NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA LIMIT MATRIKS DAN RANTAI *MARKOV* SERTA PENERAPANNYA PADA MODEL EKONOMI *LEONTIEF*

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :
Susana Galih Nugrohorini
NIM : 981414048

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA LIMIT MATRIKS DAN RANTAI *MARKOV* SERTA PENERAPANNYA PADA MODEL EKONOMI *LEONTIEF*

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :
Susana Galih Nugrohorini
NIM : 981414048

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

PADA LIMIT MATRIKS DAN RANTAI *MARKOV*

SERTA PENERAPANNYA PADA MODE EKONOMI *LEONTIEF*

Oleh :

Susana Galih Nugrohorini

NIM : 981414048

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Wanty Widjaja, S.Pd, M.Ed.

Yogyakarta, 12 Maret 2004

HALAMAN PENGESAHAN

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA LIMIT MATRIKS DAN RANTAI *MARKOV* SERTA PENERAPANNYA PADA MODEL EKONOMI *LEONTIEF*

Dipersiapkan dan ditulis oleh :

Susana Galih Nugrohorini

NIM : 981414048

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 26 Maret 2004
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, Msi.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, MT.	....
Anggota	Wanty Widjaja, S.Pd, M.Ed.	....
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si.	....
Anggota	Drs. B. Susanta	....

Yogyakarta, 26 Maret 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Jadilah diri sendiri, dan tahu bahwa siapapun yang menemukan diri sendiri akan menghapuskan penderitaannya. (Matthew Arnold)

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

- Bapak dan Ibu
- Saudara-saudaraku : Mas Heru, Mbak Iwuk, Mbak Tutik, Mas Ipung, Mas Didik, Mbak Ari serta Dhik Sindu
- Ponakanku : Jalu, Nana, Wisnu, Shindu, Adya dan Ahnaf
- Kekasihku Mas Bowo

terima kasih atas kasih sayangnya serta kesabarannya dalam membimbing penulis hingga terwujud cita-citanya

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 Maret 2004

Penulis

Susana Galih Nugrohorini

ABSTRAK

Skripsi ini membahas nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov* serta penerapannya pada model ekonomi *Leontief*.

Matriks $X \neq 0$ berordo n x 1 yang memenuhi $AX = \lambda X$ dinamakan vektor eigen dari matriks A, sedangkan skalar λ dinamakan nilai eigen dari matriks A yang terkait dengan X. Dalam mencari nilai eigen dan vektor eigen diperlukan pula konsep polinom karakteristik P_A yaitu $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ dengan I adalah matriks identitas yang berordo n x n.

Selanjutnya akan dibahas tentang limit matriks dari barisan matriks dengan elemen bilangan kompleks. Berdasarkan pengertian limit matriks akan dibahas rantai *Markov* yang merupakan proses peralihan dari keadaan satu ke keadaan yang lain.

Salah satu penerapan rantai *Markov* yaitu pada model ekonomi *Leontief* akan dibahas dalam tulisan ini. Model ini dikelompokkan menjadi dua yaitu model masukan keluaran atau model "tertutup" dan model produksi atau model "terbuka".

ABSTRACT

This thesis discusses an eigenvalue and an eigenvector of matrix limit and *Markov* chain with applications on the *Leontief* economic model.

An n x 1 matrix $X \neq 0$ which satisfies $AX = \lambda X$ is called an eigenvector of A, while scalar λ is called an eigenvalue of A associated with matrix X. In finding eigenvalue and eigenvector of matrix A, we need the concept characteristic polynomial P_A which has the form of $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ where I is an n x n identity matrix.

Furthermore the concept of matrix limit, in the case the limit of a sequence of matrix with complex numbers will be discussed. Based on the understanding of matrix limit we will discuss *Markov* chain, which is change from one state to other states.

One of the applications of *Markov* chain namely on the *Leontief* economic model will be the addressed. The *Leontief* model is classified into two categories : *Leontief* input output model or the "closed" model on the *Leontief* production model or the "open" model.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Pengasih, yang telah melimpahkan berkah dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan jidul "Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Limit Matriks dan Rantai *Markov* serta Penerapannya pada Model Ekonomi *Leontief*".

Dengan konsep matriks dapat dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen. Matriks sendiri mempunyai definisi dan sifat tersendiri tentang limit matriks yang kemudian menjadi dasar dalam mempelajari Rantai *Markov* yang merupakan proses peralihan dari keadaan ke keadaan lain. Dengan berbagai konsep tersebut maka akan diterapkan dalam suatu model ekonomi yaitu model ekonomi yaitu model ekonomi *Leontief*.

Dalam proses awal sampai akhir penulisan, penulis sangat menyadari dan merasakan besarnya bantuan yang telah diberikan oleh berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Wanty Widjaja, S.Pd, M.Ed selaku dosen pembimbing yang telah mengarahkan serta membimbing hingga terselesainya skripsi ini.
2. Bapak M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si dan Bapak Drs. B. Susanta selaku dosen penguji atas saran dan kritiknya sehingga membuat skripsi ini lebih sempurna.
3. Dosen-dosen JPMIPA atas ilmunya yang diberikan pada penulis.
4. Pak Narjo dan Pak Sugeng sekretariat JPMIPA atas bantuannya selama penulis menempuh pendidikan.

5. Bapak dan Ibu atas kepercayaannya, serta dorongannya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini.
6. Saudara-saudaraku serta ponakanku atas bantuan, dorongan serta kasih sayangnya.
7. Mas Bowo atas kesetiaannya serta kasih sayangnya.
8. Agus, Kirjo, Yoseph serta Lusi, Wuri "gedhe", Susana, Sugih, Ina, m'Kanthi, m' Esti, Hendri, dan spesial buat Mirna (thanks idenya) terima kasih atas persahabatannya.
9. Teman-teman angkatan 98 terima kasih atas kebersamaannya selama ini.
10. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. I love You all.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, maka masukan, saran dan kritik dari pembaca yang sifatnya membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini.

Penulis

Daftar Isi

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk persegi panjang. Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks A dengan m baris dan n kolom adalah :

$$\begin{array}{rcl} & \textit{Kolom } j & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \textit{Baris } i \end{array}$$

Matriks A dikatakan berordo m x n (ukuran baris selalu disebutkan dahulu) dan elemen a_{ij} berada pada baris ke i dan kolom ke j.

Kita telah pelajari bahwa bila dari suatu matriks A yang berordo n x n maka determinan dari matriks A_{nxn} dapat didefinisikan, juga akan dapat dicari invers dari matriks A yang berordo n x n. Dengan menggunakan determinan serta invers dari matriks A_{mxn} tersebut maka akan diperoleh juga nilai eigen dan vektor eigen. Apabila matriks A adalah matriks yang berordo n x n, dan sebuah matriks bukan nol yang berordo n x 1 (misalkan matriks **X**) sedemikian rupa sehingga AX = λ X, maka matriks X dinamakan vektor eigen bagi matriks A_{nxn}, sedangkan skalar λ dinamakan nilai eigen bagi matriks A_{nxn} yang terkait dengan matriks X.

Dalam membahas nilai eigen dan vektor eigen juga diperlukan suatu hal yaitu polinom karakteristik (P_A) dari matriks A_{nxn} yang didefinisikan :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

dimana I adalah matriks identitas yang berordo n x n. Dengan menggunakan persamaan dari polinom karakteristik ini akan didapat sebuah bentuk fungsi f (λ) dari matriks A_{nxn} tersebut. Kemudian dengan menggunakan sifat dari determinan dan invers serta fungsi f (λ) dari matriks A yang berordo n x n, dapat diperoleh nilai eigen dan vektor eigen dengan beberapa langkah yaitu :

1. Menentukan polinom karakteristik yang diperoleh dengan persamaan $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, dengan I adalah matriks identitas yang berordo n x n.
2. Menentukan nilai eigen dari matriks A_{nxn} dengan cara menentukan akar-akar dari persamaan $P_A(\lambda) = 0$.
3. Untuk setiap nilai eigen λ_j, kita tentukan vektor eigen dengan cara memecahkan sistem persamaan homogen $(\lambda_j I - A)X = 0$.

Selain hal tersebut matriks mempunyai definisi serta sifat tersendiri tentang limit dari matriks tersebut. Masalah limit matriks ini juga dipengaruhi oleh adanya nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen digunakan dalam pembahasan limit matriks.

Selain masalah limit matriks, masalah lain yang dibahas adalah masalah rantai *Markov*. Dalam pembahasan rantai *Markov* digunakannya limit matriks akan menimbulkan konsep baru antara lain konsep peluang dari suatu matriks, peluang vektor dari suatu matriks, serta matriks transisi.

Konsep-konsep di atas akan digunakan dalam menyelesaikan model ekonomi. Model ekonomi sendiri sangatlah beragam, antara lain model yang berkaitan dengan pengeluaran, pemasukan barang, model yang berhubungan dengan masalah pendapatan serta kerugian dari suatu penjualan barang, dan masih banyak model ekonomi yang lain yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa model ekonomi tersebut dapat dipecahkan dengan beberapa cara, salah satunya dengan menggunakan matematika.

Dalam pembahasan selanjutnya, model ekonomi yang akan dibahas adalah model ekonomi *Leontief*, yang terdiri dari model tertutup *Leontief* dan model terbuka *Leontief*. Ada suatu keunikan dalam membahas model ekonomi ini karena dalam hal ini nilai eigen dan vektor eigen dikenal atau disebut dengan nilai harga dan vektor harga atau vektor produksi.

Berdasarkan keterhubungan tersebut di atas, penulis tertarik untuk mendalami konsep nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov* serta penerapannya pada model ekonomi Leontief dan menjadikannya sebagai topik dalam penulisan ini.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan nilai eigen dan vektor eigen ?
2. Apa yang dimaksud dengan limit matriks dan rantai *Markov* ?

3. Konsep-konsep apa saja yang terkait dalam limit matriks dan rantai *Markov* ?
4. Bagaimana penggunaan nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov* pada model ekonomi *Leontief* ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengenal serta memahami dengan jelas tentang konsep dari matriks, nilai eigen, vektor eigen, limit matriks, rantai *Markov*, serta penerapannya pada model ekonomi *Leontief*.

D. Metode penulisan

Metode penulisan yang digunakan dalam membahas topik ini adalah metode studi pustaka. Penulis menggunakan acuan dari beberapa buku seperti yang terdapat pada Daftar Pustaka.

E. Pembatasan Masalah

Dalam membahas topik ini penulis hanya akan membahas nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov* serta penerapannya pada model ekonomi *Leontief*.

F. Sistematika Pembahasan

Bab I yang membahas tentang pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan, pembatasan masalah, serta sistematika pembahasan.

Bab II berisi tentang matriks, invers matriks, determinan matriks, polinom karakteristik dan nilai eigen dan vektor eigen. Bab III akan membahas tentang limit matriks dan rantai *Markov* yang sebelumnya akan dibahas tentang pendahuluan limit.

Bab IV akan membahas penerapannya pada model ekonomi *Leontief*, di dalam pembahasannya akan dibahas model tertutup dan model terbuka.

Bab V akan berisi tentang kesimpulan dari pembahasan bab sebelumnya.Yang kemudian dilanjutkan dengan daftar pustaka yang memuat acuan yang digunakan penulis dalam menyusun skripsi ini.

BAB II

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Dalam bab ini akan dibahas masalah yang menyangkut nilai eigen dan vektor eigen. Dalam pembahasannya akan dibahas pula konsep matriks, invers matriks, determinan matriks serta polinom karakteristik dari matriks.

Pembahasan dalam bab ini tidak diberikan secara mendalam karena hanya merupakan dasar untuk pembahasan bab selanjutnya.

A. MATRIKS

Definisi 2.1

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom. Matriks selalu disimbolkan dengan huruf kapital dan bilangan yang menyusun matriks disimbolkan dengan huruf kecil. Matriks $A_{mxn} = (a_{ij})$ yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berordo m x n dan ditulis sebagai berikut :

$A_{m \times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, huruf i menyatakan indeks baris dan j menyatakan indeks kolom, dengan i, j = 1, 2, …, n.

Matriks persegi adalah matriks yang berordo n x n. Himpunan elemen a_{ii} disebut diagonal utama, i = 1, 2, …, n. Matriks ini sering disebut dengan matriks berordo n saja.

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen diagonal utamanya tidak semuanya nol dan elemen lainnya sama dengan nol atau $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$

Matriks identitas yang biasa dilambangkan dengan I adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya 1 atau $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$.

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol.

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua unsur di bawah diagonal utamanya nol, atau $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang semua unsur di atas diagonal utamanya nol, atau $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

Matriks persegi $A = (a_{ij})$ disebut matriks simetris jika $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Transpos dari matriks $A_{nxm} = (a_{ij})$ yang biasa dilambangkan dengan (A^T) adalah matriks $A_{mxn} = (a_{ij})$ yang didapat dengan mempertukarkan elemen-elemen baris dan elemen-elemen kolom.

Dalam pembahasan selanjutnya matriks yang digunakan adalah matriks dengan elemen bilangan kompleks.

Matriks dikatakan mempunyai bentuk eselon baris jika mempunyai sifat sebagai berikut :

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (Kita menamakan elemen ini 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.

3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah, terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tingi.

B. INVERS MATRIKS

Dalam hal ini akan dibahas tentang pengertian dari invers matriks dan cara menentukannya dengan menggunakan operasi baris elementer.

Definisi 2.2

Suatu matriks yang diperoleh dari matriks satuan I dengan melakukan satu atau lebih operasi baris elementer disebut matriks elementer.

Definisi 2.3

Matriks B dikatakan ekuivalen baris dengan matriks A jika terdapat barisan matriks-matriks elementer E_1 , E_2 , …, E_k , sehingga

$B = E_k \, E_{k-1} \ldots E_1 \, A$

Dengan perkataan lain, matriks B ekuivalen dengan matriks A jika matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan operasi-operasi baris elementer yang berhingga banyaknya.

Definisi 2.4

Suatu matriks persegi A dikatakan invertibel (dapat dibalik), jika dapat ditemukan matriks B sedemikian hingga AB = BA = I. Matriks B ini dinamakan matriks balikan atau invers dari matriks A.

Invers dari suatu matriks juga dapat diperoleh dengan melakukan operasi-operasi baris elementer pada I_n dengan menggunakan operasi-operasi baris elementer yang sama yang digunakan untuk mereduksi A menjadi I_n.

Contoh 2.1 Carilah invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$!

Penyelesaian : Kita akan menggunakan operasi baris elementer.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3 = b_3 - b_1]{b_2 = b_2 - 2b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_3 = b_3 + 2b_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_3 = -b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_1 = b_1 - 3b_3]{b_2 = b_2 + 3b_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1 = b_1 - 2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jadi invers dari matriks A adalah $\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Tidak semua matriks persegi mempunyai invers. Matriks yang tidak mempunyai invers dinamakan matriks singular. Selanjutnya, invers dari matriks A dilambangkan dengan A^{-1}.

Teorema 2.1

Jika B dan C dua matriks yang memenuhi AB = BA = I dan AC = CA = I maka B = C. Dengan kata lain invers dari suatu matriks adalah tunggal.

Bukti teorema 2.1

Kita harus membuktikan bahwa B = C, untuk itu kita pakai persamaan yang dipenuhi oleh B dan C yaitu :

B = BI = B (AC) = (BA) C = IC = C. Dapat dilihat bahwa I = AC dan BA = I dan B = C.

Jadi invers dari suatu matriks adalah tunggal. ■

Teorema 2.2

Jika matriks A dan B adalah matriks yang mempunyai invers yang berordo sama, maka :

1. AB mempunyai invers.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bukti Teorema 2.2:

Karena ada matriks A dan B yang merupakan matriks yang berordo sama dan mempunyai invers maka A^{-1} dan B^{-1} adalah matriks balikan dari matriks A dan B yang berordo sama.

Kita perlihatkan bahwa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, menurut definisi 2.4 jika ditemukan matriks $B^{-1}A^{-1} \neq 0$ sedemikian hingga $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ maka matriks AB mempunyai invers dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dimana

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$

Hal ini menunjukkan bahwa $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Lemma 2.1

Jika diketahui matriks $A_1, A_2, \ldots, A_m$ matriks yang mempunyai invers dan berordo sama maka :

1. $A_1.A_2.\ldots.A_m$ mempunyai invers.
2. $(A_1.A_2.\ldots.A_m)^{-1} = (A_m^{-1}\ldots.A_2^{-1}.A_1^{-1})$

Bukti lemma 2.1 :

1. Akan dibuktikan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mempunyai invers untuk m = 1, 2, …, n

   Andaikan benar untuk n = 2 maka $(A_1.A_2)(A_2^{-1}.A_1^{-1}) = (A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1.A_2) = I$

   Maka untuk n = 3 akan diperlihatkan

   $$(A_1.A_2.A_3)(A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1}) = (A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1})(A_1.A_2.A_3) = I$$

   $$(A_1.A_2)A_3.A_3^{-1}(A_2^{-1}.A_1^{-1}) = (A_3^{-1}.A_2^{-1})A_1^{-1}A_1(A_2.A_3) = I$$

   $$(A_1)A_2.A_2^{-1}(A_1^{-1}) = (A_3^{-1})A_2^{-1}A_2(A_3) = I$$

   $$A_1.A_1^{-1} = A_3^{-1}.A_3 = I$$

   Jadi benar untuk n = 3.

Untuk m = 1, 2, ….., n.

Akan diperlihatkan bahwa

$$\left(A_1.A_2.A_3.....A_n\right)\left(A_n^{-1}.....A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1}\right)=\left(A_n^{-1}.....A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1}\right)\left(A_1.A_2.A_3....A_n\right)=I$$

$$\begin{array}{ccccc} \left(A_1.A_2.A_3.....A_{n-1}\right)A_n.A_n^{-1}\left(A_{n-1}^{-1}.....A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1}\right) & = & \left(A_n^{-1}.....A_3^{-1}.A_2^{-1}\right)A_1^{-1}A_1\left(A_2.A_3....A_n\right) & = & I \\ \vdots & = & \vdots & = & I \\ A_1.A_1^{-1} & = & A_n^{-1}.A_n & = & I \end{array}$$

Jadi $A_1.A_2.....A_m$ mempunyai invers.

2. Akan dibuktikan $(A_1.A_2.....A_m)^{-1} = \left(A_m^{-1}....A_2^{-1}.A_1^{-1}\right)$.

Telah dibuktikan bahwa $\left(A_1.A_2.A_3.....A_n\right)\left(A_n^{-1}.....A_3^{-1}.A_2^{-1}.A_1^{-1}\right)=I$. Menurut definisi 2.4 maka $(A_1.A_2.....A_m)^{-1} = \left(A_m^{-1}....A_2^{-1}.A_1^{-1}\right)$. ■

<u>Contoh 2.2</u> Carilah invers dari matriks A = $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

<u>Penyelesaian :</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_2=\sqrt{2}b_2]{b_1=\sqrt{2}b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_2=\frac{1}{2}b_2]{b_1=\frac{1}{2}b_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_2=b_2+4b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_2=\frac{1}{13}b_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{26}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1 = b_1 - 3b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{-3\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Jadi invers dari matriks A adalah $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{-3\sqrt{2}}{26} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. DETERMINAN SUATU MATRIKS

Untuk setiap matriks persegi $A_{n \times n} = (a_{ij})_{n \times n}$, dengan $a_{ij} \in \mathbf{C}$, dapat dicari determinan dari matriks A, atau biasa ditulis sebagai det (A) atau $|A|$. Sebelum melanjutkan ke definisi umum dari determinan akan ditinjau dulu beberapa definisi dan teorema berikut :

<u>Definisi 2. 5</u>

Jika A adalah suatu matriks persegi, maka sub matriks berordo

(n – 1) x (n – 1) diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dinamakan minor anggota aij dan dilambangkan M_{ij}. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor anggota a_{ij}.

<u>Definisi 2.6</u>

Jika matriks A berordo n x n determinan matriks A adalah sebagai berikut :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) \text{ dan}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}.$$

Secara umum determinan untuk matriks berordo n x n sebagai berikut :

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

Matriks A dikatakan matriks singular jika det (A) = 0 dan matriks A dikatakan matriks tak singular jika det (A) $\neq$ 0.

Contoh 2.3 Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Carilah det (A) !

Penyelesaian : det (A) = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

= 2 (6-8) – 5(18-10) + 4(12-5)

= 2 (-2) – 5 (8) + 4 (7)

= -4- 40 + 28 = - 16.

Contoh 2.4 Carilah semua nilai λ jika diketahui determinan dari matriks A =

$$\det(A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Penyelesaian : A adalah matriks 2 x 2 maka :

det (A) = (λ -1) (λ -4) – (-2) (1), dimana det (A) = 0.

(λ -1) (λ -4) + 2 = 0

$\lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

(λ -2) (λ -3) = 0

$\lambda_1 = 2$ atau $\lambda_2 = 3$

Jadi nilai λ untuk matriks A dengan det (A) = 0 adalah $\lambda_1 = 2$ atau $\lambda_2 = 3$.

D. POLINOM KARAKTERISTIK

Jika diberikan matriks A berordo n x n, $a_{ij} \in \mathbf{C}$ dengan A = (a_{ij}). Polinom karakteristik dari A, ditulis P_A didefinisikan sebagai berikut :

$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, dengan I adalah matriks identitas berordo n x n dan λ adalah suatu skalar.

Rumus diatas dapat ditulis secara lengkap sebagai berikut :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dari persamaan det (λ I – A) akan didapat polinom dalam berderajat n dalam variabel λ dan dinamakan polinom karakteristik.

<u>**Contoh 2.5**</u> Tentukan Polinom karakteristik dari matriks : $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{pmatrix}$!

<u>Penyelesaian :</u>

$P_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$

$$= \det \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & i \\ -1-i & \lambda - 4 + i \end{pmatrix}$$

$$= [(\lambda-1)(\lambda-4+i)] - [(-1-i)(i)]$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + i\lambda + 3$$

Jadi polinom karakteristik dari matriks B adalah $\lambda^2 - 5\lambda + i\lambda + 3$.

E. NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Banyak penerapan dalam kehidupan ini mengharuskan kita menemukan suatu matriks bukan nol yang memenuhi $AX = \lambda X$, dengan $A = (a_{ij})$ adalah matriks berordo n x n, $a_{ij} \in \mathbf{C}$ yang diketahui dan λ adalah skalar. Misalnya penerapan dalam pertumbuhan populasi menurut kelompok umur, dalam mengetahui pewarisan genetika juga pada model ekonomi dan masih banyak lagi penerapan yang menggunakan nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.7

Jika A adalah matriks berordo n x n, maka matriks tak nol X berordo n x 1 yang memenuhi $AX = \lambda X$ dinamakan vektor eigen dari A, sedangkan skalar λ dinamakan nilai eigen dari A yang terkait dengan X.

Contoh 2.6 Selidiki apakah X = $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen dan carilah nilai eigen dari matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?.

Penyelesaian :

$AX = \lambda X$

$AX = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Jadi X adalah vektor eigen bagi A yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 5$.

Vektor eigen dan nilai eigen dapat juga dicari dengan menggunakan polinom karakteristik, dengan tiga langkah berikut ini :

1. Tentukan polinom karakteristik dari matriks A yaitu

   $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

2. Tentukan nilai-nilai eigen matriks A dengan cara menemukan akar-akar λ_j dari persamaan karakteristik $P(\lambda) = 0$.
3. Untuk setiap nilai eigen, tentukan vektor eigen yang terkait dengan cara memecahkan sistem persamaan linear homogen $(\lambda_j I - A)X = 0$.

Teorema 2.3

Diketahui A matriks persegi berordo n dan I adalah matriks identitas berordo n. Suatu skalar λ adalah nilai eigen dari A bila hanya bila $|\lambda I - A| = 0$.

Bukti teorema 2.3

Menurut definisi 2.6, λ adalah nilai eigen dari matriks A bila hanya bila terdapat vektor eigen tak nol X sedemikian sehingga $AX = \lambda X$. Persamaan ini ekuivalen dengan $(\lambda I - A)X = 0$, yang mempunyai penyelesaian non trivial bila hanya bila $(\lambda I - A)$ adalah matriks singular yaitu bila $|\lambda I - A| = 0$.

Jadi λ adalah nilai eigen dari matriks A bila hanya bila $|\lambda I - A| = 0$. ■

<u>Contoh 2.7</u> Tentukan nilai eigen dan vektor eigen bagi $A = \begin{pmatrix} 0 & 8i \\ -2i & 8i \end{pmatrix}$.

<u>Penyelesaian :</u>

Langkah 1 : Polinom karakteristik bagi A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8i \\ -2i & 8i \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda & -8i \\ 2i & \lambda - 8i \end{pmatrix}$$

$$= [\lambda(\lambda - 8i)] - [(2i)(-8i)]$$

$$= \lambda^2 - 8i\lambda - 16$$

Langkah 2 : Berdasarkan pemfaktoran $\lambda^2 - 8i\lambda - 16 = (\lambda - 4i)(\lambda - 4i)$, dengan mudah kita lihat bahwa akar-akar bagi persamaan karakteristik $P(\lambda) = 0$ adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 4i$. Akar-akar itu merupakan nilai eigen bagi A.

Langkah 3 : Untuk menemukan vektor eigen yang terkait $\lambda_1 = \lambda_2 = 4i$, kita pecahkan sistem linear homogen $(\lambda_1 I - A)X = 0$. Matriks yang terbentuk adalah :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4i & -8i & 0 \\ 2i & -4i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{b_2} = ib_2]{\overline{b_1} = ib_1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{b_2} = b_2 - \frac{1}{2}b_1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistem yang setara dengan matriks terakhir ini adalah $-4x_1 + 8x_2 = 0$. Banyak solusi bagi sistem ini, salah satunya jika kita ambil $x_1 = 1$ akan kita peroleh

$x_2 = \frac{1}{2}$, sehinggga $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen bagi A yang terkait dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = 4i$.

Jadi matriks A mempunyai nilai eigen $\lambda = 4i$ dan vektor eigen $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Jika A matriks persegi berordo n, dengan menguraikan $|\lambda I - A|$ maka akan didapat polinom yang berderajat n dalam variabel λ dan dinamakan polinom karakteristik. Persamaan $|\lambda I - A| = 0$ disebut persamaan karakteristik dari matriks A.

Definisi 2.8

Matriks persegi A dan B berordo n disebut saling similar jika terdapat matriks tak singular P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$.

Teorema 2.4

Jika matriks A similar terhadap matriks B, maka matriks B similar terhadap matriks A.

Bukti teorema 2.4 :

Menurut definisi 2.7, matriks persegi A dan B berordo n disebut saling similar jika terdapat matriks tak singular P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$.

$PAP^{-1} = B$

$P^{-1}(PAP^{-1})P = P^{-1}BP$

$(P^{-1}P)A(P^{-1}P) = P^{-1}BP$

$A = P^{-1}BP = P^{-1}B(P^{-1})^{-1} = P^{-1}BP$

Jadi matriks B similar terhadap matriks A karena ada matriks P^{-1} yang tak singular sedemikian hingga $A = P^{-1}BP$. ■

Teorema 2.5

Jika matriks persegi A dan B berordo n yang saling similar maka matriks A dan B mempunyai nilai eigen yang sama.

Bukti teorema 2.5

Karena matriks A dan B saling similar maka terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $B = P^{-1}AP$. Misalkan nilai eigen dari matriks A adalah λ, maka ada vektor eigen $X \neq 0$ yang memenuhi $AX = \lambda X$. Karena ada matriks P yang dapat dibalik dan $X = P^{-1}PX$ maka

$PAX = \lambda PX$

$PAP^{-1}PX = \lambda PX$, dan misalkan $PX = Y$

$PAP^{-1}Y = \lambda Y$

Y adalah vektor eigen dari matriks PAP^{-1} yang terkait dengan nilai eigen λ. Dimana $B = P^{-1}AP$ maka $BY = \lambda Y$. Ini berarti bahwa λ adalah nilai eigen dari matriks B dengan vektor eigen $B \neq 0$.

Jadi nilai eigen matriks A dan B adalah sama. ■

Definisi 2.9

Jika S = {$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$} adalah himpunan vektor. Himpunan S dikatakan tidak bebas linear jika ada skalar k_r yang tidak semuanya nol, sedemikian sehingga $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$.

Dan himpunan S dikatakan bebas linear jika himpunan ini mempunyai $k_r = 0$.

Teorema 2.6

Diketahui A matriks persegi berordo n. Jika A mempunyai m vektor eigen yang bebas linear, maka A similar terhadap suatu matriks diagonal D yang berordo n.

Bukti teorema 2.6

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_m$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan $X_i = \{X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ni}\}^t$, $\forall$ i = 1, 2, ..., m sedemikian sehingga $AX_i = \lambda_j X_i$, $\forall$ j = 1, 2, ..., n. $\forall$ i = 1, 2, ..., m.

Misalkan P = $[X_1, X_2, \ldots, X_m]$ dan A mempunyai m vektor eigen yang bebas linear maka

$$AP = [AX_1, AX_2, \ldots, AX_m] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_m]$$

$$= [X_1, X_2, \ldots, X_m] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD$$

Jadi AP =PD dimana P matriks dengan elemen vektor eigen yang bebas linear maka P mempunyai invers yaitu P^{-1} sehingga

$$AP = PD$$

$P^{-1}AP = P^{-1}PD$

$P^{-1}AP = D.$

Sehingga $AP = PD$ atau $P^{-1}AP = D$. Jadi matriks A similar terhadap matriks diagonal D. ■

Dari teorema di atas, dapat dikatakan elemen diagonal utama dari matriks diagonal D berupa nilai eigen dari matriks persegi berordo n..

Definisi 2.10

Suatu matriks persegi A berordo n dikatakan dapat didiagonalkan jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$ dengan D adalah matriks diagonal berordo n. Matriks P dikatakan mendiagonalkan A.

Maksud dari pendiagonalan matriks sendiri adalah proses membawa matriks persegi berordo n menjadi suatu matriks diagonal D yang berordo n.

Teorema 2.7

Diketahui A adalah matriks persegi berordo n. Matriks A dapat didiagonalkan bila dan hanya bila matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti teorema 2.7

($\Rightarrow$) Diketahui A adalah matriks persegi berordo n dan A dapat didiagonalkan. Akan dibuktikan matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Karena A dapat didiagonalkan berarti ada matriks P yang mempunyai invers sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, atau $AP = PD$, dengan D adalah matriks diagonal.

Misalkan $P = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Maka $PD = \begin{pmatrix} X_{11}\lambda_1 & X_{12}\lambda_2 & \cdots & X_{1n}\lambda_n \\ X_{21}\lambda_1 & X_{22}\lambda_2 & \cdots & X_{2n}\lambda_n \\ \vdots & & & \\ X_{n1}\lambda_1 & X_{n2}\lambda_2 & \cdots & X_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_{11} & \lambda_2 X_{12} & \cdots & \lambda_n X_{1n} \\ \lambda_1 X_{21} & \lambda_2 X_{22} & \cdots & \lambda_n X_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 X_{n1} & \lambda_2 X_{n2} & \cdots & \lambda_n X_{nn} \end{pmatrix}$

Misalkan $\mathbf{X_i} = [X_{1i}\ X_{2i}\ \dots\ X_{ni}]^t$ $\forall$ i = 1, 2, …, n adalah vektor kolom dari matriks P. Vektor kolom dari PD adalah $\lambda_1\mathbf{X_1}$, $\lambda_2\mathbf{X_2}$, …, $\lambda_n\mathbf{X_n}$ sedangkan vektor kolom dari AP adalah $A\mathbf{X_1}$, $A\mathbf{X_2}$, …, $A\mathbf{X_n}$.

Karena AP = PD maka $A\mathbf{X_i} = \lambda_i\mathbf{X_i}$ $\forall$ i = 1, 2, …, n. P adalah matriks yang mempunyai invers sehingga $|P| \neq 0$. Jadi $\forall$ i = 1, 2, …, n, $\mathbf{X_i}$ adalah vektor eigen tak nol dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i. Karena P mempunyai invers maka $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{X_n}$ bebas linear. Jadi A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

($\Leftarrow$) Diketahui A adalah matriks persegi berordo n dan A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan.

Misalkan matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, yaitu $\{\mathbf{X_1}\ \mathbf{X_2} \dots \mathbf{X_n}\}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Misalkan

$X_i = [X_{1i}\ X_{2i}\ \dots\ X_{ni}]^t \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$ dan $P = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{2n} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$

maka kolom-kolom dari hasil kali AP adalah $A\mathbf{X_i}$. Tetapi $A\mathbf{X_i} = \lambda_1 \mathbf{X_1}, \dots,$

$A\mathbf{X_n} = \lambda_n \mathbf{X_n}$ sehingga

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_{11} & \lambda_2 X_{12} & \cdots & \lambda_n X_{1n} \\ \lambda_1 X_{21} & \lambda_2 X_{22} & \cdots & \lambda_n X_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 X_{n1} & \lambda_2 X_{n2} & \cdots & \lambda_n X_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD$$

dan D adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utama adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Karena vektor kolom dari matriks P bebas linear, maka P adalah matriks yang mempunyai invers. Misalkan P^{-1} adalah invers dari P, karena $AP = PD$ maka $P^{-1}AP = P^{-1}PD$ atau $P^{-1}AP = D$.

Jadi A dapat didiagonalkan. ■

Dari teorema di atas, kita dapatkan langkah-langkah dalam mendiagonalkan matriks persegi berordo n, yaitu :

1. Mencari n vektor eigen yang bebas linear dari A yaitu $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \dots, \mathbf{X_n}$.

2. Membentuk matriks P dengan elemen-elemen $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, ..., $\mathbf{X_n}$ sebagai vektor kolom.
3. Matriks $P^{-1}AP = D$ mempunyai elemen λ_1, λ_2, ..., λ_n yang juga merupakan elemen diagonal utama matriks diagonal dan λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan X_i , $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh 2.8 Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks A !

Penyelesaian :

Polinom karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

didapat nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ adalah vektor tak nol yang memenuhi $(\lambda_1 I - A)X = 0$, yang kemudian didapat bentuk perkalian matriks sebagai berikut $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bentuk dari perkalian matriks ini bersesuaian persamaan $-x_2 - x_3 = 0$ .... 1).

Misalkan kita ambil $x_2 = 1$ maka $x_3 = -1$. Sehingga didapat $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen bagi A yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_1=0$. Dengan cara yang sama didapat vektor eigen $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen bagi A yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_2=1$ dan vektor eigen $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_3 = 2$. Dari vektor eigen yang telah kita dapatkan dibentuk matriks P = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dimana $|P| \neq 0$ sehingga X_1, X_2, X_3 adalah vektor bebas linear.

Didapat $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, sehingga $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = D, dapat dilihat bahwa matriks D mempunyai elemen diagonal yang merupakan nilai eigen.

Jadi matriks A dapat didiagonalkan karena ada matriks P = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ = D, dengan D adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan nilai eigen dari matriks A.

Yang perlu diingat adalah matriks P yang dicari tidak tunggal karena kita dapat memilih sebarang vektor kolom yang membentuk P, asalkan masih memenuhi syarat dari persamaan (1) yang bersesuaian dari bentuk perkalian matriks.

Contoh 2.9 Diberikan matriks B = $\begin{pmatrix} 5i & 3i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$, carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks B !

Penyelesaian :

Polinom karakteristik dari matriks B adalah

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5i & -3i \\ 2i & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5i\lambda - 6$$

Dari persamaan karakteristik P (λ) = 0 didapat akar-akar yang merupakan nilai eigen dari B yaitu λ_1 = 2i, λ_2 = 3i. Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=2i adalah vektor tak nol yang memenuhi (λ_1I-B)X=0, didapat bentuk matriks sebagai berikut

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3i & -3i & 0 \\ 2i & 2i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{b_2} = ib_2]{\overline{b_1} = ib_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{b_2} = b_2 + \frac{2}{3} b_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dari sistem ini didapat bentuk $3x_1 + 3x_2 = 0$. Misalkan kita ambil $x_1 = 1$ maka $x_2 = -1$. Akibatnya didapat $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen bagi B yang terkait dengan nilai eigen λ_1=2i. Dengan cara yang sama didapat vektor eigen $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ bagi B yang terkait dengan nilai eigen λ_2=3i. Dari vektor eigen yang telah kita dapatkan dibentuk matriks P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, dimana $|P| \neq 0$ sehingga X_1,

X_2 adalah vektor bebas linear. Selanjutnya didapat $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, sehingga

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}$ = D. Dapat dilihat bahwa matriks D mempunyai elemen diagonal yang merupakan nilai eigen. Jadi matriks A dapat didiagonalkan karena ada matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga $P^{-1}BP = D$, dengan D adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan nilai eigen dari matriks B.

Namun demikian perlu diperhatikan bahwa tidak semua matriks dapat didiagonalkan. Berikut akan diberikan contoh matriks yang tidak dapat didiagonalkan.

Contoh 2.10

Perlihatkan bahwa matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tidak dapat didiagonalkan !

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda_1=3$ dan $\lambda_2=2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1=3$ adalah vektor tak nol yang memenuhi

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yang jika disederhanakan akan memberikan

penyelesaian $x_2 = x_3$, misalkan kita ambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = 0$ maka didapat

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yang merupakan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_1 = 3$.

Dengan cara yang sama didapat vektor eigen $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang terkait dengan

nilai eigen $\lambda_2 = 2$. Hanya ada dua vektor eigen yang bebas linear.

Berdasarkan teorema 2.7, matriks persegi A berordo n dapat didiagonalkan jika mempunyai n buah vektor eigen yang bebas linear. Pada contoh diatas, n = 3 tetapi hanya ada dua vektor eigen yang bebas linear. Jadi A tidak dapat didiagonalkan.

BAB III

LIMIT MATRIKS DAN RANTAI MARKOV

Dalam pembahasan selanjutnya akan digunakan pengertian limit. Khususnya limit dari suatu matriks.

Oleh karena itu dalam bab ini akan dibahas pengertian limit, limit matrik, selain itu akan dibahas juga tentang rantai *Markov* yang merupakan perluasan dari limit matriks dimana matriks yang didapat dari suatu sistem yang bergerak dari keadaan ke keadaan dan menerapkannya pada masalah nyata.

A. Pendahuluan Limit

Dalam pembahasan ini, akan dibahas tentang limit dari barisan A, A^2, A^3, ..., A^n, ... dengan A adalah matriks persegi dengan elemen bilangan kompleks. Sebelumnya akan dibahas tentang limit barisan bilangan kompleks yang diawali dengan pembahasan limit barisan bilangan real.

Suatu fungsi dengan peubah bilangan bulat positip, yang dinyatakan oleh f (n) atau U_n di mana n = 1, 2, 3, ... dinamakan suatu barisan. Jadi suatu barisan U_1, U_2, U_3, ... adalah susunan bilangan yang terurut sesuai dengan urutan bilangan bulat positif.

Barisan bilangan real merupakan suatu fungsi dari **N** ke dalam **R.** Jadi, fungsi $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ atau $f(n) \in \mathbf{R}$ dengan $n \in \mathbf{N}$ adalah barisan bilangan real. Biasanya f (n) dinyatakan dengan S_n atau X_n yakni suatu huruf dengan diberi indeks n, dan dinamakan elemen atau suku ke-n dari barisan.

Definisi 3.1

Barisan bilangan real <S_n> dikatakan konvergen jika terdapat S $\in$ **R** dengan sifat untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N $\in$ **N** sehingga untuk semua n $\in$ **N** dengan n $\geq$ N berlaku $|S - S_n| < \varepsilon$.

Bilangan S dinamakan limit <S_n> untuk $n \to \infty$ dan ditulis

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ atau dapat juga ditulis limit S_n = S

Jika barisan <S_n> yang mempunyai limit S ini maka dikatakan <S_n> konvergen ke limit S yang ditulis dengan $S_n \to S$.

Jadi <S_n> konvergen, jika limit S_n ada dan limit ini di dalam **R**, dengan demikian barisan bilangan real <S_n > adalah konvergen, jika :

1. $\exists S \in \mathbf{R}$ dengan sifat
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{N} \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon)$

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa <S_n> konvergen ke S atau limit S_n = S jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, dapat dicari N $\in$ **N** , sehingga untuk semua n $\in$ **N** dengan n $\geq$ N berlaku $|S - S_n| < \varepsilon$, dengan lambang dapat dinyatakan $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{N} \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon)$.

Contoh 3.1.

Jika S_n = c untuk semua n $\in$ **N** dan c suatu konstanta. Buktikan bahwa <S_n> konvergen ke c.

Penyelesaian : Bukti

Untuk semua n $\in$ **N** berlaku $|S_n - c| = 0$. Jadi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ pasti ada N $\in$ **N** sehingga $\forall n \geq N$ berlaku $|S_n - c| < \varepsilon$. Dalam hal ini diambil bilangan bulat positif, sebab $|S_n - c| = 0 < \varepsilon$ untuk semua n $\in$ **N**. Dengan demikian <S_n> konvergen dan $S_n \to c$. ■

Definisi 3.2

Barisan yang tidak konvergen disebut barisan divergen. Jadi barisan real <S_n> adalah divergen jika tidak terdapat S $\in$ **R** sehingga S adalah limit S_n. Jadi semua bilangan real bukan limit <S_n> .

Dengan demikian barisan <S_n> adalah divergen jika :

1. $\forall S \in$ **R** dipenuhi sifat
2. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \mathrm{N} \in \mathbf{N})(\exists n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon)$.

Contoh 3.2.

Buktikan bahwa <S_n> divergen untuk $S_n = (-1)^n$!

Penyelesaian : Bukti

Harus ditunjukkan bahwa $\forall S \in \mathbf{R}$, S bukan limit S_n atau $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \mathrm{N} \in \mathbf{N})(\exists n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon)$ untuk sembarang S $\in$ **R** dibedakan dalam 3 keadaan yakni S = 1, S = -1, S $\neq \pm 1$. Diketahui bahwa S_n = 1 untuk n genap dan S_n = -1 untuk n ganjil.

1. S = 1

Kita dapat mengambil $\varepsilon = 1$, maka untuk sembarang N $\in$ **N**, selalu terdapat n ganjil dengan n $\geq$ N sehingga $|S_n - 1| = |-1-1| = 2 > 1$ ini berarti 1 bukan limit barisan <S_n>.

2. S = -1

   Diambil $\varepsilon = 1$, maka untuk sembarang N $\in$ **N** terdapat n genap dengan n $\geq$ N sehingga $|S_n - (-1)| = |1+1| = 2 > 1$. Jadi -1 bukan limit barisan <S_n>.

3. S $\neq \pm$ 1

   Diambil $\varepsilon = \min\{|S-1|, |S+1|\}$ yakni bilangan terkecil diantara $|S-1|$ dan $|S+1|$, maka untuk semua n $\in$ **N** selalu berlaku $|S - S_n| \geq \varepsilon$. Jadi untuk S $\neq \pm$ 1 dan $\varepsilon = \min\{|S-1|, |S+1|\}$, jika diambil sembarang N, pasti ada n dengan n $\geq$ N dan $|S - S_n| \geq \varepsilon$.

Dengan demikian untuk S dengan S $\neq \pm$ 1 maka S bukan limit S_n. Kesimpulannya, untuk semua kemungkinan S $\in$ **R** maka S bukan limit S_n. Jadi <S_n> divergen. ■

<u>Lemma 3.1</u>

Jika a $\in$ **R** dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $|a| \leq \varepsilon$ maka a = 0.

<u>Bukti lemma 3.1 :</u>

Diandaikan a $\neq$ 0 maka untuk $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ didapat $|a| > \varepsilon$ sehingga terdapat kontradiksi dengan sifat yang diberikan pada a. Jadi pengandaian kita salah. Sehingga a yang diambil harus 0. ■

Teorema 3.1

Limit suatu barisan adalah tunggal.

Bukti teorema 3.1 :

Diberikan $<S_n>$ suatu barisan konvergen. Andaikan terdapat a dan b sehingga $S_n \to a$ dan $S_n \to b$. Ambil $\varepsilon > 0$ sembarang, karena $S_n \to a$ dan $S_n \to b$ maka terdapat N_1 dan N_2 dalam **N** sehingga berlaku :

$$\forall n \geq N_1 \Rightarrow |S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1) \text{ dan}$$

$$\forall n \geq N_2 \Rightarrow |S_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Ketaksamaan dalam (1) dan (2) berlaku untuk n = N = maks $\{N_1, N_2\}$ maka diperoleh $|a - b| \leq |a - S_n| + |S_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (3)

Karena (3) berlaku untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka menurut lemma 3.1, haruslah a – b = 0 atau a = b. Jadi tidak mungkin ada limit yang berlainan. Jadi jika limit itu ada haruslah tunggal. ■

Definisi 3.3 (Pengertian limit fungsi secara eksak)

Mengatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ dimana $0 < |x - c| < \delta$, yaitu $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 3.3 Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$!

Penyelesaian :

Kita mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

untuk x ≠ 2,

$$\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2||x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, maka $0 < |x - 2| < \delta$ mengakibatkan

$\left|\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| = |2x + 1 - 5| = 2|x - 2| < 2\delta < \varepsilon$. Jadi $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$ sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ sedemikian sehingga $\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|<\varepsilon$ dimana $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$, yaitu

$0<|x-2|<2\delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|<\varepsilon$.

Teorema 3.2

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c, maka :

1. $\underset{x \to c}{Lim}\, k = k$

2. $\underset{x \to c}{Lim}\, x = c$

3. $\underset{x \to c}{Lim}\, k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

4. $\underset{x \to c}{Lim}\, [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5. $\underset{x \to c}{Lim}\, [f(x)-g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

6. $\underset{x \to c}{Lim}\, [f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} g(x)$

7. $\underset{x \to c}{Lim}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

8. $\underset{x \to c}{Lim}\, [f(x)]^n = \left(\underset{x \to c}{Lim}\, f(x)\right)^n$

9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap.

Untuk teorema 3.2 ini penulis tidak akan memberikan buktinya, buktinya dapat dilihat pada buku dengan judul Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik (lihat pada daftar pustaka).

Selanjutnya akan dibahas limit dari barisan bilangan kompleks. Bilangan kompleks dan mempunyai bentuk umum z = a + bi dengan a dan b adalah bilangan real dan i = $\sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner.

Definisi 3.4

Limit dari barisan dengan elemen bilangan kompleks $\{z_m\}$ untuk m = 1, 2, ... didefinisikan sebagai suatu limit dari barisan bilangan real dan dengan bagian imajinernya. Jika $z_m = r_m + i\, s_m$, dimana r_m dan s_m bilangan real, maka $\lim_{m \to \infty} z_m = \lim_{m \to \infty} r_m + i \lim_{m \to \infty} s_m$ apabila $\lim_{m \to \infty} r_m$ dan $\lim_{m \to \infty} s_m$ ada.

B. LIMIT MATRIKS

Setelah dibahas pengertian limit dari barisan bilangan kompleks, selanjutnya akan dibahas tentang limit dari barisan matriks. Dalam pembahasan selanjutnya, limit yang akan digunakan adalah limit dari barisan matriks dengan elemen bilangan kompleks.

Definisi 3.5

Diketahui L, A_1, A_2, ... adalah matriks berordo n x m dengan elemen bilangan kompleks. Barisan A_1, A_2, ... dikatakan konvergen ke matriks L, yang disebut limit barisan A_i , jika $\lim_{m \to \infty} (A_m)_{ij} = L_{ij}$, $\forall$ i, j yang memenuhi $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le m$. Limit barisan matriks A_i = L ditulis dengan notasi

$\lim_{m \to \infty} (A_m) = L$.

Contoh 3.4

Diketahui $A_m = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} & \left(-\frac{3}{4}\right)^m & \frac{3m^2}{m^2+1}+i\left(\frac{2m+1}{m-1}\right) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^m & 2 & \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \end{pmatrix}$, carilah

$\lim_{m \to \infty} A_m$!

Penyelesaian :

$$\lim_{m \to \infty} A_m = \lim_{m \to \infty} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} & \left(-\frac{3}{4}\right)^m & \frac{3m^2}{m^2+1}+i\left(\frac{2m+1}{m-1}\right) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^m & 2 & \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \end{pmatrix}$$

Dapat dicari limit dari setiap elemen dari matriks yaitu misalkan untuk mencari baris 1 kolom 1 didapat dengan $\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 1$.

Demikian juga limit dari elemen baris 2 kolom 2 didapat dengan $\lim_{m \to \infty} 2 = 2$, begitu seterusnya untuk setiap elemen dari matriks tersebut.

Sehingga akan didapat $\lim_{m \to \infty} A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3+2i \\ 0 & 2 & e \end{pmatrix}$, dimana e adalah basis dari logaritma natural.

Teorema3.3

Diketahui A_1, A_2, ...adalah barisan dari matriks berordo n x p dengan elemen bilangan kompleks konvergen ke matriks L. Untuk setiap

$P \in M_{r \times n}$ (**C**) dan $Q \in M_{p \times s}$ (**C**), berlaku

$$\lim_{m \to \infty} P A_m = PL \text{ dan } \lim_{m \to \infty} A_m Q = LQ.$$

Bukti teorema 3.2 :

Untuk setiap i ($1 \le i \le r$) dan j ($1 \le j \le p$), berlaku

$$\lim_{m \to \infty} [(PA_m)_{ij}] = \lim_{m \to \infty} [\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(A_m)_{kj}] = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} \lim_{m \to \infty} (A_m)_{kj} = (PL)_{ij}$$

Oleh karena itu, $\lim_{m \to \infty} P A_m = PL$.

Bukti untuk $\lim_{m \to \infty} A_m Q = LQ$ analog dengan bukti di atas. ■

Akibat teorema 3.3

Diketahui A $\in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ dengan $\lim_{m \to \infty} A^m = L$, maka untuk setiap matriks $Q \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ yang mempunyai invers, berlaku

$$\lim_{m \to \infty} (QAQ^{-1})^m = Q\,L\,Q^{-1}.$$

Bukti akibat teorema 3.3:

Karena $(QAQ^{-1})^m = \underbrace{(QAQ^{-1})(QAQ^{-1})\ldots(QAQ^{-1})}_{m\ faktor} = Q\ A^m\ Q^{-1}$, dengan menggunakan teorema 3.3 diperoleh

$$\lim_{m \to \infty} (QAQ^{-1})^m = \lim_{m \to \infty} QA^mQ^{-1} = Q \lim_{m \to \infty} A^m\,Q^{-1} = QLQ^{-1}. \quad \blacksquare$$

Definisi 3.6

$S = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1\, atau\, \lambda = 1\}$. Himpunan S dalam bidang kompleks adalah himpunan terdiri atas bilangan kompleks 1 dan titik-titik yang terletak dalam modulo z < 1 (dengan jari-jari 1 dengan pusat nol).

Untuk matriks yang mempunyai nilai eigen dan matriks dapat didiagonalkan maka akan berlaku teorema berikut :

Teorema 3.4

Diketahui A $\in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ dengan nilai eigen λ, $\lambda \in$ S dan A adalah matriks yang dapat didiagonalkan maka $\lim_{m \to \infty} A^m$ ada.

Bukti teorema 3.4

Diketahui matriks A dapat didiagonalkan, sehingga ada matriks Q yang mempunyai invers yang memenuhi $Q^{-1}AQ = D$, dengan D adalah matriks diagonal. Andaikan D = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$. Karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A, maka $\lambda_i \in S$ sehingga dipenuhi untuk setiap i, $\lambda_i = 1$ atau $|\lambda_i| < 1$. Jadi $\lim_{m \to \infty} \lambda_i^m = \begin{cases} 1, \lambda_i = 1 \\ 0, \lambda_i \neq 1 \end{cases}$. Tetapi karena D^m = $\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$, menurut definisi 3.5 barisan D, D^2, ... konvergen ke limit L. Karenanya berdasarkan akibat teorema 3.3 diperoleh

$$\lim_{m \to \infty} A^m = \lim_{m \to \infty} (QDQ^{-1})^m = \lim_{m \to \infty} Q\, D^m\, Q^{-1}$$

$$= Q \lim_{m \to \infty} D^m\, Q^{-1} = QLQ^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.5

Diberikan matriks B = $\begin{pmatrix} 5i & 3i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$ seperti pada contoh 2.9, carilah $\lim_{m \to \infty} B^m$!

Penyelesaian :

Dari contoh 2.9, didapat matriks P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dengan P^{-1} = $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

yang memenuhi sehingga $P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}$.

Jadi $\lim\limits_{m \to \infty} B^m = \lim\limits_{m \to \infty} (PDP^{-1})^m = P \lim\limits_{m \to \infty} D^m \; P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \lim_{m \to \infty} \begin{pmatrix} 2i^m & 0 \\ 0 & 3i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C. RANTAI *MARKOV*

Kita sering menjumpai sistem matematika dimana sistem tersebut dalam waktu tertentu dapat menempati salah satu dari sejumlah berhingga keadaan. Misalkan suatu sistem berubah menurut waktu dari satu keadaan ke keadaan lainnya pada beberapa waktu keadaan sistem tersebut diamati. Misalnya, cuaca dalam sebuah kota tertentu dapat berada dalam salah satu dari tiga keadaan yang mungkin yaitu cerah, mendung atau hujan. Misalnya seseorang dapat berada dalam 4 keadaan emosional yang mungkin yaitu gembira, sedih, marah atau gelisah.

Jika keadaan eksak dan sistem itu pada setiap pengamatan tidak dapat ditentukan dengan pasti, tetapi probabilitas suatu keadaan tertentu hanya dengan mengetahui keadaan sistem itu pada pengamatan sebelumnya, maka proses peralihan tersebut dinamakan Rantai *Markov*.

Misalnya dalam Rantai *Markov* dengan tiga keadaan matriks peralihan

mempunyai bentuk

$$\begin{array}{c} \textit{keadaan sebelumnya} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \textit{ keadaan baru}$$

Dalam matriks ini, p_{32} adalah probabilitas bahwa sistemnya akan berubah dari keadaan 2 ke keadaan 3, p_{11} adalah probabilitas bahwa sistemnya akan tetap berada pada keadaan 1 jika sebelumnya pada keadaan 1, dan demikian seterusnya.

Rantai *Markov* terbatas pada proses diskret yang berada pada satu keadaan yang terbatas pada kondisi keadaannya. Pada keadaan yang lain Rantai Markov akan memberikan keadaan yang lain juga, dengan fakta ini akan mencul penemuan yang disebut sebagai probabilitas yang akan memberikan himpunan dari probabilitas transisi.

Definisi 3.7

Untuk n keadaan proses Rantai *Markov* adalah himpunan atas n keadaan $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ dan himpunan dari probabailitas transisi P_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Proses Rantai *Markov* hanya dapat berlaku pada satu keadaan untuk setiap waktu. Jika dalam waktu k proses ini berada pada satu keadaan S_i, maka dalam waktu $k + 1$ akan berada pada keadaan S_j dengan probabilitas P_{ij}. Dimana keadaan awalnya telah ditentukan.

Definisi 3.8

Suatu matriks disebut matriks transisi atau matriks stokastik bila matriks tersebut mempunyai dua sifat yaitu elemem-elemennya tidak negatif dan hasil jumlahan elemen-elemen dari setiap kolomnya adalah 1.

Untuk sembarang matriks transisi M berordo n x n, baris dan kolomnya bersesuaian dengan n keadaan dan elemen dari M_{ij} mewakili peluang peralihan dari keadaan j ke keadaan i dalam satu tahap.

Contoh 3.6

Matriks $A = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,02 \\ 0,10 & 0,98 \end{pmatrix}$ adalah matriks transisi. Elemen dari matriks A tidak negatif dan penjumlahan dari kolomnya adalah 1. Jadi matriks A adalah matriks transisi.

Proses dengan elemen dari setiap kejadian dalam satu dari beberapa kejadian tertentu dan elemen tersebut bertukar di antara kejadian dalam waktu yang lama, proses ini disebut dengan proses stokastik.

Untuk menghitung peluang bagi kejadian A, kita menjumlahkan peluang semua titik contoh yang menyusun kejadian A. Jumlah ini disebut peluang A dan dilambangkan dengan P (A).

Definisi 3.9

Apabila peluang dari satu kejadian yang berubah menjadi kejadian lain dalam interval waktu tertentu yang hanya berlaku untuk dua kejadian maka proses stokastik disebut proses *Markov*.

Proses *Markov* adalah proses stokastik dengan sifat :

1. Himpunan hasil atau keadaan mungkin adalah berhingga.
2. Probabilitas dari hasil berikutnya tergantung pada hasil sebelumnya.
3. Probabilitas adalah konstan sepanjang waktu.

Contoh 3.7

Ketika meninjau ulang buku catatan mengenai sumbangan yang diterimanya, kantor alumni sebuah perguruan tinggi mendapatkan bahwa 80% alumninya yang menyumbang selama setahun akan menyumbang juga tahun berikutnya, dan 30% alumninya yang tidak menyumbang selama setahun akan menyumbang tahun berikutnya. Hal ini dapat dipandang dalam proses *Markov* dengan 2 keadaan, yaitu : keadaan 1 bersesuaian dengan seorang alumni yang memberi sumbangan dalam satu tahun, dan keadaan 2 bersesuaian dengan seorang alumni yang tidak memberi sumbangan dalam tahun ini. Matriks peralihan dari proses ini adalah : $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Dalam contoh di atas, matriks peralihan dari rantai *Markov* mempunyai ciri bahwa elemen pada kolom manapun berjumlah 1. Ini bukan hal yang kebetulan. Jika $P = [p_{ij}]$ adalah matriks peralihan dari Rantai *Markov* dengan k keadaan, maka untuk setiap j harus dipenuhi :

$$p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{kj} = 1 \qquad (1)$$

Hal ini dikarenakan jika sistem berada dalam keadaan j pada satu pengamatan, pasti ia berada pada satu dari k keadaan yang mungkin pada pengamatan selanjutnya.

Matriks dengan sifat (1) dinamakan matriks transisi atau matriks *Markov*. Dari pembahasan di atas, nampak bahwa matriks peralihan untuk Rantai *Markov* haruslah Matriks transisi.

Dalam Rantai *Markov*, keadaan sistem pada setiap waktu pengamatan umumnya tidak dapat ditentukan dengan pasti. Biasanya hal terbaik yang dapat kita lakukan adalah menyatakan probabilitas dari setiap keadaan yang mungkin. Misalnya dalam Rantai *Markov* dengan tiga keadaan, kita dapat menggambarkan keadaan sistem yang mungkin pada waktu pengamatan tertentu dengan sebuah vektor kolom **X** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, di mana x_1 adalah probabilitas bahwa sistemnya berada pada keadaan 1, x_2 untuk keadaan 2, dan x_3 untuk keadaan 3.

Definisi 3.10

Vektor keadaan untuk suatu pengamatan Rantai *Markov* dengan k keadaan adalah vektor kolom **X** dimana komponen yang ke-i, yaitu x_i adalah probabilitas bahwa sistem berada dalam keadaan ke-i pada waktu itu.

Definisi 3.11

Suatu matriks transisi disebut matriks regular jika matriks tersebut hanya mengandung elemen positif.

Contoh 3.8

Sebuah perusahaan persewaan mobil mempunyai tiga lokasi persewaan, yang kita tandai sebagai lokasi 1, 2, dan 3. Seorang pelanggan dapat menyewa mobil dari salah satu diantara ketiga lokasi dan mengembalikan mobil tersebut ke salah satu diantara ketiga lokasi. Pimpinan perusahaan mendapatkan bahwa para pelanggan mengembalikan mobil tersebut ke berbagai lokasi menurut kemungkinan atau probabilitas berikut :

$$\begin{array}{c} \textit{disewa dari lokasi} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \; \textit{dikembalikan ke lokasi} \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Matriks ini adalah matriks peralihan dari sistem yang ditinjau sebagai sebuah Rantai *Markov*. Dari matriks probabilitas ini, diketahui bahwa probabilitas sebuah mobil disewa dari lokasi 3 akan dikembalikan ke lokasi 2 adalah 0,6, dan probabilitas bahwa sebuah mobil yang disewa dari lokasi 1 akan dikembalikan ke lokasi 1 adalah 0,8, dan seterusnya.

Teorema 3.5

Jika P adalah sebuah matriks peralihan yang regular untuk $n \to \infty$ maka

berlaku $P^n \to \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix}$, di mana q_i adalah bilangan positif

sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$.

Bukti teorema 3.5

Kita tetapkan $P^n = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$. Jadi P adalah sebuah matriks peralihan yang regular dimana elemennya adalah positif,maka **q** mempunyai elemen bilangan positif dan $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$. ■

Teorema 3.6

Diketahui P adalah sebuah matriks peralihan regular dan **x** adalah sembarang vektor probabilitas. Jika $n \to \infty$ maka $P^n\mathbf{x} \to \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = \mathbf{q}$ di mana **q** adalah sebuah vektor probabilitas yang tetap yang tidak tergantung pada n, dengan semua elemennya adalah positif.

Bukti teorema 3.6

Dari teorema 3.5 diperoleh bahwa $P^n \to \mathbf{q}$ jika $n \to \infty$ ini berarti bahwa $P^n\mathbf{x} \to Q\mathbf{x} = \mathbf{q}$ jika $n \to \infty$. ■

Jika untuk sebuah Rantai *Markov* yang regular, sistem tersebut pada akhirnya akan mendekati sebuah vektor keadaan **q** yang tetap. Vektor keadaan **q** yang tetap tersebut dinamakan vektor keadaan tunak dari rantai *Markov* yang regular tersebut.

Teorema 3.7

Vektor keadaan tunak untuk **q** dari sebuah matriks peralihan P yang regular adalah vektor probabilitas yang tunggal yang memenuhi persamaan P**q** = **q** .

Bukti teorema 3.7

Dengan identitas dari operasi $PP^n = P^{n+1}$. Menurut teorema 3.5, P^n dan P^{n+1} mendekati Q jika $n \to \infty$. Jadi, diperoleh PQ = Q. Setiap kolom dari persamaan matriks ini memberikan persamaan P**q** = **q**. Untuk memperlihatkan bahwa **q** adalah satu-satunya vektor probabilitas kita misalkan **r** adalah vektor lainnya sehingga P**r** = **r** untuk n = 1, 2, ...

Kita misalkan $n \to \infty$, maka P**r** = P**q** = **q**. Karena P adalah matriks peralihan yang regular dimana **r** adalah sembarang vektor probabilitas dan $n \to \infty$ maka P**r** = P**q** = **q** dimana **q** adalah vektor probabilitas yang tetap. Karena **r** = **q** maka vektor probabilitas memenuhi persamaan P**q** = **q**. ■

Contoh 3.9

Dari contoh 3.8 diperoleh matriks peralihan P = $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, sehingga

dengan sistem linear homogen akan didapat $\begin{pmatrix} 0{,}2 & -03 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$..

Kemudian dengan operasi eselon baris tereduksi, akan didapat penyelesaian berbentuk :

$q_1 = \left(\frac{34}{13}\right)q_3$ dan $q_2 = \left(\frac{14}{13}\right)q_3$

Dengan mengambil q_3 = s, maka penyelesaian dari sistem linear tersebut akan berbentuk $\mathbf{q} = s\begin{pmatrix} 34/13 \\ 14/13 \\ 1 \end{pmatrix}$. Untuk membentuk vektor probabilitas dimisalkan $s = \dfrac{1}{\frac{34}{13}+\frac{14}{13}+1} = \dfrac{13}{61}$. Jadi, vektor keadaan tunak dari sistem tersebut adalah $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 34/61 \\ 14/61 \\ 13/61 \end{pmatrix}$. Elemen-elemen dari **q** memberikan kemungkinan probabilitas jangka panjang bahwa satu mobil akan dikembalikan ke lokasi 1, 2, dan 3 berturut-turut.

BAB IV

PENERAPAN PADA MODEL EKONOMI *LEONTIEF*

Teori matriks dapat digunakan (telah berhasil) untuk menjelaskan hubungan timbal balik antara harga, keluaran (output), dan permintaan dalam sistem ekonomi. Pada bagian ini, akan dibicarakan beberapa model sederhana yang didasarkan pada pemikiran Waissly Leontief.

Sebelum masuk ke pembahasan bab ini, akan ditinjau dahulu definisi dari model *Leontief*.

Definisi 4.1

Model *Leontief* adalah model ekonomi yang menyangkut kumpulan industri, produksi yang satu mendukung yang lain dan memproduksi satu barang dan hanya menggunakan satu proses.

Model *Leontief* dikelompokkan atas dua model yang berlainan, yaitu model tertutup atau model masukan keluaran, dan model terbuka atau model produksi yang berhubungan satu sama lain. Dalam masing-masing model tersebut, diberikan beberapa parameter ekonomi tertentu yang menjelaskan hubungan timbal balik antara industri-industri dalam perekonomian yang sedang ditinjau. Dengan menggunakan teori matriks, akan dihitung parameter tertentu lainnya, seperti harga atau tingkat keluaran untuk memenuhi tujuan ekonomi yang kita inginkan.

Dalam pembahasan selanjutnya, istilah nilai eigen akan disebut sebagai nilai harga dan istilah vektor eigen akan disebut sebagai vektor harga atau vektor produksi.

Sedangkan matriks yang didapat dari permasalahan ekonomi adalah matriks pertukaran dan matriks konsumsi. Adapun pengertian matriks pertukaran dan matriks konsumsi adalah sebagai berikut :

Definisi 4.2

Matriks pertukaran dan matriks konsumsi adalah matriks transisi yang regular yang terbentuk dari model ekonomi.

A. Model (masukan keluaran) Tertutup *Leontief*

Sebelum dibahas lebih jauh tentang model tertutup *Leontief* akan ditinjau dulu definisi dari model ini dan satu contoh berikut ini.

Definisi 4.3

Model ekonomi *Leontief* tertutup adalah model ekonomi dari suatu industri dimana setiap industri menghasilkan satu satuan produknya dan tidak ada produk dari luar yang masuk dalam industri.

Contoh 4.1

Tiga orang pemilik rumah yang mempunyai pekerjaan sebagai tukang kayu, montir listrik, dan tukang pipa satu sama lain sepakat untuk melakukan reparasi dalam ketiga rumah mereka. Mereka sepakat untuk bekerja selama sepuluh hari, masing-masing sesuai dengan jadwal sebagai berikut :

	Kerja yang dilakukan oleh		
	Tukang kayu	Montir listrik	Tukang pipa
Hari kerja di rumah tk. Kayu	2	1	6
Hari kerja di rumah mt. Listrik	4	5	1
Hari kerja di rumah tk. Pipa	4	4	3

Untuk keperluan pajak, mereka harus melaporkan dan membayar upah masing-masing secara wajar, walaupun untuk pekerjaan yang dilakukan oleh masing-masing orang di rumahnya sendiri. Upah harian normalnya berkisar antara 60 ribu sampai 80 ribu, tetapi mereka sepakat untuk menyesuaikan upah harian mereka sehingga setiap pemilik rumah pada akhirnya akan menerima upah sebesar upah yang akan dibayarkan olehnya yaitu bahwa keseluruhan jumlah yang dibayarkan oleh masing-masing akan sama dengan keseluruhan jumlah yang diterima masing-masing.

Misalkan : P_1 adalah upah harian tukang kayu, P_2 adalah upah harian montir listrik, dan P_3 adalah upah harian tukang pipa. Untuk memenuhi syarat bahwa pemilik rumah akan menerima upah sebesar upah yang dibayarkan olehnya selama waktu sepuluh hari maka harus disyaratkan bahwa :

Jumlah seluruh pengeluaran = jumlah seluruh penghasilan

Misalnya tukang kayu membayar keseluruhan jumlah sebesar $2P_1 + P_2 + 6P_3$ untuk reparasi rumahnya, dan menerima jumlah penghasilan seluruhnya sebesar $10P_1$ untuk perbaikan yang dilakukannya pada semua ketiga rumah tersebut. Maka dari ketiganya akan didapat persamaan :

$2P_1 + P_2 + 6P_3 = 10P_1$

$4P_1 + 5P_2 + P_3 = 10P_2$

$4P_1 + 4P_2 + 3P_3 = 10P_3$

Dari ketiga persamaan tersebut dapt dituliskan kembali dalam bentuk matriks

sebagai berikut : $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ ....(1)

Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai sistem homogen sebagai berikut :

$(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ dan didapat $\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yang kemudian

didapat $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$, dengan s sembarang konstanta. Jika diambil s = 2, maka akan didapat upah harian tukang kayu 62 ribu, tukang montir listrik 64 ribu, dan tukang pipa 72 ribu. Ini berarti upah mereka berkisar antara 60 ribu sampai 80 ribu.

Contoh di atas melukiskan sifat yang menonjol dari model masukan keluaran *Leontief* dari sebuah ekonomi tertutup. Dalam persamaan (1) matriks yang dibentuk adalah matriks transisi yang regular karena setiap jumlah kolomnya adalah satu dan semua elemennya positif. Elemen-elemen kolom dalam matriks ini menggambarkan keluaran tugas pemilik rumah seluruhnya yang didistribusikan di antara para pemilik rumah yang sama. Masalahnya adalah menentukan harga yang pantas untuk keluaran-keluaran ini agar sistem tersebut berada dalam keseimbangan yaitu agar jumlah seluruh pengeluaran setiap pemilik rumah akan sama dengan jumlah seluruh penghasilan.

Dalam model umum sebuah sistem ekonomi yang terdiri dari sejumlah industri, misalnya industri 1, 2, ..., k. Selama suatu periode waktu yang tetap, setiap industri menghasilkan sebuah keluaran yang berupa barang atau pelayanan yang secara keseluruhan dimanfaatkan oleh k industri itu dengan cara yang sudah ditentukan sebelumnya. Masalah yang penting adalah mencari harga yang pantas yang akan dibayarkan untuk k keluaran ini sehingga jumlah seluruh pengeluaran setiap industri akan sama dengan jumlah seluruh penghasilan. Struktur harga seperti itu yang merupakan posisi keseimbangan untuk perekonomian tersebut.

Untuk periode waktu yang tetap yang dipermasalahkan, ditentukan :

P_i = harga yang dibayarkan oleh industri ke-i untuk jumlah seluruh pengeluaran

e_{ij} = bagian dari jumlah seluruh keluaran industri ke-j yang dibeli oleh industri ke-i.

Untuk i, j = 1, 2, ..., k berlaku :

i. $P_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k$

ii. $e_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots, k$

iii. $e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{kj} = 1, j = 1, 2, \ldots, k$

Dengan adanya keadaan seperti itu dapat dibentuk vektor harga (*price vector*) sebagai berikut : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ sedangkan matriks pertukaran (*exchange matrix*) atau matriks masukan - keluaran (*input - output matrix*) sebagai berikut : $E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{pmatrix}$. Syarat (iii) di atas menggambarkan kenyataan bahwa jumlahan setiap kolom matriks pertukaran sama dengan satu. Agar pengeluaran dari setiap industri sama dengan penghasilannya. Untuk itu persamaan matriks berikut yaitu E**P** = **P** atau (I – E)**P** = **0** harus dipenuhi.

Teorema 4.1

Jika E adalah matriks pertukaran, maka E**P** = **P** selalu mempunyai sebuah pemecahan **P** yang non trivial dengan elemen tidak negatif.

Bukti teorema 4.1 :

Misalkan matriks pertukaran $E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{pmatrix}$ dan **P** adalah vektor harga dengan bentuk $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$. Sistem persamaan linear homogen untuk vektor **P** adalah $(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ yang mempunyai pemecahan non trivial dan mempunyai syarat bahwa $P_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $e_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, dan $e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{kj} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$ sehingga elemen dari **P** tidak negatif. ■

Sekarang kita tinjau contoh berikut untuk lebih memahami teorema 4.1.

Contoh 4.2

Misalkan $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks pertukaran, maka dari persamaan

$(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ didapat pemecahan umum $\mathbf{P} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

dengan s adalah sembarang konstanta. Jadi kita mempunyai pemecahan yang non trivial $\mathbf{P} \geq 0$ untuk setiap $s > 0$. Misal kita ambil $s = 1$ maka akan didapat $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sehingga untuk matriks pertukaran $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ persamaan $E\mathbf{P} = \mathbf{P}$ mempunyai penyelesaian non trivial $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Contoh 4.2 menunjukkan bahwa dalam beberapa situasi, salah satu harga tersebut harus sama dengan nol supaya dipenuhi syarat keseimbangan yaitu pengeluaran akan sama dengan penghasilan.

Contoh 4.3.

Jika $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ mempunyai pemecahan umum

$\mathbf{P} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan s dan t adalah sembarang konstanta. Pemecahan yang non trivial $\mathbf{P} \geq 0$ akan dihasilkan untuk setiap $s \geq 0$ dan $t \geq 0$, di mana s dan t tidak semua sama dengan nol.

Contoh 4.3 ini menunjukkan bahwa mungkin tersedia beberapa struktur harga yang bebas linear. Tidak satupun dari antara situasi ini menjelaskan suatu struktur ekonomi yang benar-benar bebas. Teorema berikut ini akan memberikan syarat cukup agar kedua kasus tidak termasuk dalam struktur ekonomi yang bebas.

Teorema 4.2

Diketahui E adalah matriks petukaran sedemikian hingga untuk suatu bilangan bulat positif m semua elemen dari E^m adalah positif. Maka tepat ada satu pemecahan yang bebas linear dari $(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$, dan pemecahan itu dapat dipilih sedemikian rupa sehingga semua elemennya positif.

Bukti teorema 4.2

Persamaan $(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ dapat ditulis sebagai $E\mathbf{P} = \mathbf{P}$. Menurut teorema 3.7 dan teorema 3.6, maka dapat disimpulkan bahwa E adalah matriks regular sehingga semua elemennya adalah positif dan pangkat dari E juga positif. Akibatnya pemecahan dari $(I - E)\mathbf{P} = \mathbf{0}$ juga positif. ■

B. **Model (Produksi) Terbuka *leontief***

Sebelum membahas lebih lanjut kita akan tinjau dulu tentang definisi dari model terbuka ini.

Definisi 4.4

Model ekonomi *Leontief* terbuka adalah model dari suatu industri dimana industri tersebut memproduksi lebih banyak daripada yang dibutuhkan oleh industri lain, dan sisa dari produknya dapat digunakan konsumen.

Berbeda dengan model tertutup dimana keluaran k hanya didistribusikan sesama industri itu sendiri, maka model terbuka berusaha memenuhi permintaan dari luar untuk keluaran tersebut. Bagian dari keluaran ini masih dapat didistribusikan ke industri itu sendiri untuk mempertahankan operasi industri tersebut. Tetapi akan ada kelebihan tertentu yaitu produk neto di mana permintaan dari luar akan dipenuhi.

Dalam model tertutup, keluaran dari industri sudah ditetapkan dan tujuannya untuk menentukan harga dari keluaran itu yang kemudian akan memenuhi syarat keseimbangan yaitu bahwa pengeluaran akan sama dengan penghasilan. Dalam model terbuka, hargalah yang tetap dan tujuannya untuk menentukan tingkat keluaran dari industri yang diperlukan untuk memenuhi permintaan dari luar. Kita akan mengukur tingkat keluaran dalam nilai ekonomi dengan menggunakan harga yang tetap. Untuk itu ditetapkan dalam suatu periode waktu tertentu sebagai berikut :

x_i = nilai ekonomi dari jumlah seluruh keluaran industri ke-i.

d_i = nilai ekonomi dari keluaran industri ke-i yang diperlukan untuk memenuhi permintaan dari luar.

c_{ij} = nilai ekonomi dari keluaran industri ke-i yang diperlukan oleh industri ke-j untuk menghasilkan satu-satuan nilai ekonomi dari keluarannya sendiri.

Dengan keadaan seperti itu, kita dapat mendefinisikan vektor produksi (*production vector*) sebagai berikut $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ dan vektor permintaan

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}$ serta didapat pula matriks konsumsi $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$.

Sesuai dengan sifat bahwa $x_i \geq 0$, $d_i \geq 0$, dan $c_{ij} \geq 0$ untuk i, j = 1,2,... diperoleh $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{d} \geq 0$, dan $C_{ij} \geq 0$.

Dari definisi c_{ij} dan x_j dapat dilihat bahwa jumlahan dari $c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{ik}x_k$ adalah nilai dari keluaran industri ke-i yang diperlukan oleh semua k industri guna menghasilkan total keluaran yang ditentukan oleh vektor produksi **x**. Karena jumlah ini tak lain adalah elemen ke-i dari vektor kolom $C\mathbf{x}$, maka dapat dikatakan bahwa elemen ke-i dari vektor kolom $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$ adalah nilai kelebihan keluaran industri ke-i yang tersedia untuk memenuhi permintaan dari luar. Nilai permintaan dari luar untuk keluaran industri ke-i adalah elemen ke-i dari vektor permintaan **d**. Maka akan didapatkan persamaan $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ atau $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

Contoh 4.4.

Sebuah kota mempunyai tiga industri utama yaitu operasi tambang batu bara, stasiun pembangkit daya listrik, dan jalan kereta api lokal. Untuk menambang 10 ribu batu bara, perusahaan tambang harus membeli 25 ribu listrik untuk menjalankan peralatannya dan 25 ribu pengangkutan untuk keperluan pengirimannya. Untuk menghasilkan 10 ribu listrik, stasiun pembangkit memerlukan 65 ribu batu bara untuk bahan bakar, 5 ribu listrik untuk menjalankan peralatan pembantu, dan 5 ribu untuk pengangkutan. Untuk menyediakan 10 ribu pengangkutan, perusahaan kereta api memerlukan 55 ribu batu bara untuk bahan bakar, dan 10 ribu listrik untuk peralatan pembantu. Dalam suatu minggu tertentu, operasi tambang batu bara tersebut menerima pesanan seharga 50 ribu batu bara dari luar kota, dan stasiun pembangkit menerima pesanan seharga 25 ribu listrik dari luar kota. Tidak ada permintaan dari luar untuk jalan kereta api lokal. Berapa banyakkah masing-masing industri itu harus berproduksi dalam minggu tersebut supaya dapat memenuhi permintaan mereka sendiri dan permintaan dari luar?

Penyelesaian : Misalkan untuk periode satu minggu :

x_1 = nilai keluaran seluruhnya dari operasi tambang batu bara

x_2 = nilai keluaran seluruhnya dari stasiun pembangkit daya listrik

x_3 = nilai keluaran seluruhnya dari jalan kereta api lokal

Matriks konsumsi dari sistem itu adalah $C = \begin{pmatrix} 0 & 65000 & 55000 \\ 25000 & 5000 & 10000 \\ 25000 & 5000 & 0 \end{pmatrix}$. Jika setiap baris kita operasikan dengan operasi baris elementer dengan membaginya 100 ribu maka matriks C tersebut akan sama dengan :

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix}$. Persamaan linear dari (I – C)**x** = **d** adalah :

$\begin{pmatrix} 1{,}00 & -0{,}65 & -0{,}55 \\ -0{,}25 & 0{,}95 & -0{,}10 \\ -0{,}25 & -0{,}05 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{pmatrix}$, matriks koefisien pada ruas kiri mempunyai invers sehingga akan didapat

$$\mathbf{x} = (\mathrm{I} - \mathrm{C})^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{503}\begin{pmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102.087 \\ 56.163 \\ 28.330 \end{pmatrix}.$$

Jadi, keluaran keseluruhan dari operasi tambang batu bara itu haruslah sebesar 102.087, keluaran seluruhnya dari stasiun pembangkit daya listrik haruslah 56.163, dan keluaran seluruhnya dari jalan kereta api haruslah 28.330. ■

Jika kita tinjau persamaan (I – C) **x** = **d** dan jika (I – C) mempunyai invers maka dapat di tuliskan

$\mathbf{x} = (\mathrm{I} - \mathrm{C})^{-1}\ \mathbf{d}$ …………………..(1)

Jika matriks $(\mathrm{I} - \mathrm{C})^{-1}$ hanya mempunyai elemen yang positif maka $\mathbf{d} \geq 0$. Persamaan (1) memiliki pemecahan tunggal untuk **x** yaitu $\mathbf{x} \geq 0$. Hal ini adalah situasi yang diinginkan karena hal ini berarti bahwa setiap permintaan dari luar akan dipenuhi atau dengan kata lain bahwa industri tersebut produktif.

Definisi 4.5

Sebuah matriks konsumsi C dikatakan produktif jika $(I - C)^{-1}$ ada dan $(I - C)^{-1}$ mempunyai elemen-elemen positif.

Untuk lebih memahami definisi 4.3 kita tinjau contoh berikut :

Contoh 4.5

Diketahui sebuah matriks konsumsi $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Apakah A matriks konsumsi yang produktif ?

Penyelesaian :

Menurut definisi 4.3 matriks konsumsi A dikatakan produktif jika $(I - A)^{-1}$ ada dan $(I - A)^{-1} \geq 0$.

$(I - A) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Akan dibuktikan apakah (I – A) mempunyai invers. Dengan menggunakan operasi baris elementer akan didapat $(I - A)^{-1}$ yaitu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Jadi (I – A) mempunyai invers yaitu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ kita sebut $(I - A)^{-1}$.

Tetapi $(I - A)^{-1}$ negatif karena ada e_{ij} untuk i, j = 1, 2, …, n negatif. Karena

$(I - A)^{-1}$ ada tetapi ada elemen-elemen $(I - A)^{-1}$ yang negatif maka matriks A bukan matriks konsumsi.

<u>Teorema 4.3</u>

Sebuah matriks konsumsi C adalah produktif jika dan hanya jika ada suatu vektor produksi $\mathbf{x} \geq 0$ yang memenuhi $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.

<u>Bukti teorema 4.3</u>

($\Rightarrow$) Diketahui bahwa matriks C adalah sebuah matriks konsumsi yang produktif. Akan dibuktikan ada sebuah vektor produksi $\mathbf{x} \geq 0$ yang memenuhi $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.

Misalkan $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$. Diketahui bahwa sebuah vektor produksi $\mathbf{x}$ mempunyai sifat $\mathbf{x} \geq 0$ dan matriks konsumsi C mempunyai sifat $C \geq 0$. Dimana matriks konsumsi C dikatakan produktif jika $(I - C)^{-1}$ ada dan $(I - C)^{-1} \geq 0$.

Maka matriks $C\mathbf{x}$ adalah jumlahan dari hasil kali baris dari C dan kolom $\mathbf{x}$.

Andaikan $\mathbf{x} \leq C\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} - C\mathbf{x} \leq 0$

$$\mathbf{x}\,(I - C) \leq 0$$

$$\mathbf{x} \leq 0 \;\text{ atau } (I - C) \leq 0.$$

Diketahui bahwa ada $(I - C)^{-1} \geq 0$ maka $(I - C)\,(I - C)^{-1} = I > 0$, maka pengandaian kita kontradiksi.

Sehingga $\mathbf{x} - C\mathbf{x} > 0$ atau $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.

($\Leftarrow$) Diketahui sebuah vektor produksi $\mathbf{x} \geq 0$ yang memenuhi $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$. Akan dibuktikan apakah ada matriks konsumsi C yang produktif.

Andaikan $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ adalah vektor produksi dengan $\mathbf{x}^* \geq 0$ dan $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$.

Misalkan nilai harga yang mempengaruhi vektor produksi $\mathbf{x}^*$ adalah λ sedemikian hingga $0 < \lambda < 1$ dan $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$, untuk n = 1, 2, ...

Akan dibuktikan $C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ untuk n = 1, 2, ...

Andaikan benar untuk n – 1 maka $C^{n-1}\mathbf{x}^* < \lambda^{n-1}\mathbf{x}^*$

Akan dibuktikan $C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ untuk n = 1, 2, ...

$C.C^{n-1}\mathbf{x}^* < C.\ \lambda^{n-1}\ \mathbf{x}^*$

$\frac{C^{(n-1+1)}}{\lambda^{n-1}}\mathbf{x}^* < C\,\mathbf{x}^*$, karena $C\mathbf{x}^* < \lambda\,\mathbf{x}^*$

$\frac{C^{(n-1+1)}}{\lambda^{n-1}}\mathbf{x}^* < \lambda\,\mathbf{x}^*$

$C^{n-1+1}\mathbf{x}^* < \lambda^{n-1+1}\mathbf{x}^*$

$C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ untuk n = 1, 2, ...

$C^n\,\mathbf{x}^* < \lambda^n\,\mathbf{x}^*$ untuk n = 1, 2, ... dan $C^n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Dengan matriks I adalah matriks identitas maka $I - C^n = (I - C)(1 + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})$ untuk n = 1, 2, ... Karena $C^n \to 0$ untuk $n \to \infty$ dan maka

$I = (I - C)(1 + C + C^2 + \ldots)$. Misalkan $S = 1 + C + C^2 + \ldots$ dan $S \geq 0$ maka

$(I - C)\,S = I$ sehingga $S = (I - C)^{-1}$ dengan $(I - C)^{-1} \geq 0$.

Menurut definisi 4.3 Sebuah matriks konsumsi C dikatakan produktif jika $(I - C)^{-1}$ ada dan $(I - C)^{-1} \geq 0$. Karena $S = (I - C)^{-1}$ maka $(I - C)^{-1}$ ada, dan $S = (I - C)^{-1}$ dengan $S \geq 0$ maka $(I - C)^{-1} \geq 0$. ■

Syarat $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$ berarti bahwa ada suatu jadwal produksi yang mungkin sehingga setiap industri akan memproduksi lebih daripada yang akan digunakan oleh industri tersebut.

Akibat teorema 4.3.

1. Sebuah matriks konsumsi adalah produktif jika jumlahan semua elemen barisnya lebih dari satu.
2. Sebuah matriks konsumsi adalah produktif jika jumlahan semua elemen kolomnya lebih kecil dari satu.

Bukti akibat teorema 4.3 :

1. Misalkan jumlahan elemen baris dari matriks konsumsi C lebih kecil daripada satu. Jika $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ dan matriks konsumsi

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}, \text{ maka}$$

$C\mathbf{x}$ adalah sebuah vektor kolom yang elemen-elemennya adalah jumlahan elemen baris dari matriks C. Oleh karena itu $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.

Karena $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$ maka menurut teorema 4.3 C adalah matriks konsumsi yang produktif untuk vektor produksi $\mathbf{x}$.

Jadi sebuah matriks konsumsi produktif jika setiap jumlah barisnya lebih kecil daripada satu.

2. Dengan akibat teorema 4.3 yang pertama, matriks konsumsi dikatakan produktif jika jumlahan semua elemen barisnya lebih kecil daripada satu.

   Misalkan jumlahan semua elemen kolom dari matriks konsumsi C lebih kecil daripada satu.

   Jika $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

   $C\mathbf{x}^t$ adalah sebuah vektor kolom yang elemen-elemennya adalah jumlahan semua elemen kolom dari matriks C. Oleh karena itu $\mathbf{x}^t > C\mathbf{x}^t$.

   Karena $\mathbf{x}^t > C\mathbf{x}^t$ maka menurut teorema 4.3 C adalah matriks konsumsi yang produktif dengan vektor produksi $\mathbf{x}^t$.

   Jadi sebuah matriks konsumsi produktif jika setiap jumlahan semua elemen kolomnya lebih kecil daripada satu. ■

Dengan mengingat kembali Definisi 4.3 tentang matriks konsumsi C, maka dapat dilihat bahwa jumlahan semua elemen kolom ke-j dari matriks C adalah nilai keseluruhan dari keluaran semua k industri yang dibutuhkan untuk memproduksi satu unit nilai keluaran industri ke-j tersebut. Jadi industri ke-j dapat dikatakan memberikan laba atau untung jika jumlahan semua elemen kolom ke-j lebih kecil daripada satu. Dengan kata lain, akibat teorema 4.3 dapat dikatakan bahwa sebuah matriks konsumsi adalah produktif jika semua k industri dalam sistem ekonomi tersebut memberikan untung atau laba.

Untuk lebih jelasnya kita tinjau contoh berikut :

Contoh 4.6

Dari contoh 4.4 didapat matriks konsumsi $C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}55 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix}$.

Ketiga jumlahan semua elemen kolom di dalam matriks C ini semuanya lebih kecil daripada satu, sehingga ketiga industri semuanya memberikan laba. Berdasarkan akibat teorema 4.3 akan diselidiki apakah matriks konsumsi C produktif menurut definisi 4.3. Sebuah matriks konsumsi C dikatakan produktif jika $(I - C)^{-1}$ ada dan $(I - C)^{-1} \geq 0$.

Dari contoh 4.4 tersebut didapat $(I - C)^{-1} = \frac{1}{503}\begin{pmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 1{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix}$. Sehingga C adalah matriks konsumsi yang produktif karena $(I - C)^{-1}$ ada dan $(I - C)^{-1} \geq 0$.

BAB V

PENUTUP

Pembahasan nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov* serta penerapannya pada model ekonomi diperlukan beberapa konsep yang menjadi dasar dalam mempelajari topik tersebut.

Nilai eigen dan vektor eigen dibahas setelah kita membahas konsep dari matriks, determinan matriks, dan invers matriks. Matriks $X \neq 0$ berordo n x 1 yang memenihi $AX = \lambda X$ dinamakan vektor eigen dari A, sedangkan skalar λ dinamakan nilai eigen dari A yang terkait dengan X. Selain menggunakan konsep yang telah disebutkan di atas untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen digunakan pula konsep polinom karakteristik.

Persamaan polinom karakteristik dari matriks A yang berordo n x n, berbentuk $P_A(\lambda) = (\lambda I - A)$, dengan I adalah matriks identitas yang berordo n x n. Nilai eigen dan vektor eigen dapat diperoleh dengan langkah sebagai berikut :

1. Tentukan polinom karakteristik dari matriks A yaitu

   $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

2. Tentukan nilai-nilai eigen matriks A dengan cara menemukan akar-akar λ_j dari persamaan karakteristik $P(\lambda) = 0$.
3. Untuk setiap nilai eigen, tentukan vektor eigen yang terkait dengan cara memecahkan sistem homogen $(\lambda_j I - A) X = 0$.

Dengan konsep-konsep di atas akan muncul juga beberapa konsep seperti matriks similar, dan matriks diagonal. Selanjutnya dari konsep tersebut akan dibahas limit matriks, dimana limit yang digunakan adalah limit dari barisan dengan elemen bilangan kompleks.Dengan limit matriks akan diperoleh beberapa konsep tentang nilai eigen juga.

Rantai *Markov* juga didasari dengan beberapa konsep limit sehingga akan muncul beberapa istilah. Rantai *Markov* merupakan proses kejadian dari suatu keadaan ke keadaan lain. Konsep rantai *Markov* ini juga digunakan dalam penerapan pada model ekonomi *Leontief*. Istilah-istilah pada rantai *Markov* nantinya juga digunakan dalam penerapan.

Model ekonomi *Leontief* adalah model ekonomi yang menyangkut kumpulan industri, produksi yang satu mendukung yang lain dan memproduksi satu barang dan hanya menggunakan satu proses. Model ini dibagi menjadi 2 model yaitu model tertutup dan terbuka. Dalam model ini muncul beberapa masalah ekonomi yang sering terjadi dalam kehidupan ini. Seperti masalah upah yang akan diberikan pada para pekerja agar upah yang diterima sama, atau masalah industri dalam berproduksi sehingga permintaan dari luar dapat dipenuhi. Masalah ekonomi pada model ini dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep-konsep nilai eigen dan vektor eigen pada limit matriks dan rantai *Markov*.

DAFTAR PUSTAKA

Ayers, Frank. (1962, Oktober). *Mariks*. Jakarta : Erlangga.

Ayers, Frank. (1974). *Matriks (versi S1 / metrik)*. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard. (1988). *Penerapan Aljabar Linear*. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard. (1988). *Aljabar Linear Elementer (edisi kelima)*. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard. (1987). *Dasar-dasar Aljabar Linear (edesi ketuju jilid satu)*. Jakarta : Interaksara.

Beach, EF. (1966). *Economic Models*. New York : John Wiley.

Cullen, Charles. (1993). *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama.

David G, Luenberger. (1937). *Introduction to Dynamic Systems (theory, models and applications)*. New York : Chichester Brisbane Toronto.

David, Gale. (1960). *The theory of Linear Ekonomic Models*. New York : Mc Graw Hill.

Edwin J. Purcell. (1998). *Kalkulus dan Geometri Analitik (edisi kelima)*. Jakatra : Erlangga.

Friedberg, H. Stephen. (1997). *Linear Algebra (third edition)*. New Jersey : Prentice Hall.

Friedberg, H. Stephen. (1986). *Introduction to Linear Algebra With Application.* New Jersey : Prentice Hall.

Hadley, G. (1983). *Aljabar Linier*. Jakarta : Erlangga.

Hill, David and Kolman, Bernard. (2001). *Modern Matriks Algebra*. New Jersey : Prentice Hall.

Jacob, Bill. (1995). *Linear Function and Matrix Theory*. Springer.

Jacob, Bill. (1990). *Linear Algebra*. New York : W.H Freeman and Company.

Lang. Serge. (!986) *Introduction to Linear Algebra (second edition)*. Springer.

Leithold, Louis. (1984). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik (edisi kedua)*. Jakarta : Bina Aksara.

Leon. J Steven. (!987). *Aljabar Linear dan Aplikasinya (edisi kelima)*. New Jersey : Prentice Hall.

Spiegel, R Murray. (1987). *Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks*. Jakarta : Erlangga.

Strang Gilbert. (1993). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press.

Soemantri, R. *Analisis Real II*.

Wono, Budhi. (1995). *Aljabar Linear*. Jakarta : Gramedia Pustaka Utama.