PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DAN PENERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh:

HETI TRI MASTUTI

NIM: 991414019

Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta

2004

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DAN PENERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:
HETI TRI MASTUTI
NIM : 991414019

Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta
2004

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DAN PENERAPANNYA

Oleh:

Heti Tri Mastuti

NIM : 991414019

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Drs. A. Tutoyo, M.Sc.

Tanggal : 27 September 2004

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR
DAN PENERAPANNYA

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

HETI TRI MASTUTI

NIM: 991414019

Telah Dipertahankan di Depan Panitia Penguji

Pada tanggal 27 September 2004

dan Dinyatakan Telah Memenuhi Syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono.	....
Anggota	: Drs. A. Mardjono.	....

Yogyakarta, 27 September 2004

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 27 September 2004

Penulis

Heti Tri Mastuti

Apa yang telah engkau dengar dari pada Ku........, percayakan pada orang-orang yang dapat dipercaya.

(2 Timotius 2:2)

Ia menyuruh kita untuk bersikap ramah dan penuh kasih, bukannya mencari-cari kesalahan dan menaruh dendam kepada orang lain.

(Efesus 4:31-32)

Dengan penuh syukur kepada Tuhanku Yesus kristus, skripsi ini kupersembahkan kepada:

- *Ayah dan Ibu tercinta*
- *Kedua kakakku yang aku sayangi*
- *Semua orang yang mengasihiku*

ABSTRAK

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui tentang persamaan diferensial non linear, cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua, dan juga penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua.

Persamaan diferensial non linear orde satu dapat ditulis dalam bentuk: $a_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + a_n\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$, di mana $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah fungsi dari x dan y. Persamaan diferensial non linear dapat diselesaikan dengan cara: penyelesaian ke p, penyelesaian ke x, penyelesaian ke y, dan pesamaan diferensial clairut.

Persamaan diferensial non linear orde dua dapat dibedakan dalam dua bentuk yaitu: yang tergantung pada variabel bebas $f(x, y', y'') = 0$ atau $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, yang tidak tergantung pada variabel bebas $f(y, y', y'') = 0$ atau $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$. Kedua bentuk persamaan diferensial non linear orde dua di atas dapat diselesaikan dengan cara mengubah persamaan diferensial non linear orde dua itu menjadi persamaan diferensial linear.

Persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dapat diterapkan dalam bidang geometri (misalnya masalah mencari kurva), bidang fisika (misalnya masalah mencari bentuk lintasan planet), bidang kimia (misalnya masalah kesetimbangan kimia).

ABSTRACT

The purpose of the script is knowing about differential non linear equations, how to solve the differential non linear equations of first and second order.

The differential non linear of first order may write: $a_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + a_n\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ is a fuction from x and y. The differention non linear equations can be solve with: solving to p, solving to x, solving to y and clairut's differential equations.

The differential non linear of second order can be diveded in to 2 curve: dependent variable missing $f(x, y', y'') = 0$ or $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, independent variable missing $f(y, y', y'') = 0$ atau $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$. Both of the differential non linear equations of second order above can be solved with changing the differential non linear equations of second order be differential linear equations.

The differential non linear equation s of first and second order can be applied in the geometric plane (example: problems solving looking for a curve), physics plane (example: problems solving looking for the line plane of the planet), chimistry plane (example: problems of the balancing of chemistry).

KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Allah Bapa di surga atas segala penyertaan dan bimbingan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar. Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata I (SI) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tidak lepas dari keterlibatan banyak pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini sudah selayaknya penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc., selaku pembimbing yang telah sabar dalam memberikan bimbingan selama penyusunan skripsi.
2. Bapak Dr. St. Suwarsono dan Drs. A. Mardjono selaku penguji yang telah memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyusuanan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Th. Sugiarto, M.T., selaku Kaprodi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
4. Bapak Drs. Susento, M.Sc dan ibu Dra. Marta margaretha Yetty Tjandrawati, M.Si, yang telah memberi masukan pada penulis dalam menulis skripsi ini.
5. Pak Sugeng dan Pak Narjo, atas segala keramahannya dalam melayani mahasiswa-mahasiswi untuk kelancaran studi.
6. Bapak dan Ibu tercinta yang selama ini selalu mendampingi, memberi dorongan, semangat dan juga doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

7. Mas heri, mbak Heni dan semua saudaraku yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
8. Om Sugeng yang telah membantu menterjemahkan abstrak dan pekerjaan yang telah diberikan.
9. Semua teman-teman angkatan 1999 : Vina, Nara, Wulan, Pangestu, Kotrek, Wuri, Ana, Agung C, Agung T, Cicil, Iin, Dian, Beben, Anggit, Anas, Wiwid, Wiwin, Anton K, Anton P, Rangga, Patmi, Yuli, Yanto, Yati, Yanti, Dewi, Eko, Agus(alm), Tutik, Tutiek, Sari, Tiwi, Heni, Eva, Brabat, Enik, Lina, Ratna, Ulil, Lily, Maria, Enggal, Tejo, Ebti, Asih, Yo, terima kasih atas perhatian, dukungan dan kebersamaannya selama ini.
10. Sobat-sobatku Ebti, Tiwi, Yati, Lily Tri, Kartini, Lilik, Mardani yang selalu memberikan perhatian, dukungan, semangat, kritikan maupun masukan kepada penulis dan memanjakan penulis.
11. Adik tingkat dan kakak tingkat yang telah memberi dukungan kepada penulis.
12. Teman – teman kos ku Puspa, Putu, Siska yang selalu memberikan dorongan, semangat, fasilitas, dan yang selalu menghibur ku, meskipun aku sering membuat jengkel (marah) mereka, tetapi mereka selalu memperhatikan aku, terima kasih ya.

13. Teman-teman kos yang belakang Anik, Nuke, Via, Nana, Lidia dan semua anggota keluarga kos 105 terima kasih atas bantuannya.
14. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari akan segala kekurangan yang termuat dalam skripsi. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran guna menyempurnakan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

Heti Tri Mastuti

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Salah satu manfaat matematika adalah untuk menggambarkan situasi dan fenomena dalam dunia nyata dengan bahasa yang lebih sederhana yaitu dalam bentuk pemodelan matematika. Di antara berbagai materi dalam matematika yang seringkali muncul dalam penyusunan model untuk masalah-masalah dalam kehidupan nyata adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan atau diferensial dari satu atau lebih fungsi. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan berbagai macam cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung hanya pada satu variabel bebas saja, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Contoh persamaan persaman diferensial biasa adalah:

1. $dy = (y^2 + x)dx$
2. $y'' + 4y = (x^3 + 1)^2$
3. $yy' + 2x = 4$
4. $(y'')^3 + 2y = x$

persamaan di atas y menyatakan fungsi yang belum diketahui (variabel tak bebas) dan x menyatakan variabel bebas. Jika fungsi yang belum diketahui bergantung dua atau lebih variabel bebas maka persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial.

Contoh persamaan diferensial parsial adalah:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1+2x$

Persamaan diferensial juga dibedakan menurut tingkat (orde) dan menurut derajatnya. Orde dari suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan diferensial. Derajat dari persamaan diferensial adalah pangkat dari turunan tingkat tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.

Persamaan diferensial biasa masih bisa dibagi lagi menjadi dua kelompok besar yaitu : persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear. Persamaan diferensial biasa tingkat n disebut linear dalam y jika persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk:

$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$, dimana $a_0,a_1,\ldots,a_n$ dan f adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval x dan $a_n(x)\neq 0$ pada interval itu. Fungsi $a_n(x)$ disebut fungsi-fungsi koefisien. Atau persamaan diferensial biasa dikatakan linear jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Fungsi yang belum diketahui (variabel terikat) dan derevatif-derevatifnya secara aljabar yang terjadi hanya berderajat satu.
2. Tidak ada hasil kali antara fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya, dua atau lebih derivatif.
3. Tidak ada fungsi transedental dari y, y', y'', dan seterusnya.

Persamaan diferensial yang tidak linear disebut persamaan diferensial non linear.

Contoh persamaan diferensial yang linear:

1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$
2. $y''' - xy' = e^x$

Contoh persamaan diferensial non linear:

1. $y'' + 5y = \cos y.$
2. $(y')^3 + 2y = x$

Persamaan diferensial, menurut ordenya dibedakan menjadi:

1. Persamaan diferensial orde satu

Bentuk umumnya: $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ atau $f(x, y, y') = 0$

Menurut derajatnya persamaan diferensial order satu dibedakan menjadi:

a. Persamaan diferensial orde satu derajat satu disebut juga persamaan diferensial linear orde satu.

Contoh: $x\ y' + y = 1$

b. Persamaan diferensial orde satu derajat tinggi disebut juga persamaan diferensial non linear orde satu.

Contoh: $x\ (y')^2 - 2\ y\ y' - x = 0$

2. Persamaan diferensial orde dua

Bentuk umumnya: $f(x, y, y', y'') = 0$ *atau* $f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$

Menurut derajatnya persamaan diferensial orde dua dibedakan menjadi:

a. Persamaan diferensial orde dua derajat satu disebut persamaan diferensial linear, jika fungsi dan turunannya berderajat satu dan tidak ada hasil antara fungsi dan turunannya.

Contoh: $x\ y'' + y = 1$

b. Persamaan diferensial orde dua derajat tinggi disebut juga persamaan diferensial non linear, jika fungsi dan turunannya berderajat tinggi (lebih dari satu).

Contoh: $(1+x^2)y'' + 1 + (y')^2 = 0$

Bentuk persamaan diferensial non linear sering kita jumpai dalam masalah kehidupan nyata misalnya dalam fisika dan geometri. Ilustrasi yang pertama adalah masalah gerak bandul tunggal pada gambar 1. Pada gambar 1 disajikan benda bermassa m yang tergantung pada titik tetap O dengan batang yang panjangnya s yang tak bermassa dan tak dapat bertambah panjang, bebas berayun pada bidang kertas dibawah pengaruh gravitasi. Jika bandul disimpangkan sebesar sudut θ dari posisi setimbangnya seperti tampak pada gambar 1, maka tenaga potensial V sistem tersebut adalah usaha yang dilakukan melawan gravitasi untuk mengangkat massa bandul sejauh h, besarnya *h* adalah:

$$h = s - s\cos\theta$$

$$h = s(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

Jadi tenaga potensial itu adalah

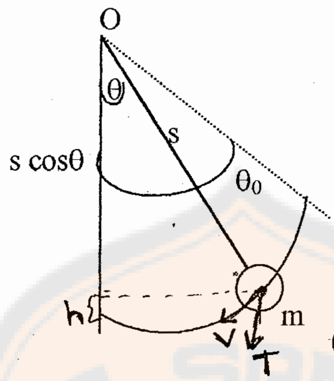
$$V = mgs\,(1-\cos\theta) \qquad (2)$$

Tenaga gerak dari gerakan bandul yang diberikan oleh

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (3)$$

dengan v adalah kecepatan linear bandul itu. Jika *v* dinyatakan dalam sudut θ diperoleh:

$$v = s\frac{d\theta}{dt} = s\dot{\theta} \qquad (4)$$



(Gambar 1)

$$T = \tfrac{1}{2} m s^2 \dot{\theta}^2 \qquad (5)$$

Karena tak ada tenaga yang hilang dalam sistem ini, maka berlaku

$$T + V = C \qquad (6)$$

Dengan C suatu tetapan yang menyajikan tenaga total. Dengan demikian, substitusi (2) dan (5) kedalam (6) diperoleh

$$mgs\,(1 - \cos\theta) + \tfrac{1}{2} m s^2 \dot{\theta}^2 = C \qquad (7)$$

Untuk menentukan tetapan C, diasumsikan jika $t = 0, \theta = \theta_0$ adalah amplitudo maksimum ayunan sehingga

$$\dot{\theta} = 0 \;\; jika\; \theta = \theta_0 \qquad (8)$$

Dengan mensubstitusikan syarat ini kedalam (7) di dapat

$$C = mgs\,(1 - \cos\theta_0) \qquad (9)$$

dengan demikian diperoleh

$$g\,(1 - \cos\theta) + \frac{s}{2}\dot{\theta}^2 = g\,(1 - \cos\theta_0) \qquad (10)$$

atau $$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{s}(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (11)$$

Untuk memperoleh persamaan gerak, (11) dideferensialkan terhadap waktu dan didapat

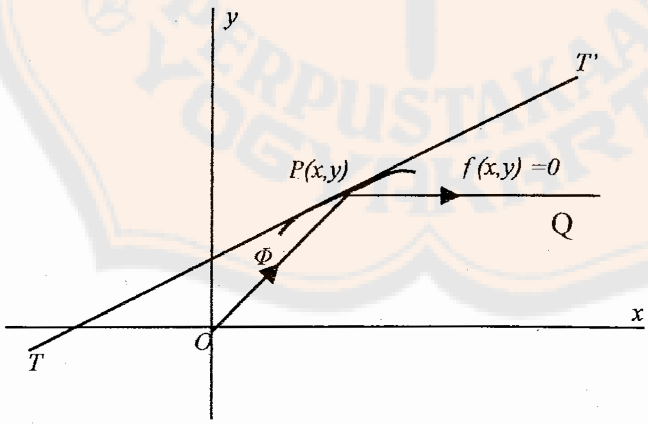
$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{2g}{s}\sin\theta\,\dot{\theta} \tag{12}$$

atau

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{s}\sin\theta = 0 \tag{13}$$

Persamaan (13) adalah persamaan gerak suatu bandul dan persamaan ini merupakan persamaan diferensial non linear orde dua yang disebabkan oleh adanya fungsi trigonometri yaitu sinθ.

Ilustrasi yang kedua adalah masalah mencari bentuk pemantulan cahaya yang datang dari sumber tertentu yang dipantulkan dalam berkas sinar yang sejajar. Misalkan titik tertentu tersebut pada titik asal koordinat dan berkas sinar yang dipantulkan sejajar dengan sumbu x. Dengan demikian pemantulan cahaya merupakan permukaan yang dibentuk oleh perputaran kurva *f(x,y)=0* disekitar sumbu x.



Dengan membatasi pada bidang *xoy* , misalkan P(x,y) adalah suatu titik pada kurva *f(x,y)=0*. TPT' menjadi garis singgung di P, dan PQ adalah sinar yang dipantulkan. Karena sudut datang sama dengan sudut pantul, maka

$$\angle OPT = \Phi = \angle QPT'$$

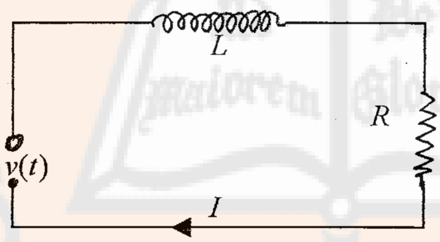
Jika, $p = \frac{dy}{dx} = \tan\angle OPT = \tan\Phi$

dan, $\tan\angle TOP = \tan(\pi - 2\Phi) = -\tan 2\Phi = \frac{-2\tan\Phi}{1-\tan^2\Phi} = -\frac{y}{x}$

dengan demikian, $\frac{y}{x} = \frac{2p}{1-p^2}$ atau $2x = \frac{y}{p} - yp$ (1)

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial non linear.

Ilustrasi yang ketiga masalah lintasan listrik non linear. Lintasan yang dipilih pada gambar 2 berisi induktansi *L*, resistor *R* dan emf *v(t)*.



Gambar 2

Dalam teori linear aliran *I* memenuhi persamaan deferensial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = v(t) \tag{1}$$

Tetapi kita harus membawa ke perhitungan non linear dalam bentuk induksi,yang sangat berat jika gulungan itu berisi batang besi. Dalam kasus ini (1) diganti menjadi

$$\frac{d\Lambda}{dt} + RI = v(t) \tag{2}$$

dimana Λ adalah fluk magnetik yang disebabkan oleh aliran I. Karena medan magnetik pada setiap titik disekitar kumparan sebanding dengan I, fluks magnetik yang melalui kumparan juga sebanding dengan I ,maka $\Lambda = LI$, dengan L merupakan konstanta yang disebut induktansi. Karena induktansi dalam rangkaian konstan, maka perubahan fluks yang dihubungkan dengan perubahan arus adalah $\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt}$.

Fungsi Λ diberikan secara empiris oleh eksperimen dengan materi yang berbeda. Kita memperkirakan Λ adalah nilai fungsi tunggal yaitu nilai terbaik yang diambil berdasarkan nilai rata-rata eksperimen.

$$\Lambda = b \sinh^{-1}(aI) \qquad (3)$$

dimana a dan b adalah konstan.

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d\Lambda}{dI}\frac{dI}{dt} \qquad (4)$$

Persamaan (2) menjadi

$$\frac{ab}{\sqrt{1+a^2I^2}}\frac{dI}{dt} + RI = v(t) \qquad (5)$$

dimana persamaan (5) adalah suatu persamaan diferensial non linear dari I dalam bentuk t.

Persamaan diferensial non linear menggambarkan keadaan yang lebih mendekati kenyataan. Karena itu penulis perlu mengetahui dan mempelajari cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua. Untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial non linear yang ada dalam kehidupan nyata, maka penulis mengambil judul " PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DAN PENERAPANNYA".

B. RUMUSAN MASALAH

Pokok-pokok masalah yang akan ditulis :

1. Apa yang dimaksud dengan persamaan diferensial non linear ?
2. Bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial non linear order satu dan dua ?
3. Bagaimana persamaan diferensial non linear orde satu dan dua diterapkan dalam bidang geometri, fisika dan kimia ?

C. TUJUAN PENULISAN

Berdasarkan rumusan masalah diatas maka penulisan skripsi ini bertujuan untuk :

1. Mengetahui persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear.
2. Membahas cara menyelesaikan masalah persamaan diferensial non linear orde satu dan dua.
3. Membahas beberapa contoh penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua.

D. MANFAAT PENULISAN

Dengan mengetahui dan memahami persamaan diferensial non linear kita dapat mengetahui cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear dan penerapannya dalam bidang ilmu lain, terutama dalam fisika.

E. PEMBATASAN MASALAH

Dalam penulisan sekripsi ini dilakukan pembatasan masalah yang dibahas sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial non linear orde satu dan dua.
2. Penyelesaian persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dengan cara penyelesaian ke p, ke x, ke y dan dengan mengubah ke persamaan diferensial linear.
3. Penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dalam masalah mencari kurva, lintasan planet dan kesetimbangan kimia.

F. METODE PEMBAHASAN

Metode yang digunakan adalah metode studi pustaka yaitu dengan mempelajari beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan.

G. SISTEMATIKA PENULISAN

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penulisan ini diberikan uraian sistematika penulisan sebagai berikut :

Bab I : Pendahuluan

Bab ini berisi tentang: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, pembatasan masalah, metode penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II : Materi Syarat

Bab ini menguraikan mengenai materi yang mendukung dan digunakan dalam pembahasan, materi itu terdiri dari: pengertian variabel bebas dan tak bebas; pengertian dalam persamaan diferensial (misalnya: pengertian persamaan diferensial biasa, orde, derajat, penyelesaian persamaan diferensial, penyelesaian umum dan penyelesaian singular); persamaan diferensial orde satu (persamaan diferensial orde satu derajat satu dan persamaan diferensial linear orde satu); persamaan diferensial orde dua (persamaan diferensial orde dua homogen dan non homogen)

Bab III : Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua, juga penerapannya dalam masalah mencari bentuk kurva, mencari bentuk lintasan planet, dan masalah kesetimbangan kimia.

Bab IV : Penutup

Bab ini berisi tentang ringkasan hasil pembahasan dan saran.

BAB II

MATERI SYARAT

Pada bab ini akan dibahas pengertian dasar yang berkaitan dengan persamaan diferensial non linear. Pengertian tersebut adalah;

A. Variabel bebas dan tak bebas

B. Pengertian dalam persamaan diferensial : persamaan diferensial biasa, orde, derajat, penyelesaian persamaan diferensial, penyelesaian umum, pemyelesaian singular.

C. Persamaan Diferensial orde satu

1. Persamaan diferensial orde satu derajat satu
2. Persamaan diferensial linear orde satu

D. Persamaan Diferensial orde dua

1. Persamaan diferensial orde dua homogen
2. Persamaan diferensial orde dua non homogen

A. Variabel bebas dan tak bebas

Definisi variabel secara umum:

1. Variabel adalah lambang yang menunjukan anggota sebarang dari suatu himpunan.
2. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memperpasangkan setiap $a \in A$ dengan tunggal elemen $b \in B$, sehingga hubungan itu dapat ditulis $b = f(a)$.

   a disebut variabel bebas, dan b disebut variabel tak bebas (terikat).

B. Pengertian persamaan diferensial

Yang dimaksud dengan persamaan diferensial biasa (ordinary differential equation) yang selanjutnya disingkat dengan PD ialah persamaan yang memuat hubungan antara x, suatu fungsi y dari x dan turunan-turunannya: $x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, ..., y^{(n)}$; dimana $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$ adalah turunan (derivatif) ke n dari y terhadap x. Hubungan itu dapat ditulis $f(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$

Contoh:

$$y' = 1 + y$$
$$y'' + 9y = 8\sin x$$
$$(y')^2 - 2y' + y - 3x = 0$$

Orde (tingkat) dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.

Derajat dari persamaan diferensial adalah pangkat dari turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.

Contoh:

$y' - y = x$ disebut PD orde satu derajat satu.

$(y''')^2 - 2y'' + y' + y - 3x = 0$ disebut PD orde tiga derajat dua.

Penyelesaian persamaan diferensial tingkat n, yang berbentuk: $f(x, y, y', y'', y''', ... y^{(n)}) = 0$ pada interval a ≤ x ≤ b adalah fungsi φ yang mempunyai semua turunan yang diperlukan, yang jika menggantikan pada $y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}$ menjadikan persamaan diferensial itu suatu identitas, atau $f(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$

Untuk membuktikan bahwa suatu fungsi adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui, harus diperlihatkan bahwa suatu fungsi itu memenuhi persamaan diferensial.

Contoh:

1. Buktikan bahwa $y = 2 + e^{-x}$ adalah penyelesaian dari $y' + y - 2 = 0$
2. Buktikan bahwa $x^2 + y^2 = 4$ menentukan suatu fungsi yang merupakan penyelesaian dari $x + yy' = 0$

Jawab:

1. $y = 2 + e^{-x}$ (1)

   (1) Diturunkan sehingga didapat $y' = -e^{-x}$ (2)

   Masukkan (1) dan (2) dalam $y' + y - 2 = 0$, sehingga

   $-e^{-x} + 2 + e^{-x} - 2 = 0$ atau $-e^{-x} + e^{-x} + 2 - 2 = 0$ (3)

   Karena dalam (3) ruas kiri sama dengan nol untuk semua x, maka fungsi $y = 2 + e^{-x}$ adalah penyelesaian dari $y' + y - 2 = 0$

2. $x^2 + y^2 = 4$ (4)

   Dari (4) diturunkan terhadap x, diperoleh $2x + 2yy' = 0$ atau dapat ditulis

   $x + yy' = 0$ (5)

   (5) adalah persamaan yang diketahui, maka $x^2 + y^2 = 4$ merupakan penyelesaian dari $x + yy' = 0$

Suatu keluarga dengan n perameter yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial tingkat n disebut penyelesaian umum dari persamaan diferensial.

Suatu penyelesaian persamaan diferensial yang bukan anggota penyelesaian umum disebut penyelesaian singular.

C. Persamaan diferensial orde satu

Persamaan diferensial orde satu adalah persamaan diferensial yang orde tertingginya satu.

Bentuk umumnya: $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ atau $f(x, y, y') = 0$

1. Persamaan diferensial orde satu derajat satu

Bentuk umumnya: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ atau $f(x, y)\frac{dy}{dx} + \phi(x, y) = 0$ atau
$f(x, y)dy + \phi(x, y)dx = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu derajat satu dapat diselesaikan dengan metode:

a. Metode pemisahan variabel

Bentuk umumnya: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

atau $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (2)

1) Jika $f(x, y) = g(x)\, h(y)$ maka persamaan (1) menjadi:

$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$ atau

$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ atau

$$\frac{dy}{h(y)} - g(x)dx = 0 \qquad (3)$$

Penyelesaian umum (3) diperoleh dengan cara mengintegralkan kedua ruas, sehingga didapat: $\int \frac{dy}{h(y)} - \int g(x)dx = c$ (4)

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^4$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^4$$

$$dy = x^2 y^4 dx$$

$$\frac{dy}{y^4} = x^2 dx$$

$$\frac{dy}{y^4} - x^2 dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y^4} - \int x^2 dx = c$$

$$-\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{3}x^3 = c$$

2) Jika $f(x,y) = -\dfrac{f(x)}{g(y)}$ maka persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{g(y)} \tag{5}$$

atau $f(x)dx + g(y)dy = 0$ (6)

Penyelesaian umum persamaan (7) ditulis dalam bentuk:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot g\ x \quad tg\ y$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot g\ x \quad tg\ y$$

$$dy = (-\cot g\ x \quad tg\ y\ )dx$$

$$\frac{dy}{tg\ y} = -\cot g\ x\ dx$$

maka $\int \frac{dy}{tg\ y} = \int -\cot\ x\ dx + c$

$$\int \frac{dy}{tg\ y} + \int \cot\ x\ dx = c$$

$$\ln \sin\ y + \ln \sin\ x = \ln c$$

$$\sin\ y + \sin\ x = c$$

3) Jika $P(x,y) = f_1(x)\, g_1(y)$ dan $Q(x,y) = f_2(x)\, g_2(y)$, maka persamaan (2) menjadi:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (7)$$

$$\underline{f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0} \quad : g_1(y) f_2(x) \qquad (8)$$

$$\frac{f_1(x)\, g_1(y)}{g_1(y)\, f_2(x)} dx + \frac{f_2(x)\, g_2(y)}{g_1(y)\, f_2(x)} dy = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0 \qquad (10)$$

Penyelesaian umum persamaan (10) menjadi:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial berikut:

$$x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$$

Penyelesaian:

$$x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{x(y^2-1)}{(y^2-1)(x^2-1)} dx + \frac{y(x^2-1)}{(y^2-1)(x^2-1)} dy = 0 \qquad (b)$$

maka PU: $\int \frac{x}{(x^2-1)} dx + \int \frac{y}{(y^2-1)} dy = c$ (c)

misal:

	$u = x^2 - 1$	$v = y^2 - 1$
misal:	$du = 2x\, dx$	$dv = 2y\, dy$
	$\frac{du}{2} = x\, dx$	$\frac{dv}{2} = y\, dy$

(c) menjadi: $\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} + \int \frac{1}{v}\frac{dv}{2} = c$

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = c$

$\int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v} = 2c$ (d)

(d) menjadi: $\ln u + \ln v = 2c$ atau $u\, v = e^{2c}$ (e)

Sehingga (e) menjadi: $(x^2 - 1)\,(y^2 - 1) = e^{2c}$ (PU)

b. Metode Substitusi

Persamaan yang tidak dapat dipisahkandan tidak dapat dinyatakan secara langsung dalam bentuk $f(x)dx + g(y)dy = 0$, dapat diselesaikan dengan substitusi yang cocok. Substitusi yang digunakan tergantung pada bentuk persamaan yang diketahui. Substitusinya yaitu dengan mengelompokan suku-suku yang sejenis dalam persamaan diferensial.

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1} \quad \text{(a)}$$

$$(x + y + 1)dy - (x + y - 1)dx = 0 \quad \text{(b)}$$

Misalkan:
$$u = x + y \Rightarrow y = u - x$$
$$y' = \frac{du}{dx} - 1$$

(a) menjadi: $\frac{du}{dx} - 1 = \frac{u-1}{u+1}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} + 1$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} + \frac{u+1}{u+1}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{u+1}$$
$$(u+1)du = 2udx$$

$$(u+1)du - 2udx = 0 \qquad \text{(c)}$$

Untuk menyelesaikan (c) digunakan metode pemisahan variabel,sehingga (c) menjadi:

$$\frac{u+1}{u}du - 2dx = 0$$

Penyelesaian umumnya: $\int \frac{u+1}{u}du - \int 2dx = c$

$$\int \frac{u}{u}du + \int \frac{1}{u}du - \int 2dx = c$$

$$u + \ln u - 2x = c \qquad \text{(d)}$$

Karena $u = x + y$, maka (d) menjadi: $(x + y) + \ln(x + y) = c$

2. Persamaan diferensial linear orde satu

Bentuk umumnya: $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),\ \ a_1 \neq 0$

Atau $y' + P\,y = Q$ disebut bentuk baku (1)

Persamaan diferensial linear orde satu dapat diselesaikan dengan cara:

a. Cara Bernouli.

Substitusi: $\begin{matrix} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{matrix}$, dimana u dan v fungsi dari x.

Maka persamaan (1) menjadi:

$$u'v + uv' + P\,uv = Q$$
$$v(u' + P\,u) + uv' = Q$$

Pilih fungsi u sedemikian hingga koefisien $v = 0,\ \ (u' + P\,u) = 0$ (2)

maka: $\dfrac{u'}{u} = -P \quad atau \quad \dfrac{\frac{du}{dx}}{u} = -P$

$$\rightarrow \quad \frac{du}{u} = -Pdx$$
$$\int \frac{du}{u} = -\int Pdx$$

$$\ln u = -\int Pdx$$
$$\ln u = \ln e^{-\int Pdx}$$

Jadi $u = e^{-\int Pdx}$

(2) menjadi $uv' = Q$

$$e^{-\int Pdx} v' = Q$$

$$v' = Q\,e^{\int Pdx}$$

$$v = \int e^{\int P dx} Q dx + c$$

Jadi $y = uv = e^{-\int P dx}\left[\int e^{\int P dx} Q dx + c\right]$

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2 - 1)y = ax^3$$

Penyelesaian:

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2 - 1)y = ax^3 \qquad (1)$$

Substitusi: $y = uv$, maka (1) menjadi

$$x(1-x^2)(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}) + (2x^2 - 1)uv = ax^3$$

$$xu(1-x^2)\frac{dv}{dx} + xv(1-x^2)\frac{du}{dx} + (2x^2 - 1)uv = ax^3$$

$$u[x(1-x^2)\frac{dv}{dx} + (2x^2 - 1)v] + x(1-x^2)v\frac{du}{dx} = ax^3$$

Ambil $v' + pv = 0$

$$x(1-x^2)\frac{dv}{dx} + (2x^2 - 1)v = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{2x^2 - 1}{x(1-x^2)}dx = 0$$

$$\ln v - \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1-x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x) = \ln c$$

$$v = cx\sqrt{1-x^2}$$

$$c = 1 \Rightarrow v = x\sqrt{1-x^2}$$

maka: $x(1-x^2)v\frac{du}{dx} = ax^3$ menjadi: $x(1-x^2)(x\sqrt{1-x^2})\frac{du}{dx} = ax^3$

$$x^2(1-x^2)^{3/2}\frac{du}{dx} = ax^3$$

$$(1-x^2)^{3/2}\frac{du}{dx} = ax$$

$$u = \int \frac{ax}{(1-x^2)^{3/2}}dx$$

$$u = -\frac{a}{2}[-2(1-x^2)^{-1/2} + c$$

$$u = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

PU: $y = uv$

$$y = \left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c\right)x\sqrt{1-x^2}$$

$$y = ax + cx\sqrt{1-x^2}$$

b. Cara Lagrange atau cara variasi parameter

Ambil $\frac{dy}{dx} + P\ y = 0 \quad \rightarrow \quad dy = -P\ y dy \quad atau \quad \frac{dy}{y} = -Pdx$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int Pdx$$

$$\ln y = -\int Pdx + c_1 = \ln e^{-\int Pdx} + \ln c$$

$y = ce^{-\int Pdx}$, pandang c sebagai fungsi dari x

sehingga $y = c(x)e^{-\int Pdx}$ (3)

maka $\ln y = -\int P dx + \ln c(x)$

dideferensialkan ke x menjadi: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P + \frac{1}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx}$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx} - P\ y$

$$\frac{dy}{dx} + P\ y = \frac{c(x)e^{-\int P dx}}{dx}\frac{dc(x)}{dx}$$

$$= e^{-\int P dx}\frac{dc(x)}{dx} \equiv Q$$

didapat $\frac{dc(x)}{dx} = e^{\int P dx} Q$, maka $c(x) = \int e^{\int P dx} Q\ dx + D$

Sehingga (3) menjadi: $y = e^{-\int P dx}[\int e^{\int P dx} Q\ dx + D]$

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \qquad (1)$$

ambil $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$, maka $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$$\ln y = \ln x + \ln c$$

$$y = cx$$

$$y = c(x)x \qquad (2)$$

maka $\ln y = \ln c(x) + \ln x$, dideferensialkan ke x menjadi:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx} + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx}$$

dari (2) sehingga didapat: $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{c(x)x}{c(x)}\dfrac{dc(x)}{dx}$

Persamaan (1) menjadi: $\dfrac{c(x)x}{c(x)}\dfrac{dc(x)}{dx} = x$

$$x\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$x\,dc(x) = xdx \qquad c(x) = x + c$$

PU: $y = c(x)x$

$$y = (x+c)x$$

$$y = x^2 + cx$$

D. Persamaan diferensial linear orde dua

Persamaan diferensial orde dua adalah persamaan diferensial yang orde tertingginya dua.

Bentuk umumnya: $f(x, y, y', y'') = 0 \; atau \; f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$

1. Persamaan diferensial homogen dengan koefisien konstan

a. Persamaan dalam bentuk: $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$

Persamaan karakteristiknya: $am^2 + bm + c = 0$, akar-akar dari persamaan karakteristik ada 3 kemungkinan yaitu:

1) Kedua akarnya riil dan berbeda : $m = m_1 \ dan \ m = m_2, m_1 \neq m_2$, maka

   penyelesaiannya: $y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$

2) Kedua akarnya riil dan sama: $m = m_1$,

   maka penyelesaiannya: $y = e^{m_1 x}(A + Bx)$

3) Kedua akarnya kompleks: $m = a \pm i\beta$, maka

   penyelesaiannya: $y = e^{ax}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

b. Persamaan dalam bentuk: $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0$

   Persamaan karakteristik: $m^2 + n^2 = 0$, akar-akar persamaan karakteristiknya: $m^2 = -n^2$

   $$m = \pm\, in \ \ (m = a \pm i\beta \ bila \ a = 0 \ dan \ \beta = n)$$

   maka penyelesaiannya: $y = A\cos nx + B\sin nx$

c. Persamaan dalam bentuk: $\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = 0$

   Persamaan karakteristik: $m^2 - n^2 = 0$, akar-akar persamaan karakteristiknya: $\begin{array}{l} m^2 = n^2 \\ m = \pm n \end{array}$

   Maka penyelesaiannya: $y = A\cosh nx + B\sinh nx$

Contoh:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $m^2 - 2m + 10 = 0$

Akar-akarnya:
$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$$
$$m = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm i3$$

Jadi penyelesaiannya: $y = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $m^2 + 16 = 0$

Akar-akarnya:
$$m^2 = -16$$
$$m = \pm i4$$

Jadi penyelesaiannya: $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $m^2 - 3 = 0$

Akar-akarnya:
$$m^2 = 3$$
$$m = \pm\sqrt{3}$$

Jadi penyelesaiannya: $y = A\cosh\sqrt{3x} + B\sinh\sqrt{3x}$

2. Persamaan diferensial non homogen dengan koefisien konstan

a. Bentuk persamaannya: $a\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+cy=f(x)$ (1)

Cara menyelesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Mencari fungsi komplementer (y_c) yaitu dengan mengubah persamaan

(1) menjadi $a\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+cy=0$. Dengan ini akan diperoleh jenis-jenis pemecahan sebagai berikut:

a) $y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$

b) $y=e^{m_1x}(A+Bx)$

c) $y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

d) $y=A\cos nx+B\sin nx$

e) $y=A\cosh nx+B\sinh nx$

2) Mencari penyelesaian khusus (y_p) dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi di ruas kanan pada persamaan (1), yaitu dengan mensubstitusikan bentuk umum tersebut ke dalam persamaan (1), kemudian menyamakan koefisien-koefisiennya.

3) Penyelesaian umumnya: $y=y_c+y_p$

Contoh:

Carilah penyelesaian umum dari: $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$

Jawab:

1) Mencari y_c, yaitu dengan mengubah ke persamaan karakteristik dan ruas kiri sama dengan nol, $m^2 - 5m + 6 = 0$, akar-akarnya: $(m-2)(m-3) = 0$, $m = 2$ *atau* $m = 3$, jadi $y_c = Ae^{2x} + Be^{3x}$

2) Untuk mencari penyelesaian khusus, kita gunakan bentuk umum pada ruas kanan yaitu fungsi berderajat dua. Misalkan $y = Cx^2 + Dx + E$.

   Maka $\frac{dy}{dx} = 2Cx + D$ *dan* $\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$, substitusi bentuk ini ke dalam persamaannya diperoleh:

   $$2C - 5(2Cx + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$
   $$2C - 10Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$$
   $$6Cx^2 + (6D - 10C)x + (2C - 5D + 6E) = x^2$$

   Dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama di dapat: $6C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{6}$

   $$6D - 10C = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{5}{18}$$

   $$2C - 5D + 6E = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{19}{108}$$

   Jadi $y_p = \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}$

$$y = y_c + y_p$$

3) Jadi penyelesaian umumnya: $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}$

b. Bentuk persamaannya: $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = S(x)$ (1)

Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan cara mengubah dulu ke bentuk persamaan diferensial homogen yaitu:

Jika $y = u(x)$ adalah pendapatan istimewa yang dapat diketahui dari ruas kiri, sehingga ruas kiri menjadi: $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$, dan

dengan substitusi: $y = uz$ (z adalah fungsi x) (2)

$$y' = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} \qquad (3)$$

$$y'' = u\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2u}{dx^2} \qquad (4)$$

persamaan (2),(3),(4), ke dalam persamaan (1), sehingga menjadi:

$$P\left(u\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2u}{dx}\right) + Q\left(u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}\right) + Ruz = S$$

$$Pu\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2P\frac{du}{dx} + Qu\right)\frac{dz}{dx} + \left(P\frac{d^2u}{dx^2} + Q\frac{du}{dx} + Ru\right)z = S$$

$$Pu\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2P\frac{du}{dx} + Qu\right)\frac{dz}{dx} = S$$

misal: $\frac{dz}{dx} = v$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dv}{dx}$

$Pu\frac{dv}{dx}+\left(2P\frac{du}{dx}+Qu\right)v=S$ adalah persamaan diferensial linear tingkat satu sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode yang tepat.

Contoh

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=(x-2)e^{2x}$

Penyelesaian:

$$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=(x-2)e^{2x} \quad (1)$$

e^x adalah suatu penyelesaian yangmenyebabkan ruas kiri persamaan (1) sama dengan nol. $(xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0)$.

Substitusi: $y=e^x z$ (2)

$$y'=e^x z+e^x\frac{dz}{dx} \quad (3)$$

$$y''=e^x z+2e^x\frac{dz}{dx}+e^x\frac{d^2z}{dx^2} \quad (4)$$

(2),(3),(4), kedalam persamaan (1), sehingga menjadi:

$$\left[x\left(z+2\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}\right)-2(x+1)\left(z+\frac{dz}{dx}\right)+(x+2)z\right]e^x=(x-2)e^{2x}$$

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+(2x-2x-2)\frac{dz}{dx}+(x-2x-2+x+2)z=(x-2)e^x$$

$$x\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}=(x-2)e^x$$

misalkan: $\frac{dz}{dx} = v \quad \rightarrow \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dv}{dx}$

$$x\frac{dv}{dx} - 2v = (x-2)e^x$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = (1 - \frac{2}{x})e^x$ ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Bernouli.

$$v = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int e^{-\int \frac{2}{x}dx}(1-\frac{2}{x})e^x dx + c_1\right]$$

$$v = x^2\left[\int (\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3})e^x dx + c_1\right]$$

$$v = \frac{dz}{dx} = x^2(\frac{e^x}{x^2} + c_1) = e^x + c_1x^2$$

$$z = \int \left(e^x + c_1x^2\right)dx + c_2 = e^x + c_1x^3 + c_2$$

Jadi $y = e^x z = e^x(e^x + c_1x^3 + c_2)$

BAB III

PEMBAHASAN

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR

Dalam bab ini akan dibahas tentang persamaan diferensial non linear, yaitu tentang cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua. Cara penyelesaian persamaan diferensial non linear itu nanti akan dimanfaatkan untuk menjawab persoalan penerapan yang model matematikanya berbentuk persamaan diferensial non linear.

Persamaan diferensial biasa disebut non linear jika salah satu syarat berikut dipenuhi :

1. Fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya secara aljabar yang terjadi berderajat lebih dari satu, atau dalam bentuk: $a_0(y^{(n)})^m + a_1(y^{(n-1)})^{m-1} + \cdots + a_n y' + a_n y = 0$
2. Ada hasil kali yang berkaitan dengan fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya dua atau lebih, dapat di tulis dalam bentuk: $a_0 y^{(n)} y^m + a_1 y^{(n-1)} y^{m-1} + \cdots + a_n y' y + a_n y = 0$
3. Ada fungsi transendental dari y, y', y'', y''', dan seterusnya.

A. Persamaan Diferensial Non Linear Orde Satu

Bentuk umumnya :

$$a_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + a_n\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ adalah fungsi-fungsi dari x dan y.

atau dapat ditulis:

$$p^n + F_1(x,y)p^{n-1} + F_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(x,y)p + F_n(x,y) = 0$$

di mana $p = \dfrac{dy}{dx}$.

1. Penyelesaian Persamaan Diferensial non linear orde satu.

Persamaan diferensial non linear dapat diselesikan dengan:

a. Penyelesaian ke p.

Jika $p^n + F_1(x,y)p^{n-1} + F_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(x,y)p + F_n(x,y) = 0 \ldots(1)$ sebagai suatu polinomial dalam p, yang dapat diuraikan menjadi n faktor linear sedemikian sehingga persamaan (1) dapat di tulis dalam bentuk: $(p - F_1)(p - F_2)(p - F_3)\ldots(p - F_n) = 0$, di mana F adalah fungsi-fungsi dari x dan y.

Langkah-langkah menentukan penyelesaian umum:

1) Uraikanlah persamaan diferensial tersebut (persamaan (1)) dalam n faktor linear yaitu: $(p - F_1)(p - F_2)(p - F_3)\ldots(p - F_n) = 0$, dimana $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ adalah fungsi dari x dan y.

2) Terdapat n persamaan diferensial orde satu dan derajat satu yang disamakan dengan nol pada setiap faktor riil, yaitu;

$$p - F_1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - F_1(x,y) = 0$$
$$p - F_2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - F_2(x,y) = 0$$

$$p - F_3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - F_n(x,y) = 0$$

3) Selesaikan setiap persamaan diferensial orde satu derajad satu itu, sehingga didapat: $f_1(x,y,c)=0,\ f_2(x,y,c)=0,\ldots,f_n(x,y,c)=0$

4) Penyelesaian umum persamaan diferensial merupakan perkalian dari penyelesaian umum setiap persamaan diferensial orde satu derajat satu itu, sehingga di dapat: $f_1(x,y,c)\times f_2(x,y,c)\times\ldots\times f_n(x,y,c)=0$

Contoh

Tentukan penyesaian umum dari persamaan diferensil berikut:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3xy\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

Penyelesaian:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3xy\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \qquad \text{(a)}$$

$p=\dfrac{dy}{dx}$ maka (a) menjadi: $x^2p^2+3xyp+2p^2=0$

$$x^2p^2+2xyp+xyp+2p^2=0$$

$$xp(xp+2y)+y(xp+2y)=0$$

$$(xp+y)(xp+2y)=0 \qquad \text{(b)}$$

(b) dapt ditulis menjadi $(xp+y)=0 \quad (c) \quad atau \quad (xp+2y)=0 \quad (d)$

Persamaan (c) menjadi: $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + \ln c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

$$yx - c = 0$$

Persamaan (d) menjadi: $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -2\ln x + \ln c$$

$$\ln y = \ln c - \ln x^2$$

$$y = \frac{c}{x^2}$$

$$yx^2 - c = 0$$

Jadi PU dari persamaan (a) adalah: $(yx - c)(yx^2 - c) = 0$

b. Penyelesaian ke x.

Bentuk persamaan diferensialnya:

$$F(x, y, p) = 0 \text{ atau } x = f(y, p) \tag{1}$$

Langkah-langkah menentukan PU:

1) Turunkan kedua ruas ke y, diperoleh:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

2) Karena $p=\frac{dy}{dx}$ maka $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$,sedemikian sehingga:

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

merupakan persamaan diferensial orde satu derajat satu dalam y dan p.

3) Selesaikan persamaan diferensial itu, sedemikian sehingga diperoleh

$$\Phi(y,p,c)=0 \qquad (2)$$

4) Untuk mendapatkan penyelesaian akhir, kita lihat dua kemungkinan berikut:

a) Jika p tidak dapat atau sukar dieliminasi dari persamaan (1) dan (2) maka di dapat PU: $\begin{cases}\Phi(y,p,c)=0\\ \Psi(x,p,c)=0\end{cases}$

b) Bila p dapat dieliminasi dari (1) dan (2) didapat:

PU: $\Phi(x,y,c)=0$

PS: $\Phi(x,y)=0$

Contoh

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$x=y+p^2$

Penyelesaian:

$$x=y+p^2 \qquad (1)$$

Persamaan (1) dideferensialkan ke y didapat:

$$\frac{dx}{dy} = 1 + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = 1 + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{\frac{1}{p} - 1}{2p} = \frac{dp}{dy}$$

$$dy = \frac{2p}{\frac{1}{p} - 1}dp$$

$$dy = \frac{2p^2}{1-p}dp$$

$$dy = -2(p+1)dp + \frac{2dp}{1-p}$$

$$\int dy = \int -2p\,dp - \int 2dp + \int \frac{2dp}{1-p}$$

$$y = -p^2 - 2p - 2\ln(1-p) + c \qquad (2)$$

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) sehingga didapat PU:

$$\begin{cases} x = y + p^2 \\ y = -p^2 - 2p - 2\ln(1-p) + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -p^2 - 2p - 2\ln(1-p) + p^2 + c \\ y = -p^2 - 2p - 2\ln(1-p) + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2p - 2\ln(1-p) + c \\ y = -p^2 - 2p - 2\ln(1-p) + c \end{cases}$$, dengan p sebagai parameter.

c. Penyelesaian ke y.

Bentuk persamaan diferensialnya: $F(x,y,p)=0$ atau $y=f(x,p)$ (1)

Langkah-langkah menentukan PU:

1) Deferensialkan y terhadap x, yaitu:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

2) Karena $p=\frac{dy}{dx}$, maka

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$p\,dx-\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$dx=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(p-\frac{\partial f}{\partial x}\right)}dp$$, merupakan persamaan diferensial orde satu derajat satu.

3) Selesaikan persamaan diferensial itu sedemikian sehingga diperoleh:

$$\Phi(x,p,c)=0 \qquad (2)$$

4) Untuk mendapatkan penyelesaian akhir, kita lihat dua kemungkinan berikut:

   a) Jika p tidak dapat atau sukar dieliminasi dari persamaan (1) dan (2)

   maka di dapat PU: $\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0\\ \Psi(y,p,c)=0\end{cases}$ (p = parameter)

   b) Bila p dapat dieliminasi dari (1) dan (2) didapat:

   PU: $\Phi(x,y,c)=0$ PS: $\Phi(x,y)=0$

Contoh

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$2p^2 + px^3 - 2x^2 y = 0$

Penyelesaian:

$$2p^2 + px^3 - 2x^2 y = 0 \tag{1}$$

persamaan (1) dapat ditulis: $2x^2 y = 2p^2 + px^3$

$$y = \frac{2p^2 + px^3}{2x^2}$$

$$y = \frac{p^2}{x^2} + \frac{1}{2} px\alpha \tag{2}$$

Persamaan (2) dideferensialkan ke x:

$$p = \frac{1}{x^2}.2p\frac{dp}{dx} - \frac{2p^2}{x^3} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}x\frac{dp}{dx}$$

$$p - \frac{1}{2}p + \frac{2p^2}{x^3} - \left(\frac{2p}{x^2} + \frac{1}{2}x\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}p + \frac{2p^2}{x^3}\right) - \left(\frac{2p}{x^2} + \frac{1}{2x}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{p}{x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{2p}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{2p}{x^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{p}{x} - \frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{2p}{x^2}\right) = 0 \tag{3}$$

Dari persamaan (3) didapat:

I. $\left(\frac{p}{x} - \frac{dp}{dx}\right) = 0$

$$\frac{p}{x} = \frac{dp}{dx} \qquad \text{(a)}$$

II. $\frac{1}{2}x + \frac{2p}{x^2} = 0$ (b)

Maka persamaan (a) menjadi: $p\ dx = x\ dp$

$$x\ dp = p\ dx$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c$$

$$p = cx \qquad \text{(c)}$$

dan persamaan (b) menjadi: $\frac{1}{2}x = -\frac{2p}{x^2}$

$$\frac{1}{2}x^3 = -2p$$

$$p = \frac{-\frac{1}{2}x^3}{2}$$

$$p = -\frac{1}{4}x^3 \qquad \text{(d)}$$

PU: Dari persamaan (2) dan (c) p dapat dieliminer menjadi:

$$y = \frac{c^2x^2}{x^2} + \frac{1}{2}cx.x$$

$$y = c^2 + \frac{1}{2}cx^2$$

PS: Dari persamaan (2) dan (d) p dapat dieliminer menjadi:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{4}x^3\right)^2 + \left(\frac{1}{4}x^3\right)x^3}{2x^2}$$

$$y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{8}x^4$$

$$y = -\frac{x^4}{16}$$

2. Persamaan Diferensial Clairout

Yang dimaksud dengan persamaan diferensial clairut ialah persamaan diferensial yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y = px + f(p) \qquad (1)$$

Cara pemecahan persamaan diferensial clairut dengan:

a. Persamaan (1) dideferensialkan ke x sehingga menghasilkan:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ karena } p = \frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$(x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0$ bisa juga ditulis $\begin{array}{l} x + f'(p) = 0 \\ x = -f'(p) \ldots\ldots (2) \end{array}$ atau

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

$$p = c \ldots\ldots (3)$$

b. Eliminasi p dari (1) dan (2) menghasilkan penyelesaian yang disebut penyelesaian singular yaitu eliminasi p dari: $\begin{cases} y = px + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases}$

c. Eliminasi p dari (1) dan (3) memberikan penyelesaian umum yaitu eliminasi p dari: $\begin{cases} y = px + f(p) \\ p = c \end{cases}$

Pada PD Clairut penyelesaian dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

1) Dari persamaan semula $y = px + f(p)$ atau dapat ditulis dalam bentuk: $\Psi(x, y, p) = 0$, maka penyelesaian singulir diperoleh dengan mengeliminasi p dari : $\begin{cases} \Psi(x, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial p} = 0 \end{cases}$

2) Dari PU: $y = cx + f(c)$ atau kita tulis dalam bentuk: $\Psi(x, y, c) = 0$, maka penyelesaian singulir dapat dicari dengan mengeliminasi c dari:

$$\begin{cases} \Psi(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

3) Jika PU mempunyai suatu penyelubung maka persamaan penyelubung tersebut adalah penyelesaian singulir.

Contoh

Tentukan penyelesaian umum dan penyelesaian singular dari persamaan diferensial berikut: $y = px + p - p^2$

Penyelesaian:

$$y = px + p - p^2 \qquad (1)$$

dimana $p = \frac{dy}{dx}$

Persamaan (1) dideferensialkan ke x, sehingga didapat:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (1-2p)\frac{dp}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx} + (1-2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$(x+1-2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$(x+1-2p) = 0$ atau $\frac{dp}{dx} = 0$

$2p = x+1$ (2) $p = c$ (3)

Eliminasi p dari (1) dan (2) menghasilkan penyelesaian singular yaitu:

$$\begin{cases} y = px + p - p^2 \\ 2p = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = px + p - p^2 \\ p = \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)x + \left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{x^2+x}{2} + \frac{x+1}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$4y = x^2 + 2x + 1$$

jadi PS: $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$

Eliminasi p dari (1) dan (3) menghasikan penyelesaian umum yaitu:

$$\begin{cases} y = px + p - p^2 \\ p = c \end{cases}$$

jadi PU: $y = cx + c - c^2$

Dari PU: $y = cx + c - c^2$, PS dapat dicari dengan cara:

$y = cx + c - c^2$ atau dapat ditulis $\Psi(x, y, c) = 0$

$$\Psi(x, y, c) = y - cx - c + c^2$$

$$y - cx - c + c^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c} = -x - 1 + 2c$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c} = 0 \Rightarrow -x - 1 + 2c = 0$$

$$2c = x + 1$$

$$c = \frac{x+1}{2} \qquad (2)$$

Kemudian eliminasi c dari persamaan (1) dan (2) didapat:

$$y - \left(\frac{x+1}{2}\right)x - \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 0$$

$$y - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$y - \frac{2x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

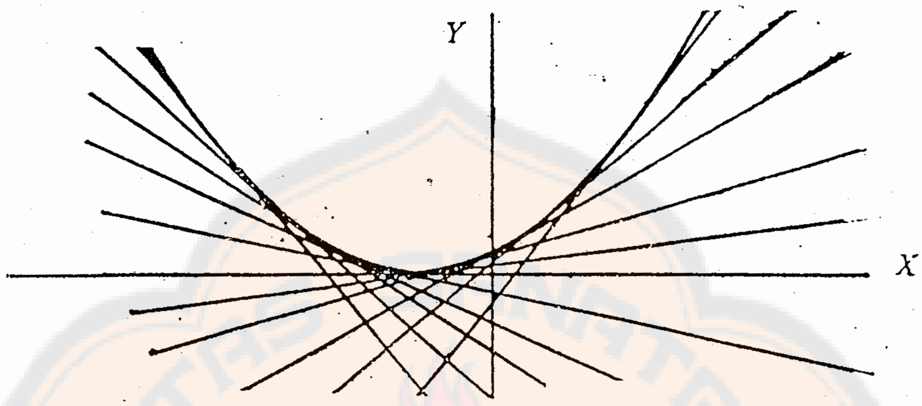
$$y - \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$y = \tfrac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$$

$$y = \tfrac{1}{4}(x+1)^2$$

Jadi PS: $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$

Untuk lebih jelasnya akan disajikan secara geometri.



Gambar 2

Dari gambar 2 di atas dapat dilihat bahwa $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ adalah selubung dari

$y = cx + c - c^2$ (untuk setiap harga c garis lurusnya menyinggung parabola)

B. Persamaan Diferensial Non Linear Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua derajat tinggi bisa disebut persamaan diferensial non linear orde dua, dapat ditulis dalam bentuk:

1. Persamaan diferensial non linear orde dua yang tergantung pada variabel bebas.

   Bentuk umumnya: $f(x, y', y'') = 0$ atau $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ (a)

   Persamaan (a) dapat diselesaiakan dengan mengambil $p = \frac{dy}{dx}$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, sehingga persamaan (a) menjadi $f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$ ini adalah persamaan diferensial tingkat satu dalam x dan p atau persamaan diferensial linear.

Contoh

Tentukan PU dari persamaan diferensial berikut: $xy''-(y')^3-y'=0$

Penyelesaian:

$$xy''-(y')^3-y'=0 \text{ atau } x\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

ambil $p=\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, maka persamaan (1) menjadi:

$$x\frac{dp}{dx}-p^3-p=0 \qquad (2)$$

Dengan pemisahan variabel persamaan (2) menjadi:

$$\frac{dp}{p(p^2+1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{dp}{p}-\frac{pdp}{p^2+1}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{pdp}{p^2+1}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|p|-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)+\ln|c_1|=\ln|x|$$

$$\ln|p|+\ln(p^2+1)^{-½}+\ln|c_1|=\ln|x|$$

$$\ln|p|(p^2+1)^{-½}c_1=\ln|x|$$

$$c_1p(p^2+1)^{-½}=x$$

$$\frac{c_1^2p^2}{(p^2+1)}=x^2$$

$$c_1^2 p^2 = x^2(p^2+1)$$

$$c_1^2 p^2 = x^2 p^2 + x^2$$

$$c_1^2 p^2 - x^2 p^2 = x^2$$

$$(c_1^2 - x^2)p^2 = x^2$$

$$p^2 = \frac{x^2}{c_1^2 - x^2}$$

$$p = \pm\frac{x}{\sqrt{c_1^2 - x^2}} \tag{3}$$

dimana $p = \dfrac{dy}{dx}$

sehingga persamaan (3) menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{\sqrt{c_1^2 - x^2}}$$

$$dy = \pm\frac{xdx}{\sqrt{c_1^2 - x^2}} \tag{4}$$

Persamaan (4) dapat diselesaikan menjadi:

$$\int dy = \int\frac{xdx}{\sqrt{c_1^2 - x^2}} \qquad atau \qquad \int dy = -\int\frac{xdx}{\sqrt{c_1{}^2 - x^2}}$$

$$y = (-\tfrac{1}{2})(c_1{}^2 - x^2)^{½} + c_2 \qquad\qquad y = -[(-\tfrac{1}{2})(c_1{}^2 - x^2)^{½} + c_3]$$

$$y = (\tfrac{1}{2})(c_1{}^2 - x^2)^{½} - c_3$$

Jadi PU dari persamaan (1) adalah:

$$y = [(\tfrac{-1}{2})(c_1^2 - x^2)^{½} + c_2][(\tfrac{1}{2})(c_1{}^2 - x^2)^{½} - c_3]$$

$$y = -\tfrac{1}{4}(c_1{}^2 - x^2) + \tfrac{1}{2}(c_1{}^2 - x^2)^{½}c_2 + \tfrac{1}{2}(c_1{}^2 - x^2)^{½}c_3 - c_2c_3$$

$$y = -\tfrac{1}{4}(c_1{}^2 - x^2) + \tfrac{1}{2}(c_1{}^2 - x^2)^{½}(c_2 + c_3) - c_2c_3$$

2. Persamaan diferensial non linear orde dua yang tidak tergantung pada variabel bebas.

Bentuk umumnya: $f(y, y', y'') = 0$ atau $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ (b)

Persamaan (b) dapat diselesaikan dengan mengambil $\frac{dy}{dx} = p$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, sehingga persamaan (b) menjadi: $f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$ ini merupakan persamaan diferensial orde satu dalam p dan y.

Contoh:

Tentukan PU dari persamaan diferensial berikut: $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx}$

Penyelesaian:

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

Ambil $\frac{dy}{dx} = p$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ (2)

Sehingga persamaan (1) menjadi: $yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p$

$$y\frac{dp}{dy} = p - 1 \qquad (3)$$

dengan pemisahan variabel persamaan (3) menjadi:

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dp}{p-1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p-1) + \ln c_1 = \ln y$$

$$\ln c_1(p-1) = \ln y$$

$c_1(p-1) = y$, dimana $\dfrac{dy}{dx} = p$, sehingga didapat:

$$c_1 \frac{dy}{dx} - c_1 = y$$

$$c_1 \frac{dy}{dx} = c_1 + y \qquad (4)$$

(4) adalah persamaan diferensial linear dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel, sehingga persamaan (4) menjadi:

$$\frac{c_1}{y+c_1} dy = dx$$

$$\int \frac{c_1}{y+c_1} dy = \int dx$$

$$c_1 \ln(y+c_1) = x + c_2$$

$$c_1 \ln(y+c_1) = \ln e^x + \ln c_2$$

$$\ln(y+c_1)^{c_1} = \ln c_2 e^x$$

$$(y+c_1)^{c_1} = c_2 e^x$$

$$y + c_1 = (c_2 e^x)^{1/c_1}$$

$$y = (c_2 e^x)^{1/c_1} - c_1$$

Jadi PU: $y = (c_2 e^x)^{1/c_1} - c_1$

C. Beberapa Contoh Penerapan Persamaan Diferensial Non Linear

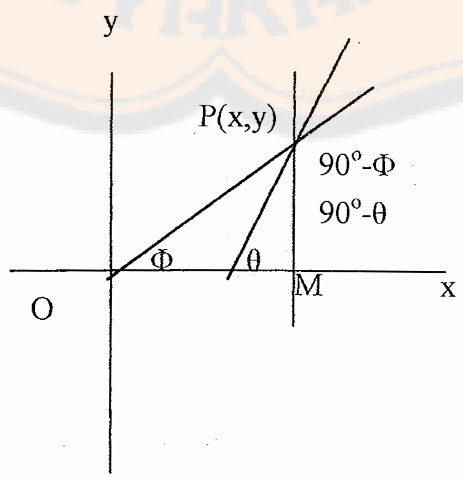
Dalam skripsi ini penulis akan membahas tentang penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dalam bidang geometri, fisika dan kimia. Untuk penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dalam skripsi ini diterapkan dalam bidang geomerti yaitu masalah mencari kurva. Dan untuk penerapan persamaan diferensial non linear orde dua diterapkan dalam bidang fisika dan kimia.

1. Bidang Geometri

Ilustrasi yang pertama ini adalah masalah mencari kurva sedemikian sehingga garis singgung disetiap titiknya (P), membagi dua sudut antara ordinat di P dan garis yang menghubungkan P dengan titik asal. Sudut inklinasi adalah sudut antara garis lurus dengan sumbu x positif, yang artinya dari sumbu x positif bergerak berlawanan arah dengan jarum jam sampai ke garis lurus.

Misalkan θ sudut inklinasi garis singgung dan Φ sudut inklinasi OP. Jika M adalah kaki ordinat yang melalui P, maka:

$sudut\ OPM = 90^o - \Phi = 2(90^o - \theta) = 180^o - 2\theta$



Selanjutnya $\tan(90^o - \Phi) = \cot\Phi = \tan(180^o - 2\theta) = -\tan 2\theta$

sehingga: $\cot\Phi = -\tan 2\theta$

$$1 = \frac{-\tan 2\theta}{\cot\Phi}$$

$$1 = \frac{-\tan 2\theta}{\dfrac{1}{\tan\Phi}}$$

$$1 = -\tan 2\theta \,.\, \tan\Phi$$

$$-1 = \tan 2\theta \,.\, \tan\Phi$$

$$\tan\Phi \,.\, \tan 2\theta = -1$$

$$\tan\Phi \,.\, \tan(\theta + \theta) = -1$$

$$\tan\Phi \,.\, \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta \,.\, \tan\theta} = -1$$

$$\tan\Phi \, \frac{2\tan\theta}{1 - (\tan\theta)^2} = -1 \qquad (1)$$

karena $\tan\Phi = \dfrac{y}{x}$ dan $\tan\theta = y' = p$ maka persamaan diferensial (1) menjadi:

$$\frac{y}{x}\frac{2p}{1 - p^2} = -1 \qquad (2)$$

atau $2y = xp - \dfrac{x}{p}$

Persamaan (2) adalah persamaan diferensial non linear orde satu, sehingga dapat diselesaikan dengan penyelesaian ke y yaitu:

$2y = xp - \dfrac{x}{p}$ diturunkan ke x menjadi:

$$2p = p + x\frac{dp}{dx} - \left(\frac{x\frac{dp}{dx} - p}{p^2} \right)$$

$$p = x\frac{dp}{dx} - \frac{x\frac{dp}{dx}}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$p^3 = xp^2\frac{dp}{dx} - x\frac{dp}{dx} - p$$

$$p^3 + p = x(p^2 - 1)\frac{dp}{dx}$$

$$p(p^2 + 1) = x(p^2 - 1)\frac{dp}{dx}$$

$$p = x\frac{dp}{dx}$$

$pdx = xdp$ dengan pemisahan variabel manjadi:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dp}{p}$$

$$\ln x + \ln c = \ln p$$

$$xc = p$$

$$p = cx$$

Substitusikan p pada persamaan (2) sehingga didapat: $c^2x^2 - 2cy - 1 = 0$

atau dapat ditulis $y = \dfrac{c^2x^2 - 1}{2c}$ (3)

Jadi dari persamaan (3) dapat diketahui bahwa kurva yang dicari berbentuk parabola.

2. Bidang Fisika

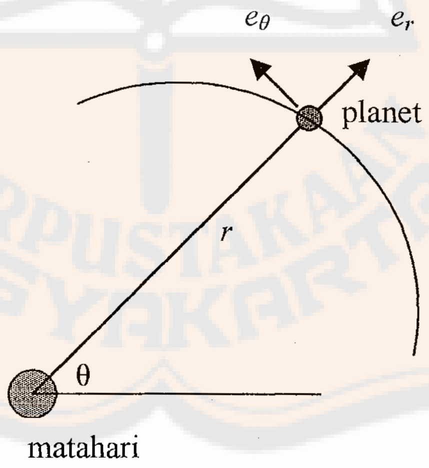
Ilustrasi yang kedua ini adalah masalah bentuk lintasan (gerak) planet. Diduga suatu planet bermasa M bergerak mengelilingi matahari dengan persamaan vektor **r** = **r**(t), dan diasumsikan hukum Newton mengenai gravitasi, persamaan dari gerak planat adalah:

$$M\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\gamma\, M_s M}{r^2}e_r \qquad (1)$$

Disini γ adalah konstanta gravitasi umum, M_s adalah masa matahari dan $\boldsymbol{e_r}$ dalah vektor satuan dari **r**. Dengan $k = \gamma\, M_s$ dan diasumsikan gerak planet dengan koordinat polar (r,θ), persamaan (1) menjadi:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}e_r \qquad (2)$$

dan $\mathbf{r} = r\, e_r$, diilustrasikan pada gambar dibawah ini:



$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}\, e_r + r\,\dot{\theta}\, e_\theta$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = -e_r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{dt} = -e_r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}\, e_r + \dot{r}\, \dot{e}_r + r(\ddot{\theta}\, e_\theta + \dot{\theta}\, \tfrac{de_\theta}{dt}) + \dot{r}\, \dot{\theta}\, e_\theta$$

$$= \ddot{r}\, e_r + \dot{r}\, \dot{\theta}\, e_\theta + r\, \ddot{\theta}\, e_\theta + r\, \dot{\theta}\, \tfrac{de_\theta}{dt} + \dot{r}\, \dot{\theta}\, e_\theta$$

$$= \ddot{r}\, e_r + 2\dot{r}\, \dot{\theta}\, e_\theta + r\, \ddot{\theta}\, e_\theta + r\, \dot{\theta}(-e_r\, \dot{\theta})$$

$$= \ddot{r}\, e_r + 2\dot{r}\, \dot{\theta}\, e_\theta + r\, \ddot{\theta}\, e_\theta - r\, \dot{\theta}^2\, e_r$$

$$= (\ddot{r} - r\, \dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\, \dot{\theta} + r\, \ddot{\theta})e_\theta \qquad (3)$$

persamaan (3) disubstitusikan ke dalam persamaan (2) didapat:

$$(\ddot{r} - r\, \dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\, \dot{\theta} + r\, \ddot{\theta})e_\theta = -(k/_{r^2})e_r \qquad (4)$$

persamaan koefisien dari e_r *dan* e_θ adalah:

$$\ddot{r} - r\, \dot{\theta}^2 = -k/_{r^2} \qquad (5)$$

$$2\dot{r}\, \dot{\theta} + r\, \ddot{\theta} = 0 \qquad (6)$$

persamaan (6) dapat ditulis menjadi: $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\, \dot{\theta}) = 0$

$$\frac{d}{dt}(r^2\, \dot{\theta}) = 0$$

$$\int \frac{d}{dt}(r^2\, \dot{\theta}) = \int 0$$

$$r^2\, \dot{\theta} = h$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \qquad (7)$$

(h adalah momentum sudut persatuan masa matahari).

Dengan mensubstitusi $\dot{\theta}$, persamaan (5) menjadi:

$$\ddot{r} - h^2/r^3 = -k/r^2$$

$$\ddot{r}\,r^3 - h^2 = -kr$$

$$\ddot{r}\,r^3 + kr = h^2 \qquad (8)$$

Sehingga persamaan (8) adalah persamaan diferensial non linear orde dua dari r sebagai fungsi t.

Kita dapat menyelesaikan persamaan (8) dengan mensubstitusi $q = \dfrac{1}{r}$

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{dq}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{r}\right)\Big/\dot{\theta} = -\dot{r}\big/r^2\dot{\theta} = -\dot{r}/h$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2q}{d\theta^2} &= -\frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}(\dot{r})\\ &= -\frac{1}{h}\frac{d}{dt}(\dot{r})\frac{dt}{d\theta}\\ &= -\ddot{r}\big/h\dot{\theta} \quad \text{dimana } \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\\ &= -r^2\ddot{r}\big/h^2\end{aligned}$$

persamaan (8) menjadi: $-\dfrac{\dfrac{d^2q}{d\theta^2}h^2}{r^2}r^3 + kr = h^2$

$$-\frac{d^2q}{d\theta^2}h^2 r + kr = h^2$$

$$-\frac{\dfrac{d^2q}{d\theta^2}h^2}{q} + \frac{k}{q} = h^2$$

$$-\frac{d^2q}{d\theta^2}h^2 + k = h^2 q$$

$$-\frac{d^2q}{d\theta^2}+\frac{k}{h^2}=q$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2}+q=\frac{k}{h^2} \tag{9}$$

Persamaan (9) adalah persamaan diferensial linear orde dua, dengan menggunakan metode persamaan diferensial linear, penyelesaian umumnya $q = A\cos\theta + B\sin\theta$ dan penyelesaian khusus $q = k/h^2$. Dengan B = 0, didapat penyelesaiannya menjadi: $q = k/h^2 + A\cos\theta$ (10)

Karena $q=\frac{1}{r}$, maka $r=\frac{(h^2/k)}{1+(Ah^2/k)\cos\theta}$ (11)

Dengan $(e = Ah^2/k)$ dan $(l = h^2/k)$, persamaan (11) dapat ditulis menjadi: $r=\frac{l}{(1+e\cos\theta)}$

Dimana l adalah *semi-latus rectum* dan e adalah eksentris (jika e>1 adalah hiperbola, e = 1 adalah parabola, $0 \le e < 1$ adalah ellip dan e = 0 adalah lingkaran).Sekarang satu-satunya bentuk tertutup adalah ellip dan planet bergerak menutup lintasannya, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan (11) merupakan perkiraan gerak planet yang membentuk lintasan ellip.

3. Bidang Kimia

Ilustrasi yang ketiga ini masalah kesetimbangan kimia. Reaksi kimia dipengaruhi oleh hukum aksi masa, yang mana kecepatan reaksi (adalah perubahan konsentrasi pereaksi atau hasil reaksi persatuan waktu) sebanding dengan konsentrasi aktif pereaksi. Contoh jika suatu molekul A dan B hubungannya dengan C dapat dibalik, ditulis:

$$A+B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \qquad (1)$$

Dan jika x_1, x_2, x_3 adalah konsentrasi masing-masing dari A, B, C dengan hukum aksi masa didapat: $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{x_3}{x_1 x_2}$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

karena dalam keadaaan setimbang dinamis $k_1 = k_2$, dimana k_1 = kecepatan reaksi ke kanan, k_2 = kecepatan reaksi ke kiri.

Dalam buku prinsip-prinsip keseimbangan halaman 522 disebutkan bahwa "laju reaksi dapat dinyatakan sebagai suatu selisih dari dua suku, satu diantaranya mengandung konsentrasi dari reaktan dan yang lain konsentrasi hasil reaksi".

a. Untuk reaksi ke kanan didapat: $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dx_2}{dt} = k_2 x_3 - k_1 x_1 x_2$ (2)

b. Untuk reaksi ke kiri didapat: $\dfrac{dx_3}{dt} = k_1 x_1 x_2 - k_2 x_3$ (3)

Kita akan mempelajari reaksi kimia sederhana yang sama, dinyatakan dengan: $A+A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} A_2$

Jika x konsentrasi dari A dan y konsentrasi dari A_2 ,sehingga didapat:

$$\frac{dx}{dt} = 2k_2 y - 2k_1 x^2 \qquad (4)$$

$$y = \frac{\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2}{2k_2} \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x^2 - k_2 y \qquad (6)$$

dengan mensubstitusikan y dari persamaan (5) kedalam persamaan (6) sehingga didapat:

$$\frac{1}{2k_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2\right) = k_1 x^2 - k_2\left(\frac{\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2}{2k_2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2\right) = 2k_2 k_1 x^2 - 2k_2^2\left(\frac{\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2}{2k_2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2\right) = 2k_2 k_1 x^2 - k_2\left(\frac{dx}{dt} + 2k_1 x^2\right)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dt}(2k_1 x^2) = 2k_2 k_1 x^2 - k_2\frac{dx}{dt} - 2k_2 k_1 x^2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4k_1 x\frac{dx}{dt} = -k_2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4k_1 x\frac{dx}{dt} + k_2\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}(4k_1x+k_2)=0 \qquad (7)$$

Persamaan (7) adalah persamaan diferensial non linear orde dua dari x sebagai fungsi t. Persamaan (7) dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi $p=\frac{dx}{dt}$, sehingga didapat:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}=p\frac{dp}{dx}$$

persamaan (7) menjadi: $p\frac{dp}{dx}+p(4k_1x+k_2)=0$

$$p\left[\frac{dp}{dx}+(4k_1x+k_2)\right]=0$$

$$\frac{dp}{dx}=-4k_1x-k_2$$

$$\int dp=\int(-4k_1x-k_2)dx$$

$$p=-2k_1x^2-k_2x+c_0$$

karena $p=\frac{dx}{dt}$ maka persamaannya menjadi:

$$\frac{dx}{dt}=-2k_1x^2-k_2x+c_0 \qquad (8)$$

Persamaan (8) merupakan persamaan diferensial linear orde satu, sehingga persamaan (8) dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel didapat:

$$\frac{dx}{2k_1x^2+k_2x-c_0}=-dt$$

$$\int\frac{dx}{2k_1x^2+k_2x-c_0}=-\int dt$$

$$\frac{1}{2k_1}\int\frac{dx}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}=-t+c_1$$

dimana α_1,α_2 adalah akar dari $x^2+(k_2/2k_1)x-(c_0/2k_1)=0$. Sehingga

didapat: $\alpha_1=(-k_2+a)/4k_1, \alpha_2=-(k_2+a)/4k_1$

dimana $a=(k_2{}^2+8c_0k_1)^{½}$

Dengan faktor integral parsial didapat:

$$\frac{1}{2k_1(\alpha_1-\alpha_2)}\int\left[\frac{1}{(x-\alpha_1)}-\frac{1}{(x-\alpha_2)}\right]dx=-t+c_1$$

dengan $\alpha_1-\alpha_2=a/2k_1$,

$$\frac{1}{a}\ln\left(\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}\right)=-t+c_1$$

dan dengan menyusun kembali: $x=\dfrac{(k_2+a)c_2e^{-at}+a-k_2}{4k_1(1-c_2e^{-at})}$ (9)

dimana $c_2=e^{ac_1}$. Dengan mensubstitusi (8) ke (4) didapat:

$$2k_2y=-k_2x+c_0 \tag{10}$$

jika konsentrasi awal x_0, y_0 didapat:

$$c_0=2k_2y_0+k_2x_0 \tag{11}$$

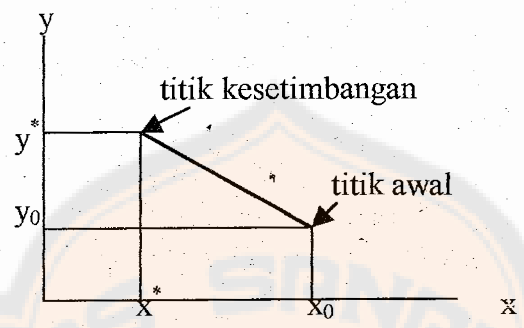
Begitu juga bentuk (8)

$$c_2=\frac{4k_1x_0-a+k_2}{4k_1+a+k_2} \tag{12}$$

Sekarang dapat kita peroleh penyelesaian umum dari *x* dan *y*, tetapi yang lebih penting pendekatan *t*. Bentuk (9), kita lihat itu sebagai $t\to 0$,

$$x\to\frac{a-k_2}{4k_1}=\frac{(k_2{}^2+8c_0k_1)^{½}-k_2}{4k_1}=x^*$$

dan bentuk (10), $$y \rightarrow \frac{k_2 - (k_2^{\ 2} + 8c_0k_1)^{1/2}}{8k_1} + \frac{c_0}{2k_2} = y^*$$



Dengan pertambahan t didapat penyelesaian kesetimbangan, hal ini dapat digambarkan dalam grafik di atas.

BAB IV
PENUTUP

Dalam skripsi ini dibahas tentang cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde satu, dua dan penerapannya dalam bidang geometri, fisika dan kimia.

Persamaan diferensial non linear orde satu dapat diselesaikan dengan 3 cara yaitu: penyelesaian ke p, penyelesaian ke x, dan penyelesaian ke y. Persamaan diferensial non linear yang diselesaikan dengan 3 cara itu bentuk persamaan diferensialnya adalah:

1. Penyelesaian ke p

   Bentuk persamaan diferensialnya:

   $$p^n + F_1(x,y)p^{n-1} + F_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(x,y)p + F_n(x,y) = 0$$

   dimana $p = \dfrac{dy}{dx}$

2. Penyelesaian ke x

   Bentuk persamaan diferensialnya:

   $$F(x,y,p) = 0 \quad dan \quad x = f(y,p)$$

3. Penyelesaian ke y

   Bentuk persamaan diferensialnya:

   $$F(x,y,p) = 0 \quad dan \quad y = f(x,p)$$

Selain 3 cara itu masih ada satu cara lagi yaitu persamaan diferensial Clairut (yaitu persamaan diferensial non linear orde satu), bentuk persamaan diferensialnya: $y = px + f(p)$

Penyelesaian persamaan diferensial Clairut untuk mencari penyelesaian umum dan penyelesaian singular, yang mana penyelesaian umum mempunyai penyelubung dan persamaan penyelubung itu disebut penyelesaian singular.

Persamaan diferensial non linear orde dua dapat ditulis dalam dua bentuk yaitu:

1. Persamaan diferensial non linear orde dua yang tergantung pada variabel bebas.

   Bentuk umumnya: $f(x, y', y'') = 0$ *atau* $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

2. Persamaan diferensial non linear orde dua tidak tergantung pada variabel bebas.

   Bentuk umumnya: $f(y, y', y'') = 0$ *atau* $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

Kedua bentuk persamaan diferensial itu dapat diselesaiakan dengan cara mengubah persamaan diferensial non linear orde dua itu menjadi persamaan diferensial linear.

Penyelesaian persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dengan cara penyelesaian ke p, penyelesaian ke x, penyelesaian ke y dan dan dengan mengubah ke persamaan diferensial linear. Cara penyelesaian itu dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah mencari bentuk kurva, mencari bentuk gerak (lintasan) planet dan kesetimbangan kimia.

Pembahasan tentang persamaan diferensial non linear dalam skripsi ini sebenarnya baru permukaannya saja. Banyak masalah-masalah yang belum dibahas oleh penulis karena keterbatasan pikiran, tenaga, dan waktu yang dimiliki penulis.

Hal-hal yang belum dibahas oleh penulis misalnya saja cara menyelesaikan persamaan diferensial non linear orde tiga dan orde yang lebih tinggi lagi, penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dalam bidang yang lain. Di sini penulis hanya bisa memberikan contoh penerapan persamaan diferensial non linear orde satu dan dua dalam masalah mencari kurva, mencari gerak planet dan masalah kesetimbangan dalam kimia. Oleh karena itu penulis menyarankan agar hal-hal yang telah disebutkan penulis di atas dapat dikaji lebih lanjut, mengingat pentingnya persamaan diferensial non linear dalam menyelesaikan masalah-masalah lain dalam kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Alan Isaacs Bsc, PhD.DIC (1997). *Kamus Lengkap Fisika.* Jakarta: Erlangga.

Burghes, M S Borrie (1981). *Modelling With Differential Equation.* New York: Ellis Horwood.

Frank Ayres JR, Dra.Lily Ratna (1986). *Persamaan Diferensial.* Jakarta: Erlangga.

H.M.Hasym Baisuni (1986). *Kalkulus.* Jakarta : Universitas Indonesia.

Louis A.Pipes, Lowrence R.Harvill (1991).*Matematika Terapan Untuk Insinyur dan Fisikawan.* Edisi ketiga jilid 2 (penterjemah: Drs.Muslim,Ph.D, Drs.Sumartono Prawiro Susanto,M.Sc, Dr. Peter Soedojo,B.Sc). Jakarta: Erlangga.

Pantur Silaban Ph.D, Drs.Erwin Sucipto (1993). *Fisika.* Edisi ketiga jilid 1.(Halliday dan Resnick). Jakarta: Erlangga.

Riogilang,R.H.Drs. (1979). *Persamaan Diferensial.* Bandung: Binacipta.

Siti Soedarini (1993). *Prinsip-Prinsip Kesetimbangan Kimia.* Edisi keempat. Jakarta: Universitas Indonesia.

Tutoyo,A.Drs.M.Sc. (1991). *Persamaan Diferensial.* Yogyakarta: IKIP Sanata Dharma.

Wilfred Kaplan (1958). *Ordinary Differential Equations.* America: Addison-wesley Publishing Company, Inc.