PROBLEMA SYLVESTER
TENTANG TITIK-TITIK KOLINEAR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

Sugeng Tri Hargono

NIM : 981414042

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2004

PROBLEMA SYLVESTER
TENTANG TITIK – TITIK KOLINEAR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :
Sugeng Tri Hargono
NIM : 981414042

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

PROBLEMA SYLVESTER
TENTANG TITIK - TITIK KOLINEAR

Disusun Oleh :
Sugeng Tri Hargono
NIM : 981414042

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A.

Tanggal : 29 April 2004

PROBLEMA SYLVESTER
TENTANG TITIK - TITIK KOLINEAR

Dipersiapkan dan ditulis oleh :
Sugeng Tri Hargono
NIM : 981414042

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
Pada tanggal 21 Juni 2004
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	…………………
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	…………………
Anggota	: Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A.	…………………
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	…………………
Anggota	: Drs. Al. Haryono	…………………

Yogyakarta, 21 Juni 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 21 juni 2009

Penulis

Sugeng Tri Hargono

PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan kepada :

1. *Bapak dan ibu tercinta yang senantiasa berkorban dan berdoa untuk ku dalam mencapai cita-citaku;*
2. *Kakak-kakakku Ignatius, Maria Goretti serta Catarina yang selalu memberi semangat 'tuk maju;*
3. *Dik Try dan putri kecilku Bernadetha yang setia mendampingi dan meyakinkan langkahku dalam meraih kesuksesan;*
4. *Almamater yang kubanggakan.*

ABSTRAK

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mendapatkan pengertian yang benar mengenai titik kolinear terutama pada Problema Sylvester tentang Titik – Titik Kolinear.

Penulisan ini bersumber dari buku – buku geometri yang sesuai yang tercantum dalam daftar pustaka.

Pada tahun 1893 James Joseph Sylvester menyampaikan suatu masalah "Buktikan bahwa tidak mungkin menyusun titik – titik yang berhingga banyaknya sedemikian sehingga ada garis lurus yang memuat dua diantaranya dan memuat yang ketiga kecuali jika semua titik terletak pada garis lurus yang sama".

Kalimat tersebut dianggap berbentuk kalimat negatif dan tak ada seorangpun yang dapat membuktikannya dan terlupakan sampai tahun 1933. Tetapi Motzkin, karamata Erdos dan T Gallai mengungkap kembali dengan menggunakan kalimat yang positif yaitu "Jika n titik pada suatu bidang nyata tidak semuanya kolinear maka terdapat paling sedikit satu garis yang memuat tepat dua diantaranya". Pernyataan tersebut dikenal sebagai Problema Sylvester Tentang Titik – Titik Kolinear. Kelly memberikan bukti dengan menggunakan aksioma dan teorema di geometri terurut. Ini dapat dibuktikan dengan mengunakan teorena yang ada, sehingga berharap dapat menyatakan terdapat satu garis yang memuat tepat dua titik.

Pada geometri proyektif terdapat suatu prinsip dualitas yang menyatakan bahwa dalam bidang proyektif setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis(terletak pada dengan melalui, menghubungkan dengan memotong, segaris dengan berpotongan pada satu titik).

Rumus $GP(n,q)=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ menyatakan banyaknya titik pada geometri proyektif hingga, dengan GP menyatakan Geometri Proyektif, n sebagai dimensi ruang dan q sebagai bilangan prima berpangkat bulat positif. Jika terdapat k titik pada setiap garis, maka terdapat k garis pada setiap titik.

Teorema Slylvester tidak berlaku disetiap geometri proyektif hingga maupun di geometri proyektif biasa.

ABSTRACT

The purpose of this study was to get a good understanding about collinear points especially Sylvester's problem of collinear points.

This is a literatury study with sources taken from relevant Geometry books found in the refences list.

In 1893 James Joseph Slylvester proposed a problem : *"Prove that it is not possible to arrange any finite number of real point so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line".*

This was a "negative" Statement and no one was able to prove it and it is forgotten till 1933. But Karamata, Erdos, and T Gallai revived it and used a "positive" statement by Motzkin: "*If n point in the real plane are not on one straight line, then there exists a straight line containing exactly two of the point*". This is known as "Slylvester's problem of collinear points". Kelly gave a Euclidean proof and used axioms and theorems in "ordered geometry". It was proof, that wonder all possible circumstances theorems found a line containing exactly two points.

One of the properties of projective geometry is "The Principle of duality", which assert that every definition remains significant, and every theorem remains true, when we consistently interchange the word point and line(*and consequently interchange lie on and pass through. Join and intersection, collinear and concurrent etc*).

In finite Projective geometry the general formula for the total number of points in *PG (n,q)* $= \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, where *PG* stand for projective geometry, n is dimension and q must be a positive integral power of prime number. If there are k points on each line, then there are k lines on each points.

In projective geometry and also in any finite projective geometry Slylvester's theorem is false.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Bapa di surga atas segala penyertaan dan bimbingan-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata I (S1) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tidak lepas dari keterlibatan banyak pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A. selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan pengarahan dan saran kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Th. Sugiarto, MT., selaku kaprodi pendidikan matematika Universitas Sanata Dharma.
3. Bapak Drs. Al. Haryono selaku Dosen Pembimbing Akademik.
4. Para Dosen atas segala bimbingan yang diberikan selama penulis belajar di Universitas Sanata Dharma.
5. Staf Sekretariat JPMIPA atas segala bantuannya selama penulis belajar di Universitas Sanata Dharma.
6. bapak dan ibu tercinta yang selama ini selalu mendampingi, memberi dorongan, semangat dan juga doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

7. Kakak-kakakku Ignatius, Maria Goretti, serta Catarina yang selalu memotivasi dan memberi perhatian kepada penulis sehingga penulis berhasil menyelesaikan skripsi ini.
8. Dik Try dan putri kecilku Bernadetha yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabatku Agus, Ucil, Dalono, Yosep, Retno, Mirna, Sugih, Susana, Yeny, Hendry dan semua teman-teman P. MAT angkatan 1998 atas kebersamaan kita selama ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan dukungan dan doa selama perjalanan studi dan proses penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran guna peningkatan karya tulis selanjutnya. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua.

Yogyakarta, 21 Juni 2004

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

A,B,C,...	titik – titik
l,m,n,	garis – garis
$\overleftrightarrow{AB}$	garis yang melalui A dan B
$\overline{AB}$	segmen AB
A/B	sinar A menjahui B
GP	geometri proyektif
[ABC]	B terletak diantara A dan C

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Pada tahun 1814-1897 dikenal seorang matematikawan bernama James Joseph Sylvester yang lahir di London, 3 september 1814. James Joseph Sylvester yang lebih terkenal dengan Sylvester ini, pada usia 27 tahun, Ia telah menjadi professor matematika di universitas Virginia.

Untuk selanjutnya Sylvester banyak berkarya pada bidang Aljabar dan juga pada bidang geometri. Pada tahun 1893 Sylvester menyampaikan suatu pernyataan yaitu " Buktikan, tidak mungkin menyusun titik-titik nyata yang berhingga banyaknya, sedemikian sehingga ada suatu garis lurus yang memuat dua diantaranya dan memuat yang ketiga, kecuali jika semua titik-titik terletak pada garis lurus yang sama". Pernyataan Sylvester dianggap "negatif" oleh para matematikawan, sehingga terlupakan sampai tahun 1933 atau selama 40 tahun. Pada tahun 1933 pernyataan dari Sylvester tersebut diungkap kembali oleh Mozkin, Karamata, Erdos dan L.M Kelly, dengan menggunakan kalimat yang "positif" yaitu "Jika n titik pada suatu bidang nyata tidak pada suatu garis lurus, maka terdapat suatu garis lurus yang memuat tepat dua dari titik-titik tersebut" sehingga pernyataan dari Mozkin ini, memungkinkan masalah Sylvester dapat diselesaikan.

Pada tahun 1892 sebelum penyataan dari Sylvester muncul, dikemukakanlah suatu geometri baru yaitu Geometri Hingga (Finite) yang dikenalkan oleh Gino-Fano. Geometri ini disebut hingga(Finite) karena hanya menpunyai sedikit aksioma dan teorema serta mempunyai elemen yang berhingga, yang dimaksud disini adalah titik dan garis sebagai elemennya. Karena geometri hingga mempunyai sedikit aksioma dan teorema maka terdapatlah macam – macam geometri hingga antara lain: Geometri tiga titik, Geometri empat titik, Geometri empat garis, dan juga geometri sembilan titik (Geometri hingga Pappus).

Melihat kedua hal tersebut di atas,maka penulis merasa tertarik untuk mendalami prinsip kolinearitas yang terdapat pada geometri terurut "ordered". Dalam geometri terurut, urutan letak dari titik – titik memegang peranan yang penting sehingga nantinya sifat inilah yang akan dipakai dalam pembuktian teorema Sylvester tentang titik kolinear.

Dalam geometri proyektif hingga terdapat suatu prinsip GP (n,q) karena dimensi ruang dari geometri ini adalah 2 maka GP(2,q) dan q menyatakan bilangan prima berpangkat bulat positip. Prinsip tersebut menyatakan banyak titik pada geometri proyektif hingga. Dari prinsip itu dapat ditentukan banyaknya titik pada suatu garis dan banyaknya garis pada suatu titik. Untuk mengetahui banyaknya garis yang melalui suatu titik kita dapat menggunakan prinsip dualitas yang juga terdapat pada geometri proyektif. Yang dimaksud adalah bahwa setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema/dalil tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik yang terletak pada satu garis dengan dua garis yang berpotongan pada satu titik, dua titik yang dihubungkan oleh satu garis dengan dua garis yang berpotongan pada satu titik dan sebagainya.

Prinsip – prinsip inilah yang nantinya akan kita gunakan dalam penulisan ini, karena selain pembuktian dari teorema Sylvester pada geometri terurut, penulis akan membahas apakah teorema Sylvester ini berlaku pada geometri proyektif hingga dan juga pada geometri proyektif biasa . hal inilah alasanya menggapa penulis mengambil topik skipsi mengenai problema Sylvester tentang titik kolinear.

B. PERUMUSAN MASALAH

Pokok – pokok perumusan masalahan yang akan ditulis adalah

1. Bagaimana pernyataan dari Sylvester itu sebenarnya ?
2. Bagaimana bukti dari teorema Sylvester tentang titik kolinear ?
3. Apakah teorema Sylvester berlaku di geometri proyektif hingga ?

C. TUJUAN PENULISAN

1. Mengetahui dan memahami pernyataan dari Sylvester.
2. Mengenal dan dapat membuktikan teorema Sylvester tentang titik kolinear.
3. Mengetahui dan memahami hubungan antara teorema Sylvester dan geometri proyektif hingga.

D. MANFAAT PENULISAN

Manfaat dari mempelajari teorema Sylvester tentang titik kolinear adalah dapat mengenal lebih jauh tentang prinsip kolinearitas dan juga bisa mengenal serta memahami geometri hingga.

E. METODE PEMBAHASAN

Metode yang di gunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka yaitu dengan mempelajari beberapa bagian materi dari buku acuan yang tercantum dalam daftar pustaka.

F. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Bab I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Perumusan masalah

C. Tujuan Penulisan

D. Manfaat Penulisan

E. Metode Pembahasan

F. Sistematika Pembahasan

BAB II. LANDASAN TEORI

A. Geometri Euclides Menurut SMSG

B. Geometri Terurut

C. Pengenalan Geometri Hingga

1. Geometri Tiga Titik

BAB II

LANDASAN TEORI

A. GEOMETRI EUCLIDES MENURUT SMSG

Pada awalnya geometri yang disajikan secara sistematis dan berdasarkan pada proses berfikir secara deduktif adalah geometri yang dikemukakan oleh Euclides, yang hidup di Alexandria sekitar tahun 300 sm. Dalam buku pertamanya dari 13 buku berjudul "The Elements" atau 'Unsur-Unsur", Euclides menuliskan 23 definisi dan berikut adalah definisi pertama dan kedua dari Euclides:

Definisi 1:

Titik adalah yang tidak mempunyai bagian.

Definisi 2 :

Garis adalah panjang tanpa lebar.

Pada kedua definisi tersebut diatas tampak sekali bahwa Euclides ingin mendefinisikan semuanya dalam geometri yaitu sampai dengan titik dan garis. Hal tersebut merupakan kelemahan pertama dari geometri Euclides, karena pada definisi 1 dan definisi 2, kata "bagian", "lebar" dan "panjang" tidak didefinisikan sebelumnya.

Setelah menuliskan 23 definisi, Euclides juga menuliskan 5 postulat, 5 aksioma dan 48 dalil (teorema), berikut akan diberikan 5 hal yang dipostulatkan oleh Euclides:

Postulat 1 :

Menarik sebarang titik ke sebarang titik yang lain.

Postulat 2 :

Memperpanjang suatu ruas garis secara kontinu menjadi garis lurus.

Postulat 3 :

Melukis sebarang lingkaran dengan sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

Postulat 4 :

Bahwa semua sudut siku-siku adalah sama.

Postulat 5 :

Bahwa jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Dari postulat 1 sampai postulat 5, postulat 5 merupakan postulat yang terpanjang dan disebut postulat parallel. Para matematikawan meragukan postulat ini karena terlalu panjang, dan hal tersebut merupakan kelemahan kedua dari geometri Euclides. Kelemahan-kelemahan ini membawa akibat geometri Euclides tidak dapat dikatakan lagi sebagai geometri yang baik dan menyebabkan para matematikawan berusaha memperbaikinya, matematikawan tersebut antara lain : David Hillbert tahun 1899, Birkof tahun 1937 dan SMSG pada tahun 1960.

Pada penulisan ini model dari SMSG tentang geometri Euclides adalah yang digunakan karena model dari SMSG ini mempunyai pengertian pangkal yaitu : Titik, garis dan bidang. SMSG menuliskan 22 postulat, semua postulat – postulat dari SMSG dapat dirangkum menjadi 8 bagian seperti berikut.(postulat – postulat diberikan pada lampiran)

Bagian I : Aksioma insidensi pada postulat 1.

Bagian II : Aksioma jarak pada postulat 2 sampai postulat 4.

Bagian III : Aksioma hubungan ruang pada postulat 5 sampai postulat 8 .

Bagian IV : Aksioma pemisahan pada postulat 9 sampai postulat 10.

Bagian V : Aksioma pengukuran sudut pada postulat 11sampai postulat 14.

Bagian VI : Aksioma kongruensi pada postulat ke-15.

Bagian VII : Aksioma kesejajaran pada postulat ke-16.

Bagian VIII : Aksioma mengenai luas dan isi pada postulat 17 sampai postulat 22.

Berikut adalah postulat pertama dan kedua dari SMSG tentang geometri Euclides:

Postulat 1:

Diberikan sebarang dua titik berlainan maka ada tepat satu garis yang memuat titik tersebut.

Postulat 2:

Untuk setiap pasang titik berlainan berkorespondensi satu bilangan positif tunggal. Bilangan ini disebut jarak dua titik tersebut.

Postulat selebihnya diberikan pada lampiran.

Postulat 1, yang merupakan postulat insidensi adalah postulat yang menjelaskan letak dari titik dengan titik pada suatu garis atau bidang. Titik-titik dapat seletak atau tidak seletak baik pada garis atau bidang, titik yang seletak pada suatu garis disebut segaris atau kolinear dan titik yang seletak pada bidang disebut sebidang atau planer. Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai aksioma-aksioma dari titik yang segaris atau aksioma-aksioma titik kolinear yang terdapat pada geometri terurut ("ordered"). Geometri terurut disusun berdasarkan pada dua postulat pertama dari Euclides tetapi penyajianya lebih teliti, karena pada geometri Euclides titik dan garis didefinisikan sedangkan pada geometri terurut titik tidak didefinisikan .tetapi sebagai pengertian pangkal dengan aksioma ditentukan letak titik – titik pada suatu garis. Alasan – alasan tersebut yang mendasari mengapa kita menggunakan geometri terurut .

B. GEOMETRI TERURUT

Pada sub-bab ini akan dibahas mengenai geometri terurut dengan aksioma, definisi dan teorema serta buktinya, tetapi hanya yang mendasari pada pokok permasalahan kita .

Geometri terurut mempunyai pengertian pangkal " titik-titik A,B,C ...sebagai unsur yang tidak didefinisikan dan relasi keantaraan sebagai relasi yang tidak didefinisikan". Relasi keantaraan yang dimaksud adalah sebagai [ABC] yang maksudnya adalah B terletak diantara A dan C, dan jika B tidak terletak diantara A dan C, maka dinyatakan dengan "tidak [ABC]". Dari pengertian pangkal dapatlah diturunkan aksioma – aksioma yang merupakan suatu pernyataan yang dapat diterima tanpa bukti. Aksioma-aksioma tersebut adalah sebagai berikut:

Aksioma 2.1 :

Ada paling sedikit dua titik.

Aksioma 2.2 :

Jika A dan B dua titik yang berlainan maka ada satu titik C, sedemikian sehingga [ABC].

Aksioma 2.3 :

Jika [ABC] maka A dan C berlainan, sehingga $A \neq C$.

Aksioma 2.4 :

Jika [ABC] maka [CBA], tetapi tidak [BCA].

Sebelum diberikan aksioma-aksioma yang lain, terlebih dahulu akan diberikan beberapa definisi berikut:

Definisi 2.1 :

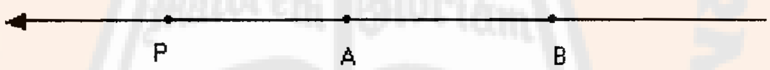
Jika diberikan A dan B dua titik yang berlainan, maka segmen AB atau ruas garis AB adalah himpunan titik P yang memenuhi [APB], dikatakan P terletak pada segmen AB. Dan untuk selanjutnya segmen AB dinotasikan sebagai $\overline{AB}$.

Definisi 2.2 :

Interval AB adalah $\overline{AB}$ ditambah ujung-ujungnya A dan B .

Definisi 2.3 :

Sinar A menjahui B adalah himpunan titik-titik P yang memenuhi [PAB] atau [BAP], dan untuk selanjutnya sinar A menjauhi B dinotasikan dengan A/B . diperhatikan gambar 2-1.



Gambar 2-1

Definisi 2.4 :

Garis AB adalah interval AB ditambah sinar A/B dan B/A dan garis AB dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{AB}$.

Definisi 2.2, 2.3 dan 2.4 membawa akibat bahwa interval AB = interval BA dan $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$. Kemudian diberikan aksioma 2.5 berikut:

Aksioma 2.5 :

Jika titik C dan D adalah titik-titik berlainan pada $\overleftrightarrow{AB}$ maka titik A pada $\overleftrightarrow{CD}$.

Aksioma ini membawa akibat bahwa dua titik berlainan terletak pada suatu garis dan apabila terdapat dua garis yang berlainan maka dua garis tersebut mempunyai satu titik persekutuan yang disebut titik potong dua garis tersebut. Akibat yang lain adalah tiga titik berlainan A, B dan C pada suatu garis memenuhi tepat satu dari relasi-relasi [ABC], [BCA] atau [CAB].

Aksioma 2.6 :

Jika AB suatu garis, maka ada suatu titik C tidak pada $\overleftrightarrow{AB}$.

Aksioma ini menjelaskan bahwa dari suatu garis terdapat suatu titik lain yang tidak pada garis yang dimaksud dan hal ini menyebabkan diberikannya definisi berikut:

Definisi 2.5 :

Tiga titik yang berlainan A,B dan C akan menentukan segitiga ABC yang memuat A,B dan C yang disebut titik – titik sudut dan segmen – segmen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$ disebut sisi – sisi segitiga.

Selanjutnya akan diberikan definisi bidang datar berikut :

Definisi 2.6 :

Bidang datar adalah himpunan titik-titik yang segaris dengan sepasang titik pada satu atau dua sisi suatu segitiga .

Dari aksioma 2.6 dan definisi 2.5 dapatlah diturunkan teorema berikut:

Teorema 2.1:

Jika C tidak pada $\overleftrightarrow{AB}$, maka A tidak pada $\overleftrightarrow{BC}$ demikian juga B tidak pada $\overleftrightarrow{AC}$ sehingga $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$ berlainan.

Bukti :

Menurut aksioma 2.5, jika A pada BC maka C pada AB, padahal diketahui C tidak pada AB sehingga terdapat pertentangan, jadi A tidak pada BC demikian juga B tidak pada AC sehingga BC, CA dan AB adalah garis-garis yang berlainan.

Sebelum diberikan aksioma yang lain terlebih dahulu akan diberikan definisi titik – titik kolinear atau titik – titik segaris:

Definisi 2.7 :

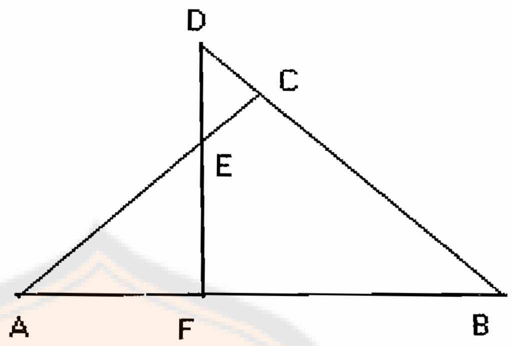
Titik-titik kolinear adalah titik-titik yang terletak pada suatu garis yang sama.

Berikut akan diberikan aksioma yang diturunkan dari definisi 2.7 dan aksioma ini penting karena nantinya akan kita gunakan pada pembuktian permasalahan kita pada bab selanjutnya.

Aksioma 2.7 :

Jika ABC suatu segitiga dan [BCD] dan [CEA] maka pada garis DE ada suatu titik F yang memenuhi [AFB].

Untuk menjelaskan aksioma tersebut diatas diperhatikan gambar 2 – 2 berikut keterangannya.



Gambar 2-2

Pada gambar 2-2 diketahui tiga titik yang berlainan A,B dan C maka dapatlah dibentuk segitiga ABC, karena [BCD] maka D terletak pada perpanjangan BC dan [CEA] maka E terletak diantara C dan A sehingga dengan memperpanjang DE terdapatlah suatu titik dan kita sebut F yang memenuhi [AFB].

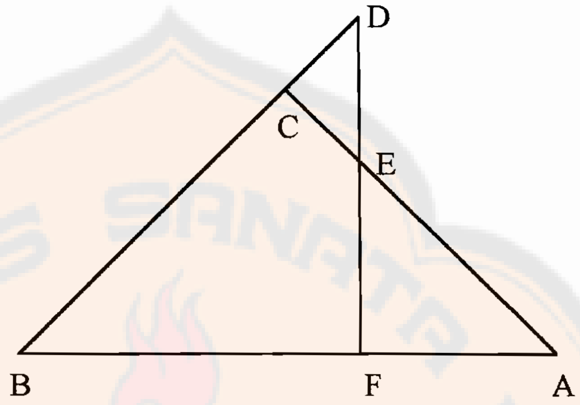
Kemudian dari definisi 2.7 dan aksioma 2.7 dapatlah diturunkan teorema-teorema berikut:

Teorema 2.2 :

Antara dua titik berlainan ada suatu titik lain.

Bukti :

Andaikan terdapat dua titik yang berlainan A dan B, maka menurut aksioma 2.6 , terdapatlah suatu titik yang tidak pada AB dan kita sebut titik E , karena A dan E berlainan maka menurut aksioma 2.2 terdapatlah suatu titik yang kita sebut C yang memenuhi [AEC], sehingga ABC adalah segitiga, menurut aksioma 2.2 terdapatlah suatu titik D pada perpanjangan BC yang memenuhi [BCD]. Kemudian dari titik D dan E terdapatlah titik F pada perpanjangan DE yang memenuhi [AFB] (menurut aksioma 2.7) sehingga terbukti bahwa antara dua titik yang berlainan pasti ada suatu titik lain, diperhatikan gambar 2-3 berikut.



Gambar 2-3

Berikut akan diberikan teorema yang merupakan perkembangan dari teorema 2.2.

Teorema 2.3 :

Jika ABC suatu segitiga dan [BCD] dan [CEA], maka pada garis DE ada suatu titik F yang memenuhi [AFB] dan [DEF].

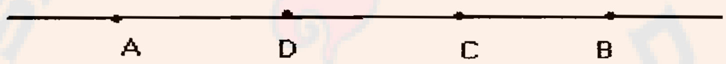
Bahwa [AFB] sudah sesuai dengan aksioma 2.7, sehingga kita hanya menunjukkan [DEF]. Untuk menunjukkan [DEF] akan kita periksa kemungkinan letak titik F pada $\overleftrightarrow{AB}$. Kemungkinannya sebagai berikut:

1. Titik F = titik D.
2. Titik F = titik E
3. [EFD]
4. [FDE]
5. [DEF]

Sekarang akan kita buktikan kemungkinan-kemungkinannya :

Kemungkinan 1.

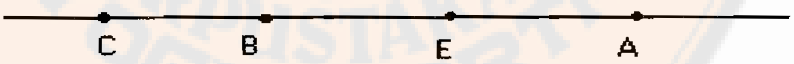
Diketahui ABC suatu segitiga dan F = D, maka terdapat [BCD] dan [ADB] sehingga titik C dan A terletak pada $\overleftrightarrow{DB}$, ini tidak mungkin karena ABC suatu segitiga jadi F $\neq$ D. Lebih jelasnya diperhatikan gambar 2-4 berikut:



Gambar 2-4

Kemungkinan 2.

Jika F = E, maka terdapat [CEA] dan [AEB] sehingga titik C dan B terletak pada $\overleftrightarrow{AE}$, ini tidak mungkin karena ABC suatu segitiga jadi F $\neq$ E. Lebih jelasnya diperhatikan gambar 2-5 berikut :

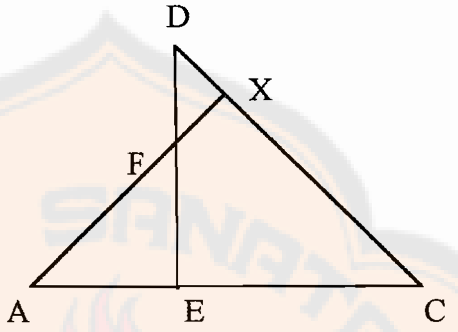


Gambar 2-5

Kemungkinan 3.

Diketahui [EFD] dan [CEA], sehingga terdapatlah suatu segitiga DCE dengan [EFD] dan [CEA] maka menurut aksioma 2.7 pada $\overleftrightarrow{AF}$ terdapat sebarang titik X yang memenuhi [DXC]. $\overleftrightarrow{AF}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ tidak mungkin berpotonggan lebih dari satu kali maka titik X

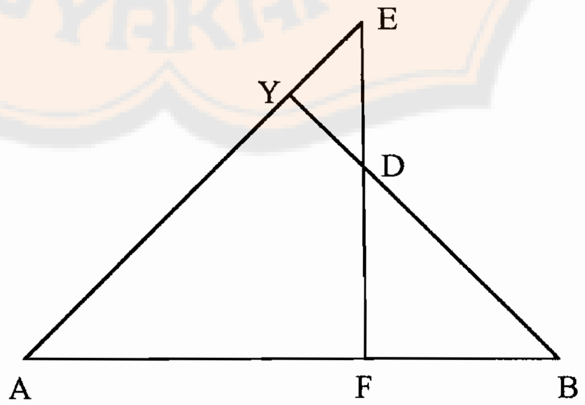
= B, sehingga terdapat [DBC] dan ini bertentangan dengan apa yang diketahui yaitu [BCD] . Jadi tidak mungkin [EFD] lebih jelasnya diperhatikan gambar 2-6.



Gambar 2-6

Kemungkinan 4.

Diketahui [FDE] dan [AFB], maka terdapat segitiga AFE dengan [AFB] dan [FDE] dan menurut aksioma 2.7 terdapat suatu titik Y yang memenuhi [AYE], karena $\overleftrightarrow{BD}$ dan $\overleftrightarrow{AE}$ tidak mungkin berpotongan lebih dari satu titik maka Y = C sehingga terdapat [ACE] dan ini bertentangan dengan apa yang diketahui yaitu [AEC] jadi tidak mungkin [FDE] lebih jelasnya diperhatikan gambar 2-7.



Gambar 2-7

Kemungkinan – kemungkinan 1 sampai 4 telah dibuktikan dan ternyata semuanya tidak benar, sehingga tinggal satu kemungkinan yaitu kemungkinan ke – 5. Karena kemungkinan 1,2,3 dan 4 salah maka kemungkinan ke – 5 pasti benar, yaitu [DEF].

Dari definisi, aksioma dan teorema yang telah diberikan berkaitan dengan urutan letak tiga titik pada suatu garis dan sekarang akan kita berikan urutan letak empat titik. Namun terlebih dahulu akan diberikan definisi berkaitan dengan urutan letak empat titik tersebut:

Definisi 2.8:

Jika [ABC] dan [ACD] maka kita tulis [ABCD].

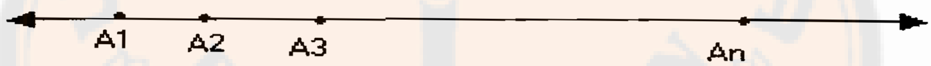
Menurut aksioma 2.2 maka terdapat [DCBA] yang merupakan sifat dari urutan empat titik. Kemudian jika kita mempunyai sebarang titik X pada $\overline{AB}$, dan X membagi $\overline{AB}$ dalam dua segmen yaitu $\overline{AX}$ dan $\overline{XB}$ maka dapat dikatakan [AXB]. Sekarang jika terdapat sinar garis dari A, maka X membagi sinar A tersebut dalam suatu segmen dan suatu sinar garis yang menjauhi A atau terdapat $\overline{AX}$ dan X/A. Hal tersebut dapat diperlihatkan gambar 2.8 berikut :

Gambar 2-8

Telah diketahui bahwa [AXB], dan karena sebarang titik pada garis membagi garis dalam dua sinar garis yang berlawanan seperti gambar 2-9, maka terdapat sinar A/X dan sinar X/A memuat titik B kita sebut sebagai sinar XB saja.

Gambar 2-9

Pada gambar di atas terlihat bahwa terdapat dua sinar garis yang saling berlawanan yaitu sinar XA dan sinar XB serta terdapat dua segmen yaitu $\overline{AX}$ dan $\overline{XB}$. Pada gambar terdapat tiga titik yang berlainan, sekarang jika diberikan n titik yang berlainan dengan n > 1, maka n titik yang berlainan tersebut akan membagi garis yang memuat n titik itu ke dalam dua sinar dan n – 1 segmen garis. Hal ini digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2-10

Pada gambar 2-10, diberikan titik-titik A_1 , A_2, A_3,...A_n, yang semuanya berlainan sehingga terdapat dua sinar yang saling berlawanan yaitu sinar A_1 / A_n dan sinar A_n/ A_1 serta terdapat n – 1 segmen yaitu $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$. Titik-titik tersebut mempunyai urutan (A_1, A_2, A_3,...A_n) maka dapat dituliskan sebagai [A_1 A_2 A_3...A_n]. Jika kita melihat kembali definisi 2.8 maka dari $[A_1\ A_2\ A_3,\ldots A_n]$ terdapat syarat yang harus dipenuhi yaitu $[A_1\ A_2\ A_3]$, $[\ A_2\ A_3 A_4]$, $[\ A_3 A_4 A_5]\ldots[A_{n-2} A_{n-1} A_n]$ karena titik-titik tersebut berurutan.

Kita akan kembali melihat aksioma 2.7, yang menyatakan jika suatu segitiga ABC dengan [BCD] dan [CEA] maka pada garis DE ada suatu titik yang memenuhi [AFB]. Dari aksioma tersebut Pasch (1882) memberikan suatu pernyataan yang lebih kuat tentang aksioma tersebut, Pasch menyatakan bahwa "jika sebuah garis pada suatu bidang segitiga memotong satu sisi, maka garis tersebut akan memotong sisi yang lain atau melalui suatu titik sudut" tetapi aksioma dari Peano (1889) jauh lebih baik karena:

1. Kata bidang tidak dipakai sama sekali.
2. Garis DE melalui segitiga ABC dengan cara khusus yaitu sebelum memotong CA, garis DE berasal dari D pada C/B.

Alasan inilah yang menyebabkan aksioma 2.7 cukup kuat dan membawa pada diturunkannya suatu teorema lagi yang sangat penting yaitu:

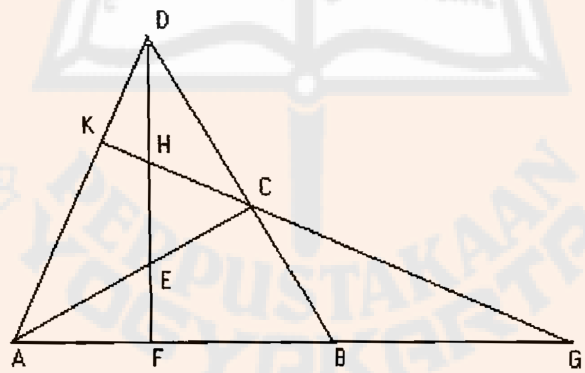
Teorema 2.4.

Jika ABC suatu segitiga dan [AFB] dan [BCD] maka pada garis DF terdapat suatu titik E yang memenuhi [CEA].

Bukti :

Karena ABC suatu segitiga dengan [AFB] dan [BCD] maka terdapat suatu segitiga BDF, sehingga bila kita ambil sebarang titik

G pada B/F dan dengan melihat segitiga BDF yang memenuhi [FBG] dan [BCD] maka berdasarkan aksioma 2.7 pada garis GC terdapat suatu titik H yang memenuhi [DHF] dan menurut teorema 2.3 terdapat [GCH]. Karena [AFB] dan [FBG] maka [AFG]. Sehingga terdapat segitiga AFD yang memenuhi [AFG] dan [DHF]. Dengan aksioma 2.7 lagi maka pada $\overleftrightarrow{GC}$ terdapat sebarang titik K yang memenuhi [DKA] dan menurut teorema 2.3 terdapat [GHK], karena [GCH] dan [GHK] maka berdasarkan sifat dari urutan titik-titik terdapat [CHK] sehingga terdapat segitiga ACK dengan [AKD] dan [KHC] maka pada $\overleftrightarrow{DH}$ atau $\overleftrightarrow{DF}$ terdapat suatu titik E yang memenuhi [CEA], untuk lebih jelasnya diperhatikan gambar 2.11.



Gambar 2 - 11

Teorema 2.4 ini nantinya akan kita gunakan pada pembuktian teorema Sylvester pada Bab III, namun sebelumnya akan dikenalkan dahulu mengenai geometri hingga yang akan diberikan pada sub bab C berikut:

C. PENGENALAN GEOMETRI HINGGA

Pada sub bab ini akan kita bahas mengenai geometri hingga, yaitu tentang pengertian pangkal dan syarat-syarat dari geometri hingga.

Geometri hingga untuk pertama kalinya diperkenalkan oleh Gino-Fano, pada sekitar tahun 1892, dan pada tahun 1906 Veblen dan Bussey memperkenalkan geometri hingga baru yaitu geometri proyektif hingga, sampai sekarang geometri hingga terus berkembang dan terus berkembang. Geometri hingga mempunyai pengertian pangkal "titik dan garis" dan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9

Geometri hingga adalah geometri yang mempunyai elemen berhingga. Titik dan garis sebagai elemen.

Dari definisi 2.9 jelas bahwa geometri dikatakan geometri hingga jika dan hanya jika titik dan garisnya berhingga. Untuk lebih jelasnya berikut akan diberikan syarat-syarat suatu geometri hingga:

1. Banyaknya titik berhingga.
2. Banyaknya garis berhingga.
3. Setiap garis melalui sejumlah s titik yang sama dengan $s \geq 2$.
4. Setiap titik terletak pada sejumlah t garis yang sama , dengan $t \geq 2$.
5. Setiap pasang titik yang berlainan terletak pada paling banyak satu garis yang sama.
6. Setiap pasang garis berlainan melalui paling banyak satu titik yang sama.

7. Tidak semua titik terletak pada suatu garis yang sama.
8. Ada paling sedikit satu garis.

Kedelapan syarat tersebut mutlak dipenuhi supaya suatu geometri disebut geometri hingga. Berikut akan diberikan contoh geometri hingga antara lain geometri tiga titik, empat titik, empat garis, geometri hingga Pappus dan akan dibahas mengenai banyaknya titik dan garis pada geometri hingga.

1. Geometri Tiga Titik.

Pengertian pangkal dari geometri tiga titik adalah " Titik, garis dan relasi insidensi". Aksioma dari geometri tiga titik adalah sebagai berikut:

Aksioma 2.8.

Ada tepat tiga titik yang berlainan.

Aksioma 2.9

Setiap dua titik yang berlainan terletak pada tepat satu garis.

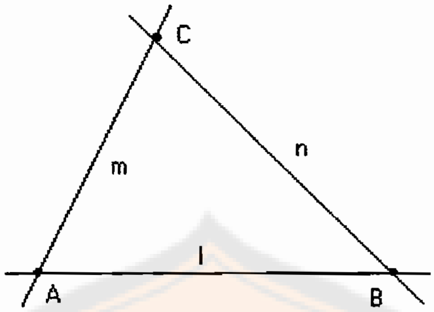
Aksioma 2.10.

Tidak semua titik terletak pada garis yang sama.

Aksioma 2.11.

Setiap dua garis berlainan insiden dengan paling sedikit satu titik.

Aksioma terakhir ini, menjelaskan bahwa kedua garis berpotongan pada suatu titik yang disebut titik persekutuan. Jika kita ingin membuat model yang memenuhi aksioma 2.8 sampai aksioma 2.11, maka hal tersebut diperlihatkan gambar 2.12.



Gambar 2 - 12

Dengan menyebut ketiga titiknya A,B dan C serta garisnya l, m dan n , maka gambar 2.12 merupakan model dari geometri tiga titik. Kita akan memeriksa apakah kedelapan syarat dari geometri hingga dipenuhi.

1. Mempunyai titik yang berhingga banyaknya yaitu tiga titik.
2. Mempunyai garis yang berhingga banyaknya yaitu tiga garis.
3. Setiap garis melalui dua titik, misalnya garis l melalui dua titik A dan B, demikian juga garis m dan n masing masing melalui dua titik.
4. Setiap titik terletak pada dua garis, misalnya titik A terletak pada garis l dan m.
5. Setiap pasang titik yang berlainan terdapat pada satu garis, misalnya A dan B terletak pada l, demikian juga A dan C terletak pada m , B dan C pada n.
6. Setiap pasang garis yang berlainan bersekutu pada satu titik, misalnya l dan m melalui A.
7. Tidak semua titik terletak pada suatu garis yang sama. Artinya ketiga titik tidak terletak pada satu garis, misalnya A pada l dan m tetapi tidak pada n.

8. Pada geometri tiga titik terdapat lebih dari satu garis yaitu ada l, m dan n.

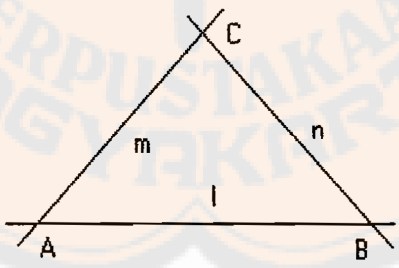
Kedelapan syarat telah dipenuhi sehingga geometri tiga titik merupakan suatu geometri hingga. Teorema berikut akan diberikan sehubungan dengan geometri hingga tiga titik.

Teorema 2.5.

Setiap garis yang berlainan selalu tepat melalui satu titik yang sama.

Bukti :

Jika diberikan tiga titik yang berlainan A,B dan C maka berdasarkan aksioma 2.9, terdapat tiga garis berlainan kita sebut garis itu l, m dan n. Dapat dikatakan bahwa A terletak pada dua garis yang berlainan. Jadi terbukti bahwa setiap dua garis yang berlainan selalu tepat melalui satu titik yang sama. Untuk lebih jelasnya diperhatikan gambar 2.13.



Gambar 2 - 13

Teorema 2.6.

Geometri tiga titik mempunyai tepat tiga garis.

Bukti.

Dari aksioma 2.9, setiap pasang titik dilalui tepat satu garis, dan geometri tiga titik mempunyai tiga pasang titik yang berlainan sehingga geometri ini mempunyai tepat tiga garis yang berlainan.

Untuk membuktikan teorema 2.6 kita dapat menggunakan prinsip kombinasi yaitu $C_3^2 = \frac{3\,!}{(3-2)!.2\,!} = \frac{3\,!}{2\,!} = 3$

Bilangan tiga menyatakan banyak garis yang kita cari dari geometri tiga titik. Selanjutnya akan diberikan geometri empat titik dan empat garis.

1. Geometri Empat Garis dan Empat Titik.

Pengertian pangkal dari geometri ini adalah sama dengan geometri tiga titik yaitu "Titik, garis dan relasi insidensi". Yang menjadi aksioma dari geometri empat garis adalah:

Aksioma 2.12.

Terdapat tepat empat garis.

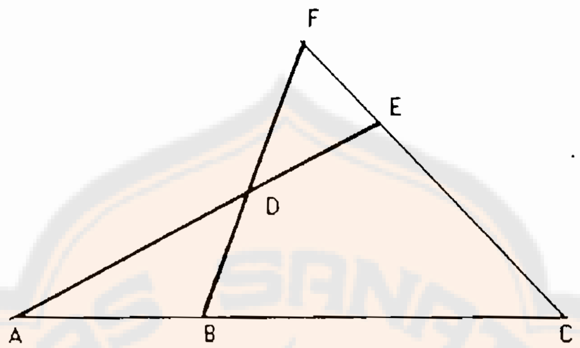
Aksioma 2.13.

Sebarang dua garis yang berlainan mempunyai tepat satu titik persekutuan.

Aksioma 2.14.

Setiap titik terletak pada dua garis.

Aksioma yang pertama dari geometri ini merupakan aksioma eksistensi karena geometri empat garis ini dijamin mempunyai anggota (tidak kosong). Sedangkan aksioma kedua dan ketiga adalah aksioma insidensi yang menyatakan titik terletak pada garis dan garis melalui titik. Gambar 2.14 merupakan model dari geometri empat garis.



Gambar 2 - 14

Setelah aksioma dari geometri empat garis diketahui, berikut akan diberikan teorema – teoremanya.

Teorema 2.7.

Geometri empat garis mempunyai tepat enam titik.

Bukti :

Dengan menggunakan kombinasi C_4^2 dapat ditentukan banyak titik yang dicari yaitu: $C_4^2 = \dfrac{4\,!}{(4-2)\,!} = 3\,! = 6$. Sehingga terbukti bahwa geometri empat titik mempunyai tepat enam titik.

Teorema 2.8

Setiap garis dari geometri empat garis melalui tepat tiga titik.

Bukti :

Andaikan diberikan sebarang garis l maka menurut aksioma 2.14 dan aksioma 2.12 garis l berpotongan dengan tiga garis lainnya sehingga pada garis l terdapat tiga titik yang merupakan titik persekutuan garis l dan tiga garis lainnya. Jadi terbukti bahwa setiap garis dari geometri empat garis melalui tepat tiga titik.

Sebelum kita membicarakan geometri empat titik, terlebih dahulu akan diberikan prinsip dualitas yang terdapat pada geometri proyektif. Prinsip dualitas menyatakan bahwa setiap definisi tetap berarti dan setiap teorema atau dalil tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik terletak pada suatu garis dengan dua garis melalui satu titik, dua titik yang dihubungkan oleh satu garis dengan dua garis yang berpotongan pada satu titik (n titik yang kolinear dengan m garis yang konkuren) sebagai contohnya adalah sebagai berikut:

- Dua titik yang berlainan dilalui tepat satu garis.
- Dua garis yang berlainan melalui tepat satu titik.

Dua pernyataan diatas saling dual karena kata titik dan garis saling dipertukarkan. Dan untuk menyatakan kebenaran dari prinsip dualitas ini cukup ditunjukkan bahwa aksioma – aksioma menyatakan dualnya sendiri. Sehingga jika terdapat suatu dalil atau teorema beserta buktinya maka dapat ditentukan dual dari teorema dan buktinya tersebut. Karena geometri empat garis merupakan dual dari geometri empat titik maka aksioma dan teorema serta buktinya dapat ditentukan, adapun dual aksioma dari geometri empat garis adalah

Aksioma 2.15.

Terdapat tepat empat titik.

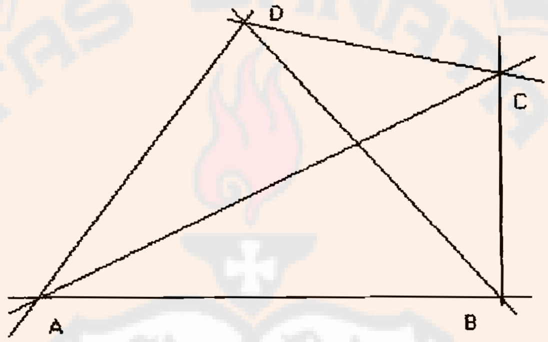
Aksioma 2.16.

Sebarang dua titik berlainan dilalui oleh tepat satu garis.

Aksioma 2.17.

Setiap garis melalui tepat dua titik.

Dari aksioma – aksioma tersebut dapatlah dibuat model dari geometri empat titik sebagai berikut:



Gambar 2-15

Gambar 2.15 merupakan salah satu representasi yang mungkin dari geometri empat titik. Pada geometri ini garis hanya bertemu pada titik – titik yang diindikasikan dan bukan sekedar pada garis yang saling berpotongan. Karena dalam prinsip dualitas dikatakan bahwa setiap teorema atau dalil tetap berarti dan benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, maka teorema berikut diberikan tanpa bukti.

Teorema 2.9.

Geometri empat titik mempunyai tepat enam garis.

Teorema 2.10.

Setiap titik dari geometri empat titik dilalui tepat tiga garis.

Selanjutnya akan diberikan geometri sembilan titik atau geometri hingga Pappus.

3. Geometri Hingga Pappus.

Geometri hingga Pappus sering disebut sebagai geometri sembilan titik, karena pada dasarnya geometri sembilan titik merupakan suatu geometri hingga yang istimewa, karena geometri ini merupakan geometri proyektif yang diambil sembilan titik saja. Pada perkembangan selanjutnya geometri sembilan titik lebih dikenal dengan geometri hingga Pappus.

Sebelum diberikan aksioma pada geometri hingga Pappus akan disampaikan dahulu definisi parallel dalam geometri hingga Pappus.

Definisi 2.10.

Dua garis saling parallel jika kedua garis tersebut tidak berpotongan atau bertemu di satu titik.

Dari definisi jelas bahwa dua garis disebut parallel jika dan hanya jika kedua garis tidak bersekutu satu titik.

Aksioma 2.18.

Terdapat paling sedikit satu garis.

Aksioma 2.19.

Setiap garis mempunyai tepat tiga titik.

Aksioma 2.20.

Tidak semua titik terletak pada garis yang sama.

Aksioma 2.21.

Jika suatu titik tidak pada garis yang diketahui maka terdapat tepat satu garis yang melalui titik itu dan parallel dengan garis yang diketahui.

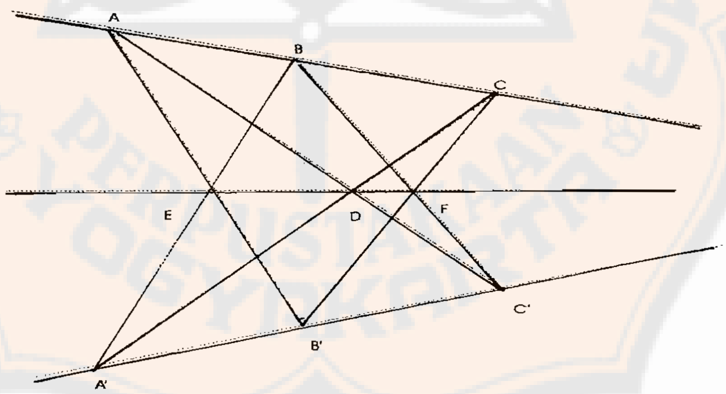
Aksioma 2.22.

Jika P adalah titik tidak pada suatu garis maka terdapat tepat satu titik P′ yang terletak pada garis itu, sedemikian hingga tidak ada garis yang menghubungkan titik P dengan P′.

Aksioma 2.23.

Jika P dan Q dua titik yang berlainan maka terdapat tepat satu garis yang memuat keduanya.

Aksioma 2.23 merupakan aksioma perkecualian dari aksioma 2.22. karena titik P, P′ adalah titik – titik yang berlainan tetapi tidak ada garis yang menghubungkan keduanya. Sedangkan P,Q adalah dua titik yang berlainan tetapi dapat dihubungkan oleh satu garis. Hal ini dapat diperjelas dengan pembuktian teorema 2.11. namun sebelumnya akan diberikan model dari geometri hingga Pappus.



Gambar 2-16

Dari model geometri hingga Pappus akan kita selidiki apakah ke-enam aksioma dipenuhi :

- Terdapat paling sedikit satu garis yaitu $\overleftrightarrow{AB}$.

- Setiap garis mempunyai tepat tiga titik, yaitu pada $\overleftrightarrow{AB}$ terletak titik A,B dan C.
- Tidak semua titik terletak pada garis yang sama, yaitu titik A′ tidak pada $\overleftrightarrow{AB}$ tetapi pada $\overleftrightarrow{B'C'}$.
- Titik A′ tidak pada $\overleftrightarrow{AB}$ sehingga terdapat garis $\overleftrightarrow{B'C'}$ .yang memuat A′ dan parallel $\overleftrightarrow{AB}$.
- Titik A′ tidak pada $\overleftrightarrow{AB}$ sehingga tidak terdapat garis yang menghubungkan A dengan A′.
- Terdapat titik A dan C yang berlainan, sehingga terdapat garis yang menghubungkan A dengan C.

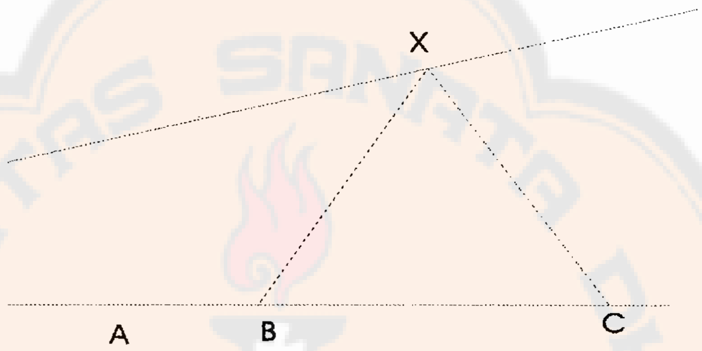
Semua aksioma telah dipenuhi oleh model dari geometri hingga Pappus yang diberikan pada gambar 2.16. Berikut adalah teorema dari geometri hingga Pappus:

Teorema 2.11.

Setiap titik pada geometri hingga Pappus dilalui tepat tiga garis.

Bukti :

Jika diberikan sebarang titik X pada suatu garis maka berdasarkan aksioma 2.20 terdapat suatu garis lain yang memuat X. menurut aksioma 2.19 garis yang tidak memuat X memuat tiga titik lain misalnya A, B dan C. Dari aksioma 2.22, X terletak pada garis penghubung dua titik yang diketahui misalkan $\overleftrightarrow{XB}$ dan $\overleftrightarrow{XC}$, dan dari aksioma 2.21 terdapat tepat satu garis yang memuat X yang parallel dengan $\overleftrightarrow{BC}$, sehingga terdapat paling sedikit tiga garis yang melalui X tetapi hal ini bertentangan dengan aksioma 2.22. Dengan demikian tidak ada garis lain yang memuat X yang tidak melalui titik B dan C . Jadi terbukti bahwa setiap titik pada geometri hingga Pappus dilalui tepat tiga garis. Untuk lebih jelasnya diperhatikan gambar 2.17.



Gambar 2-17

Setelah teorema tersebut, berikut akan dibahas mengenai banyaknya titik dan garis pada geometri hingga yang lain.

3. Banyaknya Titik dan Garis Pada Geometri Hingga yang lain.

Geometri hingga merupakan suatu geometri yang khusus karena kita dapat menentukan banyak titik dan garisnya. Untuk dapat mengetahui banyak titik dan garis dari geometri hingga digunakanlah suatu rumus yang dinyatakan sebagai berikut:

$$GP(n,q) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

dengan q menyatakan bilangan prima berpangkat bulat positif dan n merupakan dimensi ruang dari geometri proyektif yaitu 2, sedangkan GP menyatakan geometri proyektif. Dengan menggunakan rumus tersebut, kita akan mencoba mensubtitusikan beberapa nilai q.

Jika kita ambil q = 2 maka,

$$GP(n,q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \Rightarrow GP(2,2) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} = \frac{2^3-1}{1} = 8-1 = 7$$

Jika kita ambil q = 3 maka,

$$GP(n,q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \Rightarrow GP(2,3) = \frac{3^{2+1}-1}{3-1} = \frac{3^3-1}{2} = \frac{27-1}{2} = 13$$

dan jika kita ambil q = 5 maka,

$$GP(n,q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \Rightarrow GP(2,5) = \frac{5^{2+1}-1}{5-1} = \frac{5^3-1}{4} = \frac{124}{4} = 32-1 = 31$$

Dengan demikian GP (2,2), GP (2,3) dan GP (2,5) merupakan geometri proyektif hingga dengan banyak titiknya adalah 7, 13 dan 31. Jadi untuk q = 2, 3 dan 5, kita dapat menentukan banyak titiknya adalah 7, 13 dan 31. karena GP (2,q) mempunyai q + 1 titik pada setiap garis maka untuk GP (2,2), setiap garis melalui 3 titik dan untuk GP (2,3), setiap garis melalui 4 titik, dan GP (2,5), setiap garis melalui 6 titik. Di depan telah dijelaskan mengenai prinsip dualitas yang berlaku di geometri proyektif. Prinsip dualitas menyatakan dalam setiap bidang proyektif, setiap definisi, aksioma dan teorema atau dalil tetap benar apabila kita menukar kata titik dengan garis, dua titik yang terletak pada satu garis dengan dua garis yang melalui satu titik. Prinsip dualitas juga berlaku disini, karena setiap garis dari geometri proyektif hingga mempunyai q + 1 titik, maka berdasarkan prinsip dualitas setiap titik dilalui q + 1 garis, tetapi hal tersebut tidak berlaku pada geometri hingga tiga titik, geometri hingga empat titik dan geometri hingga empat garis yang telah kita bahas. Rumus ini hanya berlaku untuk geometri hingga yang "self dual". Sebagai contoh geometri yang "self dual" adalah geometri hingga Pappus / sembilan titik. Geometri hingga Pappus mempunyai dualnya, yaitu geometri hingga sembilan garis. Dapat kita gunakan rumus GP (n,q) untuk menunjukkanya.

Dengan n = 2 dan q = 2^3 maka

$$GP(n,q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \Rightarrow GP(2,2^3) = \frac{2^{3(2+1)}-1}{2^3-1} = \frac{2^9-1}{8-1} = \frac{63}{7} = 9.$$

Jadi ada bermacam – macam geometri hingga yang lain dari geometri hingga yang telah kita bahas.

BAB III

PROBLEMA SYLVESTER TENTANG TITIK – TITIK KOLINEAR

Pada bab II, kita telah membicarakan geometri "ordered" (terurut) dan geometri hingga. Pada bab ini akan kita bahas Teorema Sylvester tentang titik kolinear dan nanti akan kita buktikan apakah Teorema Sylvester berlaku pada geometri proyektif hingga. Namun sebelum membicarakan teorema tersebut akan dijelaskan dahulu Problema Sylvester sebelum akhirnya diperoleh teoremanya.

Pada tahun 1893 seorang matematikawan yang bernama James Joseph Sylvester menyampaikan suatu pertanyaan sebagai berikut "Buktikan bahwa tidak mungkin menyusun titik-titik nyata yang berhingga banyaknya, sedemikian sehingga ada garis lurus yang memuat dua diantaranya dan memuat yang ketiga kecuali jika semua titik terletak pada garis lurus yang sama". Sylvester sendiri maupun matematikawan yang lain tidak ada yang dapat memikirkan bukti yang memuaskan. Pertanyaan dan juga pembuktiannya tidak terpecahkan dan akhirnya terlupakan hingga tahun 1933, sampai dengan ketika Karamata dan Erdos mengungkap kembali Problema Sylvester yang sudah terlupakan selama 40 tahun tersebut dengan menggunakan pernyataan lain. Pernyataan dari Karamata dan Erdos adalah "jika n titik pada bidang nyata tidak pada satu garis lurus, maka terdapat suatu garis lurus yang memuat tepat dua dari titik-titik tersebut".

Dalam penulisan ini kita menggunakan geometri terurut dan dalam geometri ini urutan dari titik-titik memegang peranan penting, sehingga dengan perkembangan dari geometri sendiri, maka pernyataan Karamata dan Erdos tersebut dibawa menjadi teorema, yaitu Teorema Sylvester tentang titik kolinear yang diberikan sebagai berikut:

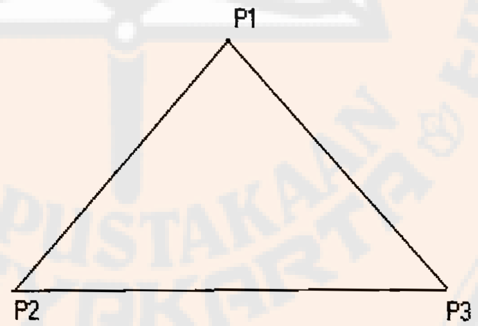
A. Teorema Sylvester tentang Titik Kolinear.

Teorema 3.1 :

Jika n titik pada suatu bidang nyata tidak semuanya kolinear maka terdapat paling sedikit satu garis yang memuat tepat dua diantaranya.

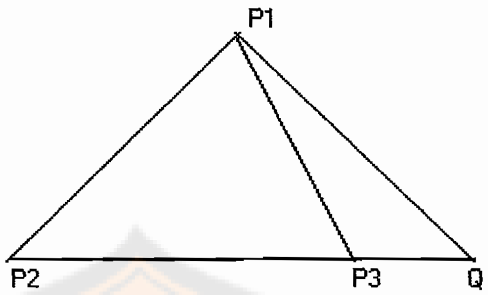
Bukti :

Jika terdapat n titik yaitu $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dengan tiga titik pertama tidak kolinear, maka garis penghubung P_1 ke semua titik ada $n - 1$ termasuk yang menghubungkan P_2 dan P_3. Sehingga terdapat segitiga $P_1P_2P_3$ seperti diperlihatkan gambar 3–1.



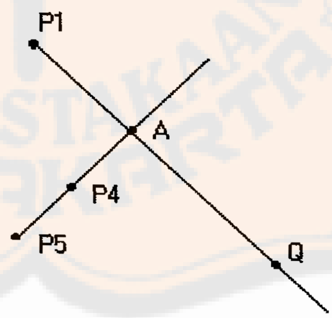
Gambar 3 - 1

Kemudian misalkan diberikan sebarang titik Q sedemikian sehingga P_1Q memuat P_1 tetapi tidak memuat P_i yang lain seperti diperlihatkan oleh gambar 3–2.



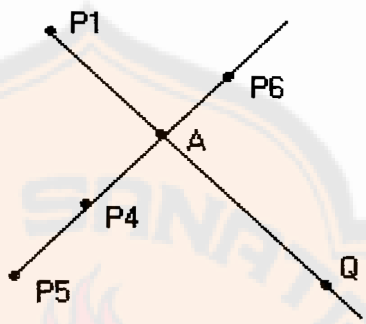
Gambar 3 - 2

Banyak garis yang memotong P_1Q adalah C_2^{n-1} + 1 termasuk P_1 dan Q. Andaikan pada garis P_1Q terdapat titik A dengan A adalah titik terdekat dengan P_1, maka P_1A sebagai segmen kosong, sehingga tidak ada P_iP_j yang memotong segmen kosong P_1A. Pastilah A dilalui paling sedikit satu garis, katakan $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ dan jika garis yang melalui A hanya $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ saja maka pembicaraan kita selesai. (diperhatikan gambar 3–3).



Gambar 3 - 3

Andaikan bukan hanya P_4P_5 saja maka kita mempunyai garis yang melalui A dan memuat paling sedikit tiga titik. Jika titik-titik tersebut adalah P_4, P_5 dan P_6, maka segmen AP_5 memuat P_4 tetapi tidak memuat P_6. Hal ini diperlihatkan gambar 3–4.



Gambar 3 - 4

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ hanya memuat dua titik yaitu P_1 dan P_5. Untuk menunjukkannya kita memerlukan Aksioma 2.7 dan Teorema 2.4 berikut:

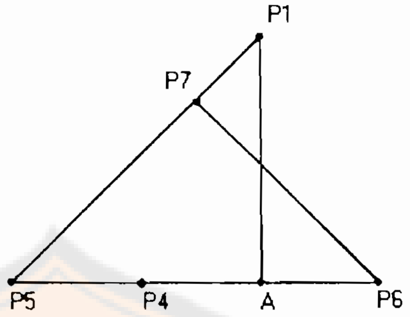
Aksioma 2.7 :

Jika ABC suatu segitiga dan [BCD] dan [CEA] maka pada garis DE ada satu titik F yang memenuhi[AFB].

Teorema 2.4 :

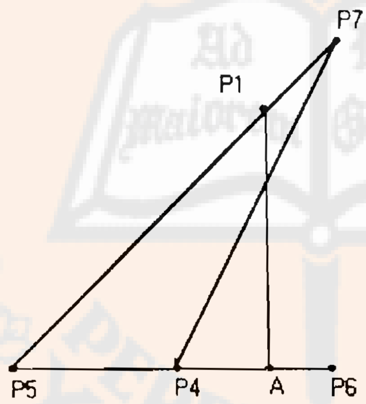
Jika ABC suatu segitiga dan $[AFB]$ dan $[BCD]$ maka pada garis DF ada satu titik E yang memenuhi $[CEA]$.

Jika $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ memuat P_7, maka menurut aksioma 2.7 kita dapat menyatakan $\overline{P_1A}$ akan memotong P_6P_7 jika $[P_1P_7P_5]$. Hal ini dapat ditunjukkan oleh gambar 3-5.

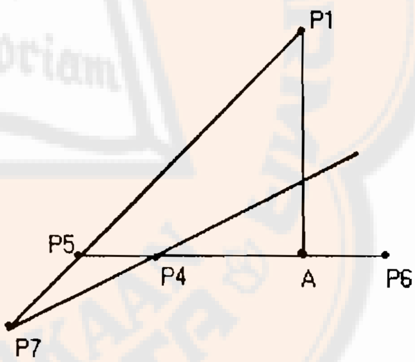


Gambar 3 - 5

Dan berdasarkan teorema 2.4, terdapat $\overleftrightarrow{P_4P_7}$ yang dipotong $\overline{P_1A}$, jika $[P_5P_1P_7]$ yang diperlihatkan oleh gambar 3-6, atau terdapat $\overleftrightarrow{P_7P_4}$ dipotong $\overline{P_1A}$ jika $[P_1P_5P_7]$ yang diperlihatkan oleh gambar 3-7.



Gambar 3 - 6



Gambar 3 - 7

Kita dapat menyatakan bahwa mungkin $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ atau $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ memuat tepat dua titik.

Setelah selesai dengan pembuktian dari Teorema Sylvester tentang titik kolinear pada geometri terurut ("ordered"), lalu apakah Teorema Sylvester berlaku pada geometri proyektif hingga.

B. Teorema Sylvester pada Geometri Proyektif Hingga.

Dalam teorema Sylvester dikatakan "jika terdapat n titik pada suatu bidang nyata tidak semuanya kolinear maka terdapat paling sedikit satu garis yang memuat tepat dua diantaranya". Teorema ini secara tidak langsung menjelaskan bahwa terdapat suatu garis yang hanya memuat dua titik dari n titik yang diberikan. Dalam geometri proyektif hingga terdapat suatu prinsip GP(n,q) dengan n sebagai dimensi ruang dan q sebagai bilangan prima berpangkat bulat positip. Karena dimensi bidang proyektif adalah 2 maka GP(2,q). Banyaknya titik pada geometri proyektif hingga ada q + 1 artinya setiap garis di geometri proyektif hingga memuat q + 1 titik. Dengan menggunakan prinsip dualitas kita dapat mengatakan banyaknya garis yang melalui suatu titik ada q + 1. Berdasarkan alasan ini, teorema Sylvester tidak berlaku pada geometri proyektif hingga. Jika benar pada geometri proyektif hingga setiap garis memuat q + 1 titik, maka teorema Sylvester harus mengatakan bahwa setiap garis memuat n + 1 titik.

Setelah kita mengetahui teorema Sylvester tidak berlaku pada geometri proyektif hingga, akan kita periksa apakah teorema Sylvester berlaku pada geometri proyektif seperti telah kita jelaskan sebelumnya. Teorema Sylvester mengatakan bahwa terdapat suatu garis yang hanya memuat dua titik. Dalam geometri proyektif terdapat suatu aksioma yang menyatakan bahwa "Terdapat paling sedikit tiga titik berlainan pada sebarang garis". Aksioma ini menjelaskan bahwa untuk melukis suatu garis sebenarnya cukup diberikan dua titik tetapi pada garis penghubungnya pastilah terdapat titik yang ketiga. Hal ini bertentangan dengan Teorema Sylvester dan aksioma tersebut membuat Teorema Sylvester tidak berlaku pada geometri proyektif biasa. Teorema Sylvester tentang titik kolinear tidak berlaku pada geometri proyektif hingga maupun geometri proyektif biasa.

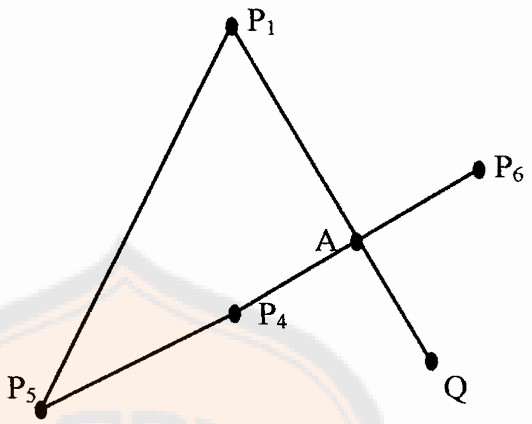
BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Pada pembahasan problema Sylvester tentang titik kolinear, digunakan geometri terurut karena dalam geometri ini urutan letak dari titik – titik sangat diperhatikan. Sylvester menyampaikan suatu pertanyaan yaitu " Buktikan bahwa tidak mungkin menyusun titik – titik nyata yang berhingga banyaknya sedemikian sehingga ada garis lurus yang memuat dua diantaranya dan memuat yang ketiga kecuali jika semua titik terletak pada garis lurus yang sama".

Teorema Sylvester yang menyatakan "Jika n titik pada suatu bidang nyata tidak semuanya kolinear maka terdapat paling sedikit satu garis lurus memuat tepat dua diantaranya". Pada pembuktian teorema Sylvester tentang titik kolinear kita gunakan aksioma 2.7 dan teorema 2.4 dan kita dapat menyatakan bahwa jika [$P_1P_7P_5$] maka terdapat $\overleftrightarrow{P_6P_7}$ yang memotong $\overline{P_1A}$, jika [$P_7P_1P_5$] kita mempunyai $\overleftrightarrow{P_4P_7}$ yang memotong $\overline{P_1A}$, atau jika [$P_1P_5P_7$] kita juga mempunyai $\overleftrightarrow{P_4P_7}$ yang memotong $\overline{P_1A}$. Kita dapat mengatakan bahwa $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ atau $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ hanya memuat dua titik saja, yaitu P_1 dan P_5 atau P_4 dan P_5 saja. Seperti terilustrasi sebagai gambar 4 – 1 berikut:



Gambar 4 – 1.

Geometri hingga mempunyai pengertian pangkal "titik, garis dan relasi insidensi". Prinsip dualitas berlaku dalam geometri ini, karena geometri ini adalah geometri proyektif yang istimewa. Prinsip dualitas menyatakan bahwa dalam setiap bidang proyektif, setiap aksioma dan teorema akan tetap benar dan berarti jika kita menukar kata titik dengan garis, dua titik terletak pada suatu garis dengan dua garis melalui satu titik, n titik yang kolinear dengan n garis yang konkuren.

Terdapat rumus $GP(n,q)$ dengan n sebagai dimensi dan q sebagai bilangan prima berpangkat bulat positif serta GP menyatakan geometri proyektif. $GP(n,q)$ menyatakan banyaknya titik dan garis dalam geometri proyektif. Banyaknya titik yang dilalui suatu garis dinyatakan dalam q + 1 atau banyaknya garis pada suatu titik adalah q + 1. Dalam teorema Sylvester dikatakan bahwa dari n titik yang diberikan terdapat suatu garis yang hanya memuat dua titik, kedua hal itu bertentangan yang membuat teorema Sylvester tidak berlaku dalam geometri proyektif hingga.

Aksioma yang menyatakan "Terdapat paling sedikit tiga titik yang kolinear pada suatu garis" membuat teorema Sylvester tidak berlaku dalam geometri proyektif biasa. Teorema Sylvester berlaku dalam geometri terurut tetapi tidak berlaku dalam geometri proyektif hingga dan geometri proyektif biasa.

B. IMPLIKASI DAN SARAN

Setelah mempelajari problema Sylvester tentang titik kolinear ini, penulis dapat mengenal dan mendalami masalah – masalah dalam geometri. Problema Sylvester tentang titik kolinear merupakan salah satu masalah yang di kemukakan James Joseph Sylvester, bagi yang tertarik dan berminat untuk mengenal lebih jauh James Joseph Sylvester mungkin karyanya tentang hukum inertia pada aljabar dapat diangkat menjadi topik skripsi yang menarik.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, Jr, (1967), *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Projektive Geometry*, McGraw-Hill, Inc : USA.

Borowski,E.S dkk, (1991), *The Harper Collins Dictionary of Mathematics*, New York : Harperperennial.

Coxeter, HSM, F.R.S, (1967), *Introduction to geometry*, New York: John Wiley and Sons Inc.

Hadiwijoyo, Moeharti ,(1986), *Sistem-sistem Geometri* , Karunika Jakarta : Univesitas Terbuka.

James, Glein and James, C.R, (1959), *Mathematics Dictionary*, New York : D.van nostrand Company Inc.

Smith, David, E, (1958), *History of Mathematics*, New York : Dover.

Smart, James, R, (1998), *Modern Geometry*, Mexico : International Thomson Publising Inc.

Wallace, Edward, C. and West, Stephen,F, (1992), *Roads to Geometry*, New York : Prentice Hall Inc.

Lampiran

Postulat - postulat SMSG Untuk Geometri Euclides

Unsur – unsur yang tidak didefinisikan

1. Titik
2. Garis
3. Bidang

Postulat – postulat

1. Diketahui sebarang dua titik berlainan, maka ada tepat satu garis yang memuat titik – titik tersebut.
2. Postulat Jarak

   Untuk setiap pasang titik berlainan berkorespondensi satu bilangan positif tunggal. Bilangan ini disebut jarak antara dua titik tersebut.
3. Postulat Penggaris

   Titik – titik suatu garis dapat diletakkan dalam korespondensi dengan bilangan – bilangan nyata sedemikian hingga,

   1) Untuk setiap titik pada garis berkrespondensi tepat satu bilangan nyata.
   2) Untuk setiap bilangan nyata berkorespondensi tepat satu titik pada garis.
   3) Jarak antara dua titik berlainan adalah harga multak dari selisih bilangan – bilangan nyata yang berkorespondensi.
4. Postulat Penempatan penggaris

Diketahui dua titik P dan Q pada suatu garis. Sistem koordinat dapat dipilih sedemikian hingga koordinat titik P sama dengan nol dan koordinat Q positif.

5. a) Setiap bidang memuat paling sedikit tiga titik non kolinear

   b) Ruang memuat paling sedikit empat titik yang tidak sebidang.

6. Jika dua titik terletak pada suatu bidang, maka garis yang memuat titik – titik itu terletak pada bidang yang sama.
7. Sebarang tiga titik terletak pada paling sedikit satu bidang, dan sebarang tiga titik yang non kolinear terletak tepat pada satu bidang.
8. Jika dua bidang berpotongan, maka perpotongannya adalah suatu garis.
9. Postulat Pemisahan Bidang

   Diketahui suatu garis dan suatu bidang yang memuatnya, titik – titik pada bidang yang tidak terletak pada garis tersebut membentuk dua himpunan sedemikian hingga:

   1) Masing – masing himpunan adalah konveks,
   2) Jika P dalam himpunan yang satu dan Q dalam himpunan yang lain, maka segmen PQ memotong garis tersebut.

10. Postulat Pemisahan Ruang

    Titik – titik dalam ruang yang tidak terletak pada suatu bidang yang diketahui membentuk dua himpunan sedemikian sehingga :

    1) Masing – masing himpunan adalah konveks,
    2) Jika P dalam himpunan yang satu dan Q dalam himpunan yang lain, maka segmen PQ memotong bidang.

11. Postulat pengukuran sudut

    Pada setiap sudut berkorespondensi suatu bilangan nyata antara 0 dan 180 (antara 0^0 dan 180^0).

12. Postulat Konstruksi Sudut

    Misalkan AB suatu sinar pada sisi suatu setengah bidang H. untuk suatu bilangan r antara 0 dan 180 ada tepat satu sinar AP dengan P dalam H sedemikian hingga, m < PAB = r.

13. Postulat Penjumlahan Sudut

    Jika D suatu titik dalam interior $\angle$ BAC, maka m $\angle$ BAC = m $\angle$ BAD + m $\angle$ DAC.

14. Postulat Suplemen

    Jika dua sudut membentuk suatu pasangan linear, maka mereka saling bersuplemen ("supplementay")

15. Postulat S – Sd – S (Sisi Sudut Sisi)

    Diketahui korespondensi satu – satu antara dua segitiga (atau antara segitiga dengan dirinya sendiri). Jika dua sisi dan sudut yang diapitnya dari segitiga yang pertama kongruen dengan bagian – bagian yang berkorespondensi dari segitiga kedua, maka korespondensi itu suatu kongruensi.

16. Postulat Kesejajaran

    Melalui suatu titik di luar suatu garis ada paling banyak satu garis yang sejajar garis yang diketahui.

17. Untuk Setiap daerah polygonal(segi banyak) berkorespondensi suatu bilangan nyata positif yang disebut luasnya.
18. Jika dua segitiga kongruen, maka daerah dua segitiga sama luasnnya.
19. Misalkan bahwa daerah R adalah gabungan dari daerah R_1 dan daerah R_2, jika R_1 dan R_2 berpotongan pada paling banyak segmen dan titik yang berhingga, maka luas daerah R sama dengan jumlah luas daerah – daerah R_1dan R_2.
20. Luas daerah persegi panjang sama dengan hasil kali panjang dan lebar.
21. Volume suatu Parallelepidum tegak sama dengan hasil kali panjang tinggi dan luas alasnya.
22. Prinsip Cavalieri

    Diketahui dua benda dan satu bidang. Jika untuk setiap bidang yang memotong kedua benda sejajar dengan bidang yang diketahui, kedua irisan itu menentukan daerah – daerah yang mempunyai luas yang sama, maka kedua benda itu mempunyai volume yang sama.

Catatan:

SMSG adalah singkatan dari School Mathematics Study Group

Postulat – postulat ini terjemahan bebas dari

Wallace, Edward C; West, Stephen, F. Roads To Geometry. Appendix D (376 – 378). New Jersey : Prentice Hall, Inc, 1992.