui *T*. Maka garis keempat ini harus memotong garis *g*, karena jika tidak memotong garis *g* maka akan melanggar Aksioma 5. Namun jika memotong garis *g* maka akan melanggar Aksioma 6 atau Aksioma 4 atau Aksioma 2. Ini berarti pangandaian kita salah, sehingga melalui titik T terdapat tepat tiga garis. Titik T di sini mewakili sebarang titik, oleh karena itu melalui setiap titik terdapat tepat tiga garis. ■

Teorema 4 : *Terdapat tepat sembilan garis dan sembilan titik.*

Bukti :

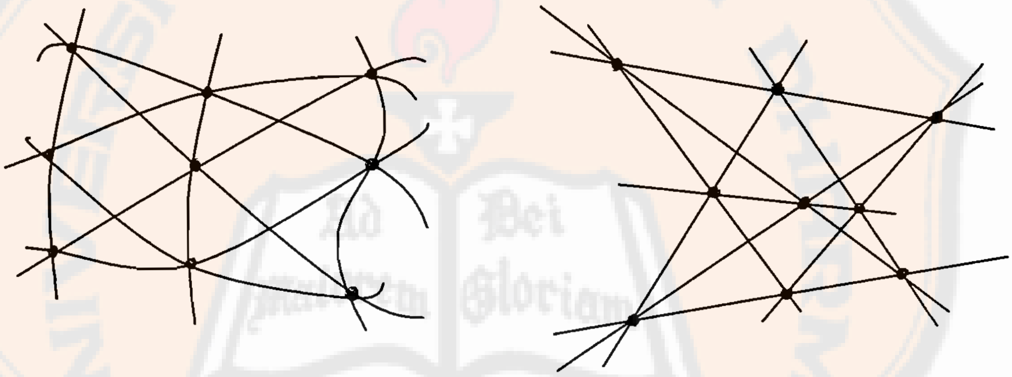
Dari Aksioma 1 sampai Aksioma 3, paling sedikit ada empat titik, tiga di antaranya, namakan misalnya titik *A, B, C* berada pada garis *a*, dan satu titik *D* di luar garis *a*. Dengan Aksioma 6, dua dari tiga titik yang ada pada garis *a* masing-masing akan menentukan satu garis dengan titik *D*, namakan garis *b* misalnya melalui titik D dan B, dan garis *c* misalnya melalui titik C dan D. Dengan Aksioma 2, garis *b* harus memuat satu titik lagi selain titik D dan B. Titik C tidak mungkin terletak pada garis *b* karena akan melanggar Aksioma 4, demikian juga titik A tidak mungkin karena akan melanggar Aksioma 6. Maka harus ada titik E sehingga garis *b* memuat titik D, E, B. Dengan Aksioma 2, garis *c* harus memuat satu titik lagi selain titik D dan C. Titik B dan titik E tidak mungkin terletak pada garis *c* karena akan melanggar Aksioma 4, demikian juga titik A tidak mungkin karena akan melanggar Aksioma 6. Maka harus ada titik F sehingga garis *c* memuat titik D, F, C. Diketahui titik D, di luar garis *a*, maka menurut Aksioma 5 terdapat garis namakan garis *d* yang melalui titik D dan tidak memotong garis *a*. Dengan Aksioma 2, garis *d* harus memuat dua titik lagi selain titik D. Titik E dan F tidak mungkin terletak pada garis *d* karena akan melanggar Aksioma 2. Demikian juga titik A, B, C tidak mungkin terletak pada garis *d* karena akan melanggar Aksioma 5, maka harus ada dua titik lagi misalnya titik G dan H sehingga garis *d* memuat titik D, G, H. Diketahui titik A di luar garis *d*, maka menurut Aksioma 6 ada satu titik pada *d* yang tidak terhubung dengan A. Titik yang sudah jelas diketahui tidak terhubung dengan titik A adalah titik D. Ini berarti titik G dan H terhubung dengan A. Namun garis yang menghubungkan titik A dan G tidak mungkin sama dengan garis yang menghubungkan titik A dan H karena akan melanggar Aksioma 4. Ini berarti ada dua garis berbeda lagi namakan misalnya garis *e* dan *f* . Garis *e* misalnya melalui titik A dan G, garis *f* melalui titik A dan H. Dengan Aksioma 2, garis *e* harus memuat satu titik lagi selain titik A dan G. Titik B, C, H tidak mungkin terletak pada garis *e* karena akan melanggar Aksioma 4. Ini berarti titik E atau titik F yang mungkin. Dipilih titik E, sehingga garis *e* memuat titik A, E, G. Demikian juga garis *f* harus memuat satu titik lagi selain titik A dan H. Titik B, C, E, G, tidak mungkin terletak pada garis *f* karena akan melanggar Aksioma 4, maka titik F terletak pada garis *f*, sehingga garis *f* memuat titik A, F, H. Titik C di luar garis *f* dan *f* memuat titik A, F, H. Diketahui C terhubung dengan A dan C juga terhubung dengan F, maka C tidak mungkin terhubung H, karena akan melanggar Aksioma 6. Titik C di luar garis *d* dan *d* memuat titik D, G, H, maka menurut Aksioma 6, ada satu titik pada *d* yang tidak terhubung dengan C. Titik yang sudah jelas tidak terhubung dengan C adalah titik H. Ini berarti titik G terhubung dengan C. Garis hubung C dan G berbeda dari garis yang telah ada namakan misalnya garis *g*. Dengan Aksioma 2, garis *g* harus memuat satu titik lagi selain titik C dan G. Titik A, B, E, F, D, H, tidak mungkin terletak pada garis *g* karena akan melanggar Aksioma 4, sehingga harus ada titik I yang terletak pada garis *g*. Diketahui titik H di luar garis *a* dan garis *a* memuat titik A, B, C, maka menurut Aksioma 6, ada satu titik pada *a* yang tidak terhubung dengan H. Titik yang sudah jelas tidak terhubung dengan H adalah titik C. Ini berarti titik H terhubung dengan B. Garis hubung H dan B berbeda dari garis yang telah ada namakan misalnya garis *h*. Dengan Aksioma 2, garis *h* harus memuat satu titik lagi selain titik H dan B. Titik A, C, E, F, D, G, tidak mungkin terletak pada garis *h* karena akan melanggar Aksioma 4, ini berarti titik I terletak pada garis *h,* sehingga garis *h* memuat titik *H, I, B.* Diketahui titik E, F, I, baru dilalui dua garis, maka dengan Teorema 3, terdapat garis namakan garis *i* yang melalui titik E, F, I, sehingga minimal ada sembilan garis dan sembilan titik. Andaikan ada sepuluh garis. Maka dengan aksioma 2, garis kesepuluh ini memuat tiga titik, namun tiga titik yang terletak pada garis kesepuluh ini tidak mungkin dari titik yang ada, karena akan melanggar Aksioma 4. Sebagai akibat garis kesepuluh ini sama sekali terpisah dari titik yang ada. Ini berarti pengandaian kita salah sehingga ada tepat sembilan garis dan sembilan titik. ■

Teorema 5 : *Setiap garis memiliki tepat dua garis yang paralel dengannya.*

Bukti :

Dari Teorema 4, ada tepat sembilan garis. Ambil sebarang garis namakan garis *l*. Dengan Aksioma 2, garis *l* memuat tiga titik dan dengan Teorema 3, masing-masing titik pada garis *l*, dilalui dua garis lagi, sehingga ada tujuh garis yakni garis *l* dan enam garis yang memotong l. Ini berarti paling banyak ada dua garis yang paralel dengan l. Andaikan hanya ada satu garis yang paralel dengan l, maka sebagai akibat terdapat tepat delapan garis. Namun ini bertentangan dengan Teorema 4. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga setiap garis memiliki tepat dua garis yang paralel dengannya. ■

Model noktah-kurva Geometri Pappus tampak seperti pada gambar 3.9a.



(a) (b)

Gambar 3.9

Catatan : Kebetulan sistem aksioma untuk Geometri Pappus ini juga dipenuhi oleh geometri dengan "titik" adalah titik biasa dan "garis" adalah garis lurus (Gambar 3.9b). Gambar yang terjadi disebut konfigurasi Pappus yang terkait dengan Teorema Pappus yang terkenal dalam Geometri Projektif.

Sama seperti Geometri Fano, Geometri Pappus juga self dual.

10. Geometri Hingga Desargues

Sebelum kita masuk pada aksioma-aksioma Geometri Hingga Desargues, beberapa istilah perlu didefinisikan:

Definisi 1.3 : Garis l merupakan garis kutub (polar) titik P jika tidak ada titik pada l yang terhubung dengan P.

Definisi 1.4: Titik P merupakan titik kutub (pole) garis l jika tidak ada garis yang melalui P dan memotong l.

Berikut adalah aksioma-aksioma geometri hingga Desargues:

Aksioma 1 : Ada paling sedikit satu titik.

Aksioma 2 : Tiap titik paling sedikit mempunyai satu garis kutub.

Aksioma 3 : Setiap garis mempunyai paling banyak satu titik kutub.

Aksioma 4 : Tiap dua titik yang berbeda terletak paling banyak pada satu garis.

Aksioma 5 : Setiap garis memuat tepat tiga titik.

Aksioma 6 : Jika l adalah sebuah garis, P adalah sebuah titik, dan P tidak terletak pada l, maka l dan garis kutub P berpotongan.

Dari aksioma-aksioma di atas dapat dibuktikan teorema-teorema sebagai berikut:

Teorema 1 : *B titik kutub dari b* *dan B terletak pada a* $\Longrightarrow$ *a, b tidak berpotongan*

Bukti :

Diketahui B titik kutub dari b dan B terletak pada *a,* maka menurut definisi 1.3, garis a dan garis b tidak berpotongan. ■

Teorema 1' (kontraposisi dari Teorema 1):

B titik kutub dari b *dan a, b berpotongan* $\Longrightarrow$ *B tidak terletak pada a*

Teorema 2 : *A titik kutub dari a dan B titik kutub dari b , maka*

A terletak pada b $\Longleftrightarrow$ *B terletak pada a*

Bukti :

$\Longrightarrow$ Diketahui A titik kutub dari a, B titik kutub dari b, dan A terletak pada *b.*

Harus dibuktikan B terletak pada *a.*

Bukti dengan kontradiksi:

Andaikan B tidak terletak pada *a*, maka menurut Aksioma 6, garis *a* dan garis *b* berpotongan. Namun ini bertentangan dengan Teorema 1, sebab diketahui A titik kutub dari *a* dan A terletak pada *b*. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga B terletak pada *a.* ■

$\Longleftarrow$ Diketahui A titik kutub dari a , B titik kutub dari b, dan B terletak pada a.

Harus dibuktikan A terletak pada b.

Bukti dengan kontradiksi:

Andaikan A tidak terletak pada b, maka menurut Aksioma 6, garis a dan garis b berpotongan. Namun ini bertentangan dengan Teorema 1, sebab diketahui B titik kutub dari b dan B terletak pada a. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga A terletak pada b. ■

Teorema 2' (kontraposisi dari Teorema 2):

A titik kutub a dan B titik kutub dari b, maka

B tidak terletak pada a $\Longleftrightarrow$ *A tidak terletak pada b*

Berikut akan kita tunjukkan konfigurasi dari Geometri Hingga Desargues dalam bentuk tabel sederhana yang menggambarkan hubungan antara titik dan garis (lihat Tabel 3.4). Langkah-langkahnya sebagai berikut:

1) Dari Aksioma 1, minimal ada satu titik T_1. Kemudian dengan aksioma 2, ada garis g_1 yang merupakan garis kutub titik T_1. Sebagai akibat, titik T_1 titik kutub dari garis g_1 (lihat definisi 1.3 dan 1.4) dan T_1 tidak terletak pada g_1. Kemudian dengan Aksioma 5, garis g_1 memuat tepat tiga titik. Ini berarti harus ada titik T_2, T_3 dan T_4 yang terletak pada g_1.

2) Dengan Aksioma 2 terdapat garis g_2 yang merupakan garis kutub titik T_2 ; garis g_3 yang merupakan garis kutub titik T_3 ; dan garis g_4 yang merupakan garis kutub titik T_4. Sebagai akibat, titik T_2 titik kutub dari g_2 dan T_2 tidak terletak pada g_2 ; titik T_3 titik kutub dari g_3 dan T_3 tidak terletak pada g_3; titik T_4 titik kutub dari g_4 dan T_4 tidak terletak pada g_4.

3) Diketahui T_1 titik kutub dari dari g_1 , titik T_2 titik kutub dari g_2 dan T_2 terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2, titik T_1 terletak pada g_2 ; karena T_1 pada g_2 , maka menurut Teorema 1 garis g_1 dan g_2 tidak berpotongan. Ini berarti titik T_2, T_3 dan T_4 di luar garis g_2. Dengan Aksioma 5 garis g_2 memuat tepat tiga titik. Ini berarti g_2 harus memuat dua titik lagi selain titik T_1, sehingga harus ada titik T_5 dan T_6 yang terletak pada g_2.

4) Diketahui T_1 titik kutub dari g_1 , titik T_3 titik kutub dari g_3 dan T_3 terletak pada g_1 , maka menurut Teorema 2, titik T_1 terletak pada g_3 ; karena T_1 terletak pada g_3 , maka menurut Teorema 1, garis g_1 dan garis g_3 tidak berpotongan. Ini berarti T_2, T_3 dan T_4 di luar garis g_3. Kemudian dengan Aksioma 5, garis g_3 memuat tiga titik. Ini berarti g_3 harus memuat dua titik lagi selain titik T_1, tetapi titik T_5 dan T_6 tidak mungkin terletak pada g_3, karena akan melanggar aksioma 4 (diketahui g_2 memuat titik T_1 , T_5 , dan T_6), sehingga harus ada titik T_7 dan T_8 yang terletak pada g_3 , sehingga g_3 memuat titik T_1, T_7, dan T_8.

5) Diketahui titik T_1 titik kutub dari g_1, titik T_4 titik kutub dari g_4 dan T_4 terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2, titik T_1 terletak pada g_4 ; karena T_1 pada g_4, maka menurut Teorema 1, garis g_1 dan g_4 tidak berpotongan. Ini berarti T_2, T_3 dan T_4 di luar garis g_4. Kemudian dengan Aksioma 5, garis g_4 memuat tiga titik. Ini berarti g_4 memuat dua titik lagi selain titik T_1. Titik T_5 dan T_6 tidak mungkin terletak pada g_4 karena akan melanggar aksioma 4, demikian juga T_7 dan T_8 tidak mungkin terletak pada g_4 karena akan melanggar aksioma 4, sehingga harus ada titik T_9 dan T_{10} yang terletak pada g_4, sehingga g_4 memuat titik T_1, T_9, dan T_{10}.

6) Dengan Aksioma 2, terdapat garis g_5 yang merupakan garis kutub dari T_5 ; garis g_6 yang merupakan garis kutub dari T_6 ; garis g_7 yang merupakan garis kutub dari T_7 ; garis g_8 yang merupakan garis kutub dari T_8 ; garis g_9 yang merupakan garis kutub dari T_9 ; dan g_{10} yang merupakan garis kutub dari T_{10}. Sebagai akibat T_5 titik kutub dari g_5 dan T_5 tidak terletak pada g_5; titik T_6 titik kutub dari g_6 dan T_6 tidak terletak pada g_6; titik T_7 titik kutub dari g_7 dan T_7 tidak terletak pada g_7; titik T_8 titik kutub dari g_8 dan T_8 tidak terletak pada g_8; titik T_9 titik kutub dari g_9 dan T_9 tidak terletak pada g_9; titik T_{10} titi kutub dari g_{10} dan T_{10} tidak terletak pada g_{10}.

7) Diketahui T_5 titik kutub dari g_5, titik T_1 titik kutub dari g_1 dan T_5 tidak terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2', titik T_1 tidak terletak pada g_5 .

8) Diketahui T_5 titik kutub dari g_5, titik T_2 titik kutub dari g_2 dan T_5 terletak pada g_2, maka menurut Teorema 2, titik T_2 terletak pada g_5.
9) Garis g_1 memuat titik T_2, T_3, dan T_4 ; dan T_2 terletak pada g_5, maka T_3 dan T_4 tidak mungkin terletak pada g_5 karena akan melanggar Aksioma 4.
10) Garis g_2 memuat titik T_1, T_5, dan T_6. Titik T_5 titik kutub dari g_5 dan T_5 terletak pada g_2, maka menurut Teorema 1 garis g_2 dan g_5 tidak berpotongan. Ini berarti titik T_1, T_5 dan T_6 di luar garis g_5.
11) Diketahui garis g_3 memuat titik T_1, T_7 dan T_8. Titik T_5 tidak terletak pada g_3, maka menurut Aksioma 6, garis g_3 dan g_5 berpotongan. Dipilih titik potongnya adalah titik T_8, maka T_7 tidak terletak pada g_5.
12) Diketahui g_4 memuat titik T_1, T_9, dan T_{10}. Titik T_5 tidak terletak pada g_4, maka menurut Aksioma 6, garis g_4 dan g_5 berpotongan. Dipilih titik potongnya adalah titik T_{10}, maka T_9 tidak terletak pada g_5, sehingga g_5 memuat titik T_2, T_8, dan T_{10}
13) Sekarang kita akan menyelidiki garis g_6. Diketahui T_6 titik kutub dari g_6, titik T_1 titik kutub dari g_1 dan T_6 tidak terletak pada g_1 maka menurut Teorema 2', titik T_1 tidak terletak pada g_6. Diketahui T_2 titik kutub dari g_2 dan T_6 terletak pada g_2, maka menurut Teorema 2, titik T_2 terletak pada g_6. Diketahui g_1 memuat titik T_2, T_3 dan T_4 ; dan T_2 terletak pada g_6, maka T_3 dan T_4 tidak mungkin terletak pada g_6 karena akan melanggar aksioma 4. Diketahui g_2 memuat titik T_1, T_5 dan T_6 ; titik T_6 titik kutub dari g_6 dan T_6 terletak pada g_2 maka

menurut Teorema 1, garis g_6 dan g_2 tidak berpotongan. Ini berarti titik T_1, T_5 dan T_6 di luar garis g_6. Diketahui garis g_3 memuat titik T_1, T_7 dan T_8 ; titik T_6 tidak terletak pada g_3, maka menurut Aksioma 6, garis g_6 dan g_3 berpotongan. Titik T_1 tidak mungkin menjadi titik potongnya karena sudah dibuktikan bahwa T_1 tidak terletak pada g_6. Demikian juga T_8 tidak mungkin menjadi titik potongnya karena T_8 terletak pada g_5 dan g_5 juga memuat titik T_2 dan T_2 terletak pada pada g_6. Jika T_8 terletak pada g_6 maka akan melanggar Aksioma 4. Jadi titik T_7 merupakan titik potong garis g_6 dan g_3. Ini berarti T_7 terletak pada g_6. Apakah titik T_9 terletak pada garis g_6 ? Diketahui garis g_4 memuat titik T_1, T_9 dan T_{10} ; titik T_6 tidak terletak pada g_4, maka menurut Aksioma 6, garis g_4 dan g_6 berpotongan. Titik T_1 tidak mungkin menjadi titik potongnya karena T_1 tidak terletak pada g_6. Titik T_{10} juga tidak mungkin menjadi titik potongnya karena T_{10} terletak pada g_5 dan garis g_5 juga memuat titik T_2 dan T_2 terletak pada g_6. Jika T_{10} terletak pada g_6 maka akan melanggar Aksioma 4. Jadi T_9 merupakan titik potong garis g_6 dan g_4. Ini berarti T_9 terletak pada g_6, sehingga g_6 memuat titik T_2, T_7 dan T_9.

14) Sekarang kita akan menyelidiki garis g_7. Diketahui T_7 titik kutub dari g_7, titik T_1 titik kutub dari g_1 dan T_7 tidak terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2', titik T_1 tidak terletak pada g_7. Diketahui T_2 titik kutub dari g_2 dan T_7 tidak terletak pada g_2, maka menurut Teorema 2', titik T_2 tidak terletak pada g_7. Diketahui T_3 titik kutub dari g_3 dan T_7

terletak pada g_3, maka menurut Teorema 2, titik T_3 terletak pada g_7. Diketahui garis g_1 memuat titik T_2, T_3 dan T_4 ; maka T_4 tidak mungkin terletak pada g_7 karena akan melanggar aksioma 4. Diketahui T_5 titik kutub dari g_5 dan T_7 tidak terletak pada g_5, maka menurut Teorema 2', titik T_5 tidak terletak pada g_7. Diketahui T_6 titik kutub dari g_6 dan T_7 terletak pada g_6, maka menurut Teorema 2, titik T_6 terletak pada g_7. Diketahui g_3 memuat titik T_1, T_7 dan T_8, maka menurut Teorema 1, garis g_7 dan g_3 tidak berpotongan. Ini berarti T_1, T_7 dan T_8 di luar garis g_7.

15) Apakah titik T_9 terletak pada g_7 ? Diketahui g_6 memuat titik T_2, T_7 dan T_9. Jika titik T_9 terletak pada g_7 ini berarti garis g_6 yang melalui titik T_7 memotong garis g_7 dan ini bertentangan dengan definisi 1.3 sehingga T_9 tidak terletak pada g_7.

16) Apakah titik T_{10} terletak pada g_7 ? Diketahui g_4 memuat titik T_1, T_9 dan T_{10}. Titik T_7 tidak terletak pada g_4, maka menurut Aksioma 6, garis g_4 dan g_7 berpotongan. Sudah dibuktikan bahwa T_1 dan T_9 tidak terletak pada g_7, maka titik potong garis g_4 dan g_7 adalah titik T_{10}. Ini berarti T_{10} terletak pada g_7, sehingga g_7 memuat titik T_3, T_6 dan T_{10}.

17) Sekarang kita akan menyelidiki garis g_8. Diketahui T_1 titik kutub dari g_1, titik T_8 titik kutb dari g_8 dan T_8 tidak terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2', titik T_1 tidak terletak pada g_8. Diketahui T_2 titik kutub dari g_2 dan T_8 tidak terletak pada g_2, maka menurut Teorema 2', titik T_2 tidak terletak pada g_8. Diketahui T_3 titik kutub dari g_3 dan T_8

terletak pada g_3, maka menurut Teorema 2, titik T_3 terletak pada g_8. Diketahui T_4 titik kutub dari g_4 dan T_8 tidak terletak pada g_4, maka menurut teorema 2', titik T_4 tidak terletak pada g_8. Diketahui T_5 titik kutub dari g_5 dan T_8 terletak pada g_5, maka menurut Teorema 2, titik T_5 terletak pada g_8. Diketahui T_6 titik kutub dari g_6 dan T_8 tidak terletak pada g_6, maka menurut Teorema 2', titik T_6 tidak terletak pada g_8. Diketahui T_7 titik kutub dari g_7 ; garis g_7 dan g_8 berpotongan di titik T_3, maka menurut Teorema 1', titik T_7 tidak terletak pada g_8. Diketahui g_4 memuat titik T_1, T_9 dan T_{10}. Titik T_8 tidak terletak pada g_4, maka menurut Aksioma 6, garis g_4 dan g_8 berpotongan. Titik T_1 tidak mungkin menjadi titik potongnya sebab telah dibuktikan T_1 tidak terletak pada g_8. Titik T_{10} juga tidak mungkin, sebab T_{10} terletak pada g_7 dan g_7 memuat titik T_3 dan T_3 terletak pada g_8. Jika T_{10} terletak pada g_8, maka akan melanggar Aksioma 4. Jadi T_9 merupakan titik potong garis g_4 dan g_8. Ini berarti T_9 terletak pada g_8, sehingga g_8 memuat titik T_3, T_5 dan T_{10}.

18) Sekarang kita akan menyelidiki garis g_9. Diketahui T_1 titik kutub dari g_1, titik T_9 titik kutub dari g_9 dan T_9 tidak terletak pada g_1, maka menurut Teorema 2', titik T_1 tidak terletak pada g_9. Diketahui T_2 titik kutub dari g_2 dan T_9 tidak terletak pada g_2, maka menurut Teorema 2', titik T_2 tidak terletak pada g_9. Diketahui T_3 titik kutub dari g_3 dan T_9 tidak terletak pada g_3, maka menurut Teorema 2', titik T_3 tidak terletak pada g_9. Diketahui T_4 titik kutub dari g_4 dan T_9 terletak pada g_4, maka

menurut Teorema 2, titik T_4 terletak pada g_9. Diketahui T_5 titik kutub dari g_5 dan T_9 tidak terletak pada g_5, maka menurut Teorema 2', titik T_5 tidak terletak pada g_9. Diketahui T_6 titik kutub dari g_6 dan T_9 terletak pada g_6, maka menurut Teorema 2, titik T_6 terletak pada g_9. Diketahui T_7 titik kutub dari g_7 , garis g_7 dan g_9 berpotongan di titik T_6, maka menurut teorema 1', titik T_7 tidak terletak pada g_9. Diketahui T_8 titik kutub dari g_8 dan T_9 terletak pada g_8, maka menurut Teorema 2, titik T_8 terletak pada g_9, sehingga g_9 memuat titik T_4, T_6 dan T_8. Titik T_9 tidak mungkin terletak pada g_9 karena akan bertentangan dengan definisi. Demikian juga dengan T_{10} tidak mungkin terletak pada g_9 karena akan melanggar aksioma 5.

19) Sekarang akan kita selidiki garis g_{10}. Diketahui g_4 memuat titik T_1, T_9 dan T_{10} ; garis g_5 memuat titik T_2, T_8 dan T_{10} ; garis g_7 memuat titik T_3, T_6 dan T_{10} ; titik T_{10} titik kutub dari g_{10}, maka menurut Teorema 1, garis g_4 dan g_{10} tidak berpotongan ; garis g_5 dan g_{10} tidak berpotongan ; garis g_7 dan g_{10} tidak berpotongan. Ini berarti T_1, T_2, T_3, T_6, T_9 dan T_{10} tidak terletak pada g_{10}. Diketahui T_4 titik kutub dari g_4 dan T_{10} terletak pada g_4, maka menurut Teorema 2, titik T_4 terletak pada g_{10}. Diketahui T_5 titik kutub dari g_5 dan T_{10} terletak pada g_5, maka menurut Teorema 2, titik T_5 terletak pada g_{10}. Diketahui T_7 titik kutub dari g_7 dan T_{10} terletak pada g_7, maka menurut Teorema 2, titik T_7 terletak pada g_{10}, sehingga g_{10} memuat titik T_4, T_5 dan T_7. Titik T_8 tidak mungkin terletak pada g_{10} karena akan melanggar aksioma 5.

20) Semua garis dan titik telah diselidiki dan semua memenuhi aksioma di atas, maka konfigurasinya seperti tampak pada tabel 3.4.

21) Tidak mungkin ada titik atau garis lain.

Tabel 3.4

g \ T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
g_1	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0
g_2	x	0	0	0	x	x	0	0	0	0
g_3	x	0	0	0	0	0	x	x	0	0
g_4	x	0	0	0	0	0	0	0	x	x
g_5	0	x	0	0	0	0	0	x	0	x
g_6	0	x	0	0	0	0	x	0	x	0
g_7	0	0	x	0	0	x	0	0	0	x
g_8	0	0	x	0	x	0	0	0	x	0
g_9	0	0	0	x	0	x	0	x	0	0
g_{10}	0	0	0	x	x	0	x	0	0	0

Keterangan x : garis memuat titik atau titik terletak pada garis

0 : garis tidak memuat titik

Dari proses di atas maka terbukti teorema-teorema berikut:

Teorema 3 : *Setiap garis memiliki tepat satu titik kutub.*

Teorema 4 : *Setiap titik memiliki tepat satu garis kutub.*

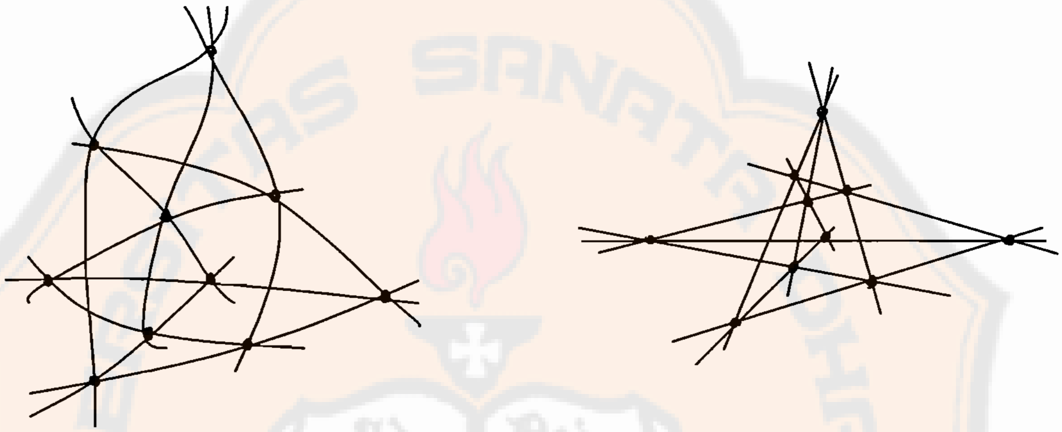
Teorema 5 : *Setiap titik dilalui tepat tiga garis.*

Teorema 6 : *Terdapat tepat sepuluh titik*

Teorema 7 : *Terdapat tepat sepuluh garis*

***Teorema 8 :** Setiap garis memiliki tepat tiga garis yang paralel dengannya.*

Model noktah-kurva untuk geometri Desargues tampak seperti pada Gambar 3.10a.



(a) (b)

Gambar 3.10

Catatan : Kebetulan sistem aksioma untuk Geometri Desargues ini juga dipenuhi oleh geometri dengan "titik" adalah titik biasa dan "garis" adalah garis lurus (Gambar 3.10b). Gambar yang terjadi disebut konfigurasi Desargues yang terkait dengan Teorema Desargues.

Sama seperti Geometri Fano dan Geometri Pappus, Geometri Desargues juga self dual.

BAB IV

GEOMETRI INSIDENSI

Sistem aksioma suatu geometri yang kita bahas dalam Bab III, hanya menyangkut sejumlah berhingga titik dan garis. Hal ini memang demikian karena dalam aksiomanya sendiri sudah dibuat batasan tertentu untuk jumlah titik dan garis, dan geometri yang terbentuk kita namakan Geometri Hingga. Dalam Bab IV ini penulis akan membahas Geometri Insidensi yang mungkin aksioma-aksiomanya dipenuhi baik oleh Geometri Hingga maupun Geometri Tak Hingga. Dalam Geometri Insidensi, "titik" dan "garis" merupakan unsur yang tidak didefinisikan dan relasi "pada" (yang dalam penggunaan sehari-hari dapat ditafsirkan sebagai: terletak, melalui, memuat) merupakan relasi yang tidak didefinisikan.

Berikut adalah aksioma-aksioma geometri insidensi:

Aksioma insidensi 1 : Untuk setiap dua titik berbeda terdapat tepat satu garis hubung.

Aksioma insidensi 2 : Setiap garis memuat paling sedikit dua titik.

Aksioma insidensi 3 : Paling sedikit ada tiga titik.

Aksioma insidensi 4 : Tidak semua titik segaris.

Geometri yang memenuhi keempat aksioma insidensi di atas disebut Geometri Insidensi. Geometri yang telah kita bahas pada Bab III tidak semuanya termasuk dalam geometri insidensi, misalnya Geometri Empat Garis, Geometri Pappus dan Geometri Desargues. Sedangkan Geometri Empat Titik, Geometri Enam Garis, Geometri Lima Titik, Geometri Fano, Geometri Young, Geometri Young-A, dan Geometri Young-B termasuk geometri insidensi.

Berikut adalah teorema-teorema yang dapat diturunkan dari aksioma-aksioma insidensi:

***Teorema insidensi 1:** Jika dua garis yang berbeda berpotongan, maka terdapat tepat satu titik potong.*

Bukti :

Jika dua garis yang berbeda berpotongan, maka menurut Definisi 1.1 paling sedikit terdapat satu titik potong. Andaikan ada dua titik potong, maka sebagai akibat, melalui dua titik yang berbeda terdapat dua garis. Namun ini bertentangan dengan Aksioma 1. Ini berarti pengandaian kita salah, sehingga jika dua garis yang berbeda berpotongan maka perpotongan tersebut tepat satu titik. ■

***Teorema insidensi 2 :** Melalui setiap titik minimal ada dua garis.*

Bukti :

Amati Aksioma 3 dan Aksioma 4, sebagai akibat untuk setiap titik P paling sedikit terdapat satu garis l yang tidak memuat P. Dengan Aksioma 2, garis l paling sedikit memuat dua titik dan dengan Aksioma 1, titik P akan menentukan masing-masing satu garis dengan tiap titik yang ada pada *l*, sehingga paling sedikit ada dua garis melalui P. Titik P di sini mewakili sebarang garis, oleh karena itu melalui setiap titik minimal ada dua garis. ■

Teorema Insidensi 3 : *Terdapat tiga garis yang tidak setitik.*

Bukti :

Dari Aksioma 3 dan Aksioma 4, paling sedikit ada tiga titik yang tidak segaris. Dengan Aksioma 1, ketiga titik ini harus berpasangan dan masing-masing menentukan satu garis, sehingga paling sedikit terdapat tiga garis dan ketiga garis tersebut tidak setitik. ■

Dari teorema-teorema insidensi di atas kita dapat melihat bahwa Teorema Insidensi 1 terdapat dalam Geometri Empat Titik sebagai Teorema 1, dalam Geometri Enam Garis sebagai Teorema 1, dalam Geometri Empat Garis sebagai Aksioma 2, dalam Geometri Fano sebagai Teorema 1, dan dalam Geometri Pappus sebagai Teorema 1. Sedangkan Teorema Insidensi 2 terdapat dalam Geometri Empat Titik sebagai Teorema 3, dalam Geometri Enam Garis sebagai Aksioma 4, dalam Geometri Lima Titik sebagai Teorema 2, dalam Geometri Empat Garis sebagai Aksioma 3, dalam Geometri Fano sebagai Teorema 2, dalam Geometri Young sebagai Teorema 1, dalam Geometri Young-A sebagai Teorema 1, dalam Geometri Young-B sebagai Teorema 1, dalam Geometri Pappus sebagai Teorema 3, dan dalam Geometri Desargues sebagai Teorema 3. Sedangkan secara konstruksi model noktah-kurva semua geometri yang kita bahas pada Bab III di atas memenuhi Teorema Insidensi 3.

Aksioma-aksioma insidensi secara jelas tidak menyatakan bahwa garis-garis paralel (garis-garis yang tidak berpotongan) ada. Namun dengan mengamati geometri yang termasuk dalam geometri insidensi kita dapat memperlihatkan ada geometri yang mempunyai pasangan garis paralel dan ada geometri yang tidak mempunyai pasangan garis paralel, oleh karena itu kita dapat menyimpulkan bahwa:

Untuk tiap garis l dan tiap titik P yang tidak berada pada garis l, maka tiga kemungkinan (alternatif) muncul untuk aksioma paralel:

1. *Tidak ada garis pada P yang paralel dengan l*
2. *Terdapat tepat satu garis pada P yang paralel dengan l*
3. *Terdapat lebih dari satu garis pada P yang paralel dengan l.*

Geometri Insidensi yang aksioma paralelnya memenuhi alternatif 2 disebut memiliki sifat paralel Euclides, sedangkan yang memenuhi alternatif 1 atau 3 disebut non-Euclides. Selanjutnya, Geometri Insidensi yang menunjukkan sifat paralel Euclides disebut bersifat Afin, sedangkan Geometri Insidensi yang tidak memiliki garis paralel dan tiap garisnya paling sedikit memiliki tiga titik disebut bersifat Projektif. Geometri Empat Titik dan Geometri Enam Garis memiliki sifat paralel Euclides karena aksioma-aksiomanya menyatakan alternatif

2, oleh karena itu geometri Empat Titik dan Geometri Enam Garis bersifat Afin. Demikian juga Geometri Young, Geometri Young-A dan Geometri Young-B ketiganya bersifat Afin karena Aksioma 5-nya memiliki sifat paralel Euclides. Sedangkan Geometri Fano bersifat Projektif karena Aksioma 5-nya memiliki sifat Non-Euclides. Demikian juga geometri Lima Titik bersifat Projektif.

BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Geometri Hingga merupakan contoh geometri yang dapat kita pelajari dengan struktur yang sederhana, hal ini tampak dari sistem aksioma yang menyusun geometri tersebut. Dari sistem yang sederhana ini kita dapat meningkat ke yang lebih rumit, misalnya dengan membuat perubahan pada salah satu aksiomanya. Dengan demikian kita dapat menemukan beragam macam contoh dari Geometri Hingga. Dari beragam macam contoh Geometri Hingga tersebut kita dapat melihat kaitan antara geometri satu dengan yang lainnya.

Beberapa Geometri Hingga termasuk Geometri Insidensi. Terkait dengan aksioma paralelnya, maka Geometri Hingga dapat bersifat Afin atau bersifat Projektif.

B. SARAN

Dengan mempelajari Geometri Hingga, penulis dapat mengenal dan mendalami geometri selain geometri yang telah dipelajari. Dalam pembahasan skripsi ini, penulis hanya membahas kaitan Geometri Hingga dengan Geometri Insidensi. Juga mengenai model yang terjadi, di sini penulis hanya membahas model Geometri Hingga pada bidang, hal ini karena keterbatasan penulis.

Untuk penulisan selanjutnya dapat dibahas misalnya kaitan Geometri Hingga dengan Geometri Lengkap lainnya dan juga model yang dibahas adalah model Geometri Hingga pada ruang. Di samping itu masih ada hal lainnya misalnya kaitan Geometri Hingga dengan Teori Graf.

Topik-topik tersebut sangat mungkin untuk dapat diteruskan dan diangkat oleh mahasiswa lain sebagai topik skripsi.

DAFTAR PUSTAKA

Greenberg, Marvin Jay (1980). *Euclidean and Non-Ecludiean Geometries* : development and history. Second edition. San Francisco : W. H. Freeman and Company.

Maki, D. P. & M. Thompson (1973). *Mathematical Models and Applications*. New York : Prentice Hall Inc.

Rosskopf, Myron F. (1966). *Mathematics Geometry*. New Jersey : Silver Burdett Company.

Smart, James R. (1998). *Modern Geometries*. Fifth edition. Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Company.

Susanta, B. (1990). *Geometri Transformasi*. Jakarta : Tim Basic Science. Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan. DITJEN DIKTI. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Wallace, Edward C. (1992). *Roads to Geometry*. New Jersey: Prentice Hall