MATRIKS POLINOMIAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Estaqio Amaral
Nim: 981414047

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

SKRIPSI

MATRIKS POLINOMIAL

Oleh:

Estaqio Amaral

Nim: 981414047

Telah di setujui oleh:

Pembimbing

M. Andy Rudhitho, S. Pd. M. Si

Tanggal 6 Januari 2004

SKRIPSI

MATRIKS POLINOMIAL

Dipersiapkan dan di tulis oleh:

Estagio Amaral

Nim: 981414047

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 26 Januari 2004 dan dinyatakan memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M. Si	....
Sekretaris:	Drs. Th. Sugiarto, M. T	....
Anggota	: 1. M. Andy Rudhitho, S. Pd. M. Si	....
	2. Dr. Y. Marpaung	....
	3. Drs. A. Mardjono	....

Yogyakarta, 26 Januari 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah

Yogyakarta, 26 Januari 2004

Penulis

Estaqio Amaral

ABSTRAK

Setiap matriks polinomial dapat dinyatakan sebagai suatu polinomial dengan koefisien matriks atas $\Re$. Untuk setiap polinomial matriks dapat dibagi oleh suatu polinomial matriks yang koefisien utamanya tak-singular. Jika polinomial matriks bujur sangkar dibagi oleh polinomial matriks berderajat satu dengan sisa matriks atas $\Re$, maka sisanya itu merupakan nilai fungsional dari polinomial matriks tersebut. Polinomial matriks skalar $A(x)$ habis dibagi oleh $(xI-B)$ bila $a(B) = O$. Setiap matriks bujur sangkar A memenuhi persamaan karakteristiknya. Untuk sebarang matriks polinomial dapat direduksi ke dalam bentuk Normal Smith melalui serangkaian transformasi elementer. Sebarang sistem persamaan diferensial linear biasa dapat diselesaikan melalui serangkaian teransformasi elementer terhadap matriks koefisiennya (matriks yang elemen-elelemennya berupa polinomial operator diferensial) sehingga diperoleh sistem yang ekivalen tetapi lebih mudah diselesikannnya.

ABSTRACT

Each matrix polynomials can be written as a polynomial with coefficient matrices into $\mathfrak{R}$. Each polynomial matrix can be divided with a polynomial matrix which is leading coefficient non-singular. If the polynomial matrix n-square is divided with one degree polynomial matrix, with the remainder matrices into $\mathfrak{R}$, so the remainder is functional values of that polynomial matrix itself. The polynomial matrix scalar $A(x)$ is divisible by with $(xI\text{-}B)$, if the $a(B) = O$. Every square matrices A satisfies its characteristic equation. Each matrix polynomials can be reduced into Normal Smith form trough a unite of elementary transformations.

The similar system of ordinary linear differential equations can be solved by a unite of elementary transformation through the coefficient matrices (matrices which polynomial operator differential elements) so that obtained the equivalent system, so that will be easier for the solution.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Allah, atas segala cinta kasih, berkah dan karunya-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul " Matriks Polinomial" ini. Selama menyusun Skripsi ini, banyak sekali kesulitan dan hambatan yang penulis alami. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak penulis dapat mengatasi semuanya dengan baik.

Oleh karena itu, dalam kesempatan ini dengan tulus penulis ingin mengucapkan banyak terimah kasih atas segala bantuan, perhatian, dorongan dan dukungan kepada:

1. Bapak M. Andy Rudhitho, S. Pd. M. Si selaku dosen pembimbing yang dengan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Y. Marpaung selaku dosen Penguji.
3. Bapak Drs. A. Mardjono selaku dosen Penguji
4. Bapak Drs. Thomas Sugiarto, M. T. Selaku dosen pembimbing akademik dan kepala Program Studi Pendidikan Matematika yang dengan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama kuliah di Universitas Sanata Dharma.

5. Bapak dan Ibu dosen yang membimbing dan mendidik penulis selama kuliah.
6. Seluruh staf sekretariat JP. MIPA. Universitas Sanata Dharma.
7. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma.
8. Romo. Agen Marwata, SJ. Romo Eduardo Ratu Dopo, SJ. Romo. Christian Melchers, SJ. Mbak Tina atas segala bantuan baik materiil maupun moriil selama Penulis kuliah.
9. Teman-temanku tercinta, João Bosco, Xisto Soares, João Fuca, Emerenciana Marques, José de Oliveira, atas segala bantuan dan dukungannya.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Semoga segala bantuan, dorongan, perhatian serta dukungan yang telah penulis terima akan mendapatkan imbalan yang melimpah dari Tuhan Yang Maha Esa.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritikan yang membangun dari para pembaca.

Yogyakarta Januari 2004

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Telah dipelajari dalam aljabar linear elementer, bahwa untuk mempermudah menyelesaikan sebuah sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel, sistem itu dituliskan dalam persamaan matriks dengan elemen-elemennya berupa koefisien-koefisien bilangan real dari variabel dalam sistem tersebut. Penyelesaian sistem persamaan linear itu dilakukan dengan pengoperasian matriks koefisien, serta menggunakan sifat-sifatnya.

Secara umum untuk mempermudah mencari penyelesaian suatu sistem persamaan adalah dengan menyatakannya ke dalam bentuk persamaan matriks. Matriks yang muncul ternyata tidak selalu dengan elemen-elemennya bilangan real. Misalnya dalam sistem persamaan diferensial linear biasa dengan koefisien konstanta ternyata matriks yang muncul adalah matriks dengan elemen-elemen berupa polinomial (matriks polinomial). Oleh karena itu dalam skripsi ini akan dibahas matriks polinomial dan sifat-sifatnya serta penerapannya dalam mencari penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial linear biasa.

B. Perumusan Masalah

Dari uraian di atas, masalah-masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pengertian dan sifat-sifat matriks polinomial.
2. Bagaiman konsep matriks polinomial dapat diterapkan dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan differensial linear biasa dengan koefisien konstanta real.

C. Tujuan Penulisan Skripsi

Skripsi ini bertujuan untuk:

1. Membahas pengertian dan sifat-sifat matriks polinomial.
2. Membahas penerapan matriks polinomial dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan differensial linear biasa.

D. Manfaat Penulisan

Skripsi ini diharapkan mempunyai manfaat untuk berbagai pihak terutama antara lain :

1. Bagi Universitas Sanata Dharma sebagai tambahan buku-buku referensi kepustakaan dan dapat digunakan sebagai bahan acuan bagi pihak-pihak yang memerlukannya.
2. Bagi penulis dapat menambah pengetahuan, pengalaman dan wawasan yang lebih luas berkenaan dengan matriks polinomial, memperdalam konsep dasar matriks dan hubungannya dengan polinomial, bagaimana

matriks polinomial dapat diterapkan dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan differensial linear biasa.

E. Metode Penulisan

Dalam menulis skripsi, penulis menggunakan metode study pustaka antara lain dengan membaca buku-buku dan literatur yang terkait.

F. Sistematika Penulisan

Materi pembahasan meliputi landasan teori antara lain:

Pada BAB I pembahasan meliputi pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penulisan dan sistimatika penulisan serta materi prasyarat.

Dalam BAB II pembahasan meliputi uraian singkat tentang definisi matriks, jenis-jenis matriks, operasi-operasi pada matriks, determinan matriks, adjoint matriks bujur sangkar, transformasi elementer matriks, definisi polinomial, operasi-operasi polinomial serta sifat–sifatnya.

Pada BAB III pembahasan matriks polinomial meliputi : pengertian matriks polinomial dan polinomial matriks, operasi-operasi polinomial matriks serta sifat-sifatnya, nilai fungsional polinomial matriks, polinomial matriks skalar, determinan dan karakteristik polinomial matriks, invers dari suatu matriks non-singgular sebagai polinomial dengan koefisien bilangan real serta transformasi elementer dan himpunan kanonik matriks polinomial.

Pada BAB IV pembahasan meliputi penerapan konsep matriks polinomial dalam menyelesaikan sistem persamaan differensial linear biasa homogen dan sistem persamaan diferensial linear biasa non-homogen.

Dalam BAB V pembahasan meliputi keismpulan dan saran.

G. Materi Prasyrat

Dalam skripsi ini diasumsikan pembaca telah mempelajari matriks atas $\Re$ dan polinomial atas $\Re$ serta persamaan diferensial linear biasa dengan koefisien konstanta. Bahan yang sudah diberikan dalam kuliah tidak akan dibahas secara mendetail, tetapi akan ditulis secara singkat dengan tujuan hanya untuk mengingatkan saja. Konsep dan sifat–sifat yang tidak berhubungan lansung dengan matriks polinomial tidak dibahas pada landasan teori.

Dalam pembahasan landasan teori yang di amabil hanya sub–sub pokok bahasan yang nantinya akan digunakan dalam pembahasan matriks polinomial sebagai konsep dasar bagi kemudahan dalam memahami matriks polinomial, terutama matriks dan polinomial serta operasi–operasinya.

BAB II

LANSAN TEORI

Dalam bab II ini akan dibahas matriks atas-$\Re$ dan polinomial atas -$\Re$ serta sifat-sifatnya yang akan digunakan dalam pembahasan bab selanjutnya.

A. Matriks atas -$\Re$

Pada subbab pertama akan dibahas matriks atas-$\Re$ (matriks dengan elemen-elemen bilangan real) yang meliputi definisi, operasi-operasi dan sifat-sifatnya, determinan matriks bujur sangkar serta ekivalensi dua buah matriks.

1. Pengertian Matriks

Definisi 2.1 (Matriks atas -$\Re$)

Matriks didefinisikan sebagai sederetan bilangan-bilangan real yang diatur menurut baris dan kolom yang diapit oleh sepasang kurung siku sehingga berbentuk persegi panjang, di mana panjang dan lebarnya ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

Matriks biasanya dinotasikan dengan huruf kapital tebal, misalkan **A**.

Secara umum suatu matriks **A** yang terdiri dari m baris dan n kolom ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } \mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$$

Bilangan-bilangan real a_{ij} pada matriks **A** disebut *elemen* matriks **A**. Karena $a_{ij} \in \Re$ ($\Re$: himpunan semua bilangan real), maka matriks **A** sering disebut matriks atas-$\Re$. Matriks **A** di atas disebut matriks berukuran $m\times n$. Bilangan a_{ij} menyatakan elemen matriks **A** untuk baris k-i dan kolom k-j. Dalam menuliskan indeks (subcript) ganda, indeks pertama menunjukkan baris dan indeks kedua menunjukkan kolom di mana elemen terletak. Misalnya a_{21}, menyatakan elemen matriks **A** yang terletak pada baris kedua dan kolom pertama.

Definisi 2.2 (Matriks bujur sangkar)

Suatu matriks atas -$\Re$ dikatakan matriks bujur sangkar bila banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Secara umum matriks bujur sangkar **A** ditulis sebagai:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ atau } \mathbf{A}_n = (a_{ij}).$$

Definisi 2.3 (Kesamaan dua matriks)

Dua matriks **A** $= (a_{ij})$ *dan* **B** $= (b_{ij})$ *dikatakan sama (ditulis* **A** $=$ **B***) bila keduanya berukuran sama dan setiap elemen yang seletak bernilai sama* ($a_{ij} = b_{ij}$ *untuk setiap i dan j).*

Definisi 2.4 (Matriks identitas)

Matriks bujur sangkar **A** $= (a_{ij})$ *disebut matriks identitas dan dinotasikan dengan* **I** *bila* $a_{ij} = 1$ *untuk setiap* $i = j$ *dan* $a_{ij} = 0$ *untuk setiap* $i \neq j$.

Definisi 2.5 (Matriks diagonal)

Matriks bujur sangkar **A** $= (a_{ij})$ *disebut matriks diagonal bila* $a_{ij} = k$ *untuk setiap* $i = j$ *dan* $a_{ij} = 0$ *untuk setiap* $i \neq j$, *di mana k sebarang bilangan real.*

Definisi 2.6 (Penjumlahan dua matriks)

Diberikan $\mathbf{A}_{m \times n} = (a_{ij})$ *dan* $\mathbf{B}_{m \times n} = (b_{ij})$ *dua matriks berukuran sama, maka jumlah matriks* **A** *dan* **B** *ditulis* **A** + **B** *didefinisikan sebagai matriks* $\mathbf{C}_{m \times n} = (c_{ij})$, *di mana elemen-elemenn matriks* **C** *diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak dari matriks* **A** *dan* **B**.

Dua buah matriks hanya dapat dijumlahkan bila keduanya memiliki banyaknya baris dan kolom yang sama.

Teorema 2.1 (Komutatif dan asosiatif terhadap penjumlahan matriks)

Operasi penjumlahan matriks memenuhi sifat komutatif dan asosiatif.

Bukti

Andaikan $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$, $\mathbf{B}_{m\times n} = (b_{ij})$ dan $\mathbf{C}_{m\times n} = (c_{ij})$ adalah tiga matriks berukuran sama, maka:

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$ dan

$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$

$= (a_{ij}) + [(b_{ij} + c_{ij})] = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$. ■

Definisi 2.7 (Hasil kali dua matriks)

Andaikan dua matriks $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$ *dan* $\mathbf{B}_{n\times p} = (b_{ij})$, *maka hasil kali matriks* **A** dan **B** (ditulis **AB**) *didefinisikan sebagai suatu matriks misalkan* $\mathbf{C}_{m\times p} = (c_{ij})$ *sedemikian sehingga* **AB = C**, *di mana elemen-elemen* **C** *dari baris ke-i dan kolom ke-j diperoleh dengan aturan*

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, *di mana* $i = 1, 2, \ldots, m$ *dan* $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Hasil kali dua matriks **A** dan **B** hanya dapat didefinisikan bila banyaknya kolom dari matriks **A** sama dengan banyaknya baris matriks **B**.

Teorema 2.2 (Asosiatif dan distributif terhadap perkalian)

Operasi perkalian bersifat asosiatif dan distributif.

Bukti

Sifat Asosiatif

Andaikan matriks $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$, $\mathbf{B}_{n\times p} = (b_{ij})$ dan $\mathbf{C}_{p\times q} = (c_{ij})$. Elemen pada baris ke-i dari **A** adalah $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ dan elemen pada kolom k-j dari **BC** adalah $\sum_{k=1}^{p} b_{1k}c_{kj}, \sum_{k=1}^{p} b_{2k}c_{kj}, \ldots, \sum_{k=1}^{p} b_{nk}c_{kj}$ sehingga pada letak baris ke-i dan kolom ke-j dari **A**(**BC**) adalah $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}$

$= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$. Jadi **A**(**BC**) = (**AB**)**C** ■

Sifat distrbutif

Andaikan matriks **A**, **B** dan **C** masing-masing $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$, $\mathbf{B}_{n\times p} = (b_{ij})$ dan $\mathbf{C}_{n\times p} = (c_{ij})$. Elemen pada baris ke-i dari **A** adalah $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ dan elemen pada kolom ke-j dari **B** + **C** adalah $b_{1j} + c_{1j}, b_{2j} + c_{2j}, \ldots, b_{nj} + c_{nj}$. Maka elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari **A**(**B** + **C**) adalah

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Jadi **A**(**B**+**C**) = **AB**+**AC** untuk setiap i dan j.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan (**A** + **B**)**C** = **AC** + **BC** yaitu:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}.\ \blacksquare$$

Definisi 2.8 (Perkalian matriks dengan skalar)

Diberikan suatu matriks $\mathbf{A}_{m\times n}=(a_{ij})$ *dan* $k\in\Re$, *maka Hasil kali matriks* $\mathbf{A}_{m\times n}=(a_{ij})$ *dengan k adalah matriks*

$$k\mathbf{A}=k(a_{ij})=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriks identitas memiliki beberapa sifat khusus antara lain:

$\underbrace{I.I.I.......}_{\text{p faktor}}=I$, dan $\underbrace{I+I+I+.......}_{p\ suku}=p.I$, di mana p bilangan bulat positif.

Definisi 2.9 (Invers suatu matriks)

Diberikan **A** *dan* **B** *dua matriks bujur sangkar sedemikian sehingga* **AB** = **BA** = **I**, *maka* **B** *disebut invers dari* **A** *yang ditulis* $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$.

2. Determinan matriks bujur sangkar

Pandang permutasi berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$adalah 123 132 213 231 312 321.

Dua permutasi berbeda dari himpunan bilangan $\{1,2\}$ adalah 12 dan 21.

Secara umum himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ akan mempunyai n! permutasi yang berbeda. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$, selanjutnya dituliskan sebagai $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. j_1 menyatakan bilangan bulat pertama dalam permutasian, j_2 menyatakan bilangan bulat kedua dalam permutasian dan seterusnya. Jika dalam permutasian $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ yang diketahui bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil, maka disana terdapat suatu invers.

Banyaknya invers yang terjadi dalam permutasi dapat ditentukan dengan cara mencari banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari j_i dan yang membawa j_i dalam permutasi tesebut (i = 1, 2, ..., n-1). banyaknya bilangan-bilangan ini akan sama dengan banyaknya invers seluruhnya dalam permutasi tersebut.

Contoh 1

Banyaknya invers dalam permutasi 213 dan 321 adalah 1 dan 3 yaitu:

$1 + 0 + 0 = 1$ dan $2 + 1 + 0 = 3$.

Suatu permutasi disebut genap atau ganjil tergantung banyaknya invers genap atau ganjil. Permutasi 213 dan 321 adalah ganjil.

Definisi 2.10 (Hasil kali elementer)

Andaikan matriks $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Yang dimaksud dengan hasil kali elementer suatu matriks A_n *adalah setiap hasil kali n elemen* A_n*, di mana dua di antaranya tidak boleh berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama.*

Contoh 2

Daftar hasil kali elementer matriks $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ sebagai berikut:

Karena setiap hasil kali elementer mempunyai 3 faktor yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda, maka hasil kali elementer dapat ditulis dalam bentuk $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$. Karena tidak terdapat dua faktor dalam hasil kali tersebut berasal dari kolom yang sama maka nomor kolom tidak mempunyai pengulangan dan sebagai konsekuensinya nomor kolom tersebut harus membentuk permutasi himpunan {1, 2, 3}. Dari sini permutasi 3! = 6 menghasilkan daftar hasil kali elementer berikut:

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad a_{12}a_{21}a_{33}$ $\quad a_{13}a_{21}a_{32}$ $\quad a_{11}a_{23}a_{32}$ $\quad a_{12}a_{23}a_{31}$ $\quad a_{13}a_{22}a_{31}$

Secara umum matriks $\mathbf{A}_n$ mempunyai $n!$ hasil kali elementer. Hasil kali elementer tersebut adalah hasil kali yang berbentuk: $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$ di mana faktor-faktor telah di susun sehingga bilangan-bilangan dari indeks pertama (indeks yang menyatakan baris) adalah urutan biasa 1, 2, 3, ...,n dan bilangan-bilangan $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ dari indeks kedua(indeks yang menyatakan kolom) adalah salah satu dari n! Permutasi bilangan bulat 1, 2, ,3 ...,n.

Untuk permutasi indeks kedua $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ yang berikan, didefinisikan $(-1)^i = -1$ atau $+1$ tegantung kepada apakah banyaknya invers (i) genap atau ganjil dalam permutasian $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ dan bentuk hasil kali bertanda $(-1)^i a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$, selanjutnya akan digunakan untuk mendefinisikan determinan suatu matriks.

Definisi 2.11 (Nilai determinan matriks bujur sangkar)

Nilai determinan suatu matriks bujur sangkar adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari suatu matriks $\mathbf{A}_n$ *dan ditulis sebagai:*

Determinan matriks $\mathbf{A}$ = *det*($\mathbf{A}$) $= |\mathbf{A}| = \sum^{n!} (-1)^i a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$ *dengan*

n! =Banyaknya permutasi {1, 2, 3,..., n}

i = Banyaknya invers dalam permutasi yang bersesuaian dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

Contoh 3

Misalnya $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Daftar semua hasil kali elementer adalah:

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad a_{12}a_{21}a_{33}$ $\quad a_{13}a_{21}a_{32}$ $\quad a_{11}a_{23}a_{32}$ $\quad a_{12}a_{23}a_{31}$ $\quad a_{13}a_{22}a_{31}$

semua hasil kali elementer bertanda dari matriks $\mathbf{A}_3$ adalah:

$(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad$ $(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = -a_{12}a_{21}a_{33}$

$(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} = a_{13}a_{21}a_{32}$ $\quad$ $(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} = -a_{11}a_{23}a_{32}$

$(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} = a_{12}a_{23}a_{31}$ $\quad$ $(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Definisi 2.12 (Minor pertama matriks bujur sangkar)

Andaikan matriks **A** = (a_{ij}) *adalah suatu matriks bujur sangkar berukuran* $n\times n$*, yang determinannya diberikan oleh* $|\mathbf{A}| = \sum^{n!} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$.

Jika suatu elemen pada baris ke-i dan kolom ke -j dari **A** *dihapus, nilai determinan matriks bujur sangkar sisanya berukuran (n-1) disebut minor pertama dari* **A** *dan dinyatakan oleh* $|M_{ij}|$.

$|M_{ij}|$ sering disebut *minor* dari a_{ij}. Minor bertanda $(-1)^{i+j}$ disebut *kofaktor* a_{ij} dan dinotasikan simbol α_{ij}.

Misalnya $\mathbf{A}_3 = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka kofaktor a_{ij} yang dinyatakan oleh α_{ij} adalah:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};\ \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\ \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};\ \alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};\ \alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$.

Dari contoh 3 ($a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$), ($a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$) dan ($a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$) tak lain adalah minor-minor dari a_{ij}, maka

$|\mathbf{A}| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$

Secara umum dapat disimpulkan bahwa:

1. Determinan dari suatu matriks bujur sangkar A_n adalah jumlah hasil kali yang diperoleh dari perkalian tiap elemen suatu baris atau kolom $|\mathbf{A}|$ dengan kofaktornya yaitu :

   a. $|\mathbf{A}| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + \ldots + a_{in}\alpha_{in} = \sum a_{ik}\alpha_{ik}$

   b. $|\mathbf{A}| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + a_{3j}\alpha_{3j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum a_{kj}\alpha_{kj}$

   ($i, j = 1, 2, 3, \ldots n$).

$$a_{11}\alpha_{21} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Perhatikan bahwa ini adalah penguraiaan nilai determinan dari matriks:

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ di mana dua baris identik sehingga $|A| = 0$.

Karena detreminan dari matriks bujur sangkar yang dua baris atau kolomnya sama adalah nol, maka secara umum dapat dikatakan bahwa:

2. Jumlah hasil kali yang dibentuk dengan perkalian elemen-elemen suatu baris atau kolom matriks bujur sangkar **A** dengan kofaktor padanannya dari baris atau kolom **A** lainnya adalah nol yaitu :

$$a_{11}\alpha_{21} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} = 0 \text{ dan } a_{11}\alpha_{12} + a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{32} = 0.$$

Definisi 2.13 (Rank suatu matrik)

Matriks tidak nol $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *dikatakan mempunyai rank r bila paling sedikit satu dari minor bujur sangkar* $r \times r$ *tidak sama dengan nol, sedangkan setiap minor bujur sangkar* $(r+1)(r+1)$ *jika ada adalah nol. Matriks nol mempunyai rank nol.*

Misalkan suatu matriks $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dengan $|\mathbf{A}| = 0$.

Jika $|M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ maka $r = 2$. Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}_{3\times 3}$ disebut tak-singgular bila ranknya " $r = n$ " atau dalam arti $|\mathbf{A}| \neq 0$. Jika $|\mathbf{A}| = 0$, maka $\mathbf{A}_{n\times n}$ disebut singgular. Misalkan terdapat matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ (a_{ij}) dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$, maka $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$. Karena $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$, maka dapat dikatakan bahwa hasil kali antara dua atau lebih matriks bujur sangkar yang tak singgular adalah tak-singgular. Sedangkan hasil kali dua atau lebih matriks bujur sangkar adalah singgular bila paling sedikit salah satu diantaranya ada yang singgular. Misalkan sebarang matriks bujur sangkar $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$ maka *i.* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| . |\mathbf{B}| \neq 0$, bila $|\mathbf{A}| \neq 0$ dan $|\mathbf{B}| \neq 0$.

ii. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| . |\mathbf{B}| = 0$, bila $|\mathbf{A}| = 0$ atau $|\mathbf{B}| = 0$.

Definisi 2.14 (Adjoint matriks)

Andaikan matriks $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *adalah matriks bujur sangkar berukuran* $n \times n$ *dan* α_{ij} *adalah kofaktor dari* a_{ij}, *maka adjoint* A *didefinisikan sebagai:*

$$\textit{Adjoint } A = adj\ (a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

di mana kofaktor elemen–elemen baris (kolom) ke-i dari $\mathbf{A}$ *adalah elemen–elemen baris (kolom) ke-i dari adj* $\mathbf{A}$.

Misalnya $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$, $\alpha_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}|$, $\alpha_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}|$,

$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$, $\alpha_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}|$, $\alpha_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}|$

$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}|$, $\alpha_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}|$, $\alpha_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}|$.

Maka $\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$.

Andaikan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$b_{11} = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} = |A| = b_{22} = b_{33}$

$b_{12} = a_{11}\alpha_{21} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} = 0 = b_{13} = b_{21} = \ldots$

Secara umum dapat disimpulkan bahwa

$$\mathbf{A}(\text{adj }\mathbf{A}) = \mathbf{A}\ (\text{adj }(a_{ij})) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{diagonal }(|\mathbf{A}|, |\mathbf{A}|, |\mathbf{A}|, \ldots, |\mathbf{A}|) = |\mathbf{A}|.\mathbf{I} = (\text{adj }\mathbf{A})\ \mathbf{A}$$

Contoh 4

$$\text{Matriks } \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$

$= a_{11}\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{12} + a_{13}\,\alpha_{13}$

$= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$

$= 1(-5) + 2(5) + 3(0) = 5.$

$$\text{Sedangkan } \mathbf{A}.\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\mathbf{I}.$$

Dengan mengambil detreminan $|\mathbf{A}.\text{adj}(\mathbf{A})|$ tersebut didapat:

$|\mathbf{A}|.|\text{adj}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|^n = |\text{adj}(\mathbf{A})|.|\mathbf{A}|.$

Definisi 2.15 (Transformasi elementer suatu matriks)

Transformasi elementer pada suatu matriks tanpa mengubah ordo atau ranknya didefinisikan:

1. *Pertukaran suatu baris ke-i dengan baris ke-j yang dinyatakan oleh* B_{ij}. *Dan pertukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j dinyatakan oleh* K_{ij}
2. *Mengalikan baris ke-i dengan suatu konstanta tak-nol misalkan "c" dinyatakan* $B_i(c)$. *Mengalikan suatu kolom ke-i dengan konstanta tak-nol "c", dinyatakan dengan* $K_i(c)$
3. *Penambahan pada elemen-elemen baris ke-i dengan c kali elemen-elemen padanannya dari baris ke-j dinyatakan oleh* $B_{ij}(c)$, *Penambahan pada elemen-elemen kolom ke-i dengan c kali elemen-elemen padanannya dari kolom ke-j dinyatakan oleh* $K_{ij}(c)$.

Transformasi ***B*** disebut transformasi elementer baris, dan transformasi ***K*** disebut transformasi elementer kolom.

Dua matriks **A** dan **B** disebut setara "**A~B**" jika yang satu diperoleh dari yang lainnya melalui serangkaian transformasi elementer.

Jika matriks **A** direduksi menjadi matriks **B** hanya menggunakan transformasi elementer baris atau kolom saja , maka matriks **B** disebut setara baris atau setara kolom terhadap matriks **A** tergantung transformasi elementer yang digunakan. Dengan transformasi elementer, sebarang matriks **A** dengan rank r > 0 dapat direduksi kesalah satu bentuk normalnya yakni: $\mathbf{I}_r$, $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_r & r \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_r \\ r \end{bmatrix}$

Hasil Penerapan transformasi elementer suatu baris atau kolom dikenakan pada matriks **I** disebut *matriks elementer baris atau kolom*.

Matriks-matriks elementer baris atau kolom yang berpadanan dengan transformasi-transformasi elementer baris atau kolom yang mereduksi matriks **A** menjadi matriks **B** dan dinyatakan sebagai: B_1, B_2, ...B_s; K_1, K_2, ..., K_t dengan B_1 adalah transformasi baris yang pertama dan seterusnya maka $B_s \ldots B_2.B_1.A.K_1.K_2 \ldots K_t$ = **PAQ** = **B**, dimana **P** = $B_s \ldots B_2.B_1$ dan **Q** = $K_1.K_2 \ldots K_t$

Definisi 2.16 (Ekivalensi dua matriks)

Dua matriks **A** *dan* **B** *dikatakan ekialen jika terdapat matriks-matriks tak singgular* **P** = $B_s \ldots B_2.B_1$ *dan* **Q** = $K_1.K_2 \ldots K_t$ *sedemikian sehingga* **PAQ** = **B**.

B. Polinomial atas -$\mathfrak{R}$

Pada subbab kedua ini akan dibahas ploinomial atas -$\mathfrak{R}$ (polinomial dengan koefisien bilangan real) yang meliputi definisi, operasi-operasi yang berlaku serta sifat-sifatnya.

1. Pengertian dan operasi polinomial atas-$\Re$

Definisi 2.17 (Polinomial dengan koefisien real)

Andaikan -x suatu variabel. Suatu bentuk Aljabar:

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *, di mana koefisien-koefisien* $a_k \in \Re$ *disebut polinomial dalam -x atas -*$\Re$**.**

Koefisien a_m disebut koefisien utama dari $P(x)$ dan jika $a_m \neq 0$ maka $P(x)$ disebut polinomial berderajat m. Polinomial $P(x)$ disebut polinomial nol dan ditulis $P(x) = 0$ bila $a_k = 0$ untuk setiap k = 0, 1, 2, .., m.

Jika $P(x) = a_0 \neq 0$ maka $P(x)$ disebut polinomial berderajat nol. Jika koefisien utama $P(x)$ yaitu $a_m = 1$ maka $P(x)$ disebut *monik*. Himpunana semua polinomial dalam variabel –x atas -$\Re$ dinotasikan dengan $\Re[x]$.

Definisi 2.18 (Kesamaan dua polinomial)

Andaikan $P(x), Q(x) \in \Re[x]$ *dengan* $P(x) \quad \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *dan* $Q(x) \quad \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$.

Polinomial $P(x)$ *dikatakan sama dengan* $Q(x)$ *dan ditulis* $P(x) \quad Q(x)$ *bila* $a_k \quad b_k$ *untuk setiap* $k \quad 0, 1, 2, \ldots, m$.

Definisi 2.19 (Penjumlahan dua polinomial)

Andaikan P(x), Q(x) $\in \Re[x]$ *dengan* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *dan* $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$.

Maka hasil jumlah P(x) dan Q(x) yang ditulis P(x)+Q(x) didefinisikan sebagai:

1. $P(x)+Q(x) = \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)x^k$ *bila* $m = n$.

2. $P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)x^k + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_m x^m$ *bila* $m > n$.

3. $P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)x^k + b_{m+1}x^{m+1} + \ldots + b_n x^n$ *bila* $n > m$.

Operasi penjumlahan polinomial memenuhi *sifat komutatif, asosiatif.*

Andaikan $P(x)$, $Q(x), T(x) \in \Re[x]$ *dengan* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$; $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

dan $T(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$. Jika $m = n$, maka

1. $P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)x^k = \sum_{k=0}^{m}(b_k + a_k)x^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = Q(x) + P(x).$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

untuk $m>n$ dan $m<n$.

2. $\{ P(x) + Q(x) \} + T(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right\} + \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$

$$= \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)x^k + \sum_{k=0}^{s} c_k x^k = \sum_{k=0}^{m}\{(a_k + b_k) + c_k\}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\{a_k + (b_k + c_k)\}x^k = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n}(b_k + c_k)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \left\{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{s} c_k x^k\right\}$$

$= P(x) + \{Q(x) + T(x)\}$, untuk $m = n = s$.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa

$\{ P(x) + Q(x) \} + T(x) = P(x) + \{Q(x) + T(x)\}$untuk m<n<s dan seterusnya.

Definisi 2.20 (Hasil kali dua polinomial)

Andaikan $P(x)$, $Q(x)$ $\in \Re[x]$ dengan $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ dan $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$.

Maka hasil kali $P(x)$ dan $Q(x)$ yang ditulis $P(x).Q(x)$ didefinisikan sebagai:

$$P(x).Q(x) = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right)x^i .$$

Jika $a_m \neq 0$ dan $b_n \neq 0$ maka derajat tertinggi dari $P(x).Q(x)$ tepat sama dengan $m + n$. Jika $P(x) \neq 0$ tetapi $P(x).Q(x) = 0$, maka $Q(x) = 0$. Sebaliknya jika $Q(x) \neq 0$ tetapi $P(x).Q(x) = 0$, maka $P(x) = 0$

Andaikan $P(x) \neq 0$ dan $P(x).h(x) = P(x).r(x)$, maka $h(x) = r(x)$.

Operasi perkalian polinomial memenuhi *sifat komutatif*, *asosiatif* dan *distributif*.

Andaikan $P(x)$, $Q(x)$, $T(x) \in \Re[x]$ dengan

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \text{ , } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ dan } T(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$$

1. $$P(x).Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \, . \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) x^i = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} b_{i-k} a_k\right) x^i$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \, . \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = Q(x).P(x)$$

2. $$\{P(x)Q(x)\}.T(x) = \left\{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k . \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right\} \sum_{k=0}^{s} c_k x^k = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) x^i \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \left\{\sum_{i=0}^{n+s}\left(\sum_{k=0}^{i} b_{i-k} c_k\right) x^i\right\} = P(x)\{Q(x)T(x)\}$$

3. $$\{P(x) + Q(x)\}.T(x) = \left\{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right\} \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$$

$$= \sum_{i=0}^{m+s}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}\right) x^i + \sum_{i=0}^{n+s}\left(\sum_{k=0}^{i} b_k c_{i-k}\right) x^i$$

$$= P(x)\, T(x) + Q(x)T(x).$$

Dengan cara yang sama $P(x)\ \{Q(x) + T(x)\} = P(x)\ Q(x) + P(x)T(x)$.

Teorema 2.3 (Hasil bagi)

Andaikan $P(x)$, $Q(x) \in \Re[x]$ dengan $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ dan $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$.

Jika $Q(x) \neq 0$ maka terdapat polinomial $F(x)$ dan $H(x)$ dengan tunggal dalam $\Re[x]$, di mana $H(x)$ adalah polinomial nol atau berderajat kurang dari derajat $Q(x)$ sedemikian sehingga,

$P(x) = F(x).\ Q(x) + H(x)$.

Dari sini $H(x)$ disebut sisa dalam pembagian $P(x)$ oleh $Q(x)$.

Jika $H(x) = 0$ maka $Q(x)$ disebut membagi $P(x)$, sedangkan $Q(x)$ dan $F(x)$ keduanya disebut faktor–faktor dari $P(x)$.

Bukti

Andaikan $P(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n$ dan $Q(x) = q_0 + q_1x + \ldots + q_mx^m$.

Jika $P(x) = 0$ atau $n < m$ maka teorema terbukti. Andaikan $n \geq m$ maka bentuk $P(x) - \dfrac{p_n}{q_m}x^{n-m}Q(x) = P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p$ adalah polinomial nol atau berderajat kuarang dari derajat $P(x)$. Jika $P_1(x) = 0$ atau berderajat kuarang dari derajat $Q(x)$ maka teorema telah terbukti dengan

$F(x) = \dfrac{p_n}{q_m}x^{n-m}$ dan $H(x) = P_1(x)$. Jika tidak, bentuk

$P(x) - \dfrac{p_n}{q_m}x^{n-m}Q(x) - \dfrac{a_p}{q_m}x^{p-m}Q(x) = P_2(x)$. Jika $P_2(x) = 0$ atau berderajat kuarang dari derajat $Q(x)$ maka teorema telah terbukti. Jika tidak proses diatas diulang dan karena dalam setiap langkah derajat sisa direduksi , akhirnya akan sampai pada suatu sisa $H(x) = P_s(x)$ yang berupa polinomial nol atau berderajat kuarang dari derajat $Q(x)$ ■

Bukti ketunggalan

Andaikan $P(x) = F(x).\, Q(x) + H(x)$ dan $P(x) = G(x).\, Q(x) + K(x)$, dimana derajat dari $H(x)$ dan $K(x)$ kurang dari derajat $Q(x)$, maka

$F(x).\, Q(x) + H(x) = G(x).\, Q(x) + K(x)$

$[F(x) - G(x)]\, Q(x) = K(x) - H(x)$. Pandang $K(x) - H(x)$ berderajat kurang dari derajat $Q(x)$ yaitu m, sedangkan, terkecuali $F(x) - G(x) = 0$ $[F(x) - G(x)]\, Q(x)$ berderajat sama atau lebih besar dari m. $F(x) - G(x) = 0$ maka $K(x) - H(x) = 0$ atau $K(x) = H(x)$ sehingga juga berlaku $F(x) = G(x)$. Maka $F(x)$ dan $H(x)$ keduanya tunggal ■

Teorema 2.4 (Teorema sisa)

Andaikan $P(x) \in \mathfrak{R}[x]$ dan $F(x) = x - a$, di mana $a \in \mathfrak{R}$, maka

$P(x) = h(x).F(x) + r = h(x).(x - a) + r$, dimana r skalar.

Dari sini dapat diyatakan bahwa $r = P(a)$, sedemikian sehingga diperoleh:

1. *Bila $P(x)$ dibagi dengan $(x - a)$ sampai diperoleh sisa berupa skalar, maka sisa itu adalah $P(a)$, akibatnya*
2. *Suatu polinomial $P(x)$ mempunyai $(x - a)$ sebagai faktor bila $P(a) = 0$.*

Bukti

Andaikan $P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$ dan $h(x) = h_0 + h_1x + \dots + h_mx^m$ di mana $m = n-1$. $P(x) = h(x).(x-a) + r$,di mana r skalar benar. Berdasarkan kesamaan polinomial bahwa $P(x) = h(x).(x-a) + r$ hanya bila $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_{n-1}x^{n-1} + p_nx^n = (r-ah_0) + (h_0-ah_1)x + (h_1-ah_2)x^2 + \dots + (h_{m-1}-ah_m)x^m + h_{m+1}x^{m+1}$. Sekarang di uraikan masing-masing suku-demi suku sebagai berikut:

$p_0 = (r-ah_0) \quad \Leftrightarrow r = p_0 + ah_0$

$p_1 = (h_0-ah_1) \quad \Leftrightarrow (0 = p_1 - h_0 + ah_1)a$

$p_2 = (h_1 - ah_2) \quad \Leftrightarrow (0 = p_2 - h_1 + ah_2)a^2$....................

$p_{n-1} = (h_{m-1} - ah_m) \Leftrightarrow (0 = p_{n-1} - h_{m-1} - ah_m)a^m$

$p_n = h_{m+1} \quad \Leftrightarrow \underline{(0 = p_n - h_{m+1})a^{m+1}}$

$$r = p_0 + p_1a + p_2a^2 + \ldots + p_{n-1}a^m + p_na^{m+1} = P(a) \ \blacksquare$$

Akibatnya polinomial $P(x)$ mempunyai $(x - a)$ sebagai faktor bila $P(a) = 0$

BAB III

MATRIKS POLINOMIAL

Dalam bab ini akan dibahas konsep matriks polinomial dan sifat-sifatnya. Sifat-sifat yang berlaku dalam matriks atas-$\Re$ dan polinomial atas-$\Re$ akan digunakan untuk membahas sifat-sifat yang berlaku dalam matriks polinomial.

A. Pengertian Matriks Polinomial dan Sifat-sifatnya

1. Pengertian Matriks Polinomial

Definisi 3.1 (Matriks polinomial)

Matriks polinomial adalah matriks yang elemen-elemennya berupa polinomial dalam -x dengan koefisien-koefisien bilangan real.

Secara umum matriks polinomial berordo $m\times n$ dapat ditulis sebagai:

$$A(x) = [a_{ij}(x)] = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}, \text{ di mana } a_{ij}(x)\in\Re[x].$$

Definisi 3.2 (Polinomial matriks)

Polinomial matriks adalah polinomial dalam variabel x dengan koefisien-koefisien matriks atas-$\mathfrak{R}$.

Pandang elemen-elemen $a_{ij}(x)$ dari matriks polinomial $A(x)$ adalah polinomial atas-$\mathfrak{R}$ dengan

$a_{ij}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ di mana n dan a_k bergantung pada i dan j. Jika p adalah derajat tertinggi dari polinomial-polinomial $a_{ij}(x)$, maka $A(x)$ dapat dituliskan sebagai suatu *polinomial matriks berderajat p* dalam x yaitu:

$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{p-1}x^{p-1} + A_px^p = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$, di mana $A_p \neq O$ dan A_k matriks-matriks berukuran $m \times n$ atas-$\mathfrak{R}$

Matriks A_p disebut *koefisien utama* dari x. A_0 disebut *polinomial matriks berderajat nol* .

Himpunan matriks koefisien $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}, A_p\}$ yang didefinisikan atas-$\mathfrak{R}$ dinotasikan $M_{m\times n}(\mathfrak{R})$ dan himpunan semua polinomial matriks dengan koefisien atas $M_{m\times n}(\mathfrak{R})$ dinotasikan dengan "$M_{m\times n}(\mathfrak{R})(x)$ ".

Contoh 3.1

$A(x) = \begin{bmatrix} 1+x+x^2 & 5+3x^2+2x^3+x^4 \\ -4+x^3 & -3x^2+x^3 \end{bmatrix}$ adalah matriks polinomial.

Perhatikan bahwa polinomial $a_{11}(x)$ berderajat 2. Polinomial $a_{21}(x)$ dan $a_{22}(x)$ kedua berderajat 3 dan polinomial $a_{12}(x)$ berderajat 4. Karena derajat yang tertinggi dari elemen-elemen matriks polinomial $A(x)$ yaitu polinomial $a_{12}(x)$ adalah 4 maka $A(x)$ dapat ditulis sebagai polinomial matriks berderajat 4 yaitu:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1+x+x^2+0x^3+0x^4 & 5+0x+3x^2+2x^3+x^4 \\ -4+0x+0x^2+x^3+0x^4 & 0+0x-3x^2+x^3+0x^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0x \\ 0x & 0x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & 3x^2 \\ 0x^2 & -3x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0x^3 & 2x^3 \\ x^3 & x^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0x^4 & x^4 \\ 0x^4 & 0x^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^4$$

$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$, di mana

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 3.3 (Kesamaan polinomial matriks)

Diberikan $A(x), B(x) \in M_{m \times n}(\mathfrak{R})(x)$. $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$ *dan* $B(x) = \sum_{k=0}^{p} B_k x^k$.

$A(x)$ dikatakan sama dengan $B(x)$ dan ditulis $A(x) = B(x)$ bila $A_k = B_k$ untuk setiap k = 0, 1, 2,... p.

Definisi 3.4 (Penjumlahan polinomial matriks)

Andaikan $A(x), B(x) \in M_{m \times n}(\mathfrak{R})(x)$. $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$, $B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$.

Suatu polinomial matriks $D(x)$ dikatakan sebagai hasil jumlah dari $A(x)$ dan $B(x)$ dan ditulis: $D(x) = A(x) + B(x)$, bila

1. $D(x) = \sum_{k=0}^{q} (A_k + B_k) x^k$, *untuk* $p = q$.

2. $D(x) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k + B_{p+1} x^{p+1} + \ldots + B_q x^q$, *untuk* $p \; q$

3. $D(x) = \sum_{k=0}^{q} (A_k + B_k) x^k + A_{q+1} x^{q+1} + \ldots + A_p x^p$, *untuk* $p \; q$

Operasi penjumlahan polinomial matriks bersifat *komutatif* dan *assosiatif*.

Sifat Komutatif

Andaikan $A(x)$, $B(x) \in M_{m\times n}(\mathfrak{R})(x)$. $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$, $B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$.

1. $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k$, untuk p = q.

Perhatikan bahwa $A_k + B_k$ adalah penjumlahan dua matriks atas-$\mathfrak{R}$, maka

$A_k + B_k = B_k + A_k$ untuk setiap $k = 0, 1, 2, ...p$.

Jadi $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k = \sum_{k=0}^{p} (B_k + A_k) x^k = B(x) + A(x)$.

2. $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^k = \sum_{k=0}^{p} (B_k + A_k) x^k + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^k$

$= B(x) + A(x)$, untuk p < q.

3. $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{q} (A_k + B_k) x^k + \sum_{k=q+1}^{p} B_k x^k = \sum_{k=0}^{q} (B_k + A_k) x^k + \sum_{k=q+1}^{p} B_k x^k$

$= B(x) + A(x)$, untuk p > q.

Sifat Asosiatif

Andaikan $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in M_{m\times n}(\mathfrak{R})(x)$ dengan $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$

$B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$ dan $C(x) = \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$.

1. Jika p = q = r.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k = \sum_{k=0}^{p} [(A_k + B_k +) C_k] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} [A_k + (B_k + C_k)] x^k = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{p} (B_k + C_k) x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

2. Jika p = q < r.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} [(A_k + B_k +) C_k] x^k + \sum_{k=p+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} [A_k + (B_k + C_k)] x^k + \sum_{k=p+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{p} (B_k + C_k) x^k + \sum_{k=p+1}^{r} C_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

3. Jika p = r < q.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{p}(A_k + B_k)x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[(A_k + B_k +)C_k]x^k + \sum_{k=p+1}^{q} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=p+1}^{q} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{p}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{q} C_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

4. Jika p < r < q.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{p}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[(A_k + B_k) + C_k]x^k + \sum_{k=p+1}^{r}[B_k + C_k]x^k + \sum_{k=r+1}^{q} B_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=p+1}^{r}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{q} B_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{r}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{q} B_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

5. Jika $p < q < r$.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{p}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[(A_k + B_k) + C_k]x^k + \sum_{k=p+1}^{q}[B_k + C_k]x^k + \sum_{k=q+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=p+1}^{q}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{q}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} B_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

6. Jika $q < p < r$.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{p} B_k x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{q}[(A_k + B_k) + C_k]x^k + \sum_{k=q+1}^{p}[B_k + C_k]x^k + \sum_{k=p+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{q}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=q+1}^{p}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{q}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} B_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

7. Jika $q < r < p$.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{p} B_k x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{q}[(A_k + B_k) + C_k]x^k + \sum_{k=q+1}^{r}[B_k + C_k]x^k + \sum_{k=r+1}^{p} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{q}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=q+1}^{r}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{p} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{q}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} B_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

8. Jika $r < q < p$.

$$[A(x)+B(x)] + C(x) = \left[\sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{p} B_k x^k\right] + \sum_{k=0}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{r}[(A_k + B_k) + C_k]x^k + \sum_{k=r+1}^{q}[B_k + C_k]x^k + \sum_{k=q+1}^{p} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{r}[A_k + (B_k + C_k)]x^k + \sum_{k=r+1}^{q}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} C_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} A_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{r}(B_k + C_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{q} B_k x^k\right]$$

$$= A(x) + [B(x) + C(x)].$$

Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa

$[A(x) + B(x)] + C(x) = A(x) + [B(x) + C(x)] \quad r < p < q.$

Definisi 3.5 (Perkalian polinomial matriks)

Diberikan $A(x) \in M_{m\times n}(\mathfrak{R})(x)$ *dan* $B(x) \in M_{n\times p}(\mathfrak{R})(x)$ *dengan* $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$

$B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$. *Polinomial matriks D(x) dikatakan sebagai hasil kali A(x) dan B(x) yang dituliskan D(x) = A(x)B(x) bila D(x) di definisikan sebagai:*

1. $D(x) = \sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}\right)x^i = \sum_{i=0}^{r} D_i x^i$ *,di mana* $r = p + q$ *dan* $A_p B_q \neq O$

2. $D(x) = \sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}\right)x^i = \sum_{i=0}^{r} D_i x^i$ *,di mana* $r < p + q$ *untuk* $A_p B_q = O$

3. $D(x) = \sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}\right)x^i = O$ *bila* $A_k B_{i-k} = O$ *untuk setiap i dan k.*

Operasi perkalian pada polinomial matriks memenuhi sifat asosiatif dan sifat distributif.

Sifat Asosiatif

Andaikan $A(x)$, $B(x)$ dan $C(x)$: $A(x)=\sum_{k=0}^{p} A_k x^k$, $B(x)=\sum_{k=0}^{q} B_k x^k$ dan $C(x)=\sum_{k=0}^{r} C_k x^k$, di mana $A(x)\in M_{m\times n}(\Re)(x)$ dan $B(x)\in M_{n\times p}(\Re)(x)$, dan $C(x)\in M_{p\times q}(\Re)(x)$. Pandang

$$[A(x)B(x)]C(x)=\sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}\right)x^i \cdot \sum_{k=0}^{r} C_k x^k=\sum_{k=0}^{p} A_k x^k \cdot \sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i} B_{i-k} C_k\right)x^i$$

Karena $\sum_{i=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}\right)\cdot \sum_{k=0}^{r} C_k=\sum_{k=0}^{p} A_k \cdot \sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i} B_{i-k} C_k\right)$, untuk setiap i dan k

maka $[A(x)B(x)]C(x)=A(x)[B(x)C(x)]$

Sifat Distributif

1. $[A(x)+B(x)]C(x)=\left(\sum_{k=0}^{p}(A_k+B_k)x^k\right)\sum_{l=0}^{r} C_l x^l$

$$=\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i} A_k C_{i-k}\right)x^i+\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i} B_k C_{i-k}\right)x^i$$

$$= A(x)\,C(x)+B(x)\,C(x), \text{ untuk } p \quad q$$

$$2.\ [A(x)+B(x)]C(x)=\left(\sum_{k=0}^{p}(A_k+B_k)x^k+\sum_{k=p+1}^{q}B_kx^k\right)\sum_{l=0}^{r}C_kx^k$$

$$=\left\{\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i}A_kC_{i-k}\right)x^i+\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i\right\}+\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=p+1}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i}A_kC_{i-k}\right)x^i+\left\{\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=0}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i+\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=p+1}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i\right\}$$

$= [A(x)\ C(x) + B(x)\ C(x)]$, Untuk $p < q$.

$$3.\ [A(x)+B(x)]C(x)=\left(\sum_{k=0}^{q}(A_k+B_k)x^k+\sum_{k=p+1}^{p}B_kx^k\right)\sum_{l=0}^{r}C_kx^k$$

$$=\left\{\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i}A_kC_{i-k}\right)x^i+\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i\right\}+\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=p+1}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i}A_kC_{i-k}\right)x^i+\left(\sum_{i=0}^{q+r}\left(\sum_{k=0}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i+\sum_{i=0}^{p+r}\left(\sum_{k=p+1}^{i}B_kC_{i-k}\right)x^i\right)$$

$= [A(x)\ C(x) + B(x)\ C(x)]$

2. Nilai Fungsional Polinomial Matriks

Diberikan $A(x)\in M_{m\times n}(\mathfrak{R})(x)$ dengan $A(x)=\sum_{k=0}^{p}A_kx^k$. Jika x I, I suatu skalar maka persamaan tersebut menjadi $A(I)=\sum_{k=0}^{p}A_kI^k$.

Ini tidak mengubah makna persamaan tersebut. Tetapi jika $x=C$, $C\in M_{n\times n}(\Re)$ maka dapat diperoleh dua macam hasil berdasarkan kenyataan bahwa secara umum perkalian dua matriks tidak komutatif. Letak matriks bujur sangkar C akan memberi pengertian berbeda pada hasil akhir operasi tersebut.

Misalkan $A(x)$ suatu polinomial matriks berderajat-2 dengan $A(x)=\sum_{k=0}^{2} A_k x^k$.

$A(x)$ dapat di tuliskan dalam enam bentuk tanpa memperhatikan letak A_k dengan variabel-x sebagai berikut:

$$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 = A_0 + A_1x + x^2A_2 = A_0 + xA_1 + A_2x^2$$

$$A_0 + A_1x + xA_2x = A_0 + xA_1 + x^2A_2 = A_0 + xA_1 + xA_2x$$

Keenam bentuk ini menunjukkan bahwa variabel –x bersifat komutatif terhadap setiap matriks koefisien A_k yang bersesuaian.

Jika mengambil $x = C, C\in M_{n\times n}(\Re)$ maka secara umum $A(C)$ dapat memberikan enam sembarang matriks bujur sangkar berbeda sebagai berikut:

$$A_0 + A_1C + A_2C^2;\ A_0 + A_1C + C^2A_2;\ A_0 + CA_1 + A_2C^2$$

$$A_0 + A_1C + CA_2C;\ A_0 + CA_1 + C^2A_2;\ A_0 + CA_1 + CA_2C$$

Dari ke-enam matriks bujur sankar berbeda tersebut akan didefinisikan dua pengertian berbeda berdasarkan letak matriks C.

Definisi 3.6 (Nilai fungsional matriks polinomial)

Andaikan $A(x) \in M_{m\times n}(\Re)(x)$ dengan $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$ *, maka*

1. $A_R(C) = \sum_{k=0}^{p} A_k C^k$, $C \in M_{n\times n}(\Re)$ *disebut nilai fungsional kanan dari* $A(x)$

2. $A_L(C) = \sum_{k=0}^{p} C^k A_k$, $C \in M_{m\times m}(\Re)$ *disebut nilai fungsional kiri dari* $A(x)$

Contoh 3.2

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ x-2 & x^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & o \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$$

Operasi penjumlahan terhadap nilai fungsional polinomial matriks secara umum dapat disimpulkan bahwa nilai fungsional hasil jumlah polinomial matriks selalu sama dengan hasil jumlah dari nilai fungsional polinomial matriks. Sedangkan pada operasi perkalian nilai fungsional hasil kali polinomial matriks tidak selalu sama dengan hasil kali dari nilai fungsional polinomial matriks.

Misalkan $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$, $B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$ dengan A_k, B_k, $C \in M_{m\times n}\,(\mathfrak{R})$

1. $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) x^k = \sum_{k=0}^{p} D_k x^k = D(x)$, $D_k = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k)$ untuk p = q

$$A_R(C) = \sum_{k=0}^{p} A_k C^k \; ; \; B_R(C) = \sum_{k=0}^{q} A_k C^k$$

$$A_R(C) + B_R(C) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) C^k = D_R(C).$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh

$A_R(C) + B_R(C) = \sum_{k=0}^{p} (A_k + B_k) C^k = D_R(C)$, untuk p < q dan p > q.

Untuk nilai fungsional kiri $A_L(C) + B_L(C) = \sum_{k=0}^{p} C^k (A_k + B_k) = D_L(C)$.

2. $A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k} \right) x^i = \sum_{i=0}^{p+q} D_i x^i = D(x)$, untuk $A_p B_q \neq O$, $D_i = \sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k}$.

$$D_R(C) = \sum_{i=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{i} A_k B_{i-k} \right) C^i = A_0 B_0 + A_0 B_1 C + A_1 B_0 C + A_0 B_2 C^2 + \ldots$$

$$A_R(C)\, B_R(C) = A_0 B_0 + A_0 C B_1 + A_1 B_0 C + A_0 C^2 B_2 + \ldots .$$

Secara umum $A_0B_1C \neq A_0CB_1$. Akibatnya $A_R(C)\, B_R(C) \neq D_R(C)$.

Demikian pula $A_L(C)\, B_L(C) \neq D_L(C)$.

Berdasarkan definisi nilai fungsional matriks polinomial (Definisi 3.5) maka secara analog diperoleh suatu teorema dibawah ini.

Teorema 3.1 (Hasil bagi polinomial matriks)

Diberikan $A(x)$, $B(x) \in M_{n\times n}(\Re)(x)$. $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$ *dan* $B(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k x^k$.

Jika B_q *tak-singgular,maka terdapat dengan tunggal polinomial matriks* $F_1(x)$, $F_2(x)$ *dan* $G_1(x)$, $G_2(x)$ *di mana* $G_1(x)$, $G_2(x)$ *adalah polinomial matriks nol atau berderajat kurang dari derajat* $B(x)$ *sedemikian sehingga*

$A(x) = F_1(x)\, B(x) + G_1(x)$ ....1)

$A(x) = B(x)\, F_2(x) + G_2(x)$...............2)

Bukti

Untuk persamaan......1). Jika $p < q$,maka $A(x) = G_1(x)$ dan $F_1(x) = O$

Andaikan $p \geq q$, maka $C(x) = A(x) - A_p B_q^{-1} B(x) x^{p-q}$, dimana $C(x)$ adalah nol atau berderajat paling tinggi p-1. Jika $C(x)$ nol atau kuarang dari q, maka diperoleh persamaan ...1) dengan

$F_1(x) = A_p B_q^{-1} x^{p-q}$ dan $G_1(x) = C(x)$. Jika $C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^r$, di mana $r > q$ maka bentuk $D(x) = A(x) - A_p B_q^{-1} B(x)x^{p-q} - C_r B_q^{-1} B(x)x^{r-q}$.

Jika $D(x) = O$ atau berderajat kurang dari q, diperoleh persamaan ... 1) dengan $F_1(x) = A_p B_q^{-1} x^{p-q} + C_r B_q^{-1} x^{r-q}$ dan $G_1(x) = D(x)$. Jika belum diperoleh persamaan ...1) maka langjutkan proses yang sama sampai diperoleh hasil-hasil dalam suatu runtunan polinomial matriks $C(x)$, $D(x)$ yang derajatnya menurun, pada akhirnya diperoleh suatu polinomial matriks nol atau berderajat kurang dari q sehingga didapat persamaan ...1).

Untuk persamaan ...2)

Sekarang dimulai dari $C(x) = A(x) - B(x)\, B_q^{-1} A_p x^{p-q}$, selanjutnya prosesnya sama. Jika $p < q$,maka $A(x) = G_2(x)$ dan $F_2(x) = O$.

Andaikan $p \geq q$, maka $C(x) = A(x) - B(x)\, B_q^{-1} A_p x^{p-q}$, di mana $C(x)$ adalah nol atau berderajat paling tinggi p-1. Jika $C(x)$ adalah nol atau berderajat kurang dari q, maka diperoleh persamaan ...2) dengan $F_2(x) = B_q^{-1} A_p x^{p-q}$ dan $G_2(x) = C(x)$. Jika $C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^r$, di mana $r > q$ maka bentuk $D(x) = A(x) - B(x)\, B_q^{-1} A_p x^{p-q} - B(x)\, B_q^{-1} C_r x^{r-q}$. Jika $D(x) = O$ atau berderajat kurang dari q, maka diperoleh persamaan ... 2) dengan

$F_2(x) = B_q^{-1} A_p x^{p-q} + B_q^{-1} C_r\, x^{r-q}$ dan $G_2(x) = D(x)$. Untuk selanjutnya kita lakukan proses serupa seperti pada kasus persamaan ... 1).

Bukti ketunggalan.

Untuk persamaan ... 1).

Andaikan $A(x) = F_1(x)B(x) + G_1(x)$, dan $A(x) = H_1(x)B(x) + L_1(x)$, di mana derajat $G_1(x)$ dan $L_1(x)$ kurang dari q.

$F_1(x)B(x) + G_1(x) = H_1(x)B(x) + L_1(x)$

$[F_1(x) - H_1(x)]B(x) = L_1(x) - G_1(x)$.

Dari sini jelas bahwa $L_1(x) - G_1(x)$ kurang dari q, sedangkan

$[F_1(x) - H_1(x)]B(x)$ berderajat sama atau lebih besar dari q untuk

$F_1(x)-H_1(x) \neq O$ maka terjadi kontradiksi. Kesimpulannya $F_1(x) - H_1(x) = O$ dan $L_1(x) - G_1(x) = O$. Untuk persamaan ... 2) prosesnya sama persis dengan persamaan .... 1) ■

Akibat dari teorema didefinisikan bahwa :

1. Jika $G_1(x) = O$ maka $B(x)$ disebut pembagi kanan dari $A(x)$
2. Jika $G_2(x) = O$ maka $B(x)$ disebut Pembagi kiri dari $A(x)$.

Contoh 3.3

Diberikan $A(x) = \begin{bmatrix} x^4 + 2x^3 - 1 & x^3 - x - 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \end{bmatrix}$, $B(x) = \begin{bmatrix} 2x^2 - x & -x^2 + x - 1 \\ -x^2 + 2 & x^2 - x \end{bmatrix}$

Tentukan matriks polinomial $F_1(x)$, $F_2(x)$ dan $G_1(x)$, $G_2(x)$ sedemikian sehingga: a. $A(x) = F_1(x)B(x) + G_1(x)$ dan b. $A(x) = B(x)F_2(x) + G_2(x)$

$$A(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^4$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x^2$$

Perhatikan bahwa $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ maka $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. $|B_2| = 1$, tak-singgular

a. $A(x) - A_4 B_2^{-1} B(x) x^2$

$$= \begin{bmatrix} x^4 + 2x^3 - 1 & x^3 - x - 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x^2 - x & -x^2 + x - 1 \\ -x^2 + 2 & x^2 - x \end{bmatrix} x^2$$

$$= \begin{bmatrix} x^4 + 2x^3 - 1 & x^3 - x - 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x^4 - x^3 & -x^4 + x^3 - x^2 \\ -x^4 + 2x^2 & x^4 - x^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^4 + 2x^3 - 1 & x^3 - x - 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^4 - x^3 + 2x^2 & -x^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x^3 - 2x^2 - 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x^3=C(x).$$

$$C(x)\text{ - }C_3B_2^{-1}B(x)x=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 3\\ -6 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}x^2=D(x)$$

$$D(x)-D_2B_2^{-1}B(x)=\begin{bmatrix}-13 & 3\\ -9 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}-13-6x & 3+5x\\ -9-2x & 5+3x\end{bmatrix}=G_1(x).$$

Maka

$$F_1(x)=(A_4x^2+C_3x+D)B_2^{-1}=\begin{bmatrix}4+4x+x^2 & 6+5x+x^2\\ 4+2x & 5+3x\end{bmatrix}$$

b. $A(x)-B(x)B_2^{-1}A_4x^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}x^3=\mathrm{C}(x)$

$$C(x)-B(x)B_2^{-1}C_3x^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 2\\ -8 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix}x^2=D(x)$$

$$D(x)-B(x)B_2^{-1}D_2=\begin{bmatrix}8+x & 4-x\\ -7+x & -3+x\end{bmatrix}=G_2(x).$$

$$F_2(x)=B_2^{-1}(A_4x^2+C_3x+D_2)=\begin{bmatrix}4+4x+x^2 & 2+2x\\ 9+6x+x^2 & 5+3x\end{bmatrix}.$$

3. Polinomial Matriks Skalar

Definisi 3.7 (Polinomial matriks skalar)

Andaikan $A(x) \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})(x)$. $A(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k x^k$. $A(x)$ *dikatakan polinomial matriks skalar bila* $A_k = a_k \boldsymbol{I}_n$, *di mana* $\boldsymbol{I}_n$ *matriks identitas dan* $a_k \in \mathfrak{R}$ *untuk setiap k.*

Polinomial matriks skalar $A(x)$ diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$A(x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k \right) I_n = \sum_{k=0}^{p} a_k I_n x^k = a(x) I_n$, $a(x) \in \mathfrak{R}[x]$. Karena $(a_k \boldsymbol{I}_n)B = B(a_k \boldsymbol{I}_n)$, $B \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$ maka $A_R(B) = \sum_{K=0}^{P} a_k B^k I = \sum_{K=0}^{P} B^k a_k I = A_L(B)$.

Jika $A(x)$ dan $B(x)$ masing-masing adalah polinomial matriks skalar bujur sangkar, maka jumlah dan hasil kali keduanya juga merupakan suatu polinomial matriks skalar yang memenuhi sifat komutatif.

Misalkan $A(x) = a(x) I_n$ dan $B(x) = b(x) I_n$ maka

$A(x) + B(x) = (a(x) + b(x)) I_n = (b(x) + a(x)) I_n = B(x) + A(x)$.

$A(x)B(x) = [a(x)b(x)] I_n = [b(x)a(x)] I_n = B(x) A(x)$

Jika $Q(x) = [q_{ij}(x)]$ sebarang polinomial matriks bujur sangkar dan $B(x) = b(x)I_n$, maka perkalian $Q(x)$ dan $B(x)$ didefinisikan memenuhi sifat komutatif yaitu:

$$Q(x)B(x) = [q_{ij}(x)]b(x)I_n = [q_{ij}(x)]I_n b(x) = [q_{ij}(x)]b(x) = b(x)[q_{ij}(x)]$$

$$= b(x)\mathrm{I_n}[q_{ij}(x)] = B(x)Q(x).$$

Karena $Q(x)B(x) = B(x)Q(x)$, maka $Q(x)B(x) + R(x) = B(x)Q(x) + R(x)$

Akibatnya jika $A(x)$ sebarang polinomial matriks bujur sangkar $n\times n$ dibagi oleh $B(x) = b(x)I_{\mathrm{n}}$ maka terdapat dengan tunggal polinoimal matriks bujur sangkar $n\times n$ $Q(x)$, $R(x)$ sedemikian sehingga

$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) = B(x)Q(x) + R(x)$, di mana $Q(x)$ disebut hasil bagi dan dan $R(x)$ disebut sisa hasil bagi.

Contoh 3.4

Andaikan $A(x) = \begin{bmatrix} x^2+2x & x+1 \\ x^2-1 & 2x+1 \end{bmatrix}$ dan $B(x) = (x+2)\ I_2$.

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ 0 & x+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q(x)\ B(x) + R(x)$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ 0 & x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(x)\ Q(x) + R(x)$$

Teorema 3.2 (Polinomial matriks yang habis dibagi $B(x) = b(x)I$)

Polinomial matriks $A(x)$ habis dibagi oleh polinomial matriks skalar

$B(x) = b(x)I$ bila hanya bila setiap polinomial $a_{ij}(x)$ habis dibagi oleh $b(x)$.

Bukti

$\Rightarrow$ Andaikan $A(x) = [a_{ij}(x)] = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}$

dan andaikan tidak berlaku bahwa untuk setiap elemen-elemen dari matriks $A(x)$ habis dibagi oleh $b(x)$ atau dengan kata lain ada sekurang-kurangnya satu elemen $a_{11}(x)$ sedemikian sehingga berlaku $a_{11}(x) = q_{11}(x)b(x) + r_1(x)$, di mana $r_1(x) \neq 0$. Akibatnya $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$. Dengan demikian terjadi kontradiksi. Jadi pengandaian salah.

$\Leftarrow$ Andaikan untuk setiap polinomial $a_{ij}(x)$ habis dibagi oleh $b(x)$.

Berarti $a_{ij}(x) = q_{ij}(x)b(x)$ untuk setiap i,j. Berarti $A(x) = Q(x)B(x)$. Dengan demikian polinomial matriks $A(x)$ berderajat p habis dibagi oleh polinomial matriks skalar $B(x)$ ■

Contoh 3.5

Andaikan $A(x) = \begin{bmatrix} x^2+2x & x+2 \\ x^2-4 & 2x+4 \end{bmatrix}$ dan $B(x) = (x+2)\, I_2$. maka

$$Q(x) = \frac{1}{x+2}\begin{bmatrix} x^2+2x & x+2 \\ x^2-4 & 2x+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jadi $A(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ 0 & x+2 \end{bmatrix} = Q(x)B(x)$

Lemma 3.1

Andaikan $A(x) \in M_{n\times n}(\Re)(x)$ dan $B_n \in M_{n\times n}(\Re)$. Karena polinomial matriks berderajat satu (xI-B) tak-singgular maka terdapat polinomial matriks dengan tunggal, C(x), D(x) sedemikian sehingga

$A(x) = C(x).(xI-B) + R_1$....................................1)

$A(x) = (xI-B).D(x) + R_2$....................................2)

di mana R_1, R_2 $\in M_{n\times n}(\Re)$ dan masing-masing disebut sisa dari hasil bagi A(x) oleh (xI – B) .

Bukti

Berdasarkan teorema hasil bagi polinomial matriks (teorema 3.1) bahwa itu benar. Jadi cukup membuktikan matriks R_1, $R_2 \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$.

Andaikan $A(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_px^p$, $C(x) = C_0 + C_1x + \ldots + C_qx^q$

di mana $p = q+1$

1). $A(x) = C(x).(xI - B) + R_1$. Oleh definisi kesamaan dua buah polinomial matriks pada pembahasan sebelumnya bahwa $A(x) = C(x).(xI\text{-}B) + R_1$ atau

$A_0 + A_1x + \ldots + A_px^p = (R_1\text{-}C_0B) + (C_0\text{-}C_1B)x + \ldots + (C_{q-1}\text{-}C_qB)x^q + C_{q+1}x^{q+1}$

bila hanya bila

$A_0 = R_1 - C_0B \quad \Leftrightarrow \quad R_1 = A_0 + C_0B$

$A_1 = C_0 - C_1B \quad \Leftrightarrow \quad C_0 = A_1 + C_1B$

$A_2 = C_1 - C_2B \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = A_2 + C_2B$

.... $\Leftrightarrow$ ....

$A_{p-1} = C_{q-2} - C_{q-1}B \quad \Leftrightarrow \quad C_{q-2} = A_{p-1} + C_{q-1}B$

$A_p = C_{q-1}$.

Kesamaan ini masing-masing menentukan R_1, C_0, C_1, .., C_{q-2}, C_{q-1} berdasarkan matriks A_k dan matriks B sehingga diperoleh polinomial matriks

$C(x)$. Karena $R_1 = A_0 + C_0B$, di mana $A_0, C_0, B \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$ maka $R_1 \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$. Dengan cara yang sama dapat diperoleh nilai $R_2, D_0, D_1, \ldots, D_{p-1}$ untuk persamaan 2).

Jadi R_1, R_2 merupakan matriks atas-$\mathfrak{R}$ ■

Berdasarkan lemma 3.1 akan dibutktikan teorema berikut.

Teorema 3.3 (Nilai fungsional polinomial matriks dari sisa hasil bagi)

Andaikan $A(x) \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})(x)$ dan matriks $B = [b_{ij}], B \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$.

Polinomial matriks $A(x)$ dibagi oleh $(xI_n - B)$ dengan sisa $R_1, R_2 \in M_{n\times n}(\mathfrak{R})$, maka $R_1 = A_R(B)$ dan $R_2 = A_L(B)$.

Bukti

$A(x) = C(x).(xI-B) + R_1$ atau

$$A_0 + A_1x + \ldots + A_px^p = (R_1 - C_0B) + (C_0 - C_1B)x + \ldots + (C_{q-1} - C_qB)x^q + C_{q+1}x^{q+1}$$

Kesamaan $R_1 = A_0 + C_0B$ dan seterusnya dikalikan dengan $I, B, B^2, \ldots, B^p$ dan menjumlahkannya sehingga tereliminasi dan ini diperlihatkan sebagai berikut:

$(R_1 = A_0 + C_0B).I$

$(0 = A_1 + C_1B - C_0).B$

$(0 = A_2 + C_2B - C_1).\ B^2$ ....

$(0 = A_{p-1} + C_{p-1}B - C_{p-2}).\ B^{p-1}$

$\underline{(0 = (C_{p-1} - A_p)B^p \quad +}$

$R_1 = A_0 + A_1B + A_2B^2 + \ldots + A_pB^p = A_R(B)$

Dengan cara yang sama diperoleh $R_2 = A_L(B)$ ■

Akibatnya dapat dikatakan bahwa:

1. Jika $A_R(B) = 0$, maka $xI - B$ disebut pembagi kanan dari $A(x)$
2. Jika $A_L(B) = 0$, maka $xI - B$ disebut pembagi kiri dari $A(x)$

Contoh 3.6

Diberikan $A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 1+x \\ -2+x & 2+x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2$;

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $xI - B = \begin{bmatrix} -1+x & -2 \\ -3 & -4+x \end{bmatrix}$.

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1+x & 3 \\ 4 & 4+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+x & -2 \\ -3 & -4+x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = C(x).(xI - B) + R_1$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} -1+x & -2 \\ -3 & -4+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x & 3 \\ 4 & 4+x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (xI - B).D(x) + R_2$$

$$R_1 = A_R(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = A_L(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

Lemma 3.2

Andaikan $A(x) = a(x)I_n$ dan matriks $B_n = (b_{ij})$, maka terdapat dengan tunggal polinomial matriks $C(x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k x^k$ dan $D(x) = \sum_{k=0}^{p-1} D_k . x^k$ sedemikian sehingga

$A(x) = C(x).(xI\text{-}B) + R$.................................1)

$A(x) = (xI\text{-}B).D(x) + R$...............................2)

di mana $B, R \in M_{n\times n}(\Re)$.

Bukti

Karena opersi perkalian matriks dengan skalar komutatif maka

$$R = A_R(B) = \sum_{k=0}^{p} a_k I B^k = \sum_{k=0}^{p} B^k a_k I = A_L(B) \blacksquare$$

Akibat dari lemma 3.2, jika $A(x)$ adalah suatu polinomial matriks skalar berukuran $n \times n$ dibagi dengan $xI-B$ sampai diperoleh sisa $R \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ maka:

$$R = \sum_{k=0}^{p} a_k I B^k = (a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots + a_n B^n).\, I = a(B).I$$. Dari

persamaan ini dapat disimpulkan bahwa suatu polinomial matriks skalar $A(x) = a(x).I$ dibagi habis oleh $(xI - B)$ bila $a(B) = 0$.

B. Determinan Matriks Polinomial

1. Pengertian Determinan Matriks Polinomial

Definisi 3.8 (Determinan matriks polinomial)

Determinan dari matriks polinomial bujur sangkar didefinisikan sebagai:

$$\Phi(x) = |A(x)| = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Jika $\Phi(x) \neq 0$, maka penguraian determinan ini menghasilkan suatu polinomial atas $\mathfrak{R}(x)$. Jika $\Phi(x) = 0$ maka $\Phi(x)$ disebut *persamaan* *determinan* dan $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, ..., $x_p = t_p$, menyatakan *akar-akar* dari persamaan itu. Derajat paling tinggi dari persamaan itu sama dengan p. Matriks polinomial $A(x)$ disebut singgular atau tak singgular tergantung pada nilai determinan $A(x)$ nol atau tidak nol. Selanjutnya $A(x)$ disebut wajar atau tidak wajar tergantung koefisien utama polinomial matriks tak singgular atau singgular.

Matriks polinomial pada contoh 3.1 di atas adalah tak singgular dan tak wajar, sebab determinan $A(x)$ tidak sama dengan nol tetapi determinan A_p sama dengan nol.

Jika $A(x)$ adalah matriks polinomial bujur sangkar , maka rank dari $A(x)$ didefinisikan sebagai: Jika sekurang-kurangnya satu dari minor determinan $A(x)$ berordo r tidak sama dengan nol maka rank dari $A(x)$ sama dengan r.

Analogi dengan matriks atas -$\mathfrak{R}$, Adjoin dari matriks polinomial $A(x)$ mempunyai sifat-sifat $A(x)\,\mathrm{adj}(A(x)) = \mathrm{adj}\,(A(x))\,A(x) = |A(x)|\,I$.

Karena relasi $A(x)\,\mathrm{adj}(A(x))$, $|A(x)|\,I$ adalah menyatakan perkalian suatu matriks polinomial dengan adjoin padanannya yang berhubungan dengan diagonal matriks polinomial maka adj $(A(x))$ dari suatu matriks polinomial adalah juga matriks polinomial.

2. Persamaan Karakteristik Polinomial Matriks

Definisi 3.9 (Karakteristik suatu matriks)

Jika $A \in M_{n\times n}(\Re)$, *maka polinomial matriks berderajat satu* $(xI-A)$ *disebut karakteristik matriks A.*

Definisi 3.10 (Persamaan karakteristik)

Jika $A \in M_{n\times n}(\Re)$ *maka* $|xI-A| = \Phi(x)$, *di mana* $\Phi(x) \in \Re[x]$ *disebut polinomial karakteristik dari matriks A, dan persamaan* $\Phi(x) = 0$ *disebut persamaan karakteristik matriks A.*

Derajat tertinggi dari pesamaan karakteristik suatu matriks sama dengan ukuran matriks tersebut dan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang menjadikan nilai polinomial $\Phi(x) = 0$ disebut akar-akar dari polinomial $\Phi(x)$.

Contoh 3.7

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Polinomial karakteristik A adalah

$$\Phi(x) = |xI-A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 7x^2 + 11x - 5\ .$$

Persamaan karakterisitik matriks A adalah $\Phi(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$ dan akar-akar karakteristiknya adalah $x_1 = 5$; $x_2 = x_3 = 1$.

Teorema 3.4 (Polinomial karakteristik matriks bujur sangkar)

Andaikan $A \in M_{n\times n}(\Re)$, maka polinomial karakteristik matriks A dinyatkan sebagai:

$\Phi(x) = |xI - A| = x^n + s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + s_{n-1}x + (-1)^n|A|$, di mana

s_m, ($m = 1, 2, \ldots, n-1$) adalah $(-1)^m$ kali jumlah semua minor prinsipal bujur sangkar $m\times m$ dari A.

Bukti

Pandang $|xI - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$

dan setiap elemen berupa suatu binomial, andaikan bahwa determinan telah dinyatakan sebagai jumlah dari 2^n. Salah satu dari determinan-determiana ini mempunyai $-x$ sebagai elemen-elemen diagonal dan elemen-elemen sealain diagonal nol. Nilainya adalah x^n dan elemen lainnya tidak memuat $-x$ yang dinyatakan $(-1)^n|A|$. Determinan-determinan sisanya mempunyai m kolom, ($m = 1, 2, 3,\ldots,n-1$) dari $-A$ dan n-m kolom masing-masing mengandung hanya satu elemen tak nol $-x$.

Pandang satu dari determinan-determiana ini dan andaikan kolom-kolomnya diberi nomor $i_1, i_2, \ldots, i_m$ adalah kolom-kolom dari-A.

Setelah suatu bilangan genap dari baris-baris dan kolom-kolom yang berdampingan dipertukarkan, maka determinan menjadi

$$(-1)^m \left| \begin{array}{cccc|cccc} a_{i_1 . i_1} & a_{i_1 . i_2} & \ldots & a_{i_1 . i_m} & & & & \\ a_{i_2 . i_1} & a_{i_2 . i_2} & \ldots & a_{i_2 . i_m} & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & 0 & \\ a_{i_m . i_1} & a_{i_m . i_2} & \ldots & a_{i_m . i_m} & & & & \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & x & 0 & 0 & 0 \\ a_{i_n . i_1} & a_{i_n . i_2} & \ldots & a_{i_n . i_m} & 0 & x & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right|$$

$$= (-1)^m \left| A \begin{matrix} i_1 . i_2 \ldots, i_m \\ i_1 . i_2 \ldots, i_m \end{matrix} \right| x^{n-m}$$

di mana $\left| A \begin{matrix} i_1 . i_2 \ldots, i_m \\ i_1 . i_2 \ldots, i_m \end{matrix} \right|$ adalah suatu minor prinsipal bujur sangkar $m \times m$ dari A. Sekarang $s_m = (-1)^m \sum_p \left| A \begin{matrix} i_1 . i_2 \ldots, i_m \\ i_1 . i_2 \ldots, i_m \end{matrix} \right|$ dengan i_1, i_2,..., i_m berjalan sampai $p = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{12\ldots\ldots\ldots m}$ kombinasi yang berbeda dari 1, 2, ..., n diambil m pada satu saat ■

Contoh 3.8

Diketahui suatu matriks bujur sangkar $A_n = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

$s_1 = (-1)^1[1+0-2+6] = -5$

$$s_2 = (-1)^2\left[\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}\right]$$

$s_2 = 8-3+2-5+16-9 = 9$

$$s_3 = (-1)^3\left[\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}\right]$$

$s_3 = -1(-3+16-8+2) = -7$

$|A| = 2$. Jadi $|xI - A| = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Dari persamaan determinan dan karakteristik polinomial yang telah dibahas sebelumnya, maka dengan uraian itu membuktikan lemma 3.3.

Lemma 3.3

Jika x_1, x_2, x_3, ..., x_n adalah akar-akar dari karakteristik matriks bujur sangkar A_n dan $h(y)$ adalah suatu polinomial berderajat p dalam variabel y, maka

$|h(A)| = h(x_1).h(x_2)...h(x_n).$

Bukti

Andaikan $|xI\text{-}A| = (x\text{-}x_1).(x\text{-}x_2)....(x\text{-}x_n)$ ....1) dan

$h(y) = c(s_1\text{-}y).(s_2\text{-}y)....(s_p\text{-}y)$..........................2). Maka

$h(A) = c(s_1I\text{-}A).(s_2I\text{-}A)....(s_pI\text{-}A)$ dan

$$\begin{aligned} |h(A)| &= c^p\ |s_1I\text{-}A|\ |s_2I\text{-}A| ....|s_pI\text{-}A| \\ &= \{c(s_1\text{-}x_1).(s_1\text{-}x_2)....(s_1\text{-}x_n)\}.\{c(s_2\text{-}x_1).(s_2\text{-}x_2)....(s_2\text{-}x_n)\}.... \\ &\quad \{c(s_p\text{-}x_1).(s_p\text{-}x_2)....(s_p\text{-}x_n)\} \\ &= \{c(s_1\text{-}x_1).(s_2\text{-}x_1)....(s_p\text{-}x_1)\}.\{c(s_1\text{-}x_2).(s_2\text{-}x_2)....(s_p\text{-}x_2)\}.... \\ &\quad \{c(s_1\text{-}x_n).(s_2\text{-}x_n)....(s_p\text{-}x_n)\} \\ &= h(x_1).h(x_2)....h(x_n). \end{aligned}$$

dengan menggunakan 2) ■

Berdasarkan pembahasan matriks polinomial skalar dan torema sisa teorema penting yang berkaitan langsung dengan persamaan karakteristik yaitu teorema Cayley-Hamilton .

Teorema 3.5 (Teorema Cayley-Hamilton)

Andaikan sebarang matriks $A_{n\times n} = (a_{ij})$ *yang mempunyai karakteristik matriks* $(xI - A)$ *dan persamaan karakteristiknya adalah* $\Phi(x) = |xI - A| = 0$.

Setiap matriks $A_{n\times n}$ *memenuhi persamaan karakteristiknya yaitu* $\Phi(A) = 0$.

Bukti

Adjoin dari matriks $(xI - A)$ adalah juga merupakan matriks polinomial. Berdasarkan sifat-sifat dari adjoin suatu matriks yaitu :

A (adj A) = $|A|\, I_n$, maka $(xI - A)$ (adj$(xI - A)$) = $|xI - A|\, I = \Phi(x).I$

Dari sini diperoleh relasi antara tiga matriks polinomial $(xI - A)$, (adj$(xI - A)$), $|xI - A|\, I$. Sedangkan penguraian bentuk $|xI - A|\, I$ adalah suatu matriks polinomial skalar, maka realasi antara $(xI - A)$, (adj$(xI - A)$),dan $|xI - A|\, I$ memperlihatkan bahwa $(xI - A)$ merupakan pembagi kiri dari matriks polinomial skalar $|xI - A|\, I$. Dengan demikian nilai fungsional kiri untuk $x = A$ adalah 0. Akan tetapi karena $|xI - A|\, I$ adalah suatu matriks polinomial skalar maka $\Phi_R(A) = \Phi_L(A)$, untuk $x = A$ (A sembarang matriks bujur sangkar).

Jadi $|xI - A|\, I = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)I = 0$, untuk $x = A$

Jadi $a_0 I + a_1 IA + a_2 I A^2 + \dots + a_n I A^n = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0$

Jadi $\Phi(x).I$ dapat dibagi dengan $(xI - A)$ dan $\Phi(A) = 0$ ■

Contoh 3.9

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $xI - A = \begin{bmatrix} -2+x & -2 & -1 \\ -1 & -3+x & -1 \\ -1 & -1 & -2+x \end{bmatrix}$, maka

persamaan karakteristik dari A adalah : $\Phi(x) =$

$|xI - A| = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \text{maka :}$$

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{-5I} = O.$$

Jadi $\Phi(A) = O$.

3. Invers Matriks Dalam Bentuk Polinomial

Menurut Teorema 3.5 (Polinomial karakteristik matriks A) suku konstanta polinomial karakteristik matriks A adalah $a_0 = (-1)^n |A|$, atau dengan kata lain a_0 dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $x = 0$ ke dalam $|xI\text{-}A|$ yaitu

$a_0 = |0I\text{-}A| = |\text{-}A| = (-1)^n |A|$ sehingga untuk setiap matriks tak singgular, polinomial karaktesitiknya selalu memuat suku konstanta yang tak nol.

Dengan teorema Cayley – Hamilton diperolah relasi sebagai berikut:

$$\Phi(A)I = a_0 I + a_1 IA + a_2 IA^2 + \ldots + a_{n-1} IA^{n-1} + a_n IA^n = O.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} dari sebelah kanan maka diperoleh:

$a_0 I\, A^{-1} + a_1 A\, A^{-1} + a_2 A^2\, A^{-1} + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}\, A^{-1} + a_n A^n\, A^{-1} = 0$ atau

$$A^{-1} = -\frac{1}{(-1)^n |A|}(a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \ldots + a_n A^{n-1})$$

$$A^{-2} = -\frac{1}{(-1)^n |A|}(a_1 A^{-1} + a_2 I + a_3 A + \ldots + a_n A^{n-2})$$

$$A^n \quad -\frac{1}{a_n}(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_{n-1} A^{n-1})$$

$$A^{n+1} \quad -\frac{1}{a_n}(a_0 A + a_1 A^2 + a_2 A^3 + \ldots + a_{n-1} A^n).$$

Contoh 3.10

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton

dapat ditentukan A^3, A^4, A^{-1}, A^{-2}.

Perhatika bahwa $|A| = 11$, maka $a_0 = (-1)^3 |A| = -11$

$$|xI\text{-}A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 2 & 3 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 - 7x - 11 = 0.\ A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = 3A^2 + 7A + I11 = 3\begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 11\, I_3 = \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A$$

$$= 3\begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193 & 160 & 144 \\ 224 & 177 & 160 \\ 272 & 224 & 193 \end{bmatrix}$$

$A^3 - 3A^2 - 7A = I11$, maka diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}(A^2 - 3A - 7I) = \frac{1}{11}\left\{\begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{11}\left\{\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11}(A - 3I - 7A^{-1}) = \frac{1}{11}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{11}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{121}\begin{bmatrix} -8 & -24 & 29 \\ 40 & -1 & -24 \\ -27 & 40 & -8 \end{bmatrix}$$

C. Transformasi Elementer Matriks Polinomial

1. Pengertian Transformasi Elementer

Definisi 3.11 (Transformasi elementer matriks polinomial)

Yang dimaksud dengan transformasi elementer matriks polinomial adalah:

1. *Pertukaran suatu baris ke-i dengan baris ke-j yang dinyatakan oleh* B_{ij}.

   Pertukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j dinyatakan oleh K_{ij}
2. *Mengalikan baris ke-i dengan suatu konstanta tak-nol misalkan "c" dinyatakan* $B_i(c)$. *Mengalikan suatu kolom ke-i dengan konstanta tak-nol "c", dinyatakan dengan* $K_i(c)$
3. *Penambahan hasil kali* $f(x)$ *(sebarang polinomial dalam* $\mathfrak{R}[x]$*) dengan baris ke-j pada baris ke-i dinyatakan oleh* $B_{ij}(f(x))$. *Penambahan hasil kali* $f(x)$ *dengan kolom ke-j pada kolom ke-i dinyatakan oleh* $K_{ij}(f(x))$

Definisi 3.12 (Ekivalensi dua buah matriks polinomial)

Dua polinomial matriks bujur sangkar $A(x)$ *dan* $B(x)$ *dengan elemen-elemen di* $\mathfrak{R}[x]$ *dikatakan ekivalen bila terdapat matriks* $C(x)$ $B_s. \ldots B_2.B_1$ *dan* $D(x)$ $K_1.K_2 \ldots K_t$ *sedemikan sehingga* $B(x)$ $C(x)\,A(x)\,D(x)$.

Teorema 3.6 (Faktor persekutuan terbesar dua matriks polinomial ekivalen) *Andaikan matriks polinomial A(x) dan B(x) adalah ekivalen dengan rank r, maka faktor persekutuan terbesar semua minor bujur sangkar s×s dari A(x) dengan s ≤ r adalah juga faktor persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari B(x).*

Bukti

Pandang $P(x)$. $A(x)$ dimana $P(x)$ masing-masing satu dari tiga tipe matriks-matriks elementer baris. Andaikan $R(x)$ sebagai minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$ dan $S(x)$ sebagai minor bujur sangakar s×s dari $P(x).A(x)$ yang serupa dengan $R(x)$. ditetapkan $P(x) = B_{ij}$; pengaruhnya pada $A(x)$ adalah:

1. Membiarkan $R(x)$ tidak berubah atau
2. Mempertukarkan dua baris dari $R(x)$ atau
3. mempertukar suatu baris dari $R(x)$ dengan suatu baris bukan dari $R(x)$.

$S(x) = R(x)$ dalam kasus 1, $S(x) = - R(x)$dalam kasus 2, dalam kasus (3) $S(x)$ adalah minor bujur sangkar s×s lainnya dari $A(x)$ kecuali mungkin berbeda tanda. Pandang $P(x) = B_i(c)$, maka $S(x) = R(x)$ atau $S(x) = cR(x)$.

Akhirnya , pandang $P(x) = B_{ij}(f(x))$. Pengaruhnya pada $A(x)$ adalah

1. membiarkan $R(x)$ tidak berubah atau
2. memberbesar satu dari baris-baris $R(x)$ dengan $f(x)$ kali baris lainnya dari $R(x)$ atau

3. memperbesar satu dari baris-baris $R(x)$ dengan $f(x)$ kali baris lainnya yang bukan dari $R(x)$. Dalam kasus (1) dan (2) $S(x) = R(x)$ dalam kasus (3)

$S(x) = R(x) \pm f(x).T(x)$, dimana $T(x)$ adalah suatu minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$. Jadi sebarang minor bujur sangkar s×s dari $P(x).A(x)$ adalah kombinasi linear dari minor-minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$. Jika $g(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari semua minor-minor bujur sangkar s×s dari $P(x).A(x)$, maka $g(x)$ membagi $g_1(x)$.

Tetapkan $B(x) = P(x).A(x)$ sekarang $A(x) = P^{-1}(x).B(x)$ dan $P^{-1}(x)$ adalah hasil kali dari matriks-matriks elementer. Jadi $g_1(x)$ membagi $g(x)$ dan $g_1(x) = g(x)$

$\Rightarrow$Pandang $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah hasil kali matriks-matriks elementer, maka pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $P(x).A(x).Q(x)$ adalah juga pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$.

Ditetapkan $B(x) = P(x)\ A(x)$ dan $C(x) = B(x)\ Q(x)$. Karena $C'(x) = Q'(x)B'(x)$ adalah hasil kali matriks-matriks elementer, maka pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $C'(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $B'(x)$. Tetapi pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s $C'(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $C(x)$ dan hal yang sama juga benar untuk $B'(x)$ dan $B(x)$. Jadi pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari

$C(x) = P(x).A(x).Q(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$.

Teorema 3.7 (Bentuk Normal Smith)

Setiap matriks polinomial A(x) dengan rank r dapat direduksi dengan transformasi-transformasi elementer ke bentuk:

$$N(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_r(x) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$ *di mana setiap $p_i(x)$ adalah monik dan $p_i(x)$ membagi $p_{i+1}(x)$, (i = 1, 2,..., r-1). $N(x)$ disebut bentuk normal smith*

Bukti

Teorema benar untuk $A(x) = 0$. Andaikan $A(x) \neq 0$, maka terdapat suatu elemen $a_{ij}(x) \neq 0$ dengan derajat paling kecil. Dengan transformasi tipe (2) elemen ini dapat dibuat monik dan dengan pertukaran baris-baris serta kolom-kolom yang sesuai dibawah ke posisi (1,1) dalam matriks $a_{11}(x)$ yang baru.

1. Andaikan $a_{11}(x)$ membagi setiap elemen $A(x)$ lainnya. Maka dengan transformasi tipe ke (3) $A(x)$ dapat direduksi ke

a. $\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{bmatrix}$, dimana $p_1(x) = a_{11}(x)$.

2. Andaikan $a_{11}(x)$ tidak membagi setiap elemen $A(x)$. Tetapkan $a_{1j}(x)$ adalah elemen pada baris pertama yang tidak dapat dibagi olah $a_{11}(x)$. Maka menurut teorema pembagian matriks polinomial diperoleh:

$a_{1j}(x) = q(x)\, a_{11}(x) + r_{ij}(x)$, dimana $r_{1j}(x)$ berderajat lebih kecil dari derajat $a_{11}(x)$. Dari kolom ke –j kurangkan hasil kali $g(x)$ dan kolom pertama sehingga elemen pada baris pertama dan kolom ke-j sekarang adalah $r_{1j}(x)$. Dengan suatu transformasi tipe (2) gantikan elemen ini dengan satu yang monik dan dengan pertukran kolom-kolom membawanya ke posisi (1,1) sebagai $a_{11}(x)$ yang baru. Jika sebarang $a_{11}(x)$ membagi setiap elemen $A(x)$, maka diperoleh matriks bentuk a. Jika tidak setelah sejumlah berhingga pengulangan proses diatas maka diperoleh suatu matriks dimana setiap elemen pada baris pertama dan kolom pertama dapat dibagi oleh elemen yang menempati posisi (1,1).

Jika elemen ini membagi setiap elemen $A(x)$, maka diperoleh bentuk a. Jika tidak, andaikan $a_{ij}(x)$ tidak dapat dibagi oleh $a_{11}(x)$. Tetapkan $a_{i1}(x) = q_{i1}(x).a_{11}(x)$ dan $a_{1j}(x) = q_{1j}(x).a_{11}(x)$. Dari baris ke-i kurangkan hasil kali $q_{i1}(x)$ dan baris pertama. Ini menggantikan $a_{i1}(0)$ oleh 0 dan $a_{ij}(x)$ oleh $a_{ij}(x) - q_{i1}(x).a_{1j}(x)$. sekarang tambahkan baris ke-i terhadap baris pertama. Ini mambiarkan $a_{11}(x)$ tidak berubah tetapi menggantikan $a_{1j}(x)$ oleh

$a_{ij}(x) - q_{i1}(x).a_{1j}(x) + a_{1j}(x) = a_{ij}(x) + q_{1j}(x)\{1 - q_{i1}(x)\}a_{11}(x)$

Karena ini tidak dapat dibagi dengan $a_{11}(x)$, kita bagi dia dengan $a_{11}(x)$ dan seperti sebelumnya dapatkan pengganti yang baru (sisa) untuk $a_{11}(x)$.

Prosedur ini dilanjutkan selama polinomial monik yang terakhir dipilih sebagai $a_{11}(x)$ tidak membagi setiap elemen matriks. Setelah sejumlah berhingga langkah dipasti akan diperoleh $a_{11}(x)$ yang memang membagi setiap elemen sehingga telah samapai pada (1).

Selanjutnya dengan prosedur yang sama untuk $B(x)$ dan mencapai suatu hasil: $\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & C(x) \end{bmatrix}$, akhirnya diperoleh bentuk normal Smit yang dicari. Karena $p_1(x)$ adalah pembagi setiap $B(x)$ dan $p_2(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari elemen-elemen $B(x)$, maka $p_1(x)$ membagi $p_2(x)$. Dengan proses yang sama ditemukan bahwa setiap $p_i(x)$ membagi $p_{i+1}(x)$.

Bilamana suatu matriks polinomial $A(x)$ dengan rank r telah direduksi kedalam bentuk normal Smith maka Pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $A(x)$ dengan $s \leq r$ adalah juga pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $N(x)$.

Karena dalam $N(x)$ setiap $p_i(x)$ membagi $p_{i+1}(x)$, maka pembagi persekutuan terbesar dari semua minor bujur sangkar s×s dari $N(x)$ dan dari $A(x)$ adalah:

$g_s(x) = p_1(x).p_2(x)....p_s(x)$, $(s = 1, 2, ..., r)$

Andaikan $A(x)$ telah direduksi ke $N(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x),...,p_r(x), 0, ..., 0)$ dan ke $N_1(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x),...,h_r(x), 0, ..., 0)$. Maka bentuk $g_s(x)$ menjadi

$g_s(x) = p_1(x).p_2(x)....p_s(x) = h_1(x), h_2(x),....,h_s(x)$.

Sekarang pandang $g_1(x) = p_1(x) = h_1(x)$, $g_1(x) = p_1(x).p_2(x) = h_1(x).h_2(x)$ sehingga $p_2(x) = h_2(x)$, ..., secara umum jika didefinisikan $g_0(x) = 1$ maka $g_s(x) / g_{s-1}(x) = p_s(x) = h_s(x)$, $(s = 1, 2, ..., r)$ dan ini menunjukkan polinomial matriks $A(x)$ menentukan dengan tunggal $N(x)$. Jadi matriks-matriks polinomial normal Smith adalah suatu himpunan kanonik untuk kesetraan dalam $\mathfrak{R}[x]$.

Contoh 3.11

Reduksi $A(x) = \begin{bmatrix} x & x-1 & x+2 \\ x^2+x & x^2 & x^2+2x \\ x^2-2x & x^2-3x+2 & x^2+x-3 \end{bmatrix}$ kebentuk normal Smith.

$$\begin{bmatrix} x & x-1 & x+2 \\ x^2+x & x^2 & x^2+2x \\ x^2-2x & x^2-3x+2 & x^2+x-3 \end{bmatrix} \overset{K_{12}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & x+2 \\ x & x^2 & x^2+2x \\ x-2 & x^2-3x+2 & x^2+x-3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B_{31}(2-x)}{\overset{B_{21}(-x)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix} \underset{K_{31}(-x-2)}{\overset{K_{21}(1-x)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{B_{23}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -x-1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix} \overset{K_{23}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -x-1 \\ 0 & x+1 & x+1 \end{bmatrix} \underset{B_2(-1)}{\overset{B_{32}(x+1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 0 & -x^2-x \end{bmatrix}$$

$$\underset{K_3(-1)}{\overset{K_{32}(-x-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+x \end{bmatrix} = N(x).$$

BAB IV

PENERAPAN MATRIKS POLINOMIAL PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR BIASA

Salah satu penerapan matriks polinomial yang akan dibicarakan adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear biasa dengan koefisien konstan. Pada bab ini akan ditelaah lebih lanjut bagaimana matriks polinomial dapat diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear biasa dengan koefisen konstan.

A. Operator Persamaan Diferensial

Sebelumnya akan ditinjau beberapa konsep dalam persamaan diferensial linear. Suatu persamaan $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ konstanta real disebut persamaan diferensial linear biasa non-homogen. Jika $f(x) = 0$ maka bentuk ini disebut persamaan diferensial linear biasa homogen. Jika y_p adalah penyelesaian khusus dan andaikan penyelesaian umum persamaan diferensial linear homogen yang terkait di tulis y_c disebut penyelesaiaan komplementer dari persamaan diferensial linear biasa non-homogen $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, maka penyelesaian umum dari persamaan diferensial linear non-homogen adalah $y = y_c + y_p$.

Setiap penyelesaian dari persamaan ini merupakan kombinasi linear dengan derivatif-derivatifnya yang memenuhi setiap persamaan tersebut. Meskipun ada banyak fungsi yang mempunyai sifat ini, suatu fungsi yang derivatifnya adalah kelipatan konstanta dengan dirinya sendiri adalah e^{mx}. Jika y = e^{mx} maka derivatifnya adalah y' = $m\, e^{mx}$; y" = $m^2\, e^{mx}$; ...; $y^{(n)} = m^n\, e^{mx}$. Dengan mensubtitusikan bentuk ini kedalam persamaan diperoleh:

$a_n m^n e^{mx} + a_{n-1} m^{n-1} e^{mx} + \ldots + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$ atau

$(a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0)\, e^{mx} = 0$. karena e^{mx} tidak pernah nol maka persamaan ini dipenuhi untuk semua nilai m pembuat nol. Polinomial

$P(m) = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$ disebut persamaan karakteristik dan diselesaikan dengan menentukan akar-akarnya. Jika m_1 adalah akar persamaan P(m) = 0 maka y = $e^{m_1 x}$ adalah penyelesaiaan persamaan diferensial linear biasa dengan koefisien konstanta. Akibatnya jika persamaan bantu untuk $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ mempunyai akar-akar real berbeda $m_1, m_2, \ldots, m_n$, maka penyelesaiaan umumnya dapat disajikan oleh $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$, dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah konstanta real. Jika akar- akar $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ maka penyelesaian disajikan oleh $y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_n x^n)\, e^{mx}$. Untuk menyederhanakan penulisan dan penyelesaiaan sistem persamaan diferensial linear biasa tingkat n dengan koefisien konstanta akan diperkenalkan konsep polinomial operator diferensial. Dinotasikan $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$, n bilangan bulat positif.

Definisi 4.1 (Polinomial operator diferensial)

Kombinasi linear operator berturunan yang berbentuk:

$a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ *disebut polinomial operator tingkat n yang dapat ditulis* $f(D)$ *dimana* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *adalah konstanta real.*

Untuk menyatakan bahwa $f(D)$ dapat digunakan pada fungsi yang berturunan n kali dapat ditulis :

$$f(D)\,y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0)\,y$$

$$= a_nD^n y + a_{n-1}D^{n-1} y + \ldots + a_1D\,y + a_0\,y$$

$$= a_n \frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \ldots + a_1 \frac{d}{dx} y + a_0 y$$

Contoh 4.1

$y'' + 3y' - y = 0$ atau dapat ditulis dalam polinomial operator diferesial D yaitu $D^2y + 3Dy - y = 0$.

Polinomial operator diferensial $f(D)$ mempunyai sifat antara lain :

1. $f(D)\,(y_1 + y_2) = f(D)\,y_1 + f(D)\,y_2$
2. $f(D)\,(cy) = c\,f(D)\,y$

B. Sistem Persamaan Diferensial Linear Biasa Homogen

Definisi 4.2 (Sistem persamaan diferensial linear biasa homogen)

Suatu himpunan berhingga dari persamaan diferensial linear biasa homogen dengan koefisien konstanta dalam n buah fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *tak diketahui disebut sistem persamaan diferensial linear biasa homogen.*

Secara umum sistem persamaan diferensial linear biasa homogen dengan koefisien konstanta ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
f_{11}(D)y_1 + f_{12}(D)y_2 + \ldots. + f_{1n}(D)y_n &= 0 \\
f_{21}(D)y_1 + f_{22}(D)y_2 + \ldots. + f_{2n}(D)y_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\
f_{m1}(D)y_1 + f_{m2}(D)y_2 + \ldots + f_{mn}(D)y_n &= 0
\end{aligned}$$

di mana $f_{ij}(D)$ adalah polinomial operator tingkat –n dengan koefisien konstanta real, dan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah fungsi-fungsi real yang mempunyai semua turunan yang diperlukan untuk menentukan setiap persamaan dari sistem itu identitas.

Bila sistem mempunyai suatu penyelesaiaan, maka sistem itu dikatakan konsisten. Jika tidak demikian sistem tidak konsisten. Suatu sistem yang kosisten hanya mempunyai penyelesaiaan tunggal atau tak hingga banyaknya penyelesaiaan

Untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear biasa dapat dilakukan dengan menggantikan sistem yang diberikan dengan sistem baru yang memepunyai himpunan penyelesaiaan $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ yang sama dengan penyelesaiaan yang lebih mudah. Sistem baru ini umumnya didapatkan dalam suatu tahapan dengan menerapkan tipe operasi untuk menghilangkan fungsi-fungsi tak diketahui secara sistematis. Dua sistem dikatakan ekivalen bila setiap penyelesaian masing-masing sistem merupakan penyelesaiaan dari yang lainnya. Karena polinomial operator diferensial dapat dipandang sebagai matriks koefisien dari sistem persamaan diferensial linear biasa diatas, maka sistem yang ekivalen dengan sistem persamaan diferensial linear biasa diatas dapat diperolah dari sistem itu sendiri dengan menerapkan serangkaian transformasi elementer.

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) & \dots & f_{1n}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) & \dots & f_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(D) & f_{2m}(D) & \dots & f_{mn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ atau disingkat menjadi:

$F.Y = O$, dengan $F = [fij\ (D)]$ dan $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.

Untuk menyelesaikan sistem ini akan menggunakan serangkaian transformasi elementer berikut untuk membawa matriks polinomial $F = [f_{ij}(D)]$ ke dalam matriks kanoniknya (yang ekivalen) atau ke dalam bentuk normal Smith sehinga diperoleh sistem persamaan diferensial yang ekivalen, tetapi lebih mudah untuk diselesaikan

1. Pertukaran suatu baris ke-i dengan baris ke-j yang dinyatakan oleh B_{ij}.

   Dan pertukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j dinyatakan oleh K_{ij}

2. Kalikan baris ke-i dengan suatu konstanta tak-nol misalkan "c" dinyatakan $B_i(c)$. Mengalikan suatu kolom ke-i dengan konstanta tak-nol "c", dinyatakan dengan $K_{ij}(c)$
3. Penambahan hasil kali $f(D)$ dengan baris ke-j pada baris ke-i dinyatakan oleh B_{ij} $(f(D))$. Penambahan hasil kali $f(D)$ dengan kolom ke-j pada kolom ke-i dinyatakan oleh $K_{ij}(f(D))$, dimana $f(D)$ adalah polinomial operator diferensial.

Jika elemen-elemen matriks "$f(D)$"adalah polinomial berderajat paling tinggi p dalam D, maka sistem tersebut dikatakan bersuku p dan ditulis :

$(A_p D^p + A_{p-1} D^{p-1} + \ldots + A_1 D + A_0)\, y_i = 0$ atau disingkat manjadi

$(A_i D^i).y_i = 0$; di mana $i = 0, 1, 2, \ldots$, p dan $A_0, A_1, \ldots, A_p$ matriks atas- $\Re$ dan $A_p \neq 0$.

Sistem persamaan diferensial biasa linear homogen selalu konsisten karena $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, ..., $y_m = 0$ selalu merupakan penyelesaiannya. Penyelesaian ini disebut penyelesaiaan trivial. Jika ada penyelesaiaan lain (selain $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_m = 0$) maka peneyelesaiaan tersebut dinamakan penyelesaian tak trivial.

Contoh 4.2

Andaikan suatu sistem persamaan diferensial biasa linear dengan koefisien-koefisien konstan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_1'' - y_1' + y_2' &= 0 \\ y_1' - y_1 + y_2' + y_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}y_1 - \frac{d}{dx}y_1 + \frac{d}{dx}y_2 &= 0 \\ \frac{d}{dx}y_1 - y_1 + \frac{d}{dx}y_2 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sistem di atas dapat ditulis dalam polinomial operator diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D^2y_1 - Dy_1 + Dy_2 &= 0 \\ Dy_1 - y_1 + Dy_2 + y_2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} (D^2 - D)y_1 + Dy_2 &= 0 \\ (D-1)y_1 + (D+1)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jika dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} D^2 - D & D \\ D-1 & D+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, atau disingkat $A.Y = O$

di mana $A = \begin{bmatrix} D^2 - D & D \\ D-1 & D+1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Perhatikan bahwa A adalah matriks polinomial berderajat dua dalam D.

Dengan mengguanakan serangkaian transformasi elementer terhadap matriks koefisien di atas diperoleh:

$$\begin{bmatrix} D^2 - D & D \\ D-1 & D+1 \end{bmatrix} \widetilde{B}_{12}(-D) \begin{bmatrix} 0 & -D^2 \\ D-1 & D+1 \end{bmatrix} \widetilde{B}_{12} \begin{bmatrix} D-1 & D+1 \\ 0 & -D^2 \end{bmatrix} \widetilde{B}(-1) \begin{bmatrix} D-1 & D+1 \\ 0 & D^2 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial linear biasa homogen yang ekivalen dengan sistem persamaan diferensial linear biasa homogen semula adalah:

$$\begin{aligned} (D-1)y_1 + (D+1)y_2 &= 0 \\ D^2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode persamaan diferensial elementer yaitu:

$Dy_2 = c_2$, maka $y_2 = c_1 + c_2 x$ dan

$(D - 1)y_1 = -(D + 1)y_2 = -Dy_2 - y_2$

$= -c_1 - c_2 - c_2 x$

Persamaan homogen yang terkait adalah $D y_1 - y_1 = 0$.

Persamaan karakteristiknya adalah m-1 = 0 yang mempunyai akar real 1, maka penyelesaiaan komplementernya $y_c = c_3 e^x$. Perhatikan bahwa polinomial operator D^2 menghapus $-c_1 - c_2 - c_2 x$ karena $D^2(-c_1 - c_2 - c_2 x) = 0$. Jadi $D^2(D - 1)y_1 = 0$. Penyelesaiaan umum dari persamaan diferensial homogen ini adalah adalah $y_1 = c_1 + 2c_2 + c_2 x + c_3 e^x$, di mana $y_p = c_1 + 2c_2 + c_2 x$.

Jadi penyelesaiaan umum dari sistem persamaan diferensial di atas adalah

$y_1 = c_1 + 2c_2 + c_2 x + c_3 e^x$

$y_2 = c_1 + c_2 x$

C. Sistem Persamaan Diferensial Linear Biasa Non-Homogen

Definisi 4.3 (Sistem persamaan diferensial biasa linear non homogen)

Suatu himpunan berhingga dari persamaan diferensial linear biasa non-homogen dengan koefisien konstanta dalam n buah fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tak diketahui disebut sistem persamaan diferensial linear biasa non- homgen.

Secara umum sistem persamaan diferensial linear biasa non-homogen dengan koefisien-koefisien konstanta ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(D)y_1 + f_{12}(D)y_2 + \ldots + f_{1m}(D)y_n = h_1(x) \\
&f_{21}(D)y_1 + f_{22}(D)y_2 + \ldots + f_{2m}(D)y_n = h_2(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\
&f_{m1}(D)y_1 + f_{m2}(D)y_2 + \ldots + f_{mm}(D)y_n = h_m(x)
\end{aligned}
$$

dimana mana $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_m(x)$ adalah fungsi-fungsi real dari $-x$.

Penyelesaian umum dari system persamaan diferensial linear biasa non-homogen dibentuk dari penyelesaiaan komplementer (y_c) yaitu berlaku penyelesaian system homogen terkait dan penyelesaiaan khusus (y_p).

Contoh 4.3

Selesaikan sistem persamaan diferensial linear biasa

$$
\begin{aligned}
&y_1'' + y_1 + 2y_2''' = 0 \\
&y_1' + 2y_2'' - y_2 = \cos x
\end{aligned}
$$

. Sistem persamaan diferensial ini ditulis dalam notasi matriks dengan menggunakan polinomial operator menjadi

$$\begin{bmatrix} D^2+1 & 2D^3 \\ D & 2D^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x \end{bmatrix}$$ atau disingkat $AY = H$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} D^2+1 & 2D^3 \\ D & 2D^2-1 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan serangkaian transformasi elementer terhadap matriks A yakni:

$$
\begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} D^2+1 & 2D^3 \\ D & 2D^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\widetilde{B}_1 - DB_2 & \begin{bmatrix} 1 & D \\ D & 2D^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\widetilde{B}_2 - DB_1
\end{array}
$$

$$\begin{bmatrix}1 & -D\\0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow Q$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & D\\0 & D^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -D\\-D & D^2+1\end{bmatrix}\widetilde{K}_2 - DK_1 \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & D^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -D\\-D & D^2+1\end{bmatrix} \rightarrow P$$

$$\downarrow$$

$$N$$

Andaikan $Y = QZ$ dan $AY = H$, maka $AQZ = H$

Menurut definisi 3.11 BAB III. $PAQ = N$, maka $PAQZ = NZ = PH$

$$NZ = PH = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & D^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -D\\-D & D^2+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\cos x\end{bmatrix}$$

$z_1 = -D\cos x = \sin x$.

$(D^2 - 1)z_2 = (D^2+1)\cos x$

$= -\cos x + \cos x$

$= 0;$

Persamaan karateristiknya adalah m^2-1 = 0, yang mempunyai akar-akar real -1 dan 1 maka $z_2 = c_1e^x + c_2e^{-x}$

$$Y = QZ = \begin{bmatrix}1 & -D\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin x\\c_1e^x + c_2e^{-x}\end{bmatrix}$$. Jadi penyelesaiaan umumnya adalah

$y_1 = \sin x - c_1e^x + c_2e^{-x}$

$y_2 = c_1e^x + c_2e^{-x}$

Contoh 4.3

Selesaikan sistem persamaan diferensial linear biasa berikut

$$y_1' + y_2' + y_2 = 0$$
$$y_1' + 2y_1 - y_3' + y_3 = x$$, di mana y_1, y_2, y_3 adalah fungsi-fungsi riil tidak
$$y_2' + y_2 + y_3' + 2y_3 = e^x$$

diketahui dari suatu peubah x. Sistem persamaan diferensial ini ditulis dalam notasi matriks dengan menggunakan polinomial operator diferensial menjadi

$$\begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ e^x \end{bmatrix}$$, disingkat $AY = H$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ e^x \end{bmatrix}$$

Dengan mengguanakan serangkaian transformasi elementer terhadap matriks koefisien di atas diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{K_{12}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & 1-D \\ -(D+1) & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{B_1(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -(D+1) & 0 \\ D+2 & 0 & 1-D \\ -(D+1) & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}(D+1)\begin{bmatrix} 1 & D+1 & 0 \\ -1 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D+2 & (D+1)(D+2) & 1-D \\ -(D+1) & (D+1)-(D+1)^2 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{21}(-D-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (D+1)(D+2) & 1-D \\ -(D+1) & (D+1)-(D+1)^2 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ D+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{31}(D+1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (D+1)(D+2) & 1-D \\ 0 & (D+1)-(D+1)^2 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ D+2 & 1 & 0 \\ -(D+1) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{23}(D)\begin{bmatrix} 1 & D+1 & 0 \\ -1 & -D & 0 \\ 0 & D & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (4D+2) & 1-D \\ 0 & D & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{23}(-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5D-7 \\ 0 & D & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -(D+1) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
K_2(\tfrac{1}{2})\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D & 1 \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5D-7 \\ 0 & \frac{1}{2}D & D+2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
K_{32}(5D+7)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{2}(D+1)(5D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{2}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{5D^2+9D+4}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{32}(-\tfrac{1}{2}D)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{2}(D+1)(5D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{2}(5D^2+7) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5D^2+9D+4}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -\frac{5}{2}D^2-4D-1 & -\frac{1}{2}D & 2D+1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_3(2)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{2}(D+1)(5D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{2}(5D^2+7) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5D^2+9D+4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -(5D^2+8D+2) & -D & 4D+2 \end{bmatrix}
$$

$$
K_3(\tfrac{1}{5})\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(D+1)(5D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+4/5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -(5D^2+8D+2) & -D & 4D+2 \end{bmatrix}
$$

Dari sini diperoleh matriks bentuk normal:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = PAQ, \text{ di mana}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -(5D^2+8D+2) & -D & 4D+2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}$$

Dengan transformasi linear $Y = QZ$ untuk membawa $AY = H$ ke dalam $AQZ = H$.

Dari $PAQZ = NZ = PH$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -(5D^2+8D+2) & -D & 4D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ e^x \end{bmatrix}$$

$z_1 = 0$; $z_2 = x - 4e^x$

$$\left(D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5}\right)z_3 = 4De^x + 2e^x - Dx = 6e^x - 1.$$

Penyelesaiaan persamaan diferensial linear biasa homogen yang terkait $\left(D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5}\right)z_3 = 0$ atau $(5D^2 + 9D + 4)z_3 = 0$ dan akar-akar persamaan karaterisk $5m^2 + 9m + 4 = 0$ adalah bilangan real -4/5 dan -1, maka penyelesiaan komplementernya $z_c = c_1 e^{-4x/5} + c_2 e^{-x}$.

Karena $(D^2-D)(6e^x - 1) = 0$. $(5D^2 + 9D + 4)\, z_3 = 30e^x - 5$

$(D^2-D)(5D^2 + 9D + 4)\, z_3 = (D^2-D)(30e^x - 5) = 0$

$(D^2-D)\, z_3 = 0$. dari sini diperoleh D = 0 atau D = 1, maka penyelesaiaan khusus dari persamaan diferensial biasa linear itu adalah $z_p = c_3 + c_4e^x$.

$z_p = c_3 + c_4e^x$, $z_p' = z_p'' = c_4e^x$.

$(5D^2 + 9D + 4)\, z_p = 5\, c_4e^x + 9\, c_4e^x + 4(c_3 + c_4e^x) = 30e^x - 5$.

Dari sisni diperoleh $18c_4e^x + 4c_3 = 30e^x - 5$, maka $c_4 = 5/3$ dan $c_3 = -5/4$

Penyelesaiaan khusus zp = $\frac{5}{3}e^x - 5/4$.

Maka penyelesaiaan umum dari persamaan diferensial biasa linear yang dimaksud adalah $z_3 = y_c + y_p = c_1 e^{-\frac{4x}{5}} + c_2 e^{-x} + \frac{5}{3}e^x - 5/4$.

$Y = QZ$, maka penyelesaian umum dari sistem tersebut dimaksudkan adalah:

$Y = QZ$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x-4e^x \\ c_1e^{-\frac{4}{5}x} + c_2e^{-x} + \frac{5}{3}e^x - \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 3c_1e^{-\frac{4x}{5}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

$$y_2 = 12c_1e^{-\frac{4x}{5}} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}$$

$$y_3 = -2c_1e^{-\frac{4}{5}x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{4}$$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Setiap matriks polinomial $A(x) = [a_{ij}(x)]$ yang berukuran $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai suatu polinomial dengan koefisien matriks atas-$\mathfrak{R}$ (Polinomial matriks) yaitu: $A(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_p x^p$.

2. Jika $A(x)$, $B(x)$ polinomial matriks bujur sangkar $n \times n$ dengan koefisien utama dari $B(x)$ tak-singular, maka terdapat dengan tunggal polinomial matriks $F_1(x)$, $F_2(x)$ dan $G_1(x)$, $G_2(x)$ di mana $G_1(x)$, $G_2(x)$ adalah polinomial matriks nol atau berderajat kurang dari derajat $B(x)$ sedemikian sehingga

   $A(x) = F_1(x)\,B(x) + G_1(x)$ dan $A(x) = F_2(x)\,B(x) + G_2(x)$

3. Jika polinomial matriks $A(x)$ berukuran $n \times n$ dibagi oleh $(xI_n - B_n)$, dengan sisa matriks R_1, R_2 atas-$\mathfrak{R}$, maka R_1,R_2 masing-masing merupakan nilai fungsional kanan dan nilai fungsional kiri dari $A(x)$

4. Polinomial matriks skalar $A(x) = a(x).I$ habis dibagi oleh $(xI - B)$ bila $a(B) = O$.

5. Setiap matriks A memenuhi persamaan karakteristiknya yaitu $\Phi(A) = O$.

6. Sebarang matriks polinomial dapat direduksi ke bentuk Normal Smith melalui serangkaian transformasi elementer.

7. Setiap sistem persamaan diferensial linear biasa dapat diselesaikan melalui serangkaian transformasi elemter terhadap matriks koefisien dari sistem persamaan tersebut (Matriks yang elemen-elemennya berupa polinomial operator diferensial) sehingga diperoleh sistem yang ekivalen tetapi lebih mudah penyelesaiaannya.

B. Saran

Materi yang dapat dibahas lebih lanjut adalah similaritas karakteristik matriks polinomial. Similaritas karakteristik matriks polinomial ini lebih lanjut dapat diterapkan untuk menyelesaikan sistem linear dari persamaan diferensial linear.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. JR. Ph.D. (1962). *Theory and Problems of Matrices*, New Delhi: Tat McGraw-Hill Publishing Company Ltd.

Ayres, Frank. JR. Ph.D. (1965). *Theory and Problems of Moern Algebra*, New York: Schaum Publishing Co.

Frazer. R.A, D,Sc, F.R. Ae. S,F.I.Ae.S., F.R.S., F.R.S W.J Duncan, C.B.E., D.Sc., F.R.S and A.R.Collar,C.B.E., M.A., D.Sc., F.R.S. (1965). *Elementary Matrices and Some Applications to Dinamycs and Differential Equation*, Present by Britain Cambridge the University Press.

Ferrar. W.L, M.A; D.Sc. (1951). *Finite Matrices*, Oxford at the Clarendon Press.

Narayana, Santi. (1976). *A Text Book of Matrices*, Eight Edition. New Delhi: Scand & Company Ltd, Ram Nagger.

Maxstein, F. (1976). *Introduction to Matrices and Determinant*, Inc. Belmont, California: Wadsworth publishing Company.

Perlis, Sam. (1958). *Theory of Matrices*, Inc Reading, Massachusetts, U.S.A: Addison-Wesley Publishing Company.