MODUL ARTIN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

SURATMINI

NIM : 981414049

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2003

SKRIPSI

MODUL ARTIN

Oleh :

Suratmini
NIM : 9814140449

Telah Disetujui Oleh :

Pembimbing :

M.V. Any Herawati, S.Si., M.Si.

Tanggal : 20-1-2004

Pengesahan Skripsi Berjudul

MODUL ARTIN
Yang ditulis dan dipersiapkan oleh :

Suratmini
NIM : 981414049

Dipertahankan Dihadapan Panitia Penguji Skripsi
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Pada Tanggal : 9 Desember 2003

Susunan Panitia :

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	**: Drs. A. Atmadi, M.Si**	....
Sekretaris	**:Drs. Th. Sugiarto, M.T.**	....
Anggota	**:M.V. Any Herawati, S.Si.,M.Si.**	....
Anggota	**:Dr. St. Suwarsono**	....
Anggota	**:Wanty Widjaja, S.Pd., M.Ed.**	....

Yogyakarta, 9 Desember 2003
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

MOTTO

Jadikanlah sabar dan sholat sebagai penolongmu dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyu'

(Q.S. Al Baqarah : 45)

"Gampang Kalawan ewuh apan ana ingkang akarti, lamun wania ing gampang wedia ing ewuh, subarang nora tumeko, yen antepan, gampang kalawan ewuh dadi siji ...." (Serat Romo : R. Ng. Yosodipuro I).

Orang yang jatuh, itu biasa. Tetapi orang yang tiap jatuh bangun kembali itu baru luar biasa (Mirabeau).

Tengadah jemari ke hadapan Tuhan, ucapkan syukur atas hamparan kasih yang tiada berbatas serta kesabaran yang mengalir dalam mengasah ketumpulan permasalahan yang telah Tuhan titipkan dalam kehidupan ini.

Dengan penuh ikhtiar, do'a, dukungan, cinta dan kasih sayang dari segala pihak serta atas kesempatan tanggung jawab dan kepercayaan yang telah diberikan, akhirnya dapat teraih mutiara ini setelah melalui sebuah perjalanan yang indah dan perjuangan yang menantang.

Dengan penuh rasa syukur dan ketulusan batin
Kupersembahkan skripsi ini untuk :

- *Tuhan dan Agama yang kuimani*
- *Bapak-Ibu Pujiraharjo yang tercinta*
- *Adikku Tinni yang tersayang*
- *Keluarga Besar Simbah Marto Utomo*
- *Keluarga Besar Simbah Josetomo*
- *Keluarga Besar Simbah Paulus Joyodimedjo*
- *The invisible man*
- *Almamaterku yang tercinta*
- *Tanah Air dan Bangsaku yang damai.*

Semoga ridhlo Tuhan, rahmad, hidayah, taufik dan inayah-Nya selalu melimpah di setiap saat dan selama-lamanya, Amin.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya orang lain atau bagian dari karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 9 Desember 2003

Penulis

Suratmini

ABSTRAK

Modul M atas ring R dengan elemen satuan disebut modul Artin jika submodul-submodul dari M yaitu N_1, N_2, N_3,... memenuhi syarat rantai turun yaitu setiap barisan turun $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$, ada bilangan bulat n sedemikian sehingga $N_n = N_m$ untuk semua $m \geq n$, dan rantai turun tersebut dikatakan stabil pada n. Barisan komposisi untuk sebarang modul M atas ring R adalah barisan $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ sedemikian sehingga untuk setiap M_{i-1} Mi adalah modul sederhana. Bila M adalah modul atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga dan R adalah ring Artin maka M merupakan modul Artin atas ring R dan M mempunyai barisan komposisi.

ABSTRACT

A module M over a ring R with unity is called Artinian module if the submodules of M i.e. $N_1, N_2, N_3, \ldots$ satisfies the descending chain condition that is every descending sequence $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$, there is an integer n such that $N_n = N_m$ for all $m \geq n$, and the descending chain is called stabil on n. The composition series of a module M over a ring R is sequence $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ such that for every M_{i-1} Mi is a simple module. If M is a module over a ring R that is finitely generated and R is Artinian ring then M is Artinian module over a ring R and has composition series.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan atas petunjuk dan rahmatNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Proram Studi Pendidikan Matematika.

Penulis menyadari bahwa semua ini adalah berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa dan atas dukungan serta keterlibatan banyak pihak. Oleh karena itu pada kesempatan yang baik ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. A.M. Slamet Soewandi,M.Pd. selaku dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma.
2. Ibu M.V. Any Herawati, S.Si.,M.Si., selaku dosen Pembimbing Skripsi yang penuh kesabaran membimbing penulis dalam penulisan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Th. Sugiarto, MT, selaku kepala Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
4. Bapak Drs. A. Atmadi, M.Si. selaku kepala Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma.
5. Bapak Drs. Al. Haryono selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam bidang keakademikan selama kuliah.
6. Bapak/Ibu Dosen JPMIPA dan FMIPA atas curahan ilmunya.
7. Bapak Sunarjo, Bapak Al. Sugeng, Ibu Ch. Suwarni dan seluruh karyawan USD atas keramahannya dalam melayani mahasiswa.
8. Bapak/Ibu, adik dan seluruh keluarga besar simbah Paulus Joyodimedjo-Marto Utomo-Josetomo yang telah memberi kesempatan, kepercayaan, dukungan, semangat, nasehat, saran, kasih dan doa serta biaya kuliah.

9. Pak Lik Mukarto dan Om Greg. Haryono atas semangat, nasehat, kasih dan do'anya selama ini.
10. Seluruh teman angkatan 1998 atas doa, kebersamaan, semangat dan dukungan yang telah diberikan selama kuliah dan penyusunan skripsi ini.
11. Sahabat-sahabatku : mas Zoen, Iman, Jam-Roud, Ganing, Agung, Maman, Hendry, Ina, Kuncoro, Sylvi, M'Kanti, Sr. Ely, Sr. Linda, Okta, Nanin, Lusi, Indah, Wury, My little-friends: Akas, Kunto dan special untuk The Invisible Man atas dukungan, motivasi and do'anya.
12. Teman-teman di Nuansa Computer: M'Sri, M'Is, M'Lis, M'Yuli, teman-teman di Paguyuban Muda 'n Mudi Banjarwaru dan teman di FKM Budi Utama Universitas Sanata Dharma.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang secara langsung dan tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan ini masih jauh dari sempurna, untuk itu segala saran dan kritik dari berbagai pihak yang bersifat membangun sangat penulis harapkan guna menyempurnakan skripsi ini, atas masukan yang disampaikan, penulis mengucapkan banyak terima kasih.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini berguna dan bermanfaat bagi para pembaca dan Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis,

Suratmini

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dalam perkuliahan telah dipelajari matakuliah Struktur Aljabar yang membahas tentang grup dan ring. Grup merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemen mempunyai invers. Grup Abel merupakan grup yang bersifat komutatif. Sedangkan ring merupakan himpunan tidak kosong R yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian, dimana R dengan operasi penjumlahan merupakan grup Abel dan operasi perkalian bersifat tertutup. assosiatif serta berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Struktur yang lebih luas dari grup dan ring adalah modul. Modul merupakan ruang vektor atas ring. Bila M merupakan grup Abel dan R merupakan ring yang memuat elemen satuan maka M disebut modul atas ring R jika dan hanya jika terdapat pemetaan MxR ke M yang memenuhi aksioma dari modul yaitu untuk setiap m,n dalam M dan setiap r,s dalam R berlaku :

1).$m(r+s) = mr + ms$;

2).$m(rs) = (mr)s$;

3).$(m+n)r = mr + nr$; dan

4). $m1=m$.

Himpunan bagian dari M yang bersesuaian terhadap operasi perkalian dan penjumlahan di M disebut submodul dari M.

Dalam tulisan ini akan dikenalkan modul khusus yang disebut modul Artin. Modul Artin merupakan modul khusus dimana pada submodul-submodulnya memenuhi syarat rantai turun yaitu setiap barisan turun dari submodul-submodulnya adalah stabil. Disamping itu akan diperlihatkan keterkaitan antara modul Artin dengan ring Artin dan barisan modul. Ring Artin merupakan ring dimana ideal-idealnya memenuhi syarat rantai turun. Sedangkan barisan modul M atas ring R merupakan barisan dari submodul-submodul dari M.

Berdasarkan keterkaitan dan kekhasan tersebut di atas, penulis tertarik untuk mendalami konsep modul Artin guna mengetahui lebih dalam mengenai sifat-sifat yang ada dalam modul Artin dan hubungannya dengan konsep-konsep tersebut.

B. PERUMUSAN MASALAH

Dari topik tersebut dapat dirumuskan permasalahan pokok sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan modul Artin dan bagaimana sifat-sifatnya ?
2. Apa hubungan modul Artin dengan ring Artin?
3. Apa hubungan modul Artin dengan barisan komposisi dari modul?

C. TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan ini adalah :

1. Untuk memahami tentang konsep dari modul Artin dan sifat-sifatnya.
2. Untuk memahami tentang hubungan modul Artin dengan ring Artin.
3. Untuk memahami tentang hubungan modul Artin dengan barisan komposisi dari modul.

D. METODE PENULISAN

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka.

E. PEMBATASAN MATERI

Materi yang akan dibahas dalam tulisan ini meliputi grup, ring, ideal dan modul sebagai materi prasyarat. Sedang sebagai materi pokok akan dibahas tentang ring Artin, barisan komposisi modul dan modul Artin.

Untuk mempersempit penulisan penulis tidak membahas materi logika matematika, himpunan dan pemetaan, bilangan bulat dan operasinya dan sebagainya. Namun penulis menggunakan konsep-konsep yang ada di dalamnya dalam penulisan ini dan penulis mengasumsikan bahwa pembaca telah mempelajari sebelumnya.

F. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Adapun sistematika dalam penulisan ini adalah sebagai berikut. Bab pertama membahas tentang gambaran umum dari isi tulisan ini.

Bab dua membahas tentang materi prasyarat sebagai landasan teoritis dari tulisan ini yaitu tentang grup dan homomorfisma grup. Selanjutnya dibahas tentang ring, dan homomorfisma dari ring serta tentang ideal. Kemudian dibahas tentang modul dan homomorfismanya.

Bab tiga membahas tentang materi pokok yaitu modul Artin dan bab terakhir yaitu bab empat berisi tentang kesimpulan dari tulisan ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Di dalam bab ini akan dibahas materi prasyarat. Dalam subbahasan pertama akan dibahas tentang grup yaitu mengenai definisi grup, subgrup, homomorfima grup, contoh dan sifatnya. Subbahasan kedua membahas ring. Dalam subbahasan ketiga dibahas tentang ideal dan homomorfisma ring. Dalam subbahasan keempat dibahas tentang modul.

A. GRUP

Definisi 2.1.1 :

Grup adalah pasangan terurut $(G, *)$ dimana G adalah himpunan tidak kosong dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

i. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif yaitu $(\forall a,b,c \in G)$, $a*(b*c) = (a*b)*c$

ii. $(\exists e \in G)\ (\forall a \in G)$, $a*e = e*a = a$

iii. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)$, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

Dan untuk selanjutnya e disebut *elemen identitas* dari grup $(G, *)$ dan elemen $a^{-1} \in G$ dalam aksioma iii disebut *elemen invers* dari $a \in G$. Jika operasi biner pada grup G merupakan operasi penjumlahan maka G disebut *grup aditif.*

Di dalam penulisan selanjutnya, untuk menyederhanakan penulisan $a * b$ cukup ditulis ab dan grup $(G,*)$ ditulis dengan G.

Contoh 2.1.1 :

Himpunan bilangan genap $E = \{ x \mid x = 2a,\ a \in Z\}$ dimana Z adalah himpunan semua bilangan bulat, bersama operasi penjumlahan adalah grup.

Contoh 2.1.2 :

Himpunan $Z\text{-}\{0\}$ bukan grup dibawah operasi perkalian. Karena terdapat elemen $5 \in Z\text{-}\{0\}$ yang tidak mempunyai invers dalam $Z\text{-}\{0\}$. Karena invers 5 terhadap operasi perkalian adalah $1/5 \notin Z\text{-}\{0\}$.

Definisi 2.1.2 :

Grup G disebut *grup Abel(grup komutatif)* bila dan hanya bila berlaku $ab = ba$, untuk semua $a, b \in G$.

Contoh 2.1.3 :

Himpunan bilangan kompleks $C = \{ x \mid x = a + bi,\ a, b \in R \}$ adalah grup Abel terhadap operasi penjumlahan.

Teorema 2.1.1 :

Misal G adalah grup,maka:

a) Elemen identitas dari G adalah tunggal, yaitu jika e dan f elemen dari G sedemikian sehingga $ea = ae = a$ dan $fa = af = a$, $\forall a \in G$ maka $e = f$.

b) Setiap elemen dalam grup G mempunyai invers tunggal yaitu jika a, x dan y elemen dari G , e adalah elemen identitas dari G dan $ax = xa = e$ dan $ay = ya = e$ maka $x = y$.

Bukti :

1. Andaikan e dan f elemen dari G sedemikian sehingga $ea = ae = a$ dan $fa = af = a$, $\forall a \in G$. Karena $ea = a$, $\forall a \in G$, maka $ef = f$ ....(1).

   Karena $af = a$, $\forall a \in G$ maka diperoleh $ef = e$ ....(2).

   Dari (1) dan (2) didapatkan $e = f$.

2. Misal $a, x, y \in G$, e adalah elemen identitas dari G dan $ax = xa = e$ dan $ay = ya = e$.

   Maka $x = xe = x\,(ay) = (xa)y = ey = y$

   Jadi $x = y$. ■

Teorema 2.1.2 :

Misalkan G adalah grup maka :

a) Jika $a,b,c \in G$ dan $ab = ac$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri)

b) Jika $a,b,c \in G$ dan $ba = ca$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan)

c) Jika $a \in G$ maka $(a^{-1})^{-1} = a$

d) Jika $a,b \in G$ maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Bukti :

a) Misal $a,b,c \in G$, dengan $ab = ac$. Akan dibuktikan $b = c$.

   Karena $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ sehingga

   $a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Leftrightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$ (sifat assosiatif)

$\Leftrightarrow eb = ec$ $\qquad ((a^{-1}a) = e)$

$\Leftrightarrow b = c$ $\qquad$ (karena e elemen identitas)

b) Bukti untuk b) analog dengan bukti dari a).

c) Misal $a \in G$ maka menurut definisi grup ada $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Karena $a^{-1} \in G$ terdapat $(a^{-1})^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}\,a^{-1} = e$ dimana $(a^{-1})^{-1}$ invers a^{-1} maka $a^{-1}a = a^{-1}(a^{-1})^{-1}$, dan menurut (a) diperoleh $a = (a^{-1})^{-1}$

d) Misal $a,b \in G$ maka $ab \in G$. Invers dari ab adalah elemen tunggal x sehingga $(ab)x = e$. Sekarang $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$

Jadi invers ab yaitu $(ab)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$ ■

Definisi 2.1.3 :

Himpunan bagian H dari grup G adalah *subgrup dari* G jika H sendiri merupakan grup terhadap operasi biner pada G.

Contoh 2.1.4 :

Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan merupakan subgrup dari grup himpunan bilangan real dengan operasi penjumlahan.

Contoh 2.1.5 :

Jika e adalah elemen identitas dari grup G maka $\{e\}$ adalah subgrup dari G.

Teorema 2.1.3:

Misal G adalah grup dan H adalah subgrup dari G

1. Jika f adalah elemen identitas dari H dan e adalah elemen identitas dari G maka $f = e$.
2. Jika $a \in H$ maka invers dari a di H sama dengan invers dari a di G.

Bukti :

Misal G grup , H adalah subgrup dari G.

Andaikan f adalah elemen identitas dari H dan e adalah elemen identitas dari G.

1. Karena f adalah elemen identitas H maka $ff = f$. Andaikan invers f di G adalah f^{-1} maka diperoleh : $f^{-1}(ff) = f^{-1}f$

$$(f^{-1}f)f = e$$

$$ef = e$$

$$f = e$$

2. Misal $a \in G$. Andaikan $a^{-1} \in G$ merupakan invers a di G dan $c \in H$ merupakan invers a di H, maka

   $ac = ca = e$

   Selain itu $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

   Jadi diperoleh $ac = aa^{-1}$

   Berdasar hukum kanselasi(Teorema 2.1.2) maka $a^{-1} = c$. ■

Teorema 2.1.4:

Misal $(G, *)$ adalah grup dan H himpunan bagian dari G. Maka H adalah subgrup dari G bila dan hanya bila :

1. $H \neq \phi$ (H bukan merupakan himpunan kosong)
2. Jika $a, b \in H$, maka $a*b \in H$
3. Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti :

($\Rightarrow$)

1. Karena H subgrup G maka $(H,*)$ grup, setiap grup harus mempunyai elemen identitas , jadi H memuat paling sedikit satu elemen identitas sehingga $H \neq \phi$.
2. Karena $(H,*)$ grup maka untuk setiap $a, b \in H$,maka berlaku $a* b \in H$
3. Jika $a \in H$ maka a mempunyai invers dalam H yaitu $a^{-1} \in H$, karena $(H,*)$ grup.

($\Leftarrow$)

Diketahui 1,2,3, akan dibuktikan H adalah grup.

- Sifat asosiatif terhadap * berlaku pada H karena diketahui $H \subseteq G$ dan $(G,*)$ grup
- Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$ sehingga $a\,a^{-1} = e \in H$

  Jadi $(\exists e \in H)(\forall a \in H)\ e*a = a*e = a$

Jadi $(H,*)$ merupakan grup. ■

Teorema 2.1.5 :

Himpunan tidak kosong H dari grup G adalah subgrup bila dan hanya bila $ab^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Misal H subgrup dengan $a,b \in H$ maka $b^{-1} \in H$ sehingga $ab^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$)

Bila $b \in H$ diperoleh $e\,b^{-1} = b^{-1} \in H$. Jika $a,\ b \in H$, maka $a,\ b^{-1} \in H$ sehingga $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. Jadi H adalah subgrup dari G, menurut teorema 2.1.4. ■

Definisi 2.1.4:

Jika $(G, *)$ adalah grup dan $(H, \#)$ adalah grup maka pemetaan $\alpha : G \rightarrow H$ disebut *homomorfisma grup* jika $\alpha(a * b) = \alpha(a) \# \alpha(b)$, $\forall a, b \in G$.

Definisi 2.1.5:

Jika $\theta : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma grup maka *kernel dari* θ adalah himpunan semua elemen $a \in G$ sedemikian sehingga $\theta(a) = e_H$ dengan e_H adalah elemen identitas grup H, dan dinotasikan sebagai $Ker\ \theta$

Contoh 2.1.6:

Diketahui R adalah himpunan bilangan real dan R^* himpunan bilangan real positif.Pemetaan $\beta : (R,+) \rightarrow (R^*, .)$ dimana $\beta(x) = e^x$ adalah homomorfisma karena $\beta(x + y) = e^{(x+y)} = e^x\, e^y = \beta(x)\beta(y)$, $(\forall x,y \in R)$. Dengan kernel $\beta = \{0\}$.

Definisi 2.1.6 :

Andaikan G suatu grup, H subgrup dari grup G dan a sembarang elemen G, maka :

1. Himpunan $aH = \{ ah \mid h \in H\}$ disebut *koset kiri* dari H dalam G
2. Himpunan $Ha = \{ ha \mid h \in H\}$ disebut *koset kanan* dari H dalam G.

Jika G adalah grup aditif dan H subgrup G maka koset kiri dari H dalam G adalah himpunan $a + H = \{ a + h \mid h \in H\}$ dan koset kanan dari H dalam G adalah himpunan $H + a = \{ h + a \mid h \in H\}$ untuk $\forall a \in G$.

Teorema 2.1.6 :

Andaikan G adalah grup, H adalah subgrup dari G maka :

1. $He = H$
2. $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

Bukti :

a) menurut definisi (2), $He = \{ he \mid h \in H\} = \{ h \mid h \in H\} = H$

b) ($\Rightarrow$)Andaikan $Ha = H$. Karena $ea \in Ha$, dan $Ha = H$ maka $ea \in H$, sehingga $a \in H$.

($\Leftarrow$)Andaikan $a \in H$. Maka $(\forall h \in H)(ha \in H)$ sebab H adalah subgrup dari G. Akibatnya $Ha \subseteq H$. Misal $h_1 a \in H a$, maka $H \subseteq Ha$. Karena $Ha \subseteq H$ dan $H \subseteq Ha$ disimpulkan $H = Ha$. ■

Teorema 2.1.7 :

Misalkan H adalah subgrup dari grup G, dan $a,b \in G$ maka kondisi-kondisi dibawah ini adalah ekuivalen :

1. $ab^{-1} \in H$
2. $a = hb$, untuk suatu $h \in H$
3. $a \in Hb$
4. $Ha = Hb$

Bukti :

Diketahui H adalah subgrup dari grup G dan $a,b \in G$

(1) $\Rightarrow$ (2). Diketahui $ab^{-1} \in H$ berarti ada $h \in H$ sedemikian sehingga $ab^{-1} = h$. Sedangkan

$$ab^{-1} = h \Leftrightarrow (ab^{-1})b = hb \Leftrightarrow a(b^{-1}b) = hb \Leftrightarrow a = hb \text{ untuk suatu } h \in H$$

(2)$\Rightarrow$ (3)

Diketahui $a = hb$ untuk suatu $h \in H$. Karena $hb \in Hb$ maka $a \in Hb$. Jadi $a = hb$ maka $a \in Hb$.

(3)$\Rightarrow$ (4)

Diketahui $a \in Hb$ maka $a = hb$, untuk suatu $h \in H$. Misal $x \in Ha$ maka $x = h_1a$ untuk suatu $h_1 \in H$. Karena $a = hb$, $h \in H$ maka $x = h_1hb = (h_1h)b = h_2b$ dimana $h_1h = h_2 \in H$ karena H subgrup dari G. Untuk $x = h_2b$ dan $h_2 \in H$ berarti $h_2b \in Hb$ sehingga $x \in Hb$. Jadi $Ha \subseteq Hb$ ……………(1)

Diketahui $a \in Hb$ maka $a = hb$,untuk suatu $h \in H$. Karena H subgrup dari G maka ada $h^{-1} \in H$ yang merupakan invers dari $h \in H$. Sekarang $h^{-1}a = h^{-1}hb \Leftrightarrow h^{-1}a = b$.

Misalkan $h^{-1} = h_0 \in H$ sehingga $h_0 a = b$. Ambil $x \in Hb$ maka $x = h_1 b$ untuk suatu $h_1 \in H$. Karena $h_0 a = b$ maka $x = h_1 h_0 a = (h_1 h_0) a = h_2 a$ dimana $h_1 h_0 = h_2 \in H$ karena H subgrup dari G. Untuk $x = h_2 a$ dan $h_2 \in H$ berarti $h_2 a \in Ha$ sehingga $x \in Ha$. Jadi $Hb \subseteq Ha$ ....(2)

Karena (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $Ha = Hb$.

(4)$\Rightarrow$ (1)

$Ha = Hb$ berarti $a \in Hb$ sehingga $a = hb$ untuk suatu $h \in H$. Sekarang

$a = hb \Leftrightarrow ab^{-1} = h\,bb^{-1} \Leftrightarrow ab^{-1} = h$. Karena $h \in H$ maka $ab^{-1} \in H$.

Jadi teorema sudah terbukti. ■

Definisi 2.1.7:

Subgrup N dari grup G disebut *subgrup normal* dari G jika dan hanya jika $gng^{-1} \in N$ untuk semua $n \in N$ dan semua $g \in G$. Dan bila N subgrup normal G maka dinotasikan $N \triangleleft G$.

Contoh 2.1.7 :

Jika N subgrup dari grup Abel G, dan $n \in N$ dan $g \in G$ maka $gng^{-1} = gg^{-1}n = en = n \in N$. Sehingga setiap subgrup dari grup Abel adalah subgrup normal.

Teorema 2.1.8:

Misalkan N adalah subgrup normal dari grup G dan misalkan G/N adalah himpunan semua koset kanan dari N dalam G. Untuk semua $Na \in G/N$ dan $Nb \in G/N$, didefinisikan operasi $(Na)(Nb) = N(ab)$. Maka G/N adalah grup dengan operasi yang didefinisikan sebelumnya.

Bukti :

Akan ditunjukkan lebih dulu bahwa operasi pada G/N yang didefinisikan dengan $(Na)(Nb) = N(ab)$ adalah terdefinisi dengan baik, yaitu jika $Na_1 = Na_2$ dan $Nb_1 = Nb_2$ maka $N(a_1b_1) = N(a_2b_2)$. Dari $Na_1 = Na_2$ didapat $a_1 = n_1a_2$, untuk suatu $n_1 \in N$. Dari $Nb_1 = Nb_2$ didapat $b_1 = n_2b_2$, untuk suatu $n_2 \in N$. Maka $a_1b_1 = n_1a_2n_2b_2$. Namun $a_2n_2a_2^{-1} = n_3$ untuk $n_3 \in N$ karena $N \triangleleft G$. Maka diperoleh $a_2n_2 = (a_2n_2a_2^{-1})a_2 = n_3a_2$, dan sehingga $a_1b_1 = n_1n_3a_2b_2$. Misal $n\,a_1b_1 \in N(a_1b_1)$ maka $na_1b_1 = nn_1n_3a_2b_2 = n_4a_2b_2$ untuk suatu $n_4 = nn_1n_3 \in N$. Padahal $n_4a_2b_2 \in Na_2b_2$ sehingga $N(a_1b_1) \subseteq N(a_2b_2)$.................(1).

Karena $Na_2 = Na_1$ didapat $a_2 = n_1a_1$, untuk suatu $n_1 \in N$. Dari $Nb_2 = Nb_1$ didapat $b_2 = n_2b_1$, untuk suatu $n_2 \in N$. Maka $a_2b_2 = n_1a_1n_2b_1$. Namun $a_1n_2a_1^{-1} = n_3$ untuk suatu $n_3 \in N$ karena $N \triangleleft G$. Dari sini diperoleh $n_3a_1 = (a_1n_2a_1^{-1})a_1 = a_1n_2$, dan sehingga $a_2b_2 = n_1n_3a_1b_1$. Ambil sembarang $n\ a_2b_2 \in N(a_2b_2\ )$ maka $na_2b_2 = nn_1n_3a_1b_1 = n_4a_1b_1$ untuk suatu $n_4 = nn_1n_3 \in N$. Padahal $n_4a_1b_1 \in Na_1b_1$ sehingga $N(a_2b_2) \subseteq N(a_1b_1)$.................(2).

Karena (1) dan (2) maka diperoleh $N(a_2b_2) = N(a_1b_1)$. Jadi $Na_1Nb_1 = Na_2Nb_2$. Jadi operasi tersebut terdefinisi dengan baik.

Operasi pada G/N bersifat assosiatif sebab jika $a,b,c \in G$ maka $Na(NbNc) = Na(N(bc)) = N(a(bc)) = N((ab)c) = N(ab)Nc = (NaNb)Nc$. Elemen Ne adalah elemen identitas dari G/N sebab jika $a \in G$ maka $NeNa = N(ea) = Na$ dan $NaNe = N(ae) = Na$. Elemen Na^{-1} adalah elemen invers dari Na sebab $NaNa^{-1} = N(a\,a^{-1}) = Ne$ dan $N\,a^{-1}Na = N(a^{-1}a) = Ne$. Jadi terbukti bahwa G/N adalah grup. ■

Dan untuk selanjutnya G/N beserta operasi yang didefinisikan dengan $(Na)(Nb) = N(a\,b)$, $\forall (Na), (N\,b) \in G/N$ disebut *grup faktor* dari G oleh N.

B. RING

Dalam subbab ini akan dibahas tentang ring.

Definisi 2.2.1:

Suatu *ring* $(R, +, .)$ adalah himpunan tidak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner yang didefinisikan pada R yang diberi nama penjumlahan (+) dan perkalian (.) sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. $(R, +, .)$ merupakan grup Abel yaitu :

   a) $(\forall a,b,c \in R)\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (sifat assosiatif)

   b) $(\exists 0 \in R)\ (\forall a \in R),\ 0 + a = a + 0 = a$ (0 adalah elemen identitas ring R)

   c) $(\forall a \in R)(\exists -a \in R),\ a + (-a) = (-a) + a = 0$ (-a adalah invers aditif dari a)

   d) $(\forall a,b \in R),\ a + b = b + a$ (sifat komutatif)

2. R bersifat tertutup terhadap perkalian: $(\forall a,b \in R),\ a.b \in R$

3. Perkalian di R bersifat assosiatif : $(\forall a,b,c \in R)\ (a.b).\ c = a.(b.c)$

4. Berlaku hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan

   $(\forall a,b,c \in R)\ a.(b+c) = a.b + a.c$ dan

   $(\forall a,b,c \in R)\ (a+b).c = a.c + b.c$

Contoh 2.2.1:

Himpunan semua bilangan real (**R, +, .**), himpunan semua bilangan bulat *(Z, +, .)*, himpunan bilangan rasional *(Q, +, .)*, himpunan bilangan kompleks *(C, +, .)* dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan ring.

Contoh 2.2.2:

Misal $\quad M(2,Z) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z \right\}$

M(2, Z) merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks-matriks.

Contoh 2.2.3:

Himpunan bilangan bulat positif dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat biasa bukan merupakan ring. Karena $(Z^+, +)$ bukan grup.

Di dalam penulisan selanjutnya, untuk menyederhanakan penulisan operasi perkalian $a.b$ cukup ditulis ab dan ring $(R,+,.)$ ditulis dengan R.

Misal G adalah grup dengan operasi penjumlahan. Misal $a,b \in G$ dan $-b \in G$ adalah invers aditif dari b di G maka $a + (-b)$ ditulis dengan $a - b$

Teorema 2.2.1:

Misal R merupakan ring dan $a,b,c \in R$, maka berlaku :

1. Elemen identitas di R tunggal
2. Setiap elemen R terhadap operasi + mempunyai invers tunggal
3. Jika $a + b = a + c$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri)
4. Jika $b + a = c + a$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan)
5. Untuk setiap a dalam R , -(-a) = a
6. Untuk setiap a , b dalam R, $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a-b$

Teorema 2.2.1 tidak akan dibuktikan karena sudah dibuktikan dalam teori grup. ■

Teorema 2.2.2:

Misal R merupakan ring dan $a,b,c \in R$, maka berlaku :

1. $0a = a0 = 0$
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
3. $(-a)(-b) = ab$
4. $a(b-c) = ab - ac$ dan $(a-b)c = ac - bc$

Bukti :

1. $0a = (0+0)a = 0a + 0a$ padahal $0a = 0a + 0$ sehingga diperoleh $0a + 0a = 0a + 0$, dengan menggunakan hukum kanselasi kiri diperoleh $0a = 0$.

Untuk bukti $a0 = 0$ analog seperti di atas.

2. Akan dibuktikan terlebih dulu bahwa $a(-b) = -(ab)$

   $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$

   $a(-b) = -(ab) + ab + a(-b) = -(ab) + 0 = -(ab)$. Jadi $a(-b) = -(ab)$

   untuk bukti $(-a)b = -(ab)$ analog seperti diatas.

3. $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$

4. $a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab - ac$ ■

Definisi 2.2.2:

Ring R disebut *ring komutatif* jika operasi perkalian di R bersifat komutatif, yaitu

$(\forall a,b \in R)\ a\ b = b\ a$

Contoh 2.2.4:

Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring komutatif karena operasi perkalian pada bilangan bulat bersifat komutatif. Contoh lain ring komutatif adalah $(R, +, .), (Q, +, .), (C, +, .)$

Definisi 2.2.3:

Misal R adalah ring, elemen e dalam R disebut *elemen satuan ring* R jika dan hanya jika $(\forall a \in R)\ a\ e = e\ a = a$

Ring R yang memiliki elemen satuan disebut *ring dengan elemen satuan*. Dalam penulisan selanjutnya elemen satuan e ditulis dengan 1.

Definisi 2.2.4 :

Jika R adalah ring komutatif maka $a \in R$, $a \neq 0$ disebut *pembagi nol* bila dan hanya bila ada $b \in R$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Definisi 2.2.5

Suatu ring R disebut *daerah integral*, jika R adalah ring komutatif, mempunyai elemen satuan 1 dan tidak memuat pembagi nol.

Contoh 2.2.5:

(Z, +, .), (Q, +, .), (R,+, .), (C, +, .) adalah daerah integral.

Definisi 2.2.6:

Misal R adalah ring dengan elemen satuan 1. Suatu elemen $x \in R$ disebut *unit* dari R jika terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $xy = yx = 1$. Dan y disebut *invers* dari x dan ditulis $y = x^{-1}$.

Definisi 2.2.7 :

Ring R dengan elemen satuan dimana elemen-elemen tidak nolnya mempunyai invers multiplikatif atau elemen-elemen tidak nolnya merupakan unit disebut *field*. Jadi *field* adalah daerah integral dimana elemen-elemen tidak nolnya merupakan unit.

Contoh 2.2.6:

Dalam contoh 2.2.5 semua merupakan field kecuali (Z, +, .) karena ada 5 $\in Z$ yang tidak mempunyai invers multiplikatif.

Definisi 2.2.8:

Misal D adalah daerah integral. Misal a, b $\in D$, $b \neq 0$ maka b disebut *pembagi habis* dari a jika ada c $\in D$ sedemikian sehingga $a = bc$. Elemen a, $b \in D$ dikatakan *bersekawan* jika $a = bu$ dengan u adalah unit dalam D.

Definisi 2.2.9 :

Elemen tidak nol p yang bukan unit dari daerah integral D adalah *elemen tak teredusir* jika dalam sebarang faktorisasi p = ab dalam D maka berlaku a atau b adalah elemen satuan 1.

Definisi 2.2.10:

Daerah integral D disebut *daerah faktorisasi tunggal* jika memenuhi pernyataan berikut :

1. Setiap elemen selain nol dan unit dari D dapat dinyatakan sebagai perkalian berhingga dari elemen tak teredusir yaitu

   $a = p_1p_2p_3\ldots p_m = q_1q_2q_3\ldots q_n$ dimana p_i dan q_i adalah elemen tak teredusir dalam D.

2. Jika $a = p_1p_2p_3\ldots p_m = q_1q_2q_3\ldots q_n$ dimana p_i dan q_i adalah elemen tak teredusir maka m = n dan terdapat permutasi X dari

$\{1, 2, \ldots, m\}$ sedemikian sehingga p_i dan $q_{x(I)}$ adalah bersekawan untuk $i = 1, 2, \ldots, m$.

Contoh 2.2.7:

Ring (Z, +, .) merupakan daerah integral. Misal $x \in Z$ sedemikian sehingga $x \neq 0$ dan $x \neq 1$ dan $x \neq -1$. Menurut teorema fundamental aritmatika, setiap bilangan bulat yang lebih besar dari satu dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari sejumlah berhingga bilangan prima. Misal 15 = 3x5 = 5x3, 16 = 2x2x2x2, 17 = 17, dan sebagainya. Dalam hal contoh 17 = 17, istilah "hasil kali" dianggap mencakup kemungkinan bahwa hanya mempunyai satu faktor yang dapat dinyatakan. Untuk bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 dapat dinyatakan sebagai hasil kali antara bilangan-bilangan prima dengan suatu bilangan yang merupakan negatif suatu bilangan prima. Misalkan -12 = -2x2x3 = 2x(-2)x3 = 2x2x(-3). Sehingga syarat pertama dari daerah faktorisasi tunggal dipenuhi. Andaikan $x = p_1p_2p_3\ldots p_m = q_1q_2q_3\ldots q_n$ dimana p_i dan q_j adalah bilangan prima atau negatif dari prima untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Andaikan $m \neq n$. Jika $m > n$ maka terdapat $q_j = p_rp_k$ untuk suatu $r = 1, 2, \ldots, m$ dan $k = 1, 2, \ldots, m$. Sehingga terdapat kontradiksi kalau q_j prima. Jika $m<n$ maka terdapat $p_i = q_sq_t$ untuk suatu $s = 1, 2, \ldots, n$ dan $t = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga terdapat suatu kontradiksi kalau p_i adalah prima. Sehingga benar $m = n$. Dan permutasi yang dapat dibentuk adalah permutasi yang menghubungkan suatu pi dengan q_j sedemikian sehingga $p_i = \pm q_j$. Maka jelas bahwa p_i dan q_j bersekawan. Maka Z merupakan daerah faktorisasi tunggal.

Definisi 2.2.11:

Himpunan bagian S dari ring R disebut *subring dari* R jika dan hanya jika S sendiri merupakan ring terhadap operasi yang sama pada R

Contoh 2.2.8:

Himpunan bilangan genap E merupakan subring dari himpunan bilangan bulat Z dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Teorema 2.2.3:

Diketahui R ring dan S adalah himpunan bagian dari R, maka S subring dari R bila dan hanya bila :

1. $S \neq \phi$
2. $(\forall a,b \in S)\ a + b \in S$ dan $a\,b \in S$
3. $(\forall a \in S)\ -a \in S$

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Diketahui R ring dan S adalah subring dari R . Maka S merupakan ring, yang berarti:

- $S \neq \phi$ karena S ring sehingga terdapat elemen identitas penjumlahan yaitu $0 \in S$ sehingga S tidak kosong.
- $(\forall a,b \in S)\ a + b \in S$ dan $a\,b \in S$, dipenuhi karena S ring
- $(\forall a \in S)\ -a \in S$, dipenuhi karena $(S,+)$ grup.

($\Leftarrow$)

Diketahui R ring dan S adalah himpunan bagian dari R, dan berlaku :

- $S \neq \phi$
- $(\forall a,b \in S)\ a + b \in S$ dan $a\,b \in S$
- $(\forall a \in S)\ -a \in S$

Misal $a \in S$ maka menurut (3) $-a \in S$. Dengan sifat (2), $a + (-a) = 0 \in S$.

Sekarang $a + (-a) = 0$

$$a + (-a) + a = 0 + a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Jadi S memuat elemen identitas yaitu 0. Karena S adalah himpunan bagian dari R dan R ring maka sifat assosiatif perkalian dan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dipenuhi oleh S. Jadi S ring berdasarkan definisi S subring dari R. ■

C. IDEAL DAN HOMOMORFISMA RING

Dalam subbab ini akan dibahas tentang ideal dan homomorfisma dalam ring.

Definisi 2.3.1:

Jika I subring dari R dan untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ maka I disebut *ideal kanan* dari ring R. Jika I subring dari R dan untuk setiap $\forall a \in$ I dan $r \in R$ berlaku $ra \in I$ maka I disebut *ideal kiri* dari ring R. I disebut *ideal* dari R jika I merupakan ideal kanan dan ideal kiri.

Contoh 2.3.1:

Himpunan bilangan genap E dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku didalamnya merupakan ideal dari himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku di dalamnya, karena :

- E subring dari Z
- $E = \{ x \in Z \mid x = 2n,\ n \in Z\}$, untuk setiap $a \in Z$ dan $x \in E$ maka berlaku:

  $ax = a(2n) = (a2)n = 2(an) = 2k,\ k \in E$ dan $xa = (2n)a = 2(na) = 2b,\ b \in E$

Jadi E merupakan ideal dari Z.

Contoh 2.3.2:

Misal $M(2,Z) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in Z \right\}$

Merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks-matriks.

$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in Z \right\}$ adalah ideal kanan tetapi bukan merupakan ideal kiri dari $M(2,\ Z)$. Sedangkan $K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| b,d \in Z \right\}$ merupakan ideal kiri namun bukan merupakan ideal kanan dari $M(2, Z)$.

Teorema 2.3.1:

Misal R adalah ring komutatif dengan elemen satuan e dan $a \in R$ maka $<a> = \{ar \mid r \in R\}$ merupakan ideal dari R.

Bukti :

- $<a>$ subring dari R sebab :

  1. $0 \in <a>$ karena $0 = a0$, $0 \in R$ sebab R ring sehingga $<a>$ tidak kosong.
  2. Misal $x,y \in <a>$ maka $(\exists m,n \in R)$ $x = am$ dan $y = an$. Sedangkan $x + y = am + an = a(m+n) = ak$, $k \in R$ sebab R ring sehingga $x + y \in <a>$. Sekarang $xy = (am)(an) = a(man) = a(amn) = ap$ dengan $amn = p \in R$ sehingga $xy \in <a>$.
  3. Misal $x \in <a>$ maka $(\exists r \in R)$ $x = ar$. Karena $r \in R$ dan $(R, +)$ grup Abel maka $(\exists(-r)) \in R$ sehingga $a(-r) = -ar = -x$. Jadi $-x \in <a>$.

- Misal $r \in R$ dan $x \in (a)$. Karena $x \in <a>$ maka$(\exists m \in R)x = am$ sehingga $rx = r(am) = (ra)m = (ar)m = a(rm) = ah$, $h = rm \in R$ dan $ra = ar$ karena R ring komutatif. Jadi $rx \in <a>$. Sedangkan $xr = (am)r = a(mr) = ap, p = mr \in R$ sehingga $xr \in <a>$.

Jadi $<a> = \{ar / r \in R\}$ merupakan ideal dari R. ■

Definisi 2.3.2:

Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan e dan $a \in R$ maka $<a> = \{ar : r \in R\}$ adalah *ideal yang dibangkitkan oleh* a. Dan elemen a disebut *pembangkit* atau *generator* dari ideal $<a>$, dan selanjutnya disebut *ideal utama yang dibangkitkan oleh* a. Daerah integral yang setiap idealnya merupakan ideal utama disebut *daerah ideal utama.*

Teorema 2.3.2:

Misal J adalah ideal dari Z maka ada bilangan bulat d yang membangkitkan J. Jika $J \neq \{0\}$ maka dapat diambil d adalah bilangan bulat terkecil dalam J.

Bukti:

Misal J adalah ideal dari Z. Misal J adalah ideal nol yaitu $J = \{0\}$ maka $J = <0>$. Misal $J \neq \{0\}$. Andaikan $n \in J$ maka $-n = (-1)n$ sehingga $-n \in J$. Dengan demikian J memuat beberapa bilangan bulat positif. Andaikan d adalah bilangan bulat terkecil dalam J. Akan ditunjukkan d adalah pembangkit dari J. Misal $n \in J$ dan $n = dx + r$ dengan $0 \leq r < d$ dengan $x \in Z$. Maka $r = n - dx \in J$ karena J adalah grup aditif. Karena $r < d$ dan d adalah bilangan bulat positif terkecil dalam J maka $r = 0$. Akibatnya $n = dx$. Jadi d adalah pembangkit dari J. ■

Contoh 2.3.3:

1. Misal R ring komutatif dengan elemen satuan e maka R adalah ideal dari R yang dibangkitkan oleh e karena $R = \{er | r \in R\} = <e>$.
2. Ring (Z, +, .) adalah daerah ideal utama menurut teorema 2.3.3 sehingga setiap idealnya berbentuk $nZ = \{nx | x \in Z\}$ untuk beberapa n bilangan asli.

Definisi 2.3.3:

Diberikan R dan S adalah ring. Maka pemetaan $\gamma : R \to S$ disebut *homomorfisma ring* bila dan hanya bila memenuhi :

1) $\gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b),\ \forall a,b \in R$

2) $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b),\ \forall a,b \in R$

Definisi 2.3.4:

Misal $\gamma : R \to S$ adalah homomorfisma ring. Maka *kernel dari* γ atau $Ker(\gamma)$ didefinisikan sebagai $\{ r \in R \mid \gamma(r) = 0_s \}$ dimana 0_s adalah elemen identitas dalam ring S.

Contoh 2.3.4:

Misal Z adalah himpunan bilangan bulat dan $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$ adalah ring terhadap jumlahan dan perkalian matriks. Pemetaan $f : K \to Z$ yang didefinisikan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = a$ adalah homomorfisma ring.

Contoh 2.3.5:

Misal Z adalah ring himpunan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat dan E adalah ring himpunan bilangan genap dengan operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan bulat. Pemetaan $K : Z \to E$ dengan aturan $K(n) = 2n, \ \forall n \in Z$ adalah bukan merupakan homomorfisma ring karena untuk m $\neq 0$ dan n $\neq 0$ maka $K(mn) = 2(mn) \neq (2m)(2n) = K(m)K(n)$.

Andaikan I adalah ideal dari ring R maka I merupakan subgrup normal dari grup aditif dari R sebab $(R, +)$ merupakan grup Abel. Karena I merupakan subgrup normal dari grup $(R, +)$, maka dapat dibentuk grup faktor R/I dimana elemen-elemennya adalah koset-koset yang berbentuk $I + r, \forall r \in R$.

Teorema 2.3.3 :

Misal I adalah ideal dari ring R, dan $R/I = \{I + r \,/\, r \in R\}$. Bila pada R/I didefinisikan operasi (+) dan (.) sebagai berikut :

$$(I + a) + (I + b) = I + (a + b)$$

$(I + a)(I + b) = I + (ab)$, untuk semua $(I + a)$, $(I + b)$ elemen dari R/I, maka $(R/I, +, .)$ merupakan ring dan untuk selanjutnya disebut dengan *ring faktor* dari R oleh ideal I.

Bukti :

Diketahui bahwa R/I merupakan grup terhadap operasi penjumlahan (+) berdasarkan teorema 2.1.8. Akan dibuktikan bahwa operasi perkalian dalam R/I bersifat well-defined.

Misal $I + a_1$, $I + a_2$, $I + b_1$, $I + b_2 \in R/I$ dimana $I + a_1 = I + a_2$ dan $I + b_1 = I + b_2$. Akan dibuktikan bahwa $(I + a_1)(I + b_1) = (I + a_2)(I + b_2)$.

Karena $I + a_1 = I + a_2$ maka berdasarkan teorema 2.1.7 diperoleh $a_1 - a_2 \in I$ sehingga $(a_1 - a_2)\, b_1 \in I$ karena I ideal dari R. Demikian pula $I + b_1 = I + b_2$ maka $b_1 - b_2 \in I$ sehingga $a_2(b_1 - b_2) \in I$ karena I ideal dari R. Sehingga diperoleh $(a_1 - a_2)\, b_1 = a_1b_1 - a_2b_1$ dan $a_2(b_1 - b_2) = a_2b_1 - a_2b_2$ dalam I.

Sehingga $a_1b_1 - a_2b_2 = (a_1b_1 - a_2b_1) + (a_2b_1 - a_2b_2) \in I$.

Jadi berdasarkan teorema 2.1.7 diperoleh $I + a_1b_1 = I + a_2b_2$, jadi operasi perkalian dalam R/I bersifat well-defined.

Berlaku sifat assosiatif perkalian :

Misal $I + a$, $I + b$, $I + c$ dalam R/I maka

$$(I + a)\{(I + b)(I + c)\} = (I + a)(I + bc)$$

$$= I + (a(bc))$$

$$= I + ((ab)c)$$

$$= (I + (ab))(I + c)$$

$$= \{(I + a)(I + b)\}(I + c)$$

Berlaku sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan :

$$(I + a)\{(I + b) + (I + c)\} = (I + a)(I + (b + c))$$

$$= I + (a(b + c))$$

$$= I + (ab + ac)$$

$$= (I + (ab)) + (I + ac)$$

$$= \{(I + a)(I + b)\} + \{(I + a)(I + c)\}$$

Jadi $(R/I, +, .)$ merupakan ring, dan selanjutnya disebut *ring faktor*. ■

Teorema 2.3.4:

Misal R adalah ring dengan elemen satuan 1dan I adalah ideal kanan tidak nol dari R. Jika I memuat unit dari R maka I = R.

Bukti :

Misal R adalah ring dengan elemen satuan 1dan I adalah ideal kanan tidak nol dari R. Andaikan I memuat unit dari R. Akan dibuktikan I = R.

Jelas $I \subseteq R$ karena I adalah ideal dari R. Misal a adalah unit dari R sedemikian sehingga $a \in I$ maka ada $b \in R$ sedemikian sehingga ab = 1. Misal $x \in R$ maka $x = 1x = (ab)x = a(bx)$. Karena I ideal kanandari R maka $a(bx) \in I$. Sehingga $x \in I$. Jadi $R \subseteq I$. Jadi dapat disimpulkan R = I. ■

Akibat teorema 2.3.4:

Setiap field tidak mempunyai ideal nontrivial. ■

D. MODUL

Dalam subbab ini akan dibahas tentang modul dan submodul dan beberapa contohnya.

Definisi 2.4.1. :

Misal R adalah ring dengan elemen satuan. Himpunan tidak kosong M disebut *modul (kanan) atas R*, bila M dilengkapi dengan dua operasi yaitu operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar dari elemen R, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $f : MXR \rightarrow M$ dimana $f(v,r) = vr \in M$, untuk setiap $v \in M$ dan $r \in R$ sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut ini :

1. Himpunan M bersama operasi penjumlahan (+) merupakan grup Abel.
2. Operasi perkalian skalar elemen R dengan elemen M memenuhi aksioma berikut :
   - $m(r+s) = mr + ms$, $\forall r,s \in R$, $m \in M$,
   - $m(rs) = (mr)s$, $\forall r,s \in R$, $m \in M$,
   - $(m+n)r = mr + nr$, $\forall r \in R$, $m,n \in M$,
   - $m1 = m$, $\forall m \in M$.

Dari definisi terlihat bahwa operasi perkalian setiap elemen M dengan setiap elemen R dari kanan didefinisikan dengan $f : MXR \rightarrow M$ dengan $f(a,r) = ar \in M$, sehingga disebut modul kanan atas ring komutatif R. Jika pada definisi diatas operasi skalar didefinisikan $f : RXM \rightarrow M$ dengan $f(r,a) = ra \in M$, maka M disebut *modul kiri atas ring R*.

Contoh 2.4.1. :

Misal R adalah ring dengan elemen satuan 1. Maka R adalah modul kanan atas dirinya sendiri dan bila R ring komutatif maka R sekaligus juga merupakan modul kiri atas dirinya sendiri karena R adalah grup Abel dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar elemen R dengan elemen R sendiri yang memenuhi aksioma modul.

Dan selanjutnya R disebut *modul reguler* dan dinotasikan dengan R_R. Untuk selanjutnya ring yang dipakai adalah ring dengan elemen satuan.

Contoh 2.4.2. :

Misalkan R adalah ring komutatif dan $M = \{0\}$ adalah grup komutatif dengan satu elemen. Jika didefinisikan $\forall r \in R,\ 0r = 0 \in M$, maka M adalah modul kanan atas ring R dan disebut modul trivial.

Contoh 2.4.3. :

Jika G grup Abel, maka G merupakan modul kanan atas ring Z dengan perkalian skalar yang didefinisikan melalui pemetaan $f : ZXG \rightarrow G$ dengan aturan $f(n, a) = na$, dimana untuk setiap $n \in Z$ dan $a \in G$ di definisikan :

$$na = \begin{cases} a + a + a + \ldots + a \text{ (n kali), untuk } n > 0 \\ 0, \text{ untuk } n = 0 \\ (-a) + (-a) + \ldots + (-a), |n| \text{ kali, untuk } n < 0 \end{cases}$$

Untuk selanjutnya dalam tulisan ini yang dimaksud *modul atas ring* R adalah modul kanan atas ring R.

Teorema 2.4.1:

Jika M modul atas ring R maka untuk semua $a \in M$ dan semua $r \in R$ berlaku :

1. $aO_R = O_M$
2. $O_M.r = O_M$

dimana O_R dan O_M berturut-turut adalah elemen identitas dalam R dan M.

Bukti :

Misal M modul atas ring R

1. Misal O_R elemen identitas di R , O_M elemen identitas di M dan $a \in M$

   $aO_R = a(O_R + O_R) = aO_R + aO_R$

   Karena M modul atas ring R maka $aO_R \in M$ sehingga ada $-(aO_R) \in M$ shingga berlaku $aO_R + (-(aO_R)) = aO_R + aO_R + (-(aO_R))$

   $$O_M = aO_R + O_M$$

   $$O_M + O_M = aO_R + O_M$$

   $$O_M = aO_R \text{ (teorema 2.2.1(4))}$$

2. Misal O_M elemen identitas di M dan $r \in R$

   $O_M.r = (O_M + O_M)r = O_M.r + O_Mr$

   Karena M modul atas ring R maka $O_Mr \in M$ sehingga ada $-(O_Mr) \in M$ sehingga berlaku $O_Mr + (-(O_Mr)) = O_Mr + O_Mr + (-(O_Mr))$

   $$O_M = O_Mr + O_M$$

$$O_M + O_M = O_M r + O_M$$

$$O_M = O_M r \text{ (teorema 2.2.1(4)).} \quad \blacksquare$$

Definisi 2.4.2. :

Diberikan modul M atas ring R dan N adalah himpunan bagian tidak kosong dari M. Himpunan N disebut *submodul* dari M bila dan hanya bila :

1) N subgrup aditif dari M

2) $(\forall r \in R)(\forall n \in N)\ nr \in N$.

Berdasarkan definisi diatas himpunan bagian tidak kosong N adalah submodul dari modul M atas ring R bila N merupakan subgrup dari M dan tertutup terhadap operasi perkalian dengan skalar.

Teorema 2.4.2:

Bila N submodul dari modul M atas ring R maka N juga merupakan modul atas ring R.

Bukti:

Misal N submodul dari modul M atas ring R. Akan dibuktikan N modul atas ring R. Karena N submodul dari M, berdasarkan definisi 2.4.2 berarti N subgrup aditif dari M dan berlaku $nr \in N$, $\forall r \in R$, $\forall n \in N$. Berdasarkan definisi 2.1.3 berarti N grup aditif Abel. Selanjutnya dibuktikan aksioma modul :

Misal $n \in N$, $r,s \in R$ maka berlaku $n(r+s) = nr + ns \in N$ dan $n(rs) = (nr)s \in N$

Misal $n, p \in N$, $r \in R$ maka berlaku $(n+p)r = nr + pr \in N$

Misal $n \in N$, $1 \in R$ maka berlaku $n1 = n \in N$. Jadi N modul atas ring R. $\blacksquare$

Contoh 2.4.4. :

Misalkan I adalah ideal dalam ring R, ring R merupakan modul atas ring R sendiri dan berdasarkan definisi ideal I maka I merupakan submodul dari R.

Contoh 2.4.5. :

Setiap modul M atas ring R mempunyai submodul trivial yaitu M dan $\{0\}$.

Teorema 2.4.3 :

Misal A, B adalah submodul dari modul dari M atas ring R, maka $A \cap B$ adalah submodul M

Bukti:

Misal A, B adalah submodul dari modul dari M atas ring R, maka $A \cap B$ adalah submodul M sebab :

- $A \cap B$ subgrup aditif dari M karena :
    - $0 \in A \cap B$ karena $0 \in A$ dan $0 \in B$ dan A, B submodul dari M sehingga $A \cap B$ tidak kosong.
    - Bila $x \in A \cap B$ maka $-x \in A \cap B$ karena $-x \in A$ dan $-x \in B$.
    - Bila $x + y \in A \cap B$ maka $x + y \in A \cap B$ karena $x + y \in A$ dan $x + y \in B$ dan A, B subgrup aditif dari M.
- Bila $x \in A \cap B$ dan $r \in R$ maka $x \in A$ dan $x \in B$. Karena $x \in A$ dan $r \in R$ maka $xr \in A$ sebab A adalah submodul M. Karean $x \in B$ dan $r \in R$ maka $xr \in B$ sebab B adalah submodul M. Sehingga $xr \in A \cap B$.

Jadi $A \cap B$ submodul dari M. ■

Teorema 2.4.4 :

Misal R adalah ring dengan elemen satuan dan M adalah modul atas ring R. Himpunan bagian N dari M adalah submodul bila dan hanya bila

1) $N \neq \phi$

2) $(\forall x,y \in N)(\forall r \in R)(x + yr \in N)$

Bukti :

Diketahui R ring dengan elemen satuan, M adalah modul atas ring R dan N adalah himpunan bagian dari M.

$(\Rightarrow)$

Diketahui N submodul dari M, maka $0 \in N$ sehingga $N \neq \phi$. Berdasarkan definisi 2.4.2., N adalah subgrup aditif dari M dan N tertutup terhadap operasi perkalian dengan skalar sehingga $\forall y \in N$ dan $\forall r \in R$ berlaku $yr \in N$. Karena N subgrup aditif M maka berlaku $x + yr \in N$ untuk semua $r \in R$ dan semua $x,y \in N$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui (1) dan (2) harus ditunjukkan N submodul dari modul M atas ring R. Karena R ring dengan elemen satuan 1, maka $1 \in R$, dan $-1 \in R$ sehingga $x + y(-1) \in N$. Diperoleh $x - y \in N$. Berdasarkan (1) dan teorema 2.1.5 (untuk grup aditif), maka disimpulkan N adalah subgrup aditif dari M. Karena N subgrup aditif dari M maka $0 \in N$. Misalkan $x = 0$ dan berdasarkan (2) maka diperoleh $yr \in N$ untuk setiap $y \in N$ oleh elemen R. Sehingga berdasarkan definisi 2.4.2 maka N adalah submodul dari M atas ring R. ■

Definisi 2.4.3. :

Misalkan R adalah ring dan misal M dan N adalah modul atas ring R maka pemetaan $f : M \to N$ adalah *homomorfima modul atas ring* R jika untuk setiap $x, y \in M$ dan $r \in R$ memenuhi :

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2) $f(xr) = f(x)r$

Definisi 2.4.4. :

Jika M dan N adalah modul atas ring R dan jika pemetaan $f : M \to N$ adalah homomorfisma modul atas ring R maka didefinisikan *kernel dari* f yaitu $Ker\ f = \{ m \in M \mid f(m) = 0 \}$ dan bayangan dari f yaitu $Im\, f = f(M) = \{n \in N \mid n = f(m),\ m \in M\}$.

Berdasarkan definisi 2.4.3 dan definisi 2.4.4 terlihat bahwa jika f homomorfisma dari modul M ke modul N maka f juga merupakan homomorfisma dari grup aditif sehingga kernel dari f adalah kernel homomorfisma grup aditif. Namun bila diketahui f homomorfisma grup M ke N maka f *belum tentu* merupakan homomorfisma modul karena kondisi (2) dari definisi 2.4.3. belum tentu dipenuhi.

Contoh 2.4.6. :

Misal Z adalah ring himpunan bilangan bulat yang merupakan modul atas dirinya sendiri. Bila $\alpha : Z \rightarrow Z$ dengan $\alpha(x) = 4x$, untuk setiap $x \in Z$ maka α merupakan homomorfisma modul karena :

$\alpha(x + y) = 4(x + y) = 4x + 4y = \alpha(x) + \alpha(y)$

$\alpha(xr) = 4xr = (4x)r = \alpha(x)\, r$, $\forall r \in Z$. Dengan Ker $\alpha = \{0\}$.

Contoh 2.4.7. :

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan adalah modul atas dirinya sendiri dan $M = \{0\}$ adalah modul atas ring R. Maka pemetaan $\beta : R \rightarrow M$ dengan $\beta(x) = 0$, $\forall x \in R$ adalah homomorfisma modul sebab :

$\beta(x + y) = 0 = 0 + 0 = \beta(x) + \beta(y)$

$\beta(xr) = 0 = 0r = \beta(x)r$, dengan Ker $\beta = R$.

Definisi 2.4.5 :

Himpunan semua homomorfisma dari modul M ke N dilambangkan dengan ***Hom(M,N).*** Untuk selanjutnya didefinisikan :

1. *Monomorfisma* adalah homomorfisma yang injektif yaitu untuk $f : M \rightarrow N$ berlaku $(\forall a,b \in M)\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
2. *Epimorfisma* adalah homomorfisma yang surjektif yaitu untuk $f : M \rightarrow N$ berlaku $(\forall y \in N)(\exists x \in M)(y = f(x))$
3. *Isomorfisma* adalah homomorfisma yang bijektif yaitu jika homomofisma tersebut injektif dan surjektif.

4. *Endomorfisma* adalah homomorfisma dari modul M ke modul M.

Jika $f : M \to N$ adalah suatu isomorfisma, maka M dan N dikatakan isomorfik dan ditulis $M \cong N$.

Teorema 2.4.5 :

Misalkan M dan N adalah modul atas ring R. Dan $f : M \to N$ adalah homomorfisma modul, maka berlaku :

1. $f(0_M) = 0_N$
2. $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in M$

Bukti :

Misalkan M dan N adalah modul atas ring R. Dan $f : M \to N$ adalah homomorfisma modul.

1. Akan dibuktikan $f(0_M) = 0_N$, dimana $0_M, 0_N$ adalah elemen identitas dalam M dan N. Misal $0_M = 0_M + 0_M$ maka $f(0_M) = f(0_M + 0_M) = f(0_M) + f(0_M)$ karena f adalah homomorfisma. Karena $f(0_M) = f(0_M) + f(0_M)$

   $0_N + f(0_M) = f(0_M) + f(0_M)$

   berdasarkan teorema 2.2.1(4) diperoleh $0_N = f(0_M)$.

2. Akan dibuktikan $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in M$. Misal $x \in M$, karena M grup Abel maka ada $-x \in M$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$.

   Sekarang $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + (-f(x))$...............(1)

   $f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$................(2)

   Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh $f(x) + (-f(x)) = f(x) + f(-x)$

   Menurut teorema 2.2.1 (3) diperoleh $-f(x) = f(-x)$.

Jadi $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in M$. ■

Teorema 2.4.6 :

Misal M dan N adalah modul atas ring R dan $\alpha \in Hom(M,N)$. Kernel dan bayangan α yang didefinisikan sebagai berikut $Ker(\alpha) = \{v \in M : \alpha(v) = 0\}$ dan $\alpha(M) = \{\ \alpha(v) : v \in M\}$, berturut-turut merupakan submodul dari M dan submodul dari N.

Bukti :

Misal $\alpha: M \to N$ adalah homomorfisma modul, akan dibuktikan bahwa $Ker(\alpha)$ adalah submodul dari M.

a. $Ker\ (\alpha) \subseteq M$

b. Karena $\alpha: M \to N$ homomorfisma maka berdasarkan teorema 2.4.5(1) diperoleh $\alpha(0_M) = 0_N$. Jadi $0_M \in Ker(\alpha)$ berarti $Ker(\alpha) \neq \phi$

c. Misal $r \in R$, a, $b \in Ker\ (\alpha)$, maka

$$\alpha(a+br) = \alpha(a) + \alpha(br) = \alpha(a) + \alpha(b)r = 0_N + 0_N .r = 0_N + 0_N = 0_N$$

berdasarkan teorema 2.4.4. Jadi $a+br \in Ker(\alpha)$.

Jadi $Ker\ (\alpha)$ submodul M.

Akan dibuktikan $\alpha(M)$ adalah submodul dari N.

1. $\alpha(M) \subseteq N$
2. Karena $\alpha: M \to N$ homomorfisma maka berdasarkan teorema 2.4.5(1) diperoleh $\alpha(0_M) = 0_N$. Jadi $0_N \in \alpha(M)$ berarti $\alpha(M) \neq \phi$.
3. Misal $r \in R$, $a,b \in \alpha(M)$ maka $a = \alpha(x)$, $b = \alpha(y)$,dengan $x,y \in M$.

4. Sekarang $a + br = \alpha(x) + \alpha(y)r = \alpha(x) + \alpha(yr) = \alpha(x + yr)$, padahal $x+yr \in M$.

   Jadi $a + br \in \alpha(M)$.

Jadi berdasarkan teorema 2.4.4 maka $\alpha(M)$ merupakan submodul dari N. ■

Teorema 2.4.7 :

Misal M adalah modul atas ring R dan S adalah submodul dari M. Misakan $M/S = \{m + S \mid m \in M\}$. Misalkan operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar pada M/S didefinisikan sebagai berikut :

$(m_1 + S) + (m_2 + S) = (m_1 + m_2) + S$ dan

$(m_1 + S)r = m_1 r + S$

untuk setiap $m_1 + S$, $m_2 + S \in M/S$ dan $r \in R$, maka M/S adalah modul atas ring R.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa kedua operasi pada M/S tersebut adalah well-defined. Misal $m_1 + S$, $m_2 + S \in M/S$ dengan $m_1 + S = m_2 + S$ dan $m_3 + S$, $m_4 + S \in M/S$ dengan $m_3 + S = m_4 + S$. Akan dibuktikan $(m_1 + m_3) + S = (m_2 + m_4) + S$. Karena $m_1 + S = m_2 + S$ dan $m_3 + S = m_4 + S$, maka berdasarkan teorema 2.1.7 maka $m_1 - m_2 \in S$ dan $m_3 - m_4 \in S$, sehingga $(m_1 - m_2) + (m_3 - m_4) \in S$. Akibatnya $(m_1 + m_3) - (m_2 + m_4) \in S$. Berdasarkan teorema 2.1.7, diperoleh $(m_1 + m_3) + S = (m_2 + m_4) + S$. Misal $m_1 + S$, $m_2 + S \in M/S$ dengan $m_1 + S = m_2 + S$ maka $m_1 = m_2 + s$ dan $r_1, r_2 \in R$ dengan $r_1 = r_2$. Akan ditunjukkan $m_1 r_1 + S = m_2 r_2 + S$. Karena $m_1 = m_2 + s$, maka $m_1 r_1 = m_2 r_1 + s r_1$. Diketahui $r_1 = r_2$ maka $m_1 r_1 = m_2 r_2 + s r_2$. Diketahui S adalah submodul dari M maka

$s\,r_2 \in S$. Andaikan $s\,r_2 = s_1$ untuk suatu $s_1 \in S$ maka diperoleh $m_1 r_1 = m_2 r_2 + s_1$.

Maka berdasarkan teorema 2.1.7 diperoleh $m_1 r_1 + S = m_2 r_2 + S$.. Jadi operasi perkalian pada M/S bersifat well-defined.

Akan dibuktikan M/S adalah grup aditif komutatif. Operasi penjumlahan pada M/S asosiatif karena untuk $m_1 + S,\ m_2 + S,\ m_3 + S \in M/S$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
[(m_1 + S) + (m_2 + S)] + (m_3 + S) &= [(m_1 + m_2) + S] + (m_3 + S) \\
&= [(m_1 + m_2) + m_3] + S \\
&= [m_1 + (m_2 + m_3)] + S \\
&= (m_1 + S) + [(m_2 + m_3) + S] \\
&= (m_1 + S) + [(m_2 + S) + (m_3 + S)]
\end{aligned}
$$

Jadi operasi penjumlahan pada M/S bersifat assosiatif.

Elemen $0 + S \in M/S$ adalah elemen identitas, karena untuk setiap $m_1 + S \in M/S$ maka berlaku $(m_1 + S) + (0 + S) = (m_1 + 0) + S = m_1 + S$.

Elemen $-m_1 + S \in M/S$ adalah elemen invers untuk $m_1 + S \in M/S$ karena memenuhi

$$(m_1 + S) + (-m_1 + S) = (m_1 + (-m_1)) + S = 0 + S \quad \text{dan}$$

$$(-m_1 + S) + (m_1 + S) = (-m_1 + m_1) + S = 0 + S$$

Operasi penjumlahan pada M/S bersifat komutatif, karena :

$$
\begin{aligned}
[(m_1 + S) + (m_2 + S)] &= (m_1 + m_2) + S \\
&= (m_2 + m_1) + S \quad (\text{ karena M grup Abel }) \\
&= (m_2 + S) + (m_1 + S)
\end{aligned}
$$

Jadi M/S dengan operasi penjumlahan merupakan grup aditif komutatif.

Aksioma-aksioma modul :

Misal $r,p \in R$, dan $m_1 + S$, $m_2 + S \in M/S$, maka :

1. $((m_1 + S) + (m_2 + S))r = ((m_1 + m_2) + S)r$

$$= (m_1 + m_2)r + S$$

$$= (m_1 r + m_2 r) + S$$

$$= (m_1 r + S) + (m_2 r + S)$$

$$= (m_1 + S)r + (m_2 + S)r$$

2. $(m_1 + S)(r + p) = (m_1(r + p) + S)$

$$= (m_1 r + m_1 p) + S$$

$$= (m_1 r + S) + (m_1 p + S)$$

$$= (m_1 + S)r + (m_1 + S)p$$

3. $(m_1 + S)(rp) = (m_1 + S)(rp) = ((m_1 + S)r)p$

4. $(m_1 + S)1 = m_1 1 + S = m_1 + S$

Jadi M/S adalah modul atas ring R. ■

Definisi 2.4.6 :

Modul M/S dalam teorema 2.4.9 selanjutnya disebut sebagai *Modul Faktor*.

Teorema 2.4.8:

Misalkan M adalah modul atas ring R. Jika A dan B adalah submodul dari M dan $A \subseteq B$ maka B/A adalah submodul dari M/A.

Bukti:

Misalkan M adalah modul atas ring R dan A dan B adalah submodul dari M dengan $A \subseteq B$. Akan dibuktikan B/A adalah submodul dari M/A.Terlebih dahulu akan ditunjukkan A submodul dari B. Jelas bahwa A bukan himpunan kosong karena A submodul dari M. Misal $x,y \in A$ dan $r \in R$ maka $yr \in A$ karena A submodul dari M sehingga $x + yr \in A$. Berdasarkan teorema 2.4.4 maka A adalah submodul dari B.Akan ditunjukkan B/A submodul dari M/A. Sekarang,

1. $B/A \neq \phi$ karena $A = A + 0$ dengan $0 \in B$ sehingga $A \in B/A$
2. Misal $A + b \in B/A$ dengan $b \in B$. Karena B submodul dari M maka $b \in M$ sehingga $A + b \in M/A$. Jadi $B/A \subseteq M/A$.
3. Misal $r \in R$ dan $A + x$, $A + y \in B/A$ dengan $x,y \in B$ maka $(A + y)r = A + yr \in B/A$ karena B submodul dari M sehingga $yr \in B$. Sekarang $(A + x) + (A + y)\, r = (A + x) + (A + yr) = A + (x + yr) \in B/A$ karena $x + yr \in B$ dengan B submodul dari M.

Jadi B/A submodul dari M/A. ∎

Teorema 2.4.9 :

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan 1 dan R adalah modul reguler. Himpunan bagian A dari R merupakan submodul dari modul R bila dan hanya bila A merupakan ideal dari ring R.

Bukti :

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan 1 dan R adalah modul reguler.

($\Rightarrow$)

Misal A himpunan bagian R dan A submodul dari R_R. Akan dibuktikan A ideal dari ring R. Berdasarkan definisi 2.4.2 maka A subgrup aditif R. Misal $x,y \in A$ maka $x,y \in R$. Karena A submodul dari R_R maka $xy \in A$. Jadi A subring R. A submodul dari R_R dan karena R_R modul kiri maupun modul kanan maka berdasarkan definisi 2.4.2 berlaku $ar \in A$ dan $ra \in A$, $\forall a \in A$ dan $r \in R$. Jadi A ideal dari R.

($\Leftarrow$)

Misal A ideal dari R maka A subring dari R dan A subgrup aditif dari R dan berlaku $ar = ra \in A$, $\forall a \in A$ dan $r \in R$. Berdasarkan definisi 2.4.2 maka A submodul dari R_R. ■

Definisi 2.4.7 :

Misalkan A,B adalah submodul dari modul M atas ring R. *Jumlah dari A dan B* adalah himpunan $A + B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Teorema 2.4.10:

Misalkan A dan B adalah submodul dari modul M atas ring R maka $A + B$ adalah submodul dari M.

Bukti :

Misal A dan B adalah submodul dari modul M atas ring R. Akan dibuktikan $A + B$ adalah submodul dari M. Karena A dan B adalah submodul dari M berarti A dan B

adalah subgrup aditif maka $0 \in A$ dan $0 \in B$ dimana 0 adalah elemen identitas dari M. Sehingga $0 = 0 + 0 \in A + B$. Jadi $A + B$ bukan himpunan kosong.

Misal $a + b,\ x + y \in A + B$ dimana $a, x \in A$, dan $b, y \in B$ dan $r \in R$. Sekarang $(a + b)+(x + y)\ r = (a + b) + (xr + yr) = (a + xr) + (b + yr) \in A + B$ karena $a + xr \in A$ dan $b + yr \in B$ dimana A dan B merupakan submodul dari M.

Berdasarkan teorema 2.4.4 maka $A + B$ adalah submodul dari M. ■

Teorema 2.4.11(Teorema Isomorfis pertama):

Misal M dan N adalah modul atas ring R dan $f : M \to N$ adalah suatu homomorfisma modul. Maka $M/ Ker\ (f) \cong f(M)$.

Bukti :

Misal M dan N adalah modul atas ring R dan $f : M \to N$ adalah suatu homomorfisma modul. Didefinisikan pemetaan $g : M/ Ker\ (f) \to f(M)$ dengan $g(Ker(f) + m) = f(m)$ untuk $Ker(f) + m \in M/Ker\ (f)$. Akan dibuktikan $g : M/ Ker\ (f) \to f(M)$ adalah isomorfisma. $Ker(f)$ adalah submodul M dan $M/ Ker\ (f)$ adalah modul faktor. Misal $Ker(f) + m_1,\ Ker(f) + m_2 \in M/Ker\ (f)$ dengan $Ker(f) + m_1 = Ker(f) + m_2$. Karena $Ker(f) + m_1 = Ker(f) + m_2$ maka berdasarkan teorema 2.1.7 diperoleh $m_1 - m_2 \in Ker\ (f)$. Jadi $f(m_1 - m_2) = 0$. Karena f homomorfisma maka $f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2) = 0$ dan akibatnya $f(m_1) = f(m_2)$. Sehingga $g(Ker(f) + m_1) = f(m_1) = f(m_2) = g(Ker(f) + m_2)$.

Jadi g well-defined.

Akan ditunjukkan g homomorfisma.

Misal $r \in R$, dan $Ker(f) + m_1,\ Ker(f) + m_2 \in M/ Ker\ (f)$

$$g[(Ker(f) + m_1) + (Ker(f) + m_2)] = g\ [Ker(f) + (m_1 + m_2)]$$

$$= f\ (m_1 + m_2)$$

$$= f(m_1) + f(m_2)$$

$$= g(Ker(f) + m_1) + g(\ Ker(f) + m_2)$$

$$g[(Ker(f) + m_1)r] = g[Ker(f) + (m_1 r)]$$

$$= f\ (m_1 r) = f(m_1)r = [g(Ker(f) + m_1)]r.$$

Jadi g homomorfisma modul.

Misal $Ker(f) + m_1,\ Ker(f) + m_2 \in M\ Ker\ (f)$ dan $g(Ker(f) + m_1) = g(\ Ker(f) + m_2\ )$. Maka $f(m_1) = f(m_2)$ sehingga $f(m_1) - f(m_2) = 0$. Karena $f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2) = 0$ dimana f homomorfisma maka $m_1 - m_2 \in Ker\ (f)$. Berdasarkan teorema 2.1.7 diperoleh $Ker(f) + m_1 = Ker(f) + m_2$. Jadi g injektif.

Misal $x \in f(M)$. Maka $x = f(m)$ untuk suatu $m \in M$. Maka $Ker(f) + m \in M\ Ker\ (f)$ dan $g(Ker(f) + m) = x$. Jadi untuk semua $x \in f(M)$ ada $Ker(f) + m \in M\ Ker\ (f)$ sehingga $g(Ker(f) + m) = x$. Jadi g surjektif.

Maka pemetaan $g : M/ Ker\ (f) \rightarrow f(M)$ adalah suatu isomorfisma dan dapat ditulis $M/ Ker\ (f) \cong f(M)$. ■

Teorema 2.4.12 (Teorema Isomofisma Kedua)

Misal M adalah modul atas ring R dan A, B adalah submodul dari modul M atas ring R maka $(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$.

Bukti :

Misal M adalah modul atas ring R dan A, B adalah submodul dari M Berdasarkan teorema 2.4.10 dan teorema 2.4.3, $A + B$ dan $A \cap B$ adalah submodul dari M. Sekarang akan ditunjukkan B adalah submodul dari $A + B$.

- Jelas B tidak kosong sebab B adalah submodul M
- Karena A adalah submodul dari M maka $0 \in A$. Ambil $b \in B$, maka $0 + b = b$ sehingga $b \in A + B$. Jadi $B \subseteq A + B$.
- Misal $r \in R$, $x, y \in B$, karena B submodul M maka $x + yr \in B$.

Jadi B adalah submodul dari $A + B$.

Sekarang akan ditunjukkan $A \cap B$ adalah submodul dari A.

- Jelas $A \cap B$ tidak kosong karena $A \cap B$ submodul M.
- Misal $x \in A \cap B$ maka $x \in A$ dan $x \in B$. Diperoleh $x \in A$ maka $A \cap B \subseteq A$
- Andaikan $r \in R$ dan $x, y \in A \cap B$ maka $x + yr \in A \cap B$ karena $A \cap B$ adalah submodul M

Jadi $A \cap B$ submodul A.

Sekarang didefinisikan $f : A + B \rightarrow A/(A \cap B)$ dengan aturan $f(a + b) = (A \cap B) + a$, untuk $a + b \in A + B$. Misal $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \in A + B$ dengan $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ maka $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$. Karena A adalah submodul dari M maka $a_1 - a_2 \in A$. Karena B adalah submodul dari M maka $b_2 - b_1 \in B$. Karena $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ maka $a_1 - a_2 \in B$. Jadi $a_1 - a_2 \in A \cap B$ sehingga $(A \cap B) + a_1 = (A \cap B) + a_2$. Sehingga f adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Misal $r \in R$, $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \in A + B$ maka

$$f((a_1 + b_1)+(a_2 + b_2)) = f((a_1 + a_2))+(b_1 + b_2))$$

$$= (A\cap B) + (a_1 + a_2)$$

$$= ((A\cap B) + a_1) + ((A\cap B) + a_2)$$

$$= f(a_1 + b_1) + f(a_2 + b_2)$$

$$f((a_1 + b_1)r) = f(a_1r + b_1r) = (A\cap B) + a_1r = ((A\cap B) + a_1)r = [f(a_1 + b_1)]r$$

Jadi f adalah homomorfisma modul.

Misal $x \in A/(A\cap B)$ maka $x = (A\cap B) + a$ untuk suatu $a \in A$. Sehingga ada $a + b \in A + B$ dan memenuhi $f(a+b) = (A\cap B) + a = x$.

Jadi f surjektif sehingga $f(A+B) = A/(A\cap B)$.

Akan diperlihatkan $Ker(f) = B$.

$Ker(f) = \{ a + b \in A + B \mid f(a+b) = A\cap B \}$

$= \{ a + b \in A + B \mid (A\cap B) + a = A\cap B \}$

$= \{ a + b \in A + B \mid a \in A\cap B\}$.

Karena $a \in A\cap B$ maka $a \in A$ dan $a \in B$ sehingga $a + b \in B$. Jadi Ker(f) = B.

Menurut teorema 2.4.11, diperoleh $A+B/Ker(f) \cong f(A+B)$ yaitu

$(A + B)/B \cong A/(A\cap B)$. ■

Teorema 2.4.13 (Teorema Isomorfisma Ketiga) :

Misalkan M adalah modul atas ring R. Misal A, B adalah submodul M dengan $A \subseteq B$ maka $(M/A)/(B/A) \cong M/B$

Bukti :

Misalkan M adalah modul atas ring R. Misal A, B adalah submodul M dengan $A \subseteq B$. Akan dibuktikan $(M/A)/(B/A) \cong M/B$. Berdasarkan teorema 2.4.8, B/A adalah submodul dari M/A.

Didefinisikan $f : M/A \to M/B$ dengan aturan $f(A + m) = B + m$ untuk $A + m \in M/A$, $m \in M$. Misal $A + m_1$, $A + m_2 \in M/A$ dengan $A + m_1 = A + m_2$. Karena $A + m_1 = A + m_2$ dan berdasarkan teorema 2.1.7 maka $m_1 - m_2 \in A$. Karena $A \subseteq B$ maka $m_1 - m_2 \in B$. Jadi $B + m_1 = B + m_2$.

Sehingga $f(A + m_1) = f(A + m_2)$. Jadi f pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Akan ditunjukkan f adalah homomorfisma modul.

Misal $A + m_1$, $A + m_2 \in M/A$ dan $r \in R$. Maka:

$$
\begin{aligned}
f[(A + m_1) + (A + m_2)] &= f[A + (m_1 + m_2)] \\
&= B + (m_1 + m_2) \\
&= (B + m_1) + (B + m_2) \\
&= f(A + m_1) + f(A + m_2)
\end{aligned}
$$

$$f[(A + m_1)r] = f(A + m_1 r) = B + m_1 r = (B + m_1)r = [f(A + m_1)]r$$

Jadi f adalah homomorfisma modul.

Misal $x \in M/B$ dimana $x = B + m$ untuk suatu $m \in M$, maka ada $A + m \in M/A$ sedemikian sehingga $f(A+m) = B+m = x$. Jadi f surjektif dengan $f(M/A) = M/B$.

Akan ditunjukkan $Ker(f) = B/A$.

$$
\begin{aligned}
Ker(f) &= \{ A + m \in M/A \mid f(A + m) = B \} \\
&= \{ A + m \in M/A \mid B + m = B \} \\
&= \{ A + m \in M/A \mid m \in B \}
\end{aligned}
$$

$$= \{ A + m \in B/A\} = B/A$$

Maka berdasarkan teorema 2.4.11(teorema isomorfisma pertama) maka $(M/A)/Ker(f) \cong f(M/A)$ yaitu $(M/A)/(B/A) \cong M/B$. ■

Definisi 2.4.8 :

Jika M adalah modul atas ring R dan $N_1, N_2, \ldots, N_k$ merupakan submodul-submodul dari M. M adalah *jumlah langsung* dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$ bila dan hanya bila setiap $m \in M$ dapat dinyatakan sebagai jumlah $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ *secara tunggal* dengan $n_i \in N_i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,k$. Jika M sebagai jumlah langsung dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$ dinotasikan sebagai $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$. Dan $N_1, N_2, \ldots, N_k$ disebut sebagai *penjumlah langsung* dari M.

Teorema 2.4.14:

Misalkan A dan B adalah submodul dari modul M atas ring R maka $A \oplus B$ adalah submodul dari M.

Bukti :

Misal A dan B adalah submodul dari modul M atas ring R. Akan dibuktikan $A \oplus B$ adalah submodul dari M. Karena A dan B adalah submodul dari M berarti A dan B adalah subgrup aditif maka $0 \in A$ dan $0 \in B$ dimana 0 adalah elemen identitas dari M. Sehingga $0 = 0 + 0 \in A \oplus B$. Jadi $A \oplus B$ bukan himpunan kosong.

Misal $m = a + b$, $n = x + y \in A + B$ dimana $a, x \in A$, dan $b, y \in B$ dan $r \in R$. Sekarang, m + nr = $(a + b)+(x + y)\, r = (a + b) + (xr + yr) = (a + xr) + (b + yr) \in A \oplus B$ karena $a + xr \in A$ dan $b + yr \in B$ dimana A dan B merupakan submodul dari M. Berdasarkan teorema 2.4.4 maka $A \oplus B$ adalah submodul dari M. ■

Teorema 2.4.15 :

Misal A dan B submodul dari modul M atas ring R sehingga berlaku $M = A \oplus B$ maka $M/A \cong B$.

Bukti :

Misal A dan B adalah submodul dari modul M atas ring R sehingga berlaku $M = A \oplus B$. Misal $x \in M$ maka x dapat dinyatakan dengan tunggal dalam bentuk $x = a + b$ dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Didefinisikan $f : M \rightarrow B$ dengan $f(a + b) = b$. Misal $x,y \in M$ sedemikian sehingga $x = a_1 + b_1$ dan $y = a_2 + b_2$ dimana $x = y$. Sekarang $f(x) = f(a_1 + b_1) = b_1$ dan $f(y) = f(a_2 + b_2) = b_2$, karena $x = y$ maka $f(y) = b_1 = f(x)$. Jadi pemetaan f terdefinisi dengan baik. Misal diambil suatu $b \in B$ maka $b = 0 + b \in A \oplus B = M$ dan $f(b) = b$. Sehingga f merupakan fungsi surjektif. Misal $x,y \in M$ maka ada $a_1, a_2 \in A$ dan $b_1, b_2 \in B$ yang memenuhi $x = a_1 + b_1$ dan $y = a_2 + b_2$. Sekarang $f(x + y) = f((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2))$

$$= f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)) = b_1 + b_2 = f(x) + f(y)$$

Andaikan $r \in R$ dan $x \in M$ dimana $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$.

$$f(xr) = f((a+b)r) = f(ar + br) = br = f(a + b)\, r.$$

Jadi f adalah homomorfisma surjektif.

Akan ditunjukkan $Ker(f) = A$

Misal $x \in Ker(f)$ maka $f(x) = 0$. Karena $x \in Ker(f) \subseteq M$ maka terdapat $a \in A$ dan $b \in B$ sedemikian sehingga $x = a + b$. Jadi $f(x) = b = 0$, akibatnya $x = a$ sehingga $Ker(f) \subseteq A$. Misalkan $a \in A$ maka $a = a + 0 \in A \oplus B$. Sehingga $f(a) = 0$, akibatnya $a \in Ker(f)$, jadi $A \subseteq Ker(f)$. Akibatnya $Ker(f) = A$.

Jadi menurut teorema 2.4.11 maka $M/A \cong B$. ■

Teorema 2.4.16 :

Modul M atas ring R merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$ bila dan hanya bila:

1. $M = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$
2. $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Misalkan M adalah modul atas ring R yang merupakan jumlahan langsung dari submodul-submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Akan dibuktikan berlakunya sifat 1 dan 2.

Misal $m \in M$. Karena M jumlah langsung dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$ maka ada tunggal $n_i \in N_i$ sehingga $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Maka $m \in N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ sehingga $M \subseteq N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ ……………(1)

Ambil $m \in N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ maka ada $n_i \in N_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$ sehingga $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Karena N_i adalah submodul dari M, maka $N_i \subseteq M$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$. Sehingga $n_1, n_2, \ldots, n_k \in M$. Karena M grup aditif maka $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \in M$. Jadi $m \in M$, sehingga $N_1 + N_2 + \ldots + N_k \subseteq M$………(2).

Dari (1) dan (2) disimpulkan $M = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$

Misal $m \in N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j$, untuk $i = 1,2,\ldots,k$. Maka $m \in N_i$ dan $m \in \sum_{j \neq i} N_j$,Karena

$m \in N_i$ maka $m = n_i = 0 + \ldots + 0 + n_i + 0 + \ldots + 0$ untuk suatu $n_i \in N_i$. Karena

$m \in \sum_{j \neq i} N_j$, dengan $\sum_{j \neq i} N_j = N_1 + N_2 + \ldots + N_{i-1} + N_{i+1} + \ldots + N_k$ maka

$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} + n_{i+1} + \ldots + n_k$ untuk suatu $n_j \in N_j$. Karena M jumlah langsung dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$ maka diperoleh $n_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$. Jadi $m = 0$.

Terbukti bahwa $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$.

($\Leftarrow$)

Diberikan modul M atas ring R dan $N_1, N_2, \ldots, N_k$ submodul-submodul dari M yang memenuhi :

1. $M = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$
2. $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$.

Akan dibuktikan M adalah jumlah langsung dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Ambil $m \in M$.

Karena $M = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ maka $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ dengan $n_i \in N_i$, $i = 1,2,\ldots,k$. Misalkan $m = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$ dengan $w_i \in N_i, i = 1,2,\ldots,k$, maka

$(n_1 - w_1) + (n_2 - w_2) + \ldots + (n_k - w_k) = 0$, diperoleh

$-(n_i - w_i) = (n_1 - w_1) + (n_2 - w_2) + \ldots + (n_{i-1} - w_{i-1}) + (n_{i+1} - w_{i+1}) + \ldots + (n_k - w_k)$

sehingga $-(n_i - w_i) \in N_i$ dan $(n_i - w_i) \in \sum_{j \neq i} N_j$,maka $-(n_i - w_i) \in N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j$.

Karena $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$ maka $-(n_i - w_i) = 0$. Jadi $n_i = w_i$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,k$. Jadi M jumlah langsung dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$. ■

Teorema 2.4.17:

Misal M adalah modul atas ring R. Jika N adalah submodul dari M maka $\langle N \rangle = \{n_1 r_1 + \dots + n_k r_k : r_i \in R,\ n_i \in N,\ k \in Z^+\}$ adalah submodul dari M.

Bukti:

Misal M adalah modul atas ring R dan N adalah submodul dari M. Akan dibuktikan $\langle N \rangle$ submodul dari M.

1. Misal $0_M \in M$ sehingga $0_M = a_1 0_R + \dots + a_n 0_R$ dimana $0_R \in R$ dan $a_i \in N \subseteq M$ sehingga $0_M = 0_M + \dots + 0_M$, $0_M \in \langle N \rangle$. Jadi $\langle N \rangle \neq \phi$.

2. Misal $x, y \in \langle N \rangle$ maka

   $x = a_1 r_1 + \dots + a_n r_n$ dengan $r_i \in R$ dan $a_i \in N \subseteq M$.

   $y = a_1 s_1 + \dots + a_m s_m$ dengan $s_i \in R$ dan $a_i \in N \subseteq M$

   untuk $n > m$. Misal $r \in R$ maka

   $yr = (a_1 s_1 + \dots + a_m s_m) r = (a_1 s_1) r + \dots + (a_m s_m) r = a_1 (s_1 r) + \dots + a_m (s_m r)$.

   Karena $r \in R$ dan $s_i \in R$ dan $a_i \in N$ maka $a_i(s_i r) \in N$ untuk $i = 1, 2, .., m$.

   Jadi $yr \in \langle N \rangle$. Sekarang,

$$
\begin{aligned}
x + yr &= \sum_{i=1}^{n} a_i r_i + \sum_{i=1}^{m} a_i (s_i r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i r_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i + \sum_{i=1}^{m} a_i (s_i r) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i (r_i + s_i r) + \sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i
\end{aligned}
$$

Karena r_i, s_i, $r \in R$ dan R adalah ring maka $r_i + s_i r \in R$ dan $a_i \in N \subseteq M$ maka $x + yr \in \langle N \rangle$. Jadi berdasarkan teorema 2.4.4 disimpulkan $\langle N \rangle$ adalah submodul dari M. Untuk bukti dari $n < m$ dan $m = n$ analog dengan bukti diatas. ■

Definisi 2.4.9 :

Submodul $<N>$ dalam teorema 2.4.17, untuk selanjutnya disebut *submodul dari M yang dibangkitkan oleh N.* Himpunan N dikatakan *membangkitkan M* jika $M = <N>$, yang berarti setiap $m \in M$ dapat ditulis dalam bentuk $m = n_1 r_1 + \ldots + n_k r_k$ dimana $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R$, dan $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$ untuk suatu bilangan asli k. Suatu modul M dikatakan *dibangkitkan secara berhingga* jika M memuat himpunan berhingga yang membangkitkan M.

Teorema 2.4.18 :

Misal M adalah modul atas ring R dan $m \in M$, maka $<m> = \{mr \mid r \in R\}$ merupakan submodul dari M.

Bukti:

Misal M adalah modul atas ring R dan $m \in M$.

Akan dibuktikan $<m> = \{mr \mid r \in R\}$ merupakan submodul dari M.

a. Misal $0_R \in R$ sehingga $m0_R = 0_M \in <m>$. Jadi $<m> \neq \phi$.

b. Misal $x, y \in <m>$ maka

   $x = mr_1$ dengan $r_1 \in R$ dan $y = mr_2$ dengan $r_2 \in R$.

   Sekarang untuk setiap $r \in R$ berlaku:

   $x + yr = mr_1 + (mr_2)r = mr_1 + m(r_2 r) = m(r_1 + r_2 r)$

   Karena R adalah ring maka $(r_1 + r_2 r) \in R$ sehingga $x + yr \in <m>$. Sehingga menurut teorema 2.4.4 maka $<m>$ adalah submodul dari M. ■

Definisi 2.4.10:

Submodul dari M yang berbentuk $<m>=\{mr \mid r \in R\}$ seperti dalam teorema 2.4.18 disebut *submodul siklik*. Modul M disebut *modul siklik* bila terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $M = <m>$ dan M dikatakan sebagai modul yang dibangkitkan oleh elemen $m \in M$.

Dan untuk selanjutnya <m> sering ditulis dengan mR.

Teorema 2.4.19:

Misal M adalah modul atas ring R, dan N adalah submodul dari M dan $NR = \{ nr \mid r \in R, n \in N\}$ maka NR = N.

Bukti :

Misal M adalah modul atas ring R dan N adalah submodul dari M dan $NR = \{ nr \mid r \in R, n \in N\}$. Akan dibuktikan NR =N. Karena N submodul dari M maka nr $\in N$ untuk semua r $\in$ R dan semua n $\in$N. Sehingga NR $\subseteq$N.

Misal x $\in N$. Akan ditunjukkan x $\in NR$.

Sehingga harus diperlihatkan bahwa x = xr dengan x $\in N$ dan $r \in R$.

Sekarang x = x.1 dengan 1 $\in R$ dan x $\in N$ sehingga x $\in NR$. Jadi N $\subseteq$ NR.

Jadi terbukti bahwa $N = NR$. ■

Teorema 2.4.20:

Misal R adalah ring komutatif dan M adalah modul atas ring R. Misalkan $I=\{x \in R \mid mx = 0,\ \forall m \in M\}$, maka I adalah ideal dari R.

Bukti :

Misal R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah modul atas ring R. Diketahui I adalah himpunan elemen $x \in R$ sedemikian hingga $mx = 0,\ \forall m \in M$, akan dibuktikan I adalah ideal dari R. I subring R karena :

1. $0 \in I$ karena $0 = m0 = 0$ sehingga I bukan himpunan kosong.
2. Misal $x,y \in I$ dan $m \in M$ maka $mx = 0$ dan $my = 0$. Sekarang $x + y \in R$ karena R ring sehingga $mx + my = m(x+y) = 0$ karena $mx + my = 0 + 0 = 0$ sehingga $x + y \in I$. Sekarang $m(xy) = (mx)y = 0\,y = 0$.
3. Misal $x \in I$ dan $m \in M$ maka $x \in R$ sehingga ada $-x \in R$ sehingga $-xm = -(xm) = -0 = 0, \quad -x \in I.$

Jika $a \in R$ dan $x \in I$ maka : $m(ax) = m(xa) = (mx)a = 0a = 0$ dan $m(xa) = (mx)a = 0a = 0,\ \forall m \in M.$ Jadi I ideal dari R. ■

Teorema 2.4.21:

Modul M atas ring R adalah siklik bila dan hanya bila $M \cong R/I$ untuk suatu ideal I dari R.

Bukti :

$(\Leftarrow)$

Misal $M \cong R/I$, untuk suatu ideal I dari R. R/I adalah modul siklik atas ring R yang dibangkitkan oleh koset $I + 1$, sebab sebarang elemen R/I mempunyai bentuk

$I + r = (I + 1)\, r$ untuk semua $r \in R$. Karena $M \cong R/I$ maka ada isomorfisma $f : R/I \to M$ sehingga bila $I + r \in R/I$, maka $f(I+r) = f((I+1)r) = [f(I+1)]r$. Karena f surjektif maka semua elemen M berbentuk $[f(I+1)]r$. Jadi M modul siklik yang dibangkitkan oleh $f(I+1)$.

($\Rightarrow$)

Misal M adalah modul siklik atas ring R, berarti $M = \{mr \mid r \in R\}$ untuk suatu $m \in M$. Didefinisikan $\alpha : R \to M$ dengan $\alpha(r) = mr$.

Misal $r_1, r_2 \in R$ dan $r_1 = r_2$ maka $\alpha(r_1) = mr_1 = mr_2 = \alpha(r_2)$. Jadi pemetaan terdefinisi dengan baik.

Misal $r, r_1, r_2 \in R$ maka :

$$\alpha(r_1 + r_2) = m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2 = \alpha(r_1) + \alpha(r_2)$$

$$\text{dan } \alpha(r_1 r) = m(r_1 r) = (mr_1)r = \alpha(r_1)r.$$

Jadi α adalah homomorfisma modul.

Misal $x \in M$ dimana $x = mr$, untuk suatu $r \in R$ berarti ada $r \in R$ sehingga $\alpha(r) = mr = x$. Jadi α merupakan homomorfisma yang surjektif. Akan ditunjukkan $Ker\ (\alpha)$ merupakan ideal dari R.

$$\begin{aligned} Ker\ (\alpha) &= \{r \in R \mid \alpha(r) = mr = 0\} \\ &= \{r \in R \mid mr = 0\} = I \end{aligned}$$

Berdasar Teorema 2.4.20. I ideal dari R dan berdasar Teorema 2.4.11 disimpulkan $M \cong R/I$. ■

BAB III

MODUL ARTIN

Dalam bab sebelumnya telah dibahas mengenai materi yang memprasyarati pembahasan materi pokok dari tulisan ini. Sekarang, dalam bab tiga ini akan dibahas mengenai topik dari tulisan ini yaitu modul Artin. Namun sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu tentang ring Artin karena berhubungan erat dengan pembahasan modul Artin Dan berkaitan dengan nama "Modul Artin" akan diceritakan sekilas tentang matematikawan Emil Artin di akhir bab ini.

A. RING ARTIN

Dalam subbab ini akan dibahas tentang ring Artin. Namun sebelum membahas tentang ring Artin, terlebih dahulu akan dibahas tentang syarat rantai naik dan syarat rantai turun..

Definisi 3.1.1:

Ring R dikatakan memenuhi *syarat rantai naik* jika setiap barisan naik dari ideal-ideal dalam R yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$, ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $N_i = N_k$ untuk semua i ≥ k. Ring R dikatakan memenuhi *syarat rantai turun* jika setiap barisan turun dari ideal-ideal dalam R yaitu $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$, ada bilangan bulat j sedemikian sehingga $N_i = N_j$ untuk semua i ≥ j.

59

Definisi 3.1.2 :

Ring R memenuhi *syarat maksimum* bagi ideal-idealnya jika dalam setiap himpunan tidak kosong S dari ideal-ideal dari R ada ideal yang merupakan *elemen maksimum* dalam himpunan tersebut yaitu ideal $T \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap $R \in S$ maka $R \subseteq T$. Ring R memenuhi *syarat minimum* bagi ideal-idealnya jika dalam setiap himpunan tidak kosong dari ideal-ideal dalam R ada ideal yang merupakan *elemen minimum* dalam himpunan tersebut yaitu ideal $A \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap $B \in S$ maka $A \subseteq B$.

Contoh 3.1.1 :

Misal S adalah sebarang himpunan tidak kosong dari ideal-ideal dari ring himpunan bilangan bulat (Z) terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa. Menurut teorema 2.3.2 ring Z adalah daerah ideal utama maka $S = \{<n> \mid n \in Z\}$. Misal $A_1 \in S$ maka ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $A_1 = <n>$. Jika A_1 bukan elemen maksimum maka terdapat suatu ideal $A_2 = < m >$ sedemikian sehingga $A_1 \subset A_2$. Maka $n \neq m$ dan m membagi habis n. Jika A_2 bukan elemen maksimum maka terdapat suatu ideal $A_3 = < k >$ sedemikian sehingga $A_2 \subset A_3$. Maka $k \neq m$, $k \neq n$ dan k membagi habis m dan n. Jika A_3 bukan elemen maksimum maka proses berulang. Pada contoh 2.2.7, Z merupakan daerah faktorisasi tunggal berdasarkan teorema fundamental aritmatika maka n mempunyai sebanyak berhingga pembagi yang berbeda. Sehingga proses berhenti setelah sejumlah langkah. Berarti terdapat bilangan bulat positif j, sedemikian sehingga A_j merupakan elemen maksimum. Sehingga Z memenuhi syarat maksimum.

Misal $<32> \subset <16> \subset <8> \subset <4> \subset <2> \subset <1>$, terlihat bahwa 16 membagi habis 32. Demikian 8 membagi habis 32 dan 16. Begitu selanjutnya. Dan <1> adalah elemen maksimum dengan <1> = Z.

Misal dibentuk himpunan K = {mZ | m bilangan bulat positif genap} dari ideal-ideal dari Z. Untuk suatu mZ $\in$ K, maka 2mZ $\in$ K dan berlaku mZ $\supset$ 2mZ. Maka K tidak mempunyai elemen minimum.

Contoh 3.1.2 :

Himpunan bilangan bulat Z tidak memenuhi syarat rantai turun sebab $<2> \supset <4> \supset <8> \supset \ldots$ adalah rantai tak hingga dengan $<2^n> \supset <2^{n+1}>$ untuk n = 1,2,3,....

Teorema 3.1.1:

Ring R memenuhi syarat rantai turun(naik) pada ideal-idealnya jika dan hanya jika R memenuhi syarat minimum(maksimum) pada ideal-idealnya.

Bukti :

($\Leftarrow$)

Andaikan R memenuhi syarat minimum pada ideal-idealnya. Maka himpunan $\{I_i \mid i \geq 1\}$ mempunyai elemen minimum sebut I_n.Karena I_n elemen minimum maka untuk setiap I_i berlaku $I_n \subseteq I_i$. Misal $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I \supseteq \ldots$ merupakan barisan turun ideal-ideal dalam R maka untuk i ≥ n diperoleh $I_n \supseteq I_i$. Karena $I_n \subseteq I_i$ dan

$I_n \supseteq I_i$ maka diperoleh $I_i = I_n$ untuk setiap i $\geq$n. Jadi R memenuhi syarat rantai turun.

($\Rightarrow$)

Andaikan R memenuhi syarat rantai turun pada ideal-idealnya maka untuk setiap barisan turun $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$, ada bilangan bulat j sedemikian sehingga $I_i = I_j$ untuk semua i $\geq$ j. Misalkan $S = \{I_i \quad i \geq 1\}$ adalah himpunan tidak kosong dari ideal-ideal dalam R. Misal $I_1 \in S$ maka I_1 adalah elemen minimum atau ada $I_2 \in S$ sedemikian sehingga $I_1 \supseteq I_2$. Maka I_2 adalah elemen minimum atau ada $I_3 \in S$ sedemikian sehingga $I_2 \supseteq I_3$. Bila proses ini berlangsung terus menerus maka akan diperoleh barisan turun dari ideal-ideal dari ring R yaitu $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$. Karena R memenuhi syarat rantai turun maka proses berhenti pada j langkah. Sehingga I_j adalah minimum dalam S. Jadi R memenuhi syarat minimum. Jadi bila R memenuhi syarat rantai turun pada ideal-idealnya maka R memenuhi syarat minimum pada ideal-idealnya.

Untuk bukti ring R memenuhi syarat rantai naik pada ideal-idealnya bila dan hanya bila R memenuhi syarat maksimum, analog dengan yang diatas. ■

Definisi 3.1.3 :

Ring R adalah ring Artin kiri (atau kanan) jika R memenuhi syarat rantai turun pada ideal-ideal kiri (kanan)nya. Ring R disebut sebagai ring Artin jika R memenuhi ring Artin kiri dan ring Artin kanan.

Contoh 3.1.3:

Himpunan bilangan rasional Q merupakan field. Karenanya Q hanya mempunyai dua ideal yaitu ideal trivial. Sehingga rantai turun yang dibentuk ideal-idealnya adalah berhingga, maka Q merupakan ring Artin.

Contoh 3.1.4 :

Himpunan bilangan bulat Z bukan merupakan ring Artin karena ada rantai turun dari ideal-idealnya seperti dalam contoh 3.1.2 yang merupakan rantai tidak hingga.

B. MODUL ARTIN

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai modul Artin dan sifat-sifat yang berhubungan dengan modul Artin.

Contoh 2.4.1 mengatakan bahwa setiap ring komutatif adalah modul atas dirinya sendiri yang disebut modul regular. Dan berdasarkan teorema 2.4.9 bahwa ideal-ideal dari ring tersebut merupakan submodul- submodul dari modul regular.

Misalkan R adalah ring Artin, berarti R memenuhi syarat rantai turun bagi ideal-idealnya. Ring R merupakan modul regular dan ideal-idealnya merupakan submodul-submodulnya. Karena R adalah Artin maka ideal-ideal dari R memenuhi syarat rantai turun. Sehingga berdasarkan teorema 2.4.9 berarti submodul-submodul dari modul regular R memenuhi syarat rantai turun.

Definisi 3.2.1 :

Modul M atas ring R dikatakan memenuhi *syarat rantai naik* jika setiap barisan naik dari submodul-submodul M yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$, ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $N_i = N_k$ untuk semua i ≥ k. Modul M atas ring R dikatakan memenuhi *syarat rantai turun* jika setiap barisan turun dari submodul-submodul dalam M yaitu $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$, ada bilangan bulat j sedemikian sehingga $N_i = N_j$ untuk semua i ≥ j.

Definisi 3.2.2 :

Modul M atas ring R memenuhi *syarat maksimum* bagi submodul-submodulnya jika dalam setiap himpunan tidak kosong S dari submodul-submodul dari M ada submodul yang merupakan *elemen maksimum* dalam himpunan tersebut yaitu submodul T ∈ S sedemikian sehingga untuk setiap R ∈ S maka R ⊆ T. Modul M atas ring R memenuhi *syarat minimum* bagi submodul-submodulnya jika dalam setiap himpunan tidak kosong submodul-submodul dari M ada submodul yang merupakan *elemen minimum* dalam himpunan tersebut yaitu submodul A∈ S sedemikian sehingga untuk setiap B ∈ S maka A ⊆ B.

Definisi 3.2.3 :

Misalkan M adalah modul atas ring R dan N adalah submodul dari M maka N dikatakan sebagai *submodul maksimum* bila dan hanya bila N ≠ M dan bila P merupakan submodul dari M yang memenuhi N ⊂ P maka berlaku P = M.

Teorema 3.2.1:

Modul M atas ring R memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya bila dan hanya bila M memenuhi syarat minimum pada submodul-submodulnya.

Bukti :

($\Leftarrow$)

Misal $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I \supseteq \ldots$ merupakan barisan turun submodul-submodul dalam M maka untuk i ≥ n diperoleh $I_n \supseteq I_i$. Karena M memenuhi syarat minimum pada submodul-submodulnya, maka himpunan submodul-submodul M yaitu $\{I_i \mid i \geq 1\}$ mempunyai elemen minimum sebut I_n.Karena I_n elemen minimum maka untuk setiap I_i berlaku $I_n \subseteq I_i$. Karena $I_n \subseteq I_i$ dan $I_n \supseteq I_i$ maka diperoleh $I_i = I_n$ untuk setiap i ≥n. Jadi M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya.

($\Rightarrow$)

Misalkan $S = \{I_i \quad i \geq 1\}$ adalah himpunan tidak kosong dari submodul-submodul dalam M. Misal $I_1 \in S$ maka I_1 adalah elemen minimum atau ada $I_2 \in S$ sedemikian sehingga $I_1 \supseteq I_2$. Maka I_2 adalah elemen minimum atau ada $I_3 \in S$ sedemikian sehingga $I_2 \supseteq I_3$. Bila proses ini berlangsung terus menerus maka akan diperoleh barisan turun dari submodul-submodul dari M yaitu $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$. Karena M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya maka untuk setiap barisan turun $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$, ada bilangan bulat j sedemikian sehingga $I_i = I_j$ untuk semua i ≥ j. Sehingga I_j adalah minimum dalam S. Jadi M memenuhi syarat minimum. Jadi bila M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya maka M memenuhi syarat minimum pada submodul-submodulnya. Untuk bukti M memenuhi syarat rantai naik pada submodul-submodulnya bila dan hanya bila M memenuhi syarat maksimum, analog dengan yang diatas. ■

Definisi 3.2.4 :

Misal *M* adalah modul atas ring *R*. *M* disebut sebagai *modul Artin* bila dan hanya bila *M* memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya.

Contoh 3.2.1 :

Himpunan bilangan rasional Q adalah modul atas ring Q. Karena Q adalah field maka Q hanya mempunyai dua ideal trivial yaitu Q dan $\{0\}$. Sehingga submodul dari Q adalah $\{0\}$ dan Q. Maka rantai turun dari submodul-submodul Q adalah berhingga. Maka Q merupakan modul Artin.

Definisi 3.2.5 :

Misal R adalah ring dan M adalah modul atas ring R. M disebut *modul sederhana* jika dan hanya jika M mempunyai submodul sejati tunggal yaitu $\{0\}$.

Dengan lain perkataan, M disebut sebagai modul sederhana bila submodulnya hanya M sendiri dan $\{0\}$.

Teorema 3.2.2 :

Jika M adalah modul atas ring R, maka M modul sederhana bila dan hanya bila M dibangkitkan oleh sebuah elemen tidak nol dalam M.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Misalkan M adalah modul sederhana. Misalkan $x \in M$ dengan $x \neq 0$. Karena berdasarkan teorema 2.4.18 maka $< x > = \{xr \mid r \in R\}$ adalah submodul siklik dari M. Sehingga $\{0\} \neq < x > \subseteq M$. Karena M adalah modul sederhana maka $< x > = M$.

($\Leftarrow$)

Misalkan N adalah submodul dari M dimana $N \neq \{0\}$. Misalkan $x \in N$ dengan $x \neq 0$. Karena M dibangkitkan oleh sebuah elemen tidak nol maka $M = < x >$. Karena $< x > \subseteq NR$ dan menurut teorema 2.4.19 berlaku $NR = N$, maka $M = < x > \subseteq NR = N \subseteq M$. Jadi $N = M$ sehingga M merupakan modul sederhana. ■

Teorema 3.2.3 :

Jika M modul atas ring R dan N submodul dari M maka modul faktor M/N adalah modul sederhana bila dan hanya bila N adalah submodul maksimum.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Misal M/N adalah modul sederhana. Andaikan terdapat submodul Q dari M yang memenuhi $N \subset Q$. Menurut teorema 2.4.8, maka Q/N adalah submodul dari M/N. karena $N \neq Q$ maka $Q/N \neq \{N+0\}$. Padahal M/N modul sederhana maka $Q/N = M/N$. Karena Q submodul dari M maka $Q \subseteq M$. Misal $x \in M$ maka dapat dibentuk $N + x \in M/N$. Karena $Q/N = M/N$ maka $N + x \in Q/N$. Jadi $x \in Q$ sehingga $M \subseteq Q$. Jadi $Q = M$, sehingga N adalah submodul maksimum dari M.

($\Leftarrow$)

Misal N adalah submodul maksimum dari M.

Maka $N \neq M$ sehingga $M/N \neq \{N + 0\}$. Misal $N + x \in M/N$ dengan $N + x \neq N + 0$.

Berarti $x \in M$ dan $x \notin N$.

Karena $< x > = \{xr \mid r \in R\}$ adalah submodul dari M dan N adalah submodul dari M. Maka menurut teorema 2.4.10 berlaku $N + < x >$ adalah submodul dari M.

Misal $y \in N$. Karena $y = y + x.0_R$ untuk $0_R \in R$ dan $x \in M$, maka $y \in N + < x >$.

Jadi $N \subseteq N + < x >$.

Misal $z \in N + <x>$ maka $z = n + xr$ dengan $xr \in <x>$ dan $n \in N$. Sekarang $x = x.1$, dengan $1 \in R$ sehingga $xr = x$ untuk $r = 1 \in R$. Karena M grup aditif dan N subgrup aditif maka menurut teorema 2.1.3(1) elemen identitasnya sama yaitu 0. Sehingga ada $p = 0 + x = x \in N + <x>$. Karena $x \notin N$ maka $p \notin N$. Akibatnya ada $z = n + xr \notin N$ dengan $n = 0$ dan $r = 1$, sehingga $N \subset N + <x>$. Karena N submodul maksimum maka $N + <x> = M$. Misal $N + z \in M/N$, dengan $z \in M$.

Karena $M = N + <x>$ maka $z = n + xr$ untuk suatu $n \in N$.

Sehingga $N + z = N+(n + xr) = (N + n) + xr = N + xr = (N+ x)r \in (N + x)R$.

Jadi $M/N \subseteq (N + x)R$.

Misal $(N + x)r \in (N+ x)R$ maka $(N+ x)r = N + xr \in M/N$ dengan $xr \in M$. Jadi $(N+xr)R \subseteq M/N$. Sehingga $M/N = (N+ x)R$.

Jadi untuk setiap $N+x \in M/N$ dengan $N+ x \neq N + 0$, maka $(N+x)R = M/N$.

Jadi M/N adalah modul sederhana, berdasarkan teorema 3.2.2. ■

Teorema 3.2.4:

Misal M dan N adalah modul atas ring R dan M≅N. Jika M adalah modul sederhana maka N adalah modul sederhana.

Bukti:

Misal M dan N adalah modul atas ring R dan M≅N. Andaikan M adalah modul sederhana. Akan dibuktikan N adalah modul sederhana. Karena M adalah modul sederhana maka menurut teorema 3.2.2 maka M dibangkitkan sebuah elemen tidak nol dalam M, misal $x \in M$ dengan $x \neq 0$. Sehingga $M = \langle x \rangle = \{xr \mid r \in R\}$. karena M≅N maka ada isomorfisma $f : M \to N$ sehingga bila $xr \in M$ maka $f(xr) = f((x)r) = [f(x)]r$. Karena f surjektif maka setiap elemen N berbentuk $[f(x)]r$. Menurut teorema 2.4.5 berlaku bahwa $f(0) = 0$ dan karena $x \neq 0$ dan $M \cong N$ maka $f(x) \neq 0$. Sehingga $N = \langle f(x) \rangle$ dengan $f(x) \neq 0$. Jadi menurut teorema 3.2.2, N adalah modul sederhana. ■

Teorema 3.2.5 (Hukum Modular)

Misal A, B dan C adalah submodul dari M dengan $A \supseteq B$ maka :

1. $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$
2. Jika $A + C = B + C$ dan $A \cap C = B \cap C$ maka $A = B$

Bukti :

Misal A, B, dan C adalah submodul dari M dan $A \supseteq B$

(1) Akan dibuktikan $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$. Untuk itu harus diperlihatkan $A \cap (B + C) \supseteq B + (A \cap C)$ dan $A \cap (B + C) \subseteq B + (A \cap C)$. Misal $x \in B + (A \cap C)$ maka $x = b + a$, dan $x = b + c$ dimana $a = c$ karena berlaku hukum kanselasi , atau $x = b + a = b + c$ dimana $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Karena $B \subseteq A$ dan A, B submodul maka B submodul A. Akibatnya $b + a \in A$ atau $b + a = a_1$ untuk suatu $a_1 \in A$. Karena $a = c$ maka $a_1 = b + c = x$. Jadi $x \in A \cap (B + C)$. Jadi $B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$ ....(1)

Andaikan $x \in A \cap (B + C)$ maka $x = a = b + c$ dimana $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Karena $a = b + c \in A$ maka $c = a - b$. Diketahui $B \subseteq A$ maka $a - b = c \in A$. Karena $c \in A$ dan $c \in C$ maka $c \in A \cap C$ sehingga $x = b + c \in B + (A \cap C)$. Jadi $A \cap (B + C) \subseteq B + (A \cap C)$ .... (2).

Berdasar (1) dan (2) diperoleh $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$.

(2) Misal $A + C = B + C$ dan $A \cap C = B \cap C$.

Dan dari (1) berlaku $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$. Akan ditunjukkan $A = B$.

Karena $A = A \cap (A + C)$ maka

$$
\begin{aligned}
A \cap (A + C) &= A \cap (B + C) \\
&= B + (A \cap C) \\
&= B + (B \cap C) \\
&= B \cap (B + C) \\
&= B
\end{aligned}
$$

Jadi $A = B$ ■

Definisi 3.2.6:

Misal M adalah modul atas ring R dan $M_o, M_1, M_2, \ldots, M_n$ adalah submodul-submodul dari M maka rantai berhingga $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ disebut sebagai *barisan dalam M*. *Faktor* dari barisan ini adalah modul faktor M_{i-1} M_i untuk i = 0,1,2,...,n-1. *Panjang* dari barisan adalah banyaknya faktor dari barisan. Sehingga panjang dari barisan di atas adalah n.

Definisi 3.2.7:

Penghalus dari barisan $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ adalah barisan yang diperoleh dengan menyisipkan sejumlah berhingga submodul-submodul ke barisan $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$. *Penghalus sejati* dari barisan adalah penghalus dari barisan tersebut yang panjangnya lebih panjang dari barisan asli. Dua barisan adalah *equivalen* jika mempunyai panjang sama dan faktor-faktornya isomorfis pada indeks tertentu.

Teorema 3.2.6 (Teorema Schreier-Zassenhaus):

Sebarang dari dua barisan modul M atas ring R mempunyai penghalus yang equivalen.

Bukti:

Misal $\{0\} = X_o \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_n = M$ dan $\{0\} = Y_o \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_m = M$ adalah dua barisan dari M. Kita dapat memperhalus barisan X dengan menyisipkan submodul-submodul $X_{i,j} = X_i + (X_{i+1} \cap Y_j)$ untuk semua i = 0,1,2,..,n-1 dan j= 0,1,..,m-1.

Andaikan i dibuat tetap maka diperoleh barisan :

$X_i \subseteq X_{I,0} \subseteq X_{I,1} \subseteq \dots \subseteq X_{i,m-1} \subseteq X_{I,m}.$

Sekarang $X_{i,m} = X_i + (X_{i+1} \cap Y_m) = X_i + (X_{i+1} \cap M) = X_{i+1} \cap (X_i + M) = X_{i-1}$

dan $X_{i+1,0} = X_{i+1} + (X_{i+2} \cap Y_0) = X_{i+1} + (X_{i+2} \cap \{0\}) = X_{i+1} + \{0\} = X_{i+1}$

Sehingga diperoleh barisan :

$X_i \subseteq X_{I,0} \subseteq X_{I,1} \subseteq \dots \subseteq X_{i,mI} \subseteq X_{I,m} = X_{i-1} = X_{I-1,0} \subseteq X_{I-1,1} \subseteq \dots$

Karena $X_{i+1,0} = X_{i,m}$ maka faktor-faktor dari barisan $X_{i,j}$ berbentuk $X_{i,j+1}/X_{i,j}$ untuk $i=0,1,\dots,n-1$ dan $j=0,1,\dots,m-1$.

Sekarang $X_{i,j} = X_i + (X_{i+1} \cap Y_j) = X_{i+1} \cap (X_i + Y_j) = X_I$

Sehingga dengan hukum Modular (teorema 3.2.5) dan teorema isomorfisma 2 (teorema 2.4.12) diperoleh :

$$\frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} = \frac{X_i + [X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{X_{i,j}} = \frac{X_{i,j} + [X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{X_{i,j}} \cong \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}] \cap X_{i,j}}$$

$$= \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}] \cap [X_i + (X_{i+1} \cap Y_j)]} = \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_j] + [X_i \cap (X_{i+1} \cap Y_{j+1})]}$$

$$= \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_j] + [X_i \cap Y_{j+1})]}$$

Karena $X_{i+1} \cap Y_{j+1} \supseteq X_{i+1} \cap Y_j$ dan $X_i \cap (X_{i+1} \cap Y_{j+1}) = X_i \cap Y_{j+1}$.

Sedangkan untuk barisan Y dapat diperhalus dengan menyisipkan submodul-submodul :

$Y_{i,j} = Y_j + (Y_{j+1} \cap X_i)$ untuk semua $i = 0,1,2,..,n-1$ dan $j = 0,1,..,m-1$.

Andaikan j dibuat tetap diperoleh barisan : $Y_j \subseteq Y_{0,j} \subseteq Y_{1,j} \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1,j} \subseteq Y_{n,j}$

Sekarang

$Y_{n,j} = Y_j + (Y_{j+1} \cap X_n) = Y_j + (Y_{j+1} \cap M) = Y_{j+1} \cap (Y_j + M) = Y_{j+1}$

dan $Y_{0,j+1} = Y_{j+1} + (Y_{j+2} \cap X_0) = Y_{j+1} + (Y_{j+2} \cap \{0\}) = Y_{j+1} + \{0\} = Y_{j+1}$

Sehingga diperoleh barisan : $Y_j \subseteq Y_{0,j} \subseteq Y_{1,j} \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1,j} \subseteq Y_{n,j} = Y_{j+1} = Y_{0,j+1} \subseteq \dots$

Karena $Y_{0,j+1} = Y_{n,j}$ maka faktor-faktor dari barisan $Y_{i,j}$ berbentuk $Y_{I+1,j}/Y_{i,j}$ untuk $I=0,1,\dots,n-1$ dan $j=0,1,\dots,m-1$.

Sekarang $Y_{i,j} = Y_j + (X_i \cap Y_{j+1}) = Y_{j+1} \cap (X_i + Y_j) = Y_j$

Sehingga dengan hukum Modular (teorema 3.2.4) dan teorema isomorfis 2 (teorema 2.4.12) diperoleh :

$$\frac{Y_{i+1,j}}{Y_{i,j}} = \frac{Y_j + [X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{Y_{i,j}} = \frac{Y_{i,j} + [X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{Y_{i,j}} \cong \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}] \cap Y_{i,j}}$$

$$= \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}] \cap [Y_j + (X_i \cap Y_{j+1})]} = \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_i \cap Y_{j+1}] + [Y_j \cap (X_{i+1} \cap Y_{j+1})]}$$

$$= \frac{[X_{i+1} \cap Y_{j+1}]}{[X_{i+1} \cap Y_j] + [X_i \cap Y_{j+1})]}$$

Sehingga dapat disimpulkan setiap $X_{i,j+1}/X_{i,j} \cong Y_{I+1,j}/Y_{i,j}$. Panjang barisan penghalus adalah banyaknya faktor dari barisan penghalus. Karena barisan penghalus dari barisan X dan Y mempunyai faktor-faktor yang isomorfis dalam urutan indeks tertentu maka panjang kedua barisan itu adalah sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa sebarang dua barisan modul M atas ring R mempunyai penghalus yang equivalen. ■

Definisi 3.2.8:

Barisan komposisi untuk modul M atas ring R adalah barisan $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$ sedemikian sehingga untuk setiap faktor M_{i+1}/M_i adalah sederhana. Dan panjang dari barisan komposisi disebut *panjang komposisi* dari M

dan dinotasikan dengan *Len M*. Faktor dari sebarang barisan tersebut disebut *faktor komposisi* dari *M*.

Misalkan $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ adalah sebarang barisan komposisi dari M maka len M = n dan faktor-faktor komposisi dari M adalah M_1/Mo, M_2/M_1, M_3/M_2, ... M_n/M_{n-1}.

Teorema 3.2.7 (Teorema Jordan Holder):

Sebarang dua barisan komposisi dari modul M atas ring R adalah equivalen.

Bukti:

Misal $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ adalah barisan komposisi dari M. Maka setiap M_{i+1}/M_i untuk i = 0,1,2,...,n-1 adalah modul sederhana. Andaikan Q adalah submodul dari M sedemikian sehingga $M_i \subseteq Q \subseteq M_{i+1}$. Dan menurut teorema 2.4.8 Q/M_i adalah submodul dari M_{i+1}/M_i sehingga berdasarkan teorema isomorfis 3 diperoleh $\dfrac{M_{i+1}/M_i}{Q/M_i} \cong \dfrac{M_{i+1}}{Q}$.

Karena M_{i+1}/M_i adalah modul sederhana maka hanya mempunyai dua submodul yaitu M_{i+1}/M_i dan {0}. Sehingga diperoleh Q = M_i atau Q = M_{i+1}. Jadi tidak ada submodul dari M yang termuat diantara M_i dan M_{i+1}. Akibatnya sebarang penghalus dari barisan komposisi $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ hanya menyisipkan submodul Q dengan Q = M_i atau Q = M_{i+1} dan mempunyai faktor yang sama dengan barisan asli.

Jadi menurut teorema 3.2.6 dapat disimpulkan sebarang dua barisan komposisi dari modul M atas ring R adalah equivalen. ■

Teorema 3.2.8:

Misal *M* adalah modul atas ring *R*

(1) Misal *N* adalah submodul *M*. *M* mempunyai barisan komposisi bila dan hanya bila *N* dan *M/N* mempunyai barisan komposisi, lebih lanjut lagi, len M = len N + len *M/N* dan himpunan dari faktor-faktor komposisi dari *M* adalah gabungan dari *N* dan M/N.

(2) Misal M = $\sum_{i=1}^{n} N_i$ adalah jumlah langsung berhingga dari beberapa submodul sederhana N_i. Maka *M* mempunyai barisan komposisi yang panjangnya n dan faktor komposisi $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n$

Bukti :

1). Misalkan M adalah modul atas ring *R*. Misal *N* adalah submodul dari modul *M* atas ring *R*.

(⇒)

Andaikan M mempunyai barisan komposisi. Misal barisan komposisi *M* adalah $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$. Karena *N* adalah submodul dari *M* maka berlaku $\{0\} \subseteq N \subseteq M$. Barisan $\{0\} \subseteq N \subseteq M$ adalah barisan dari M.Dibentuk penghalus dari barisan komposisi M dengan menyisipkan submodul N di antara M_k dan M_{k-1} untuk suatu k.

Diperoleh $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq N \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$. Karena M_{k+1}/M_k sederhana dan berdasarkan teorema Jordan Holder maka N = M_k atau N = M_{k+1}.

Misal $M_k = N$ untuk suatu M_k dalam $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$.

Sehingga nampak bahwa $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = N$ adalah barisan komposisi dari N.Jika i ≥ k berarti N termuat dalam setiap M_i, dan berdasar teorema 2.4.13 berlaku $\dfrac{M_{i+1}/N}{M_i/N} \cong \dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ dan $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ sederhana berdasarkan definisi 3.2.8, dari sini diperoleh

$\{0\} = \dfrac{M_K}{N} \subseteq \dfrac{M_{K+1}}{N} \subseteq \ldots \subseteq \dfrac{M_n}{N} = \dfrac{M}{N}$ adalah barisan komposisi dari M/N,

dengan faktor komposisinya adalah $\dfrac{M_{i+1}/N}{M_i/N} \cong \dfrac{M_{i+1}}{M_i}$.

(⇐)

Andaikan N dan M/N mempunyai barisan komposisi.

Misal $\{0\} = N_o \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_k = N$ adalah barisan komposisi dari N dan misalkan $\{0\} = A_o \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_m = M/N$ adalah barisan komposisi dari M/N.

Misal f : M → M/N adalah suatu pemetaan dimana f(m) = N+m untuk setiap m$\in M$. Misal $x, y \in M$ dengan $x = y$. Sedangkan $f(x) = N + x$ dan $f(y) = N + y$. Karena $x = y$ maka $f(y) = N + x$. Diperoleh $N + x = N + y$ sehingga $f(x) = f(y)$. Jadi pemetaan f terdefinisi dengan baik.

Akan ditunjukkan f adalah homomorfisma modul.

Misal $r \in R$ dan $x, y \in M$.

$$f(x+y) = N + (x+y) = (N+x) + (N+y) = f(x) + f(y).$$

$$f(xr) = N + xr = (N+x)r = f(x)r.$$

Jadi f homomorfisma modul.

Akan ditunjukkan f surjektif.

Misal $N + a \in M/N$ maka ada $a \in M$ dan $f(a) = N + a$. Jadi f surjektif.

Sehingga $f : M \to M/N$ merupakan suatu epimorfisma.

Akan ditunjukkan $Ker\ (f) = N$

$$\boldsymbol{Ker\ (f) = \{x \in M \mid f(x) = N + 0\}}$$

$$= \{x \in M \mid N + x = N\}$$

$$= \{x \in M \mid x \in N\}$$

$$= N.$$

Karena f surjektif maka setiap f(x) $\in M/N$ mempunyai kawan di M sehingga dapat didefinisikan $M_i = f^{-1}(A_i) = \{x \in M \mid f(x) \in A_i\}$ dimana M_i adalah submodul dari M dan A_i adalah submodul dari M/N, sebagai bayangan invers dari A_i. Karena setiap A_i memuat N + 0 maka setiap M_i memuat Ker(f) = N. Menurut teorema 2.4.11 $M/Ker(f) = M_i/N \cong f(M_i) = A_i$ sehingga $A_i = M_i / N$. Faktor komposisi dari barisan komposisi M/N adalah $\dfrac{A_{i+1}}{A_i} = \dfrac{\frac{M_{i+1}}{N}}{\frac{M_i}{N}}$ adalah modul sederhana. Berdasarkan teorema 2.4.13 berlaku $\dfrac{A_{i+1}}{A_i} = \dfrac{\dfrac{M_{i+1}}{N}}{\dfrac{M_i}{N}} \cong \dfrac{M_{i+1}}{M_i}$. Maka menurut teorema 3.2.4

M_{i+1}/M_i juga sederhana.

Karena setiap M_i memuat N maka diperoleh

$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_k = N \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$ yang merupakan barisan komposisi dari M.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa len M = len N + len M/N. Misalkan

Misal $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$ adalah barisan komposisi dari M. Faktor-faktor dari barisan adalah M_1/M_0, M_2/M_1, M_3/M_2, ... M_n/M_{n-1}. Len M adalah panjang barisan tsb yaitu banyaknya faktor dari barisan, sehingga len M = n. Karena N adalah submodul dari M maka $\{0\} \subseteq N \subseteq M$ adalah barisan dari M.Dibentuk penghalus dari barisan komposisi M dengan menyisipkan submodul N di antara M_k dan M_{k-1} untuk suatu k.

Diperoleh $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_k \subseteq N \subseteq M_{k+1} \subseteq \dots \subseteq M_n = M$..

Karena M_{k-1}/M_k sederhana dan berdasarkan teorema Jordan Holder maka N = M_k atau N = M_{k-1}.

Misal $M_k = N$ untuk suatu M_k dalam $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$.

Sehingga nampak bahwa $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_k = N$ adalah barisan komposisi dari N. Faktor-faktornya adalah M_1/M_0, M_2/M_1, M_3/M_2, ... M_k/M_{k-1}. Sehingga len N = k. Jika i ≥ k berarti N termuat dalam setiap M_i, dan berdasar teorema 2.4.13

berlaku $\dfrac{M_{i+1}/N}{M_i/N} \cong \dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ dan $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ sederhana berdasarkan definisi 3.2.8, dari sini diperoleh

$\{0\} = \dfrac{M_K}{N} \subseteq \dfrac{M_{K+1}}{N} \subseteq \ldots \subseteq \dfrac{M_n}{N} = \dfrac{M}{N}$ adalah barisan komposisi dari M/N. Faktor-faktornya adalah M_{k+1}/M_k, $M_{k+2}/M_{K=1}$, ... M_n/M_{n-1}. Banyak faktornya adalah n-k sehingga len M/N = n-k. Jadi dapat ditarik kesimpulan bahwa len M = n = k + (n-k) = len N + len M/N. Dan himpunan faktor-faktor komposisi dari M yaitu

$\{ M_1/M_0, M_2/M_1, M_3/M_2, \ldots M_n/M_{n-} \} =$

$\{ M_1/M_0, M_2/M_1, \ldots M_k/M_{k-1} \} \cup \{ M_{k-1}/M_k, M_{k-2}/M_{K=1}, \ldots M_n/M_{n-1} \}$.

2). Misal $M = \oplus \sum_{i=1}^{n} N_i$ dengan N_i adalah submodul sederhana dari M. Misal dibentuk $M_j = \oplus \sum_{i=1}^{j} N_i$ maka $M_{j+1} = \oplus \sum_{i=1}^{j+1} N_i$ dan berdasarkan teorema 2.4.15 maka $M_{j+1}/M_j \cong N_{j+1}$ adalah sederhana maka $\{0\} = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ barisan komposisi dari M dan $n = ln\ M$ dan faktor komposisinya adalah N_1, N_2, N_3, ..., N_n. ∎

Dalam definisi 3.2.8, didefinisikan tentang barisan komposisi untuk modul M atas ring R. Teorema berikut akan memperlihatkan keterkaitan barisan komposisi dengan syarat rantai dalam sebarang modul.

Teorema 3.2.9:

Modul M atas ring R mempunyai barisan komposisi bila dan hanya bila memenuhi syarat rantai naik dan syarat rantai turun.

Bukti :

Misalkan M adalah sebarang modul atas ring R.

($\Rightarrow$)

Andaikan M adalah modul atas ring R yang mempunyai barisan komposisi S dengan panjang n. Akan dibuktikan M memenuhi syarat rantai turun dan syarat rantai naik. Misalkan $M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$ adalah sebarang rantai turun submodul-submodul dari M. Andaikan M tidak memenuhi syarat rantai turun berarti tidak ada bilangan bulat positif k sehingga untuk $m \geq n$ berlaku $N_m = N_k$. Pandang barisan turun T yaitu $M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_{n+1}$ dengan panjang n + 1. Menurut teorema Schreier- Zassenhaus, barisan T dan S mempunyai penghalus yang equivalen yaitu mempunyai panjang sama dan faktor-faktornya isomorfis. Menurut teorema Jordan Holder, setiap penghalus dari barisan komposisi S mempunyai panjang n seperti S. Sedangkan setiap penghalus dari T mempunyai panjang minimal n + 1. Jadi terdapat kontradiksi kalau barisan-barisan equivalen mempunyai panjang sama. Jadi M memenuhi syarat rantai turun. Untuk bukti M memenuhi syarat rantai naik analog dengan bukti M memenuhi syarat rantai turun.

Jadi bila M mempunyai barisan komposisi maka M memenuhi syarat rantai turun dan syarat rantai naik pada submodul-submodulnya.

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan jika M memenuhi syarat rantai turun dan syarat rantai naik maka M mempunyai barisan komposisi.

Andaikan M memenuhi syarat rantai turun dan syarat rantai naik. Misal himpunan $S = \{ N_i \mid i \in I\}$ adalah himpunan tidak kosong dari submodul-submodul dari M. Ambil $N_1 \in S$. Jika N_1 bukan elemen minimum maka ada $N_2 \in S$ sehingga $N_1 \supseteq N_2$. Jika N_2 bukan elemen minimum maka ada $N_3 \in S$ sehingga $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3$. Bila pengambilan ini berlangsung terus maka akan diperoleh $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$. Karena M memenuhi syarat rantai turun, terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga $N_m = N_n$ untuk semua $m \geq n$ dan barisan *stabil* pada n. Submodul $\{0\}$ adalah elemen minimum dari S sehingga $N_n = \{0\}$.

Sekarang barisan $\{0\} = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq N_2 \subseteq N_1$ adalah barisan naik submodul-submodul dari M. Karena M memenuhi syarat rantai naik berarti S memuat elemen maksimum yaitu M sendiri. Misal $M = N_0$ maka barisan terakhir yang diperoleh adalah $M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_n = \{0\}$. Akan ditunjukkan untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$ berlaku bahwa N_i/N_{i+1} adalah sederhana. Berdasarkan barisan yang diperoleh maka n adalah bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $N_n = \{0\}$. Akibatnya untuk semua $k < n$ maka $N_k \neq \{ 0 \}$. Akan diperlihatkan terlebih dahulu N_{i+1} adalah submodul maksimum dari N_i.

Diketahui $N_i \supseteq N_{I+1}$ artinya $N_i \supset N_{I+1}$ atau $N_i = N_{I+1}$. Bila $N_i = N_{I+1}$ maka harus memenuhi $N_i \supseteq N_{I+1}$ dan $N_i \subseteq N_{I+1}$. Untuk $N_i \supseteq N_{I+1}$ jelas terpenuhi.

Misalkan $x \in N_i$ maka x belum tentu dalam N_{i+1} karena $N_i \supseteq N_{I+1}$ tidak menjamin $x \in N_{i+1}$.Sehingga ada $x \in N_i$ dan $x \notin N_{i+1}$. Jadi N_{i+1} adalah submodul maksimum dari N_i. Sehingga menurut teorema 3.2.3 N_i/N_{i+1} adalah modul sederhana.

Sehingga barisan $M = N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots \supseteq N_n = \{0\}$adalah barisan komposisi dari M.

Jadi M mempunyai barisan komposisi. ■

Teorema 3.2.10:

Misal M adalah modul atas ring R. Misal N adalah submodul dari M. Maka M adalah modul Artin bila dan hanya bila N dan M/N adalah modul Artin

Bukti :

Misalkan M adalah modul atas ring R dan N adalah submodul dari M.

($\Rightarrow$)

Andaikan M adalah modul Artin maka M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya. Sebarang rantai turun submodul-submodul dari N adalah rantai turun dari submodul-submodul M, sebab N adalah submodul dari M. Sehingga N memenuhi syarat rantai turun karena N submodul M dan M memenuhi syarat rantai turun. Sekarang akan dibuktikan bahwa M/N adalah modul Artin. Diketahui M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya karena M adalah modul Artin. Menurut teorema 3.2.9, M mempunyai barisan komposisi. Sehingga berdasarkan teorema 3.2.8 (1), diperoleh N dan M/N mempunyai barisan komposisi dan berdasarkan teorema 3.2.9 maka N dan M/N memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya sehingga N dan M/N merupakan modul Artin.

($\Leftarrow$)

Misal N dan M/N merupakan modul Artin. Misalkan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$ adalah barisan turun submodul dari M maka

$(M_1 \cap N) \supseteq (M_2 \cap N) \supseteq \ldots \supseteq (M_i \cap N) \supseteq \ldots$

adalah barisan turun submodul-submodul dari N dan rantai stabil misal di p. Misal $\frac{M_1+N}{N} \supseteq \frac{M_2+N}{N} \supseteq \ldots \supseteq \frac{M_i+N}{N} \supseteq \ldots$ adalah barisan turun dari submodul-submodul *M/N* dan stabil misal di q. Jika t= maks {p,q} maka $M_{t+1} \cap N = M_t \cap N$ dan $M_{t+1} + N = M_t + N$. Dimisalkan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$ adalah barisan turun submodul-submodul dari M maka berlaku $M_t \supseteq M_{t+1}$. Karena $M_{t+1} \cap N = M_t \cap N$ dan $M_{t+1} + N = M_t + N$ serta $M_t \supseteq M_{t+1}$ maka berdasarkan teorema 3.2.5 disimpulkan $M_t = M_{t+1}$. Jadi terdapat bilangan bulat positip t sedemikian sehingga $M_t = M_{t+1}$ sehingga memenuhi syarat rantai turun. Jadi M merupakan modul Artin. ∎

Teorema 3.2.11:

Misal *M* adalah modul atas ring *R*. Misal $\{ N_i \mid i \in I \}$ adalah keluarga dari submodul-submodul sederhana dari modul *M* dan $M = \oplus \sum_{i \in I} N_i$. Maka *M* adalah modul Artin bila dan hanya bila *I* berhingga.

Bukti :

Misalkan $\{ N_i \mid i \in I \}$ adalah keluarga dari submodul-submodul sederhana dari *M* dan $M = \oplus \sum_{i \in I} N_i$.

($\Rightarrow$)

Misal M adalah modul atas ring R. Misal $\{ N_i \mid i \in I\}$ adalah keluarga dari submodul-submodul sederhana dari modul M dan $M = \oplus \sum_{i \in I} N_i$. Misalkan M adalah modul Artin. Akan dibuktikan I berhingga.

Andaikan I tidak berhingga maka $M = \oplus \sum_{i \in I} N_i = \oplus \sum_{i=1}^{\infty} N_i$. Misal dibentuk barisan turun submodul-submodul dari M dengan setiap kali menghapus satu penjumlah dari jumlah langsung $M = \oplus \sum_{i=1}^{\infty} N_i$. Sehingga diperoleh:

$M = \oplus \sum_{i=1}^{\infty} N_i \supseteq \oplus \sum_{i=1}^{\infty-1} N_i \supseteq \oplus \sum_{i=1}^{\infty-2} N_i \supseteq \ldots$ Barisan yang diperoleh adalah barisan tak berhingga dan tidak pernah berhenti. Sehingga barisan tidak stabil. Jadi M tidak memenuhi syarat rantai turun. Sehingga kontraposisinya berlaku, bila M Artin maka I berhingga.

($\Leftarrow$)

Misal I berhingga. Akan dibuktikan M adalah modul Artin. Karena I berhingga berarti M merupakan jumlah langsung berhingga dari N_i. Sehingga $M = \oplus \sum_{i=1}^{n} N_i$. Sehingga berdasarkan teorema 3.2.8 (2) maka M mempunyai barisan komposisi yang panjangnya n yaitu $M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots M_n = \{0\}$. Karena M mempunyai barisan komposisi maka berdasarkan teorema 3.2.9, M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya. Jadi M merupakan modul Artin. ■

Teorema 3.2.12:

Misal M_1 , M_2 , M_3 ,....,M_n adalah modul atas ring R maka jumlah langsung $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ adalah modul Artin atas ring R bila dan hanya bila setiap M_i adalah modul Artin atas ring R dengan i=1,2,...,n.

Bukti:

Misal M_1 , M_2, M_3,....,M_n adalah adalah modul atas ring R.

($\Rightarrow$)

Misal $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ adalah modul Artin atas ring R. Akan dibuktikan setiap M_i adalah modul Artin atas ring R. Akan ditunjukkan setiap M_i adalah submodul dari $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$.

Misal $x \in M_i$ maka $x = 0+ \ldots +0+ x +0 + \ldots +0$ untuk $x \in M_i$ dan $o \in M_j$ dengan $j \neq i$ dan i = 1,2,..,n sehingga $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$. Karena M_i adalah modul atas ring R maka ada $0 \in M_i$ sehingga M_i bukan himpunan kosong.

Misal $x, y \in M_i$ dan $r \in R$ maka $x + yr \in M_i$ karena M_i adalah modul atas ring R. Jadi menurut teorema 2.4.4 setiap M_i adalah submodul dari $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$. Karena setiap M_i adalah submodul dari $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ dan $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ adalah modul Artin atas ring R maka menurut teorema 3.2.9 M_i dan $(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n)/ M_i$ adalah modul Artin atas ring R dengan i = 1, 2,...,n. Dengan simplifikasi disimpulkan bahwa setiap M_i adalah modul Artin atas ring R.

($\Leftarrow$)

Misalkan setiap M_1 , M_2 , M_3 ,....,M_n adalah modul Artin atas ring R. Akan dibuktikan $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ adalah modul Artin atas ring R.

Andaikan $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ bukan modul Artin. Dibentuk barisan turun submodul-submodul dari $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ yaitu

$(M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n) \supseteq (M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_{n-1}) \supseteq (M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_{n-2}) \supseteq ...$

Karena $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ bukan modul Artin berarti barisan tidak pernah berhenti. Sehingga bila diperpanjang menjadi :

$(M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n) \supseteq (M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_{n-1}) \supseteq (M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_{n-2}) \supseteq ... \supseteq M_1 \oplus M_2 \supseteq M_1 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$

Dengan A_1, A_2, A_3, ... adalah submodul dari suatu M_i misal M_1. Bila diperhatikan bagian terakhir barisan turun itu yaitu $M_1 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ maka nampak bahwa ada suatu M_i yaitu M_1 yang tidak memenuhi syarat rantai turun. Jadi bila $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ bukan modul Artin atas ring R maka ada M_i yang bukan modul Artin atas ring R. Jadi kontraposisinya berlaku bahwa jika setiap M_1 , M_2 , M_3 ,....,M_n adalah modul Artin atas ring R maka $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus .... \oplus M_n$ juga modul Artin atas ring R. ■

Teorema 3.2.13:

Misal M adalah modul atas ring R. Misal M modul yang dibangkitkan secara berhingga atas ring R. Jika R Artin maka M juga Artin.

Bukti:

Diketahui M adalah modul atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga. Misal R adalah ring Artin. Akan dibuktikan M adalah modul Artin. Ring R adalah Artin berarti R_R juga modul Artin atas R sendiri. Misalkan I adalah ideal kanan dari R berarti berdasarkan teorema 2.4.9 I submodul dari R_R. Karena R_R modul

Artin dan I submodul dari R_R maka berdasarkan teorema 3.2.10 maka I dan R/I merupakan modul Artin. Berdasarkan hasil terakhir dan teorema 2.4.21 disimpulkan setiap modul siklik atas ring R adalah modul Artin.

Diketahui M modul atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga. Misalkan M dibangkitkan oleh $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Berarti setiap $m \in$ M dapat ditulis dalam bentuk $m = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n r_n$ dimana $r_1, r_2, \ldots, r_n \in$ R. Sekarang $m_1 r_1 \in m_1 R$, $m_2 r_2 \in m_2 R$, ..., $m_n r_n \in m_n R$ sehingga M dapat ditulis

$M = m_1 R + m_2 R + \ldots + m_n R$..........................(1)

Sekarang akan ditunjukkan $m_i R \cap \sum_{k \neq i} m_k R = \{0\}$ untuk i= 1,2,...,n.

Misal $x \in m_i R \cap \sum_{k \neq i} m_k R$ maka $x \in m_i R$ dan $x \in \sum_{k \neq i} m_k R$ .Karena $x \in m_i R$ dan M adalah modul yang dibangkitkan secara berhingga maka

$x = m_i r = 0 + \ldots + 0 + m_i r + 0 + \ldots + 0$ untuk suatu $m_i r \in m_i R$.

Karena $x \in \sum_{k \neq i} m_k R$, dengan $\sum_{k \neq i} m_k R = m_1 R + \ldots + m_{I-1} R + m_{I+1} R + \ldots + m_n R$ maka $x = m_1 r + m_2 r + \ldots + m_{I-1} r + m_{I+1} r + \ldots + m_n r$ untuk suatu $m_j r \in m_j R$. Karena M dibangkitkan secara berhingga oleh $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$maka diperoleh $m_i r = 0$ untuk I=1,2,...,n. Jadi x = 0 sehingga $m_i R \cap \sum_{k \neq i} m_k R = \{0\}$ ....(2)

Dari (1) dan (2) dan berdasarkan teorema 2.4.16 maka $M = \oplus \sum_{i=1}^{n} m_i R$.

Karena setiap $m_i R$ adalah modul siklik atas ring R dan modul Artin maka menurut teorema 3.2.12 disimpulkan M adalah modul Artin atas ring R. ■

Teorema 3.2.14 :

Misal M adalah modul atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga. Jika R_R mempunyai barisan komposisi maka M mempunyai barisan komposisi.

Bukti :

R_R mempunyai barisan komposisi maka berdasarkan teorema 3.2.9 R_R memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya dan merupakan modul Artin atas R sendiri. Akibatnya R adalah ring Artin. Misal M adalah modul atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga. Akan ditunjukkan M mempunyai barisan komposisi. Berdasarkan teorema 3.2.13 maka M merupakan modul Artin. Karena M adalah modul Artin maka M memenuhi syarat rantai turun pada submodul-submodulnya. Sehingga berdasarkan teorema 3.2.9 maka M juga mempunyai barisan komposisi. ∎

Teorema 3.2.15:

Misalkan A dan B adalah ring dimana $B \subseteq A$ dan A_B adalah modul A atas ring B yang dibangkitkan secara berhingga. Jika B ring Artin maka A juga ring Artin.

Bukti:

Misalkan A dan B adalah ring dimana $B \subseteq A$ dan A_B adalah modul A atas ring B yang dibangkitkan secara berhingga. Diasumsikan B adalah ring Artin. Akan dibuktikan A adalah ring Artin. Sehingga harus dibuktikan setiap barisan ideal dari A memenuhi syarat rantai turun. Karena A_B adalah modul atas ring B yang dibangkitkan secara berhingga dan diasumsikan B ring Artin maka berdasarkan teorema 3.2.13 diperoleh A_B adalah modul Artin. Karena A_B adalah modul Artin dan $B \subseteq A$ maka A_A yaitu modul reguler A adalah modul Artin. Ini berarti bahwa submodulsubmodul dari A_A memenuhi syarat rantai turun. Karena menurut teorema 2.4.9 setiap ideal-ideal dari A adalah submodul dari A_A akibatnya setiap barisan ideal dari A juga memenuhi syarat rantai turun. Jadi A adalah ring Artin. ■

C. BIOGRAFI EMIL ARTIN

Seorang tokoh matematika yang berhubungan erat dengan modul Artin adalah Emil Artin. Emil Artin adalah tokoh matematika abad 20 yang menyumbang banyak dalam aljabar linear dan aljabar abstrak. Emil Artin lahir pada tanggal 3 Maret 1898 di Vienna, Austria. Artin memperoleh gelar Ph.D (Doctor of Philosophy) di Universitas Leipzig tahun 1921. Tahun 1923 sampai dengan tahun 1937 ia tinggal di Amerika dan mendapat gelar Profesor di Universitas Hamburg. Setelah satu tahun di Notre dame, Artin masuk ke Universitas Indiana. Tahun 1946, Artin pindah di Princeton, sampai tahun 1958. Dan kariernya dia habiskan di Hamburg. Artin meninggal dunia tahun 1962 dalam usia 64 tahun karena serangan jantung.

Emil Artin adalah murid dari Amalie Emmy Noether (1882 – 1935), matematikawan wanita berkebangsaan Jerman, yang terkenal dengan " The General Theory of Ideals". Noether mengenalkan syarat rantai naik pada ideal-ideal dalam ring. Dan namanya menjadi nama kelas ring tersebut yaitu ring Noether.

Sumbangan Emil Artin dalam matematika diantaranya dalam teori bilangan, teori grup, teori field, teori galois, aljabar geometri dan aljabar topologi. Emil Artin mendapat penghargaan American Mathematical Society's Cole Prize dalam hal teori bilangan. Ia juga telah menyelesaikan satu dari 23 masalah terkenal yang dikemukakan matematikawan David Hilbert tahun 1900. Dalam teori ring, nama Emil Artin diabadikan sebagai nama dari kelas suatu ring yaitu ring Artin yang merupakan kelas ring dengan syarat rantai turun pada ideal-idealnya.

Emil Artin merupakan guru matematika yang terkenal. Beberapa murid Emil Artin menjadi tokoh matematika. Putra Emil Artin yaitu Michael Artin adalah seorang profesor matematika di MIT dan pernah menjadi presiden di American Mathematical Society. Dan dia yang meneruskan teori ideal dari Emil Artin.

BAB IV

PENUTUP

Setelah membahas materi *Modul Artin* dalam tulisan ini, penulis dapat mengambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Misal M adalah modul atas ring R dan N adalah submodul dari M maka M adalah modul Artin bila dan hanya bila N dan M/N adalah modul Artin.
2. Bila A adalah keluarga dari submodul-submodul sederhana dari modul M atas ring R dan M adalah jumlah langsung dari submodul-submodul dalam A maka M adalah modul Artin bila dan hanya bila I berhingga, dimana I adalah himpunan indeks-indeks dari submodul-submodul dalam A.
3. Misal M_1, M_2, ..., M_n adalah modul atas ring R. Maka jumlah langsung $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ adalah modul Artin atas ring R bila dan hanya bila setiap M_1, M_2, ..., M_n adalah modul Artin atas ring R.
4. Jika R adalah ring Artin maka R adalah modul Artin atas dirinya sendiri.
5. Jika R adalah ring Artin maka modul M atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga adalah modul Artin atas ring R
6. Modul M atas ring R mempunyai barisan komposisi bila dan hanya bila M memenuhi syarat rantai turun dan syarat rantai naik.
7. Bila modul reguler R mempunyai barisan komposisi maka modul M atas ring R yang dibangkitkan secara berhingga juga mempunyai barisan komposisi.

DAFTAR PUSTAKA

Agustiani,Maria,S.Si.,M.Si.. 2000 (Juli) "Modul Sangat Semi Sederhana" *SIGMA*.3(2).161 – 168. Yogyakarta : LPUSD

Durbin, J.R. 1985. *Modern Algebra: An Introduction*. New York : John Willey

Fraleigh, J.B.1989. *A First Course in Abstract Algebra*.Reading:Addison-Wesley Publishing-Company

Gallian, J.A.1998.*Contemporary Abstract Algebra*.Boston : Houghton Mifflin Company

Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. New York :Springer-Verlag

Lang, S.1990. *Undergraduate Algebra*. New York : Springer

Malik, S, Mordeson, P, Sen,M.1997.*Fundamentals of Abstract Algebra*. New York : MC Graw-Hill Book Co

Moore, J.T.1963. *Elements of Abstract Algebra*.New York:The Macmillan Company

Passman, D.S.1990. *A Course in Ring Theory*. Wadsworth & Books/Cole Advanced Books & Software

Stillwell, J.1989.*Mathematics and Its History*.New York : Springer

Wallance, D.A.R.1998.*Groups, Rings and Fields*. New York: Springer

Whitelaw, T.A.1995. *Introduction to Abstract Algebra*. NewYork: Blackie Academic & Professional, New York