

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**MODEL – MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES BESERTA
BEBERAPA PENGGUNAANNYA**

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh :

V. Eko Wahyuni

NIM : 991414026



PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2005

SKRIPSI

**MODEL – MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES BESERTA
BEBERAPA PENGGUNAANNYA**

Oleh :

Veronika Eko Wahyuni

NIM : 991414026

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Tanggal 22 Desember 2004



(Prof. Dra. Mocharti Hadiwidjaja, M.A.)

SKRIPSI
MODEL – MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES BESERTA
BEBERAPA PENGGUNAANNYA

Dipersiapkan dan ditulis oleh

V. Eko Wahyuni


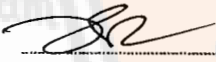
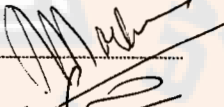


NIM : 991414026

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 11 Januari 2005

Dan dinyatakan memenuhi syarat

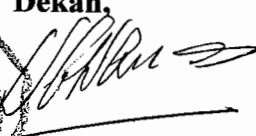
Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT	
Anggota	: 1. Prof. Dra. Mocharti Hw., MA	
	2. Dr. St. Suwarsono	
	3. Drs. Al. Haryono	

Yogyakarta, 11 Januari 2005

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

MOTTO

Percayalah pada Tuhan dan dirimu



Skripsi ini kupersembahkan untuk :

Bapak dan Ibu terkasih

Tuti, Yudi, Aji, dan Fajar

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya tulis.

Yogyakarta, 12 Desember 2004

Penulis



V. Eko Wahyuni



PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Abstrak

Para matematikawan tidak berhasil membuktikan postulat kelima Euclides sehingga muncul geometri non-Euclides. Dengan adanya geometri non-Euclides, maka tulisan ini membahas lebih jauh mengenai model-model geometri non-Euclides dalam bidang Euclides, untuk menunjukkan konsistensinya relatif terhadap geometri Euclides. Metode pembahasan yang digunakan adalah studi pustaka. Yang termasuk dalam geometri non-Euclides adalah geometri Hiperbolik dan geometri Eliptik. Model-model geometri Hiperbolik dalam bidang Euclides yang akan dibahas adalah model konformal dan model proyektif. Bidang dalam geometri Hiperbolik berupa suatu lingkaran tetap yang ditentukan, pada model konformal disebut lingkaran Ω dan pada model proyektif disebut lingkaran ω . Dalam model konformal, titik dalam geometri Hiperbolik berupa sepasang titik invers terhadap lingkaran Ω dan garis berupa lingkaran tegaklurus pada lingkaran Ω . Sedangkan dalam model proyektif, titik-titik dalam geometri Hiperbolik berupa titik-titik dalam lingkaran ω dan garis berupa tali busur lingkaran ω . Dengan model konformal dan model proyektif dapat ditunjukkan bahwa dalam geometri Hiperbolik terdapat dua garis melalui titik A tidak pada garis r yang sejajar dengan garis r dan jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga kurang dari dua sudut siku-siku. Model dari geometri Eliptik yang akan dibahas adalah model dari geometri *Double Elliptic* dan model dari geometri *Single Elliptic*. Model dari geometri *Double Elliptic* berupa bola, titik-titik dalam geometri Eliptik berupa titik-titik pada bidang bola, dan garis berupa lingkaran besar pada bola. Model dari geometri *Single Elliptic* berupa setengah bola, titik-titik dalam geometri Eliptik berupa titik-titik pada bidang setengah bola, dan garis berupa setengah lingkaran besar. Dengan kedua model dari Geometri Eliptik tersebut dapat ditunjukkan bahwa dalam geometri Eliptik tidak terdapat garis-garis sejajar dan jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga lebih dari dua sudut siku-siku.

Abstract

Many mathematicians tried to prove the Euclid's fifth postulate, but did not succeed and resulted in finding non-Euclidean geometries. Non-Euclidean geometries include Hyperbolic and Elliptic geometry. The purpose of this literature study is to understand better the consistency of non-Euclidean geometries, a relative consistency to Euclidean geometry using models. There are two Euclidean models for the Hyperbolic geometry, one is the conformal model and the other is the projective model. The conformal model uses a circle Ω ; each pair of inverse points represents a Hyperbolic point and each circle orthogonal to Ω represents a Hyperbolic line. The projective model uses another circle ω ; each point inside circle ω represents a Hyperbolic point and each chord of circle ω represents a Hyperbolic line. Using these models, it can be shown that through a point A not on a line r can be drawn two parallel lines to r , and also that the angle sum of a triangle is less than two right angles. There are two kinds of Elliptic geometry; the Double Elliptic geometry and the Single Elliptic geometry. The Euclidean model of the Double Elliptic geometry is a sphere; each point on the sphere represents an Elliptic point and a great circle represents an Elliptic line. The Single Elliptic geometry uses a hemisphere as a model; each point on the represents an Elliptic point and each great semicircle represents an Elliptic line. Using these models, it can be shown that there are no parallel lines in Elliptic geometry and also that the angle sum of a triangle is greater than two right angles.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, Yang telah senantiasa melimpahkan berkat-Nya sehingga skripsi dengan judul “Model – Model Geometri Non-Euclides Beserta Beberapa Penggunaannya” ini dapat penulis selesaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat pencapaian gelar Sarjana Pendidikan Matematika pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan banyak penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak, penulis dapat melalui hambatan dan rintangan tersebut. Untuk itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih atas segala dorongan, perhatian, kasih serta dukungan baik moril, materiil maupun spirituil kepada semua pihak antara lain :

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hadiwidjaja, MA., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang dengan tekun, sabar dan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Th. Sugiarto, MT., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika yang telah berkenan memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis selama persiapan ujian skripsi.
3. Bapak Sugeng dan Bapak Sunarjo atas bantuan yang diberikan selama ini, terlebih dalam masalah kesekretariatan.
4. Staff Perpustakaan Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan pelayanan dan fasilitas yang dibutuhkan penulis selama studi.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

5. Bapak/Ibu Dosen di Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis.
6. Kedua orang tuaku dan saudara – saudaraku yang telah memberikan dukungan dan bantuan dalam menyelesaikan studi.
7. Pengurus dan Donatur GOTA paroki St. Mikael Gombong.
8. Pengurus dan anggota Yayasan Seraphin Gombong dan Yogyakarta.
9. Semua rekan – rekan di Universitas Sanata Dharma, khususnya Pendidikan Matematika Angkatan '99 yang selama studi di Universitas Sanata Dharma telah banyak memberi masukan dan pengalaman kepada penulis.
10. Teman – teman di KSR PMI Unit VI Universitas Sanata Dharma yang selama ini telah berbagi waktu dan pengalaman yang sangat berharga dengan penulis.
11. Teman – teman di kos 113A yang telah memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis serta kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan segala kerendahan hati.

Yogyakarta, 21 Desember 2004

Penulis

V. Eko Wahyuni

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR LAMBANG	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Perumusan Masalah	2
C. Tujuan Penulisan	3
D. Manfaat Penulisan	4
E. Metode Pembahasan	4
F. Sistematika Pembahasan	4
BAB II LANDASAN TEORI	7
A. Pengenalan Geometri Hiperbolik	7
B. Pengenalan Geometri Elliptik	38



PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III MODEL – MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES	44
A. Model Konformal	44
B. Model Proyektif	50
C. Model Dari Geometri <i>Double Elliptik</i>	60
BAB IV BEBERAPA PENGGUNAAN MODEL GEOMETRI NON- EUCLIDES UNTUK MEMBUAT LUKISAN	63
A. Lukisan Dua Garis Melalui Satu Titik Sejajar Dengan Suatu Garis Dalam Geometri Hiperbolik	63
B. Lukisan Garis Sejajar Persekutuan Dengan Dua Garis Dalam Geometri Hiperbolik	64
C. Lukisan Garis Tegaklurus Pada Satu Garis Dan Sejajar Dengan Yang Lain Dalam Geometri Hiperbolik	67
D. Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Saccheri Dan Sisiempat Lambert Dalam Geometri Hiperbolik	70
E. Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Saccheri Dan Sisiempat Lambert Dalam Geometri Elliptik	75
BAB V PENUTUP	82
A. Kesimpulan	82
B. Saran	83
DAFTAR PUSTAKA	84

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Lambang

A, B, C, \dots	: titik – titik
a, b, c, \dots	: garis – garis
$[A B C]$: titik – titik A, B, C segaris dan B terletak di antara A dan C
\overline{AB}	: garis yang melalui titik – titik A dan B
\overline{AB}	: segmen AB
A/B	: sinar garis dengan pangkal di titik A dan menjauhi titik B
AB	: panjang \overline{AB}
$\angle ABC$: sudut ABC
$m\angle ABC$: besar sudut ABC
$\triangle ABC$: segitiga ABC
\cong	: kongruen
$\odot(O,R)$: lingkaran dengan pusat di titik O dan jari – jari R
$A(BC)A'$: sektor bola

Daftar Gambar

Gambar	Halaman
2.1 Sinar yang terletak antara dua himpunan.....	8
2.2 \overline{AD} sinar terakhir yang memotong r	9
2.3 p_1 dan q_1 tidak memotong r	11
2.4 Garis – garis PP' dan QQ' dengan garis r	12
2.5 $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ sama besar dan lancip	12
2.6a $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ siku – siku	13
2.6b $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ tumpul	13
2.7 Sinar garis p_1 sejajar dengan sinar garis q	15
2.8 q_1 terletak di antara p_1 dan r_1	16
2.9 r_1 terletak di antara p_1 dan q_1	17
2.10 Segitiga asimtotik ABM	19
2.11 $\triangle ABM \cong \triangle A'B'M'$	20
2.12a Sisiempat Saccheri ABCD dengan alas \overline{AB} dan puncak \overline{CD}	22
2.12b Sisiempat Saccheri ABCD.....	22
2.13 $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ lancip	23
2.14 Sisiempat Saccheri ABGH	25
2.15 Titik – titik M, N, dan P segaris	27
2.16 \overline{AB} , $\overline{A_1B_1}$, dan \overline{MN} sejajar	29
2.17 Garis l dan m ultraparallel	30
2.18. l, m, dan n melalui titik P.....	33

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2.19. l, m, dan n tegaklurus pada \overline{MN}	33
2.20 Segitiga asimtotik LMN	35
2.21 \overline{AB} memotong garis l, m, dan n	36
2.22 Dua garis l dan m tegaklurus pada garis n	39
2.23 Sisiempat Lambert ABCD	43
3.1 ΔABC sebangun dengan ΔACD	45
3.2 Sepasang titik invers A dan A'	45
3.3 Semakin jauh letak titik A dari titik O, A' semakin dekat dengan titik O	46
3.4 Salah satu garis Hiperbolik berupa $\odot(P,PM)$	47
3.5 Garis – garis a dan b berupa $\odot(P_1,P_1M)$ dan $\odot(P_2,P_2N)$ sejajar dengan garis r	48
3.6 $\angle KAL$ adalah sudut antara garis a dan garis b	49
3.7 Garis a dan b sejajar dengan garis r	50
3.8 Bola Σ	51
3.9 Garis \overline{PQ} dalam model Beltrami Klein	53
3.10 \overline{MN} dan \overline{PQ} berpotongan di titik A_2	55
3.11 Garis l tegaklurus pada m.....	57
3.12 Garis l tegaklurus m	57
3.13 Proyeksi suatu bola pada bidang Euclides	59
3.14. l salah satu garis dalam geometri <i>Double Elliptic</i>	60
3.15 Garis r berupa busur ATA'.....	61
4.1 \overline{MN} garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m dalam model konformal ..	65

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

4.2 \overleftrightarrow{MN} garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m dalam model proyektif ...	66
4.3 Garis \overleftrightarrow{LR} tegak lurus pada garis m dan sejajar dengan garis l	68
4.4 Garis \overleftrightarrow{LR} dalam model proyektif	69
4.5 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model konformal	70
4.6 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model proyektif	71
4.7 Sisiempat Lambert ABCD dalam model konformal	73
4.8 Sisiempat Lambert ABCD dalam model proyektif	74
4.9a $CB < CU$	76
4.9b $CB = CU$	76
4.9c $CB > CU$	76
4.10 Jumlah besar sudut segitiga ABC lebih dari 180.....	77
4.11 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model dari geometri Eliptik	79
4.12 Sisiempat Lambert ABCD dalam model dari geometri Eliptik	80

BAB I PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dalam geometri Euclides terdapat lima postulat. Postulat kelimanya menyatakan bahwa jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu apabila diperpanjang tak terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku. Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat kelima ini bukan postulat dan dapat dibuktikan dengan keempat postulat yang lain. Matematikawan yang berusaha membuktikan postulat kelima ini antara lain Proclus dari Aleksandria (410-485), Girolamo Saccheri dari Italia (1607-1733), Karl Frederich Gauss dari Jerman (1777-1855), Wolfgang (1802-1860), dan Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856). Usaha ini tidak berhasil dan mengakibatkan ditemukannya geometri non-Euclides.

Menurut Gödel tidak ada bukti internal untuk konsistensi dari sistem-sistem yang menyangkut himpunan tidak terhingga. Oleh karena itu digunakan suatu model untuk menunjukkan konsistensi geometri non-Euclides. Model ini merupakan model abstrak yaitu model yang menginterpretasikan geometri non-Euclides pada sistem geometri Euclides yang diasumsikan konsisten dan diperoleh konsistensi dari geometri non-Euclides relatif terhadap geometri Euclides.

Geometri non-Euclides klasik terdiri dari geometri Hiperbolik dan geometri Eliptik. Model dari geometri non-Euclides dalam bidang atau ruang Euclides digunakan untuk menunjukkan konsistensi geometri non-Euclides. Model ini digunakan untuk melukiskan garis-garis maupun sisiempat seperti yang terdapat pada teorema – teorema dalam geometri non-Euclides. Apabila garis-garis maupun sisiempat tersebut dapat dilukiskan menggunakan model dalam bidang atau ruang Euclides ini maka geometri non-Euclides konsisten.

Ada dua model dari geometri Hiperbolik dalam bidang Euclides yaitu model konformal yang ditemukan oleh Poincare dan model proyektif yang ditemukan oleh Beltrami-Klein. Model dari geometri Eliptik dalam ruang Euclides adalah bola.

Model dari geometri Hiperbolik akan digunakan untuk melukiskan garis-garis yang istimewa seperti garis yang sejajar dengan suatu garis yang ditentukan dan melalui satu titik di luar garis tersebut, garis sejajar persekutuan dari dua garis yang berpotongan, garis yang tegak lurus pada salah satu dari dua garis yang berpotongan dan sejajar dengan garis yang lain. Model ini juga digunakan untuk melukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert. Model dari geometri Eliptik akan digunakan untuk melukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert.

B. PERUMUSAN MASALAH

Pokok - pokok masalah yang akan ditulis adalah :

1. Bagaimanakah model konformal dan model proyektif dari geometri Hiperbolik?
2. Bagaimanakah model dari geometri Eliptik?
3. Bagaimanakah penggunaan model konformal dan model proyektif dalam melukiskan garis – garis istimewa dalam geometri Hiperbolik?
4. Bagaimanakah penggunaan model konformal dan model proyektif dalam melukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert dalam geometri Hiperbolik?
5. Bagaimanakah penggunaan model dari geometri Eliptik dalam melukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert dalam geometri Eliptik?

C. TUJUAN PENULISAN

Tujuan penulisan ini adalah :

1. Mengetahui dan memahami model konformal dan model proyektif dari geometri Hiperbolik.
2. Mengetahui dan memahami model dari geometri Eliptik.
3. Mengetahui dan memahami lukisan garis – garis istimewa dalam geometri Hiperbolik yang dilukis dengan menggunakan model konformal dan model proyektif dari geometri Hiperbolik.
4. Mengetahui dan memahami lukisan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert dalam geometri Hiperbolik yang dilukis dengan menggunakan model konformal dan model proyektif dari geometri Hiperbolik.

5. Mengetahui dan memahami lukisan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert dalam geometri Eliptik yang dilukis dengan menggunakan model dari geometri Eliptik.

D. MANFAAT PENULISAN

Dengan mengetahui dan memahami model - model Geometri non-Euclides (Geometri Hiperbolik dan Geometri Eliptik) kita dapat mengetahui konsistensi geometri non-Euclides melalui lukisan garis – garis istimewa, sisiempat Saccheri, dan sisiempat Lambert dalam geometri Hiperbolik dan lukisan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert dalam geometri Eliptik.

E. METODE PEMBAHASAN

Metode yang digunakan adalah metode studi pustaka yaitu dengan mempelajari beberapa bagian materi dari buku acuan yang digunakan yang tertera di daftar pustaka.

F. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penulisan ini, diberikan uraian sistematika penulisan, sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini diterangkan mengenai latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan dan manfaat penulisan, metode pembahasan, dan sistematika pembahasan.

BAB II LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas beberapa teori yang dipakai dalam pembahasan bab berikutnya, yaitu : pengenalan geometri Hiperbolik dan pengenalan geometri Eliptik. Pengenalan geometri Hiperbolik berisi tentang postulat kesejajaran Hiperbolik, garis-garis sejajar, sudut kesejajaran, segitiga asimtotik, garis tegaklurus persekutuan, sisiempat saccheri, dan jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga dalam geometri Hiperbolik. Pengenalan geometri Eliptik berisi tentang postulat kesejajaran Eliptik, sifat kutub, jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga, dan sisiempat Lambert dalam geometri Eliptik.

BAB III MODEL - MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES

Bab ini berisi uraian mengenai model-model geometri non-Euclides dalam bidang atau ruang Euclides. Model dari geometri Hiperbolik dalam bidang Euclides yaitu model konformal dan model proyektif. Model dari geometri Eliptik yaitu model dari geometri *Double Elliptic* dan model dari geometri *Single Elliptic*.

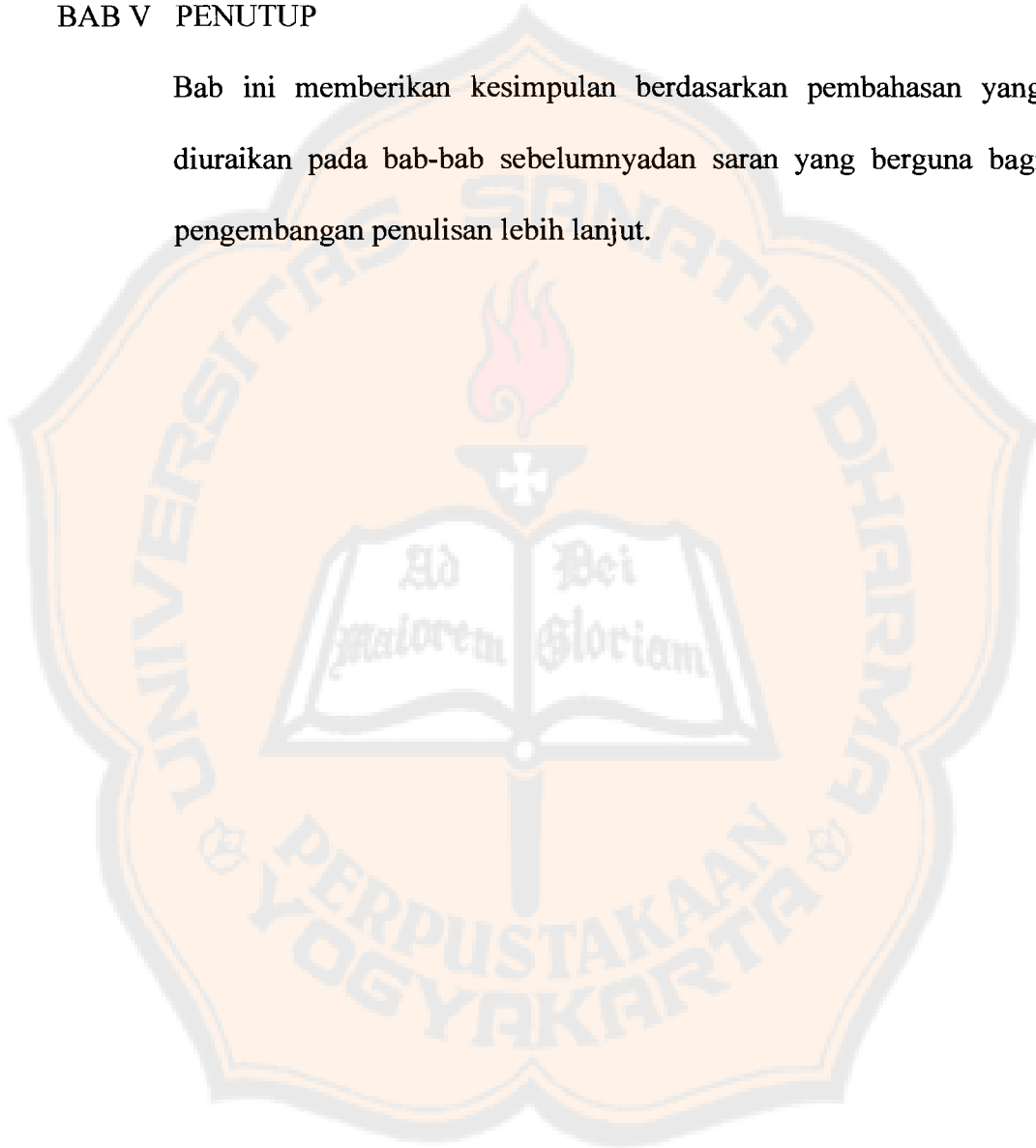
BAB IV BEBERAPA PENGGUNAAN MODEL - MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES UNTUK MEMBUAT LUKISAN

Pada bab ini akan dibahas penggunaan model-model geometri non-Euclides dalam membuat lukisan garis-garis yang melalui suatu titik dan sejajar dengan suatu garis, garis yang tegaklurus pada satu

garis dan sejajar dengan garis yang lain dalam geometri Hiperbolik serta dalam lukisan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert.

BAB V PENUTUP

Bab ini memberikan kesimpulan berdasarkan pembahasan yang diuraikan pada bab-bab sebelumnya dan saran yang berguna bagi pengembangan penulisan lebih lanjut.



BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini terdiri dari dua subbab yaitu pengenalan geometri Hiperbolik dan pengenalan geometri Eliptik. Perbedaan utama antara geometri Hiperbolik dan geometri Eliptik terletak pada postulat kesejajarannya.

A. PENGENALAN GEOMETRI HIPERBOLIK

Geometri Hiperbolik ditemukan oleh Gauss, Bolyai, dan Lobachevsky secara terpisah. Berikut ini postulat kesejajaran dalam geometri Hiperbolik.

Postulat Kesejajaran Hiperbolik

Melalui satu titik di luar garis dapat dibuat lebih dari satu garis yang sejajar dengan garis tersebut.

Aksioma 2.1

Untuk setiap partisi dari semua titik pada suatu garis dalam dua himpunan yang tidak kosong sedemikian hingga tidak ada titik dari masing – masing himpunan yang terletak antara dua titik dari himpunan lainnya maka ada satu titik dari suatu himpunan yang terletak di antara titik-titik himpunan tersebut dan setiap titik dari himpunan lainnya.

Catatan :

Postulat digunakan untuk suatu pernyataan yang diterima tanpa bukti dalam geometri jenis tertentu (misalnya geometri Hiperbolik) sedangkan aksioma digunakan untuk suatu pernyataan dalam geometri pada umumnya.

Aksioma 2.2

Jika A dan B dua titik berlainan, maka ada satu titik C yang memenuhi $[A B C]$.

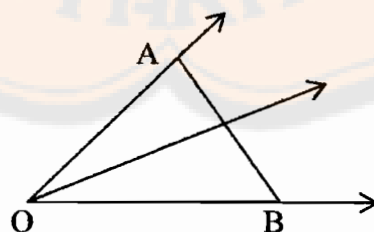
$[A B C]$ menyatakan titik B terletak di antara titik – titik A dan C.

Dalam teorema 2.1 akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu sinar garis yang terletak di antara sinar garis \overrightarrow{OA} dan \overrightarrow{OB} serta antara setiap sinar lainnya dari himpunan itu dan setiap sinar dari himpunan lainnya.

Teorema 2.1

Untuk setiap partisi dari semua sinar dalam suatu sudut dalam dua himpunan yang tidak kosong sedemikian hingga tidak ada sinar dari masing – masing himpunan terletak antara dua sinar dari himpunan lainnya, maka ada suatu sinar dari satu himpunan yang terletak antara setiap sinar lainnya dari himpunan itu dan setiap sinar dari himpunan lainnya.

Bukti :



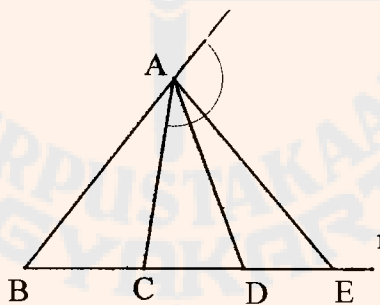
Gambar 2.1 Sinar yang terletak antara dua himpunan

Diketahui $\angle AOB$ dan perpotongan semua sinar oleh garis \overline{AB} . Menurut aksioma 2.1, titik – titik pada \overline{AB} dapat dibagi dalam dua himpunan sedemikian hingga ada satu titik dari satu himpunan yang terletak antara setiap titik dari himpunan itu dan setiap titik dari himpunan lainnya. Sinar melalui O dan titik tersebut memberikan sinar yang dimaksud. ■

Teorema 2.2

Untuk sembarang titik A dan sembarang garis r yang tidak melalui A, ada tepat dua sinar dari A dalam bidang Ar yang tidak memotong r dan yang memisahkan semua sinar dari A yang memotong r dari semua sinar lainnya yang tidak memotong r.

Bukti :



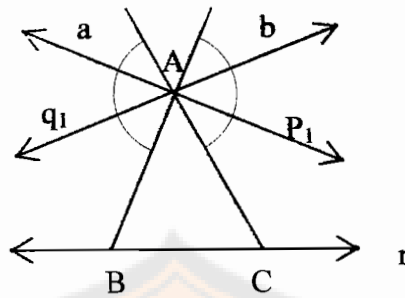
Gambar 2.2 \overline{AD} sinar terakhir yang memotong r

Pada garis r diambil dua titik B dan C dan dipandang sudut antara sinar \overline{AC} dan A/B. Sinar – sinar dalam sudut ini dapat dibagi dalam dua himpunan yaitu himpunan sinar yang memotong C/B dan yang

tidak memotong C/B . Himpunan – himpunan ini tidak kosong. Menurut teorema 2.1 oleh partisi ini ada salah satu sinar dari salah satu himpunan yang terletak antara setiap sinar lainnya dari himpunan itu dan setiap sinar dari himpunan lainnya. Sinar istimewa ini disebut p_1 . Akan dibuktikan bahwa p_1 adalah anggota himpunan sinar yang tidak memotong C/B .

Jika p_1 memotong C/B misalnya di titik D , maka terdapat $[B C D]$. Menurut aksioma 2.2, dapat diambil suatu titik E sedemikian hingga $[C D E]$. Maka sinar \overline{AE} ini akan menjadi anggota himpunan yang tidak memotong, karena p_1 atau sinar \overline{AD} adalah sinar terakhir yang memotong. Sinar \overline{AE} juga anggota himpunan sinar yang memotong C/B . Jadi terdapat kontradiksi dan disimpulkan bahwa p_1 adalah sinar pertama yang tidak memotong sinar C/B dalam sudut antara sinar \overline{AC} dan A/B .

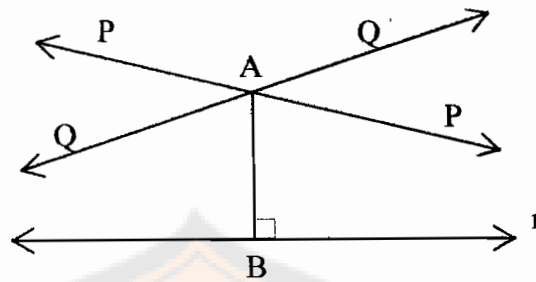
Dengan menukar peranan B dan C yaitu dengan memandang sinar – sinar dalam sudut antara sinar \overline{AB} dan A/C , diperoleh sinar istimewa lainnya q_1 yang dapat dipandang sebagai sinar terakhir yang tidak memotong B/C (untuk rotasi berlawanan arah jarum jam). Jadi, terdapat dua sinar p_1 dan q_1 yang memisahkan semua sinar dari A yang memotong garis r dari semua sinar lainnya dari A yang tidak memotong r . ■



Gambar 2.3 p_1 dan q_1 tidak memotong r

Karena terdapat dua sinar garis yang tidak memotong garis r maka diperoleh dua garis yang tidak memotong garis r . Garis a yang terbentuk oleh sinar p_1 dan sinar yang berlawanan arah dengan p_1 tidak memotong r pada arah kanan. Sedangkan garis b yang terbentuk oleh sinar q_1 dan sinar yang berlawanan arah dengan q_1 tidak memotong r pada arah kiri. Karena sinar garis p_1 dan q_1 merupakan sinar garis pertama dan terakhir yang tidak memotong garis r maka garis a dan garis b dikatakan hampir berpotongan dengan garis r .

Dalam geometri Hiperbolik, garis – garis pertama pada arah berlainan yang melalui satu titik dan tidak memotong suatu garis yang diberikan disebut garis – garis sejajar. Garis a sejajar pada arah kanan dan garis b sejajar pada arah kiri dengan garis r . Dalam gambar 2.4, garis $\overline{P'P}$ dan $\overline{Q'Q}$ berpotongan di titik A dan sejajar dengan garis r . Misalkan terdapat suatu garis tegak lurus pada garis r dan melalui titik A yang memotong r di titik B . $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ disebut sudut kesejajaran untuk jarak AB . Garis – garis yang tidak berpotongan dan tidak sejajar disebut garis – garis ultraparallel.

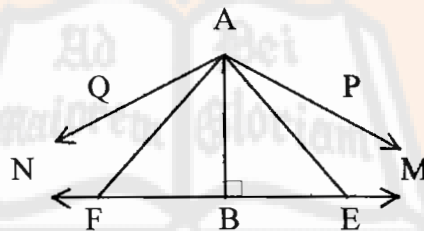


Gambar 2.4 Garis – garis $\overline{P'P}$ dan $\overline{Q'Q}$ sejajar dengan garis r

Teorema 2.3

Dua sudut kesejajaran yang berkorespondensi dengan segmen yang sama adalah kongruen dan lancip.

Bukti :



Gambar 2.5 $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ sama besar dan lancip

Garis r mempunyai titik akhir di titik M dan N, A suatu titik tidak pada garis r. Misalkan $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ seperti dalam gambar 2.5 adalah sudut kesejajaran untuk AB.

Misalkan $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ tidak kongruen, $\angle BAP > \angle BAQ$. Oleh karena itu terdapat suatu sudut, $\angle BAE$ sehingga $m\angle BAE = m\angle BAQ$. \overline{AE} terletak dalam $\angle BAP$. Ditentukan titik F pada \overline{BN} sedemikian hingga $BF = BE$. Karena

$$BF = BE$$

$$m\angle FBA = m\angle EBA$$

$$AB = AB$$

Maka $\triangle BAF \cong \triangle BAE$ (S, Sd, S).

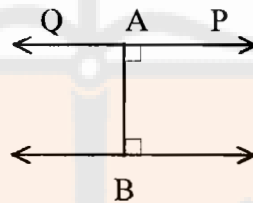
Diperoleh, $m\angle BAF = m\angle BAE$, padahal $m\angle BAE = m\angle BAQ$.

Sehingga $m\angle BAF = m\angle BAQ$. Terdapat kontradiksi karena $m\angle BAF < m\angle BAQ$ dan disimpulkan bahwa $m\angle BAP = m\angle BAQ$.

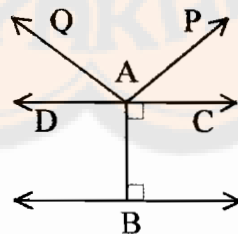
Akan dibuktikan bahwa $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ lancip.

Misalkan $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ siku – siku maka titik – titik A, P, dan Q segaris. Diperoleh hanya satu garis yang sejajar dengan garis r.

Terdapat kontradiksi dengan postulat kesejajaran Hiperbolik dan disimpulkan bahwa $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ tidak siku – siku.



Gambar 2.6a $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ siku – siku



Gambar 2.6b $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ tumpul

Misalkan $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ tumpul. Terdapat suatu sinar garis dalam $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ misalnya \overrightarrow{AC} dan \overrightarrow{AD} sehingga $\angle BAC$ dan $\angle BAD$ siku – siku. Diperoleh garis \overleftrightarrow{DC} . Dengan demikian \overleftrightarrow{AB} tegaklurus pada \overleftrightarrow{DC} dan garis r . Oleh karena itu \overleftrightarrow{DC} ultraparallel dengan garis r . Terdapat kontradiksi karena \overrightarrow{AP} dan \overrightarrow{AQ} adalah sinar garis pertama dan terakhir yang tidak memotong garis r . Jadi, $\angle BAP$ dan $\angle BAQ$ lancip. ■

1. Garis – Garis Sejajar

Menurut Gauss, Bolyai, dan Lobachevsky, dua garis dikatakan sejajar bila keduanya hampir berpotongan. Pada gambar 2.4, \overrightarrow{AP} merupakan sinar garis pertama yang tidak berpotongan dengan garis r . Atau \overrightarrow{AP} hampir berpotongan dengan garis r . Hal ini menyebabkan $\overrightarrow{PP'}$ hampir berpotongan dengan garis r sehingga $\overleftrightarrow{PP'}$ dikatakan sejajar dengan garis r .

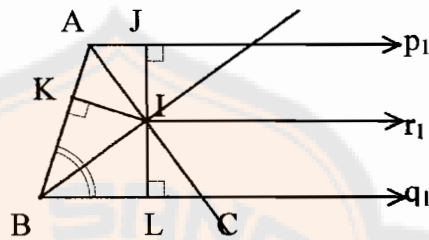
Berikut ini akan dibuktikan beberapa teorema tentang kesejajaran. Notasi p_1 digunakan untuk salah satu sinar garis dari garis p yang terbagi dua oleh suatu titik pada garis tersebut.

Teorema 2.4

Jika p_1 sejajar dengan q_1 maka q_1 sejajar dengan p_1 .

Bukti :

Misalkan sinar garis p_1 sejajar dengan sinar garis q_1 . A adalah suatu titik pada sinar garis p_1 dan B suatu titik pada sinar garis q_1 .



Gambar 2.7 Sinar garis p_1 sejajar dengan sinar garis q_1

Garis bagi sudut A memotong sinar garis q_1 di titik C dan garis bagi sudut B memotong \overline{AC} di titik I. Ditarik segmen garis IJ yang tegaklurus sinar garis p_1 , segmen garis IK yang tegaklurus \overline{AB} , dan segmen garis IL yang tegaklurus pada q_1 . Karena

$$m\angle JAI = m\angle KAI$$

$$m\angle AJI = m\angle AKI$$

$$AI = AI$$

Maka $\triangle AJI \cong \triangle AKI$ (Sd, Sd, S). Diperoleh $IK = IJ$. Karena

$$m\angle IKB = m\angle ILB$$

$$m\angle KBI = m\angle LBI$$

$$BI = BI$$

Maka $\triangle KBI \cong \triangle LBI$ (Sd, Sd, S). Diperoleh $IK = IL$.

Misalkan r_1 adalah garis bagi sudut LIJ maka refleksi sinar garis q_1 terhadap r_1 menukarkan titik L dengan titik J dan sinar garis p_1 dengan sinar garis q_1 , sehingga q_1 sejajar dengan p_1 . ■

Teorema 2.5

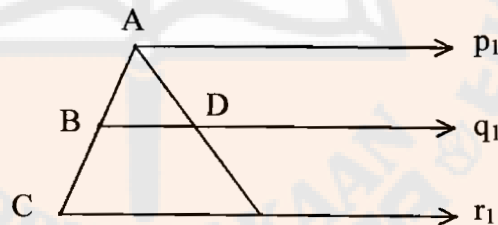
Jika p_1 sejajar dengan q_1 dan q_1 sejajar dengan r_1 maka p_1 sejajar dengan r_1 .

Bukti :

Misalkan p_1 sejajar dengan q_1 dan q_1 sejajar dengan r_1 . Titik pangkal p_1 , q_1 , dan r_1 berturut – turut A, B, dan C yang segaris.

Akan dibuktikan untuk q_1 di antara p_1 dan r_1 dan untuk r_1 di antara p_1 dan q_1 .

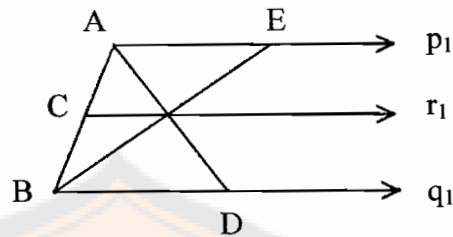
- Untuk q_1 di antara p_1 dan r_1 .



Gambar 2.8 q_1 terletak di antara p_1 dan r_1

Setiap sinar dari A dalam sudut antara \overline{AC} dan p_1 memotong sinar garis q_1 karena p_1 sejajar dengan q_1 . Sinar ini juga memotong r_1 karena q_1 sejajar dengan r_1 . Sehingga setiap sinar dari A dalam sudut antara \overline{AC} dan p_1 memotong r_1 . Maka p_1 sejajar dengan r_1 .

- Untuk r_1 di antara p_1 dan q_1 .



Gambar 2.9 r_1 terletak di antara p_1 dan q_1

Setiap sinar dari A dalam sudut antara \overline{AC} dan p_1 memotong sinar garis q_1 karena p_1 sejajar q_1 . Sinar garis r_1 memotong \overline{AD} karena r_1 memisahkan titik A dan titik D pada \overline{AD} . Sehingga setiap sinar garis dari titik A dalam sudut antara \overline{AC} dan p_1 memotong r_1 maka p_1 sejajar dengan r_1 . ■

Teorema 2.6

Jika suatu sinar r_1 terletak diantara dua sinar sejajar maka ia sejajar dengan keduanya.

Bukti :

Misalkan p_1 dan q_1 dua sinar yang sejajar. r_1 terletak di antara p_1 dan q_1 . Dalam gambar 2.9, titik pangkal p_1 , q_1 , dan r_1 berturut – turut A, B, dan C. Dari pembuktian teorema 2.5 dan teorema 2.4 diperoleh bahwa r_1 sejajar dengan p_1 .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa r_1 juga sejajar dengan q_1 .

Karena p_1 sejajar dengan q_1 maka menurut teorema 2.4, q_1 juga

sejajar dengan p_1 . Oleh karena itu setiap sinar dari titik B dalam sudut antara \overline{BC} dan q_1 akan memotong p_1 . Misalkan titik potongnya adalah titik E. r_1 memisahkan titik B dan E sehingga r_1 memotong \overline{BE} . Jadi, setiap sinar garis dari titik B dalam sudut antara \overline{BC} dan q_1 memotong r_1 sehingga q_1 sejajar dengan r_1 . Menurut teorema 2.4, r_1 juga sejajar dengan q_1 . Jadi r_1 sejajar dengan p_1 dan q_1 . ■

Misalkan sinar garis p_1 mempunyai titik pangkal di titik A. Sinar garis pertama yang melalui titik A dan tidak memotong p_1 adalah p_1 sendiri. Sehingga p_1 sejajar dengan p_1 . Kesejajaran merupakan suatu relasi ekuivalensi karena sifat refleksif, simetrik, dan transitif seperti ditunjukkan dalam teorema 2.4, teorema 2.5, dan teorema 2.6 dipenuhi. Oleh karena itu terdapat himpunan garis – garis yang sejajar dengan suatu sinar garis. Garis – garis sejajar ini melalui satu titik di jauh tak terhingga yang oleh Hilbert disebut titik akhir. Dua sinar garis sejajar dapat juga dikatakan sebagai dua sinar garis yang mempunyai titik akhir persekutuan atau berpotongan di suatu titik akhir.

2. Segitiga Asimtotik

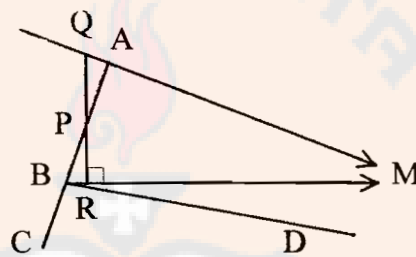
Telah diketahui bahwa sinar – sinar garis sejajar mempunyai titik akhir yang sama. Misalkan \overline{AM} dan \overline{BM} dua sinar garis sejajar

maka bangun ABM disebut segitiga asimtotik. Salah satu sifat segitiga asimtotik ditunjukkan dalam teorema 2.7.

Teorema 2.7

Sudut luar segitiga asimtotik ABM di titik A dan B masing masing lebih besar dari sudut dalam di seberangnya.

Bukti :



Gambar 2.10 Segitiga asimtotik ABM

Diketahui segitiga asimtotik ABM dan titik C pada B/A. Akan dibuktikan bahwa $m\angle CBM > m\angle BAM$.

Ditarik \overline{BD} sehingga $m\angle CBD = m\angle BAM$. Misalkan $m\angle CBD > m\angle CBM$ maka \overline{BD} memotong \overline{AM} dan terbentuk segitiga dengan sudut dalam sama besar dengan sudut luar di hadapannya. Hal ini tidak mungkin. Sehingga disimpulkan $\angle CBD$ tidak lebih besar dari $\angle CBM$.

Misalkan $m\angle CBD = m\angle CBM$. Ditentukan P titik tengah \overline{AB} .

Ditarik \overline{PR} tegak lurus pada \overline{BM} . Ditentukan titik Q pada \overline{AM} berseberangan dengan titik R sedemikian hingga $AQ = BR$.

Ditarik \overline{PQ} . Karena $m\angle CBD = m\angle CBM$ dan $m\angle CBD = m\angle BAM$ maka $m\angle PBR = m\angle PAQ$.

$$BR = AQ$$

$$m\angle PBR = m\angle PAQ$$

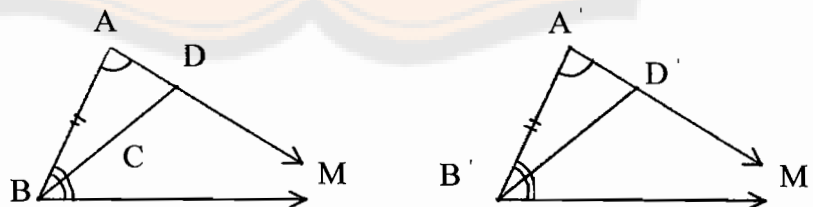
$$BP = AP$$

Maka $\triangle BPR \cong \triangle APQ$ (S, Sd, S). Sehingga titik – titik P, Q, R segaris dan $\angle AQP$ siku – siku. Garis \overline{QR} tegaklurus pada \overline{AM} dan \overline{BM} . Sudut kesejajaran yang berkorespondensi dengan jarak QR adalah sudut siku – siku. Menurut teorema 2.3, hal ini tidak mungkin. Disimpulkan bahwa $\angle CBD$ tidak sama besar dengan $\angle CBM$. Diperoleh, $m\angle CBD < m\angle CBM$. Karena $m\angle CBD = m\angle BAM$ maka $m\angle CBM > m\angle BAM$. ■

Teorema 2.8

Jika $AB = A'B'$ dan $m\angle BAM = m\angle B'A'M'$ maka $m\angle ABM = m\angle A'B'M'$ dan $\triangle ABM \cong \triangle A'B'M'$.

Bukti :



Gambar 2.11. $\triangle ABM \cong \triangle A'B'M'$

Pada ΔABM dan $\Delta A'B'M'$, $AB = A'B'$ dan $m\angle BAM = m\angle B'A'M'$. Akan dibuktikan bahwa $m\angle ABM = m\angle A'B'M'$. Misalkan $m\angle ABM \neq m\angle A'B'M'$, $m\angle ABM > m\angle A'B'M'$. Dibuat $\angle ABC$ dengan $m\angle ABC = m\angle A'B'M'$. \overline{BC} memotong \overline{AM} di titik D. Ditentukan titik D' pada $\overline{A'M'}$ sedemikian hingga $A'D' = AD$, ditarik $\overline{B'D'}$. Karena

$$AB = A'B'$$

$$m\angle BAD = m\angle B'A'D'$$

$$A'D' = AD$$

Maka $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$ (S, Sd, S). Diperoleh, $m\angle ABD = m\angle A'B'D'$. $m\angle ABD = m\angle ABC$ sehingga $m\angle ABC = m\angle A'B'D'$. Padahal $m\angle ABC = m\angle A'B'M'$. Diperoleh, $m\angle A'B'D' = m\angle A'B'M'$. Hal ini tidak mungkin dan disimpulkan bahwa $m\angle ABM = m\angle A'B'M'$ dan $\Delta ABM \cong \Delta A'B'M'$. ■

3. Sisiempat Saccheri

Sisiempat Saccheri dibentuk dengan menggambar segmen garis tegaklurus yang sama panjang pada ujung – ujung suatu segmen garis. Kemudian segmen garis tegaklurus tersebut dihubungkan. Sisiempat Saccheri berupa sisiempat samakaki. Alas sisiempat

Saccheri adalah sisi yang dibatasi oleh kedua sudut siku – sikunya. Sisi di depan sisi alas disebut puncak. Sudut – sudut yang membatasi puncak disebut sebagai sudut puncak. Teorema 2.9 menunjukkan bahwa sudut – sudut puncak tersebut sama besar dan keduanya lancip.

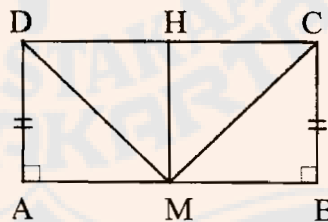


Gambar 2.12a Sisiempat Saccheri ABCD dengan alas \overline{AB} dan puncak \overline{CD}

Teorema 2.9

Garis – garis yang menghubungkan titik tengah alas dan puncak sisiempat Saccheri tegaklurus pada keduanya; sudut puncaknya sama dan lancip.

Bukti :



Gambar 2.12b Sisiempat Saccheri ABCD

Misalkan \overline{AB} merupakan alas sisiempat Saccheri ABCD. M titik tengah \overline{AB} dan H titik tengah \overline{CD} . Akan dibuktikan bahwa $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ sama besar dan keduanya lancip.

Karena M titik tengah \overline{AB} maka $AM = MB$

$$AD = BC$$

$$m\angle MAD = m\angle MBC$$

$$AM = BM$$

Sehingga $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (S, Sd, S). Diperoleh, $m\angle MDA = m\angle MCB$.

Karena H titik tengah \overline{CD} maka $DH = HC$.

$$DM = CM$$

$$HM = HM$$

$$DH = CH$$

Sehingga $\triangle MHD \cong \triangle MHC$ (S, S, S). Diperoleh $m\angle MDH = m\angle MCH$.

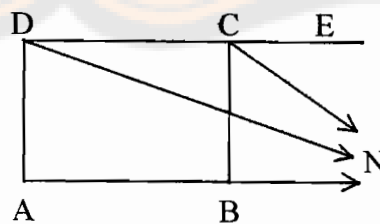
Karena $m\angle MDA = m\angle MCB$ maka

$$m\angle MDA + m\angle MDH = m\angle MCB + m\angle MCH$$

$$m\angle ADH = m\angle BCH$$

Karena $m\angle ADH = m\angle ADC$ dan $m\angle BCH = m\angle BCD$ maka

$$m\angle ADC = m\angle BCD.$$



Gambar 2.13 $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ lancip

Misalkan B/A mempunyai titik akhir di N . Ditarik sinar – sinar garis \overline{DN} dan \overline{CN} yang sejajar dengan B/A dan E suatu titik pada C/D . \overline{DN} berada dalam $\angle ADC$ dan \overline{CN} berada dalam $\angle BCE$ sehingga \overline{AB} tidak berpotongan dengan \overline{DC} . Menurut teorema 2.7, dalam segitiga asimtotik CDN

$$m\angle ECN > m\angle CDN$$

Dalam segitiga asimtotik ADN dan BCN ,

$$\overline{DA} = \overline{CB}$$

$$m\angle DAN = m\angle CBN$$

Menurut teorema 2.8, $\triangle ADN \cong \triangle BCN$.

$$m\angle ADN = m\angle BCN$$

Pada $\triangle DCN$, $m\angle CDN < m\angle ECN$ (teorema 2.7). Karena

$$m\angle ADN = m\angle BCN$$

$$m\angle CDN < m\angle ECN$$

maka

$$m\angle ADC < m\angle BCE$$

$$m\angle BCD < m\angle BCE$$

Sehingga, $\angle BCD$ lancip. Dengan demikian $\angle ADC$ juga lancip.

Jadi, $\angle BCD$ dan $\angle ADC$ sama besar dan keduanya lancip.

Akan dibuktikan bahwa \overline{MH} tegak lurus pada \overline{AB} dan \overline{CD} .

Pada gambar 2.12 $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ dan $\triangle MHD \cong \triangle MHC$

sehingga

$$m\angle AMD + m\angle DMH = m\angle BMC + m\angle CMH$$

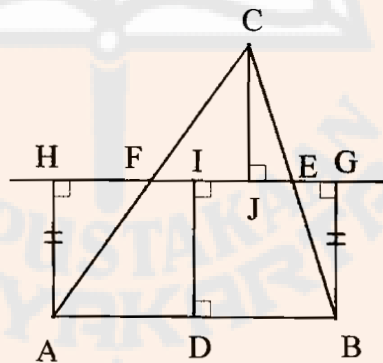
$$m\angle AMH = m\angle BMH$$

Diperoleh $m\angle MHD = m\angle MHC$ dan $m\angle AMH = m\angle BMH$ sehingga $\angle AMH$ dan $\angle DHM$ siku - siku dan disimpulkan \overline{MH} tegak lurus pada \overline{AB} dan \overline{CD} . ■

Lemma 2.1

Jika terdapat suatu garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi suatu segitiga dan ditarik garis tegak lurus pada garis tersebut dari titik – titik ujung sisi yang lain maka terbentuk sisiempat Saccheri.

Bukti :



Gambar 2.14 Sisiempat Saccheri ABGH



Misalkan ABC suatu segitiga dengan D, E, dan F masing – masing titik tengah \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} . Kemudian ditarik garis yang tegak lurus \overline{EF} dari titik A dan B. Kedua garis tegak lurus

tersebut memotong \overline{EF} di titik G dan H. Akan dibuktikan bahwa ABGH suatu sisiempat Saccheri.

Ditarik \overline{CJ} dari titik C tegaklurus pada \overline{EF} . Karena

$$AF = CF$$

$$m\angle AFH = m\angle CFJ$$

$$m\angle AHF = m\angle CJF$$

maka $\triangle AFH \cong \triangle CFJ$ (S, Sd, Sd). Diperoleh, $AH = CJ$. Karena

$$BE = CE$$

$$m\angle BEG = m\angle CEJ$$

$$m\angle BGE = m\angle CJE$$

maka $\triangle BGE \cong \triangle CJE$ (S, Sd, Sd). Diperoleh, $BG = CJ$.

Oleh karena itu $AH = BG$ dan terbentuk sisiempat Saccheri ABGH. ■

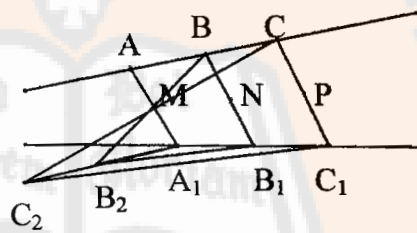
Dari lemma 2.1 dapat disimpulkan bahwa sumbu sisi suatu segitiga tegaklurus pada garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi yang lain. Dalam gambar 2.14, \overline{DI} tegaklurus pada \overline{EF} .

Lemma 2.2

Titik tengah segmen – segmen yang menghubungkan pasangan titik yang berkorespondensi dari dua baris titik yang kongruen terletak pada suatu garis lurus; kecuali jika segmen – segmen itu mempunyai suatu titik tengah persekutuan.

Bukti :

Misalkan A, B, C, \dots dan A_1, B_1, C_1, \dots dua baris titik yang kongruen. Titik – titik A, B, C, \dots segaris, titik – titik A_1, B_1, C_1, \dots segaris, dan $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1$, dan seterusnya. Titik – titik M, N , dan P masing – masing merupakan titik tengah $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, dan $\overline{CC_1}$. Bila M, N , dan P berimpit maka semua segmen mempunyai titik tengah yang sama. Misalkan M, N , dan P tiga titik tengah yang berlainan, ditarik garis \overline{BM} sehingga diperoleh B_2 dengan $MB_2 = MB$.



Gambar 2.15 Titik – titik M, N , dan P segaris

Oleh karena itu B_1 dan B_2 adalah titik – titik yang berlainan. Titik B_2 dihubungkan dengan titik B_1 dan titik A_1 sehingga sumbu $\overline{B_1B_2}$ yang merupakan alas segitiga samakaki $B_2B_1A_1$ juga merupakan sumbu dari alas segitiga B_2B_1B dan menurut lemma 2.1 garis sumbu tersebut tegak lurus \overline{MN} . Kemudian ditarik $\overline{A_1B_2}$ dan ditentukan titik C_2 sehingga $B_2C_2 = BC$. Ditarik $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2M}$, dan \overline{MC} . Karena

$$AM = A_1M$$

$$A_1B_2 = AB$$

$$MB = MB_2$$

maka $\Delta ABM \cong \Delta A_1B_2M$ (S, S, S).

Karena

$$AM = A_1M$$

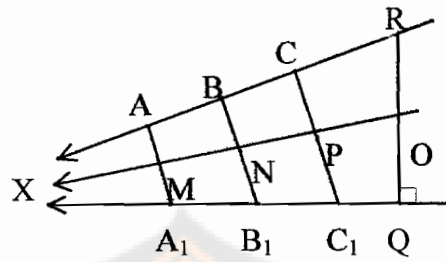
$$m\angle MAC = m\angle MA_1C_2$$

$$AC = A_1C_2$$

maka $\Delta ACM \cong \Delta A_1C_2M$ (S, Sd, S).

Oleh karena itu titik – titik C_2 , M , dan C segaris dan M adalah titik tengah $\overline{CC_2}$. Sumbu $\overline{C_1C_2}$ alas segitiga samakaki $C_2C_1A_1$ juga merupakan alas segitiga C_2C_1C dan menurut lemma 2.1 garis sumbu tersebut tegaklurus \overline{MP} . Karena sumbu alas segitiga samakaki $B_2B_1A_1$ dan $C_2C_1A_1$ merupakan garis yang sama maka \overline{MN} dan \overline{MP} tegaklurus pada garis yang sama dan M , N , P segaris. Jadi, M , N , dan P merupakan tiga titik yang segaris. ■

Bila \overrightarrow{AB} dan $\overrightarrow{A_1B_1}$ pada gambar 2.16 sejajar maka \overrightarrow{MN} akan sejajar dengan \overrightarrow{AB} dan $\overrightarrow{A_1B_1}$. Misalkan sudut kesejajaran untuk garis \overrightarrow{AB} dan $\overrightarrow{A_1B_1}$ adalah $\angle QRX$ dengan X titik akhir \overrightarrow{AB} .



Gambar 2.16 \overline{AB} , $\overline{A_1B_1}$, dan \overline{MN} sejajar

RQX suatu segitiga asimtotik. \overline{MN} terletak di antara \overline{AB} dan $\overline{A_1B_1}$ yang sejajar. Oleh karena itu bila \overline{MN} tidak sejajar dengan \overline{AB} dan $\overline{A_1B_1}$ maka \overline{MN} akan memotong salah satu dari kedua garis sejajar tersebut. Itu berarti \overline{MN} bukan tempat kedudukan titik tengah segmen – segmen garis yang menghubungkan titik – titik dari dua baris titik yang kongruen. Oleh karena itu apabila \overline{AB} dan $\overline{A_1B_1}$ sejajar pastilah \overline{MN} sejajar dengan keduanya.

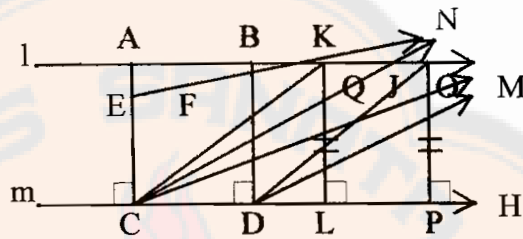
4. Garis Tegaklurus Persekutuan

Dalam geometri Hiperbolik, garis yang tidak sejajar belum tentu berpotongan. Ada kemungkinan garis – garis tersebut ultraparallel yaitu garis tidak berpotongan yang tidak sejajar. Dua garis ultraparallel tegaklurus pada suatu garis yang disebut garis tegaklurus persekutuan.

Teorema 2.10

Dua garis yang ultraparallel mempunyai satu dan hanya satu garis tegak lurus persekutuan.

Bukti :



Gambar 2.17 Garis l dan m ultraparallel

Misalkan l dan m dua garis ultraparallel. Diambil titik A dan B pada garis l dan dibuat garis tegak lurus pada m melalui titik A dan B. Jika $AC = BD$ maka $ABDC$ suatu sisiempat Saccheri dan garis yang menghubungkan titik tengah \overline{AB} dan \overline{CD} merupakan garis tegak lurus persekutuan untuk l dan m. Misalkan $AC \neq BD$, $AC > BD$. Ditarik \overline{CE} dengan $CE = BD$. Dari titik E ditarik \overline{EF} pada pihak \overline{AC} yang terdapat \overline{BD} sedemikian hingga $m\angle CEF = m\angle DBQ$ dengan Q titik pada B/A.

Akan ditunjukkan bahwa \overline{EF} memotong garis l.

Ditarik \overline{CM} dan \overline{DM} yang sejajar dengan B/A. Sinar – sinar garis tersebut terletak dalam $\angle ACH$ dan $\angle BDH$ dengan H pada

D/C. Pada segitiga asimtotik CDM, $m\angle HDM > m\angle HCM$ (teorema 2.7). Dari titik C ditarik garis yang memotong garis l di titik J dan membentuk $\angle HCJ$ dengan $m\angle HCJ = m\angle HDM$. Karena $CE = DB$, $m\angle HCJ = m\angle HDM$ dan \overline{BM} sejajar dengan \overline{DM} maka \overline{EF} juga sejajar dengan \overline{CJ} pada arah N dengan N titik akhir \overline{CJ} .

$$\Delta BDM \cong \Delta ECN$$

Pada ΔACJ , \overline{EF} memotong \overline{AJ} di titik K. Jadi, \overline{EF} memotong garis l. Ditarik \overline{KL} tegaklurus pada garis m. Pada B/A ditentukan titik O sedemikian hingga $BO = EK$. Karena

$$EK = BO$$

$$m\angle CEK = m\angle DBO$$

$$CE = DB$$

Maka $\Delta CEK \cong \Delta DBO$ (S, Sd, S).

Pada D/C ditentukan titik P sehingga $DP = CL$. Ditarik \overline{OP} .

Karena

$$CK = DO$$

$$CL = DP$$

$$m\angle CLK = m\angle DPO$$

maka $\Delta CLK \cong \Delta DPO$ (S, Sd, S). Diperoleh sisiempat CLKE kongruen dengan sisiempat DPOB. Akibatnya \overline{OP} tegaklurus pada garis m dan $OP = KL$. LPOK suatu sisiempat Saccheri dan

garis tegaklurus persekutuan untuk l dan m adalah garis yang menghubungkan titik tengah \overline{KO} dan \overline{LP} .

Akan dibuktikan bahwa hanya terdapat satu garis tegaklurus persekutuan untuk l dan m .

Misalkan ada dua garis tegaklurus persekutuan untuk l dan m maka terdapat sisiempat yang keempat sudutnya berupa sudut siku – siku. Hal ini tidak mungkin. Jadi, hanya terdapat satu garis tegaklurus persekutuan untuk garis l dan m . ■

5. Garis Sumbu Sisi – Sisi Suatu Segitiga

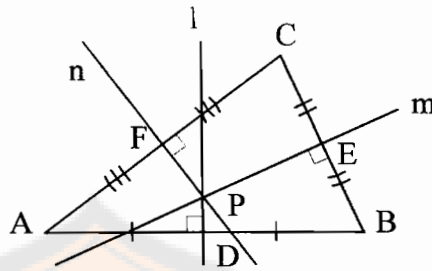
Dalam geometri Hiperbolik, garis – garis sumbu sisi segitiga berpotongan pada satu titik seperti halnya dalam geometri Euclides.

Teorema 2.11

Garis sumbu sisi – sisi suatu segitiga melalui suatu titik yang sama.

Bukti :

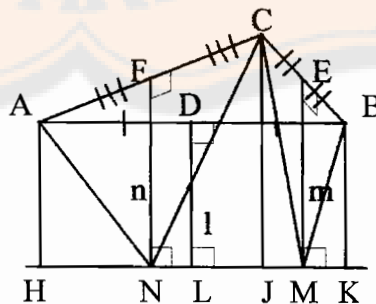
- ◆ Kemungkinan pertama, garis sumbu dari dua sisi segitiga berpotongan pada satu titik biasa. Misalkan ABC suatu segitiga dengan D , E , dan F masing – masing titik tengah \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} . Garis sumbu dari \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} masing – masing l , m , dan n . Misalkan l dan m berpotongan di titik biasa P . Akan dibuktikan bahwa garis n juga melalui titik P .



Gambar 2.18. l , m , dan n melalui titik P

Karena $AD = BD$, $m\angle ADP = m\angle BDP$, dan $DP = DP$ maka $\triangle ADP \cong \triangle BDP$ (S, Sd, S). Diperoleh $PA = PB$. Karena $BE = CE$, $m\angle BEP = m\angle CEP$, dan $EP = EP$ maka $\triangle BEP \cong \triangle CEP$ (S, Sd, S). Diperoleh $PB = PC$. Karena $PA = PB$ dan $PB = PC$ maka $PA = PC$. Oleh karena itu titik P berjarak sama dari titik A dan titik C . Itu berarti bahwa titik P terletak pada garis n . Jadi, garis l , m , dan n melalui titik P .

- ◆ Kemungkinan kedua, garis m dan n tidak berpotongan seperti pada gambar 2.19. \overleftrightarrow{MN} garis tegak lurus persekutuan dari m dan n . Akan dibuktikan bahwa garis l tegak lurus pada \overleftrightarrow{MN} .



Gambar 2.19. l , m , dan n tegak lurus pada \overleftrightarrow{MN}

Misalkan ABC suatu segitiga dengan D, E, dan F titik tengah \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} . Garis sumbu \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} masing – masing adalah l, m, dan n. Ditarik \overline{AH} , \overline{CJ} , \overline{BK} , dan \overline{DL} tegaklurus pada \overline{MN} . Kemudian ditarik \overline{AN} , \overline{CN} , \overline{CM} , dan \overline{BM} . Dalam segitiga NFA dan NFC

$$AF = CF$$

$$m\angle AFN = m\angle CFN$$

$$FN = FN$$

maka $\triangle NFA \cong \triangle NFC$ (S, Sd, S).

Dalam segitiga HNA dan JNC

$$m\angle AHN = m\angle CJN$$

$$AN = CN$$

$$m\angle ANH = m\angle CNJ$$

sehingga $\triangle HNA \cong \triangle JNC$ (Sd, S, Sd). Diperoleh $AH = CJ$.

Dalam segitiga MEC dan MEB

$$CE = BE$$

$$m\angle CEM = m\angle BEM$$

$$EM = EM$$

sehingga $\triangle MEC \cong \triangle MEB$ (S, Sd, S).

Dalam segitiga JMC dan KMC

$$m\angle CJM = m\angle BKM$$

$$CM = BM$$

$$m\angle JMC = m\angle KMB$$

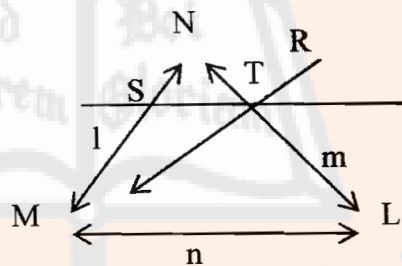
maka $\triangle JMC \cong \triangle KMB$ (Sd, S, Sd). Diperoleh $CJ = BK$.

Jadi, $AH = CJ = BK$. Diperoleh sisiempat Saccheri AHKB

sehingga \overline{DL} tegak lurus pada \overline{MN} . \overline{DL} terletak pada garis l.

Jadi, l, m, dan n tegak lurus pada \overline{MN} dan disimpulkan bahwa garis – garis l, m, dan n berpotongan pada satu titik ultra ideal.

- ◆ Kemungkinan ketiga, garis l dan m sejajar. Akan dibuktikan bahwa garis n sejajar dengan l dan m dengan arah arah yang sama.



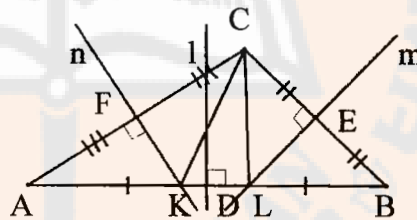
Gambar 2.20 Segitiga asimtotik LMN

Misalkan garis n sejajar dengan garis l dan m pada arah yang berlainan. Garis n sejajar dengan garis l dan berpotongan di titik akhir M. Garis n sejajar dengan garis m dan berpotongan di titik L. Oleh karena itu terbentuk segitiga asimtotik LMN.

Misalkan sebuah garis memotong garis l di titik S dan memotong garis m di titik T. Ditarik \overline{TM} dan ditentukan titik R pada sinar yang berlawanan dengan \overline{TM} . Garis \overline{ST}

terletak dalam dua sudut yang bertolak belakang, $\angle NTM$ dan $\angle RTL$. Akibatnya \overline{ST} tidak memotong garis n . Jadi, garis n sejajar dengan garis l dan m pada arah yang sama. Tetapi paling sedikit ada satu garis yang memotong ketiga garis l , m , dan n .

Misalkan ABC segitiga dengan D , E , dan F berturut – turut merupakan titik tengah \overline{AB} , \overline{BC} , dan \overline{AC} . Besar ketiga sudutnya berbeda dan $\angle C$ merupakan sudut yang paling besar. Dibuat $\angle ACK$ sedemikian hingga $m\angle ACK = m\angle BAC$. Dibuat $\angle BCL$ sedemikian hingga $m\angle BCL = m\angle ABC$. Ditarik garis m dan n sumbu \overline{BC} dan \overline{AC} .



Gambar 2.21 \overline{AB} memotong garis l , m , dan n

Karena

$$m\angle KAF = m\angle KCF$$

$$AF = CF$$

$$m\angle AFK = m\angle CFK$$

maka $\triangle AKF \cong \triangle CKF$ (Sd, S, Sd).

Oleh karena itu $\triangle ACK$ samakaki dan garis n melalui titik K pada \overline{AB} . Karena

$$m\angle LBE = m\angle LCE$$

$$EL = EL$$

$$m\angle BEL = m\angle CEL$$

maka $\triangle BEL \cong \triangle CEL$ (Sd, S, Sd).

Oleh karena itu $\triangle BCL$ samakaki dan garis m melalui titik L pada \overline{AB} . Garis l merupakan garis sumbu \overline{AB} . Sehingga, \overline{AB} memotong ketiga garis l , m , dan n . Jadi, garis l , m , dan n sejajar pada arah yang sama. ■

6. Jumlah Besar Sudut Suatu Segitiga Dalam Geometri Hiperbolik

Dalam geometri Hiperbolik, jumlah besar sudut suatu segitiga kurang dari jumlah besar dua sudut siku – siku.

Teorema 2.12

Jumlah besar sudut – sudut suatu segitiga kurang dari dua sudut siku – siku.

Bukti :

Suatu segitiga tidak mungkin mempunyai dua sudut siku – siku atau dua sudut tumpul. Misalkan ABC suatu segitiga dengan $\angle A$ dan $\angle B$ lancip seperti dalam gambar 2.14. Titik tengah \overline{AC} dan \overline{BC} berturut – turut disebut F dan E . Ditarik

\overline{AH} , \overline{BG} , dan \overline{CJ} tegak lurus garis EF. Terdapat $\triangle AHF$ kongruen dengan $\triangle CJH$ dan $\triangle BGE$ kongruen dengan $\triangle CJE$.

$$AH = CJ = BG$$

ABGH suatu sisiempat Saccheri.

$$m\angle ACB = m\angle FCJ + m\angle JCE = m\angle FAH + m\angle GBE$$

Jumlah sudut – sudut $\triangle ABC$ ialah

$$\begin{aligned} m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle CBA \\ &= m\angle BAF + m\angle FAH + m\angle GBE + m\angle EBA \\ &= m\angle BAH + m\angle ABG \end{aligned}$$

Pada sisiempat Saccheri ABGH, maka $\angle BAH$ dan $\angle ABG$ keduanya lancip. Jadi, jumlah besar sudut – sudut $\triangle ABC$ kurang dari dua sudut siku – siku. ■

B. PENGENALAN GEOMETRI ELLIPTIK

Geometri Eliptik merupakan salah satu geometri non-Euclides yang ditemukan oleh Bernhard Riemann. Ada dua macam geometri Eliptik yaitu geometri *Single Elliptic* dan geometri *Double Elliptic*.

Postulat Kesejajaran Eliptik

Tidak ada garis - garis yang sejajar dengan garis yang lain.

Dari postulat kesejajaran Eliptik diketahui bahwa dalam geometri Eliptik tidak ada garis – garis yang sejajar. Jadi setiap dua garis selalu

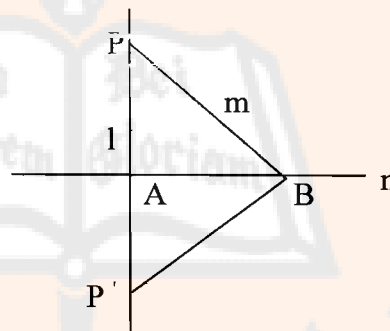
berpotongan. Teorema 2.13 ada dalam geometri Euclides yang digunakan untuk membuktikan adanya dua garis sejajar. Namun teorema tersebut tidak berlaku dalam geometri Elliptik.

Teorema 2.13 (dalam geometri Euclides)

Dua garis yang tegak lurus pada suatu garis adalah sejajar.

Bukti :

Misalkan diketahui dua garis l dan m . Kedua garis tersebut tegak lurus pada garis n . Titik potong garis l dengan garis n adalah titik A dan titik potong garis m dengan garis n adalah titik B .



Gambar 2.22 Misalkan garis l dan garis m tidak sejajar

Misalkan garis l dan garis m tidak sejajar. Maka kedua garis tersebut akan berpotongan, misalnya di titik P seperti pada gambar

2.22. \overline{PA} diperpanjang sehingga diperoleh titik P' dengan $AP' =$

AP . Selanjutnya, ditarik $\overline{BP'}$ sehingga $\triangle ABP \cong \triangle ABP'$.

$$m\angle ABP = m\angle ABP' = 90$$

Sehingga \overrightarrow{BP} berimpit dengan $\overrightarrow{BP'}$. Karena dua titik menentukan satu garis maka garis l dan garis m berimpit. Terdapat kontradiksi dengan pengandaian bahwa garis l dan garis m berlainan. Jadi, garis l dan garis m sejajar. ■

Pada pembuktian teorema 2.13, Euclides menggunakan prinsip pemisahan. Prinsip pemisahan menyatakan bahwa setiap garis membagi bidang dalam dua setengah bidang yang tidak mempunyai titik persekutuan. Sehingga setiap dua garis berpotongan pada satu titik dan setiap garis memisahkan bidang dalam dua daerah.

Dalam geometri Elliptik berlaku postulat kesejajaran yang menyatakan bahwa setiap dua garis selalu berpotongan. Sehingga pembuktian teorema 2.13 dalam geometri Elliptik belum benar karena disimpulkan bahwa garis l dan garis m sejajar. Garis l dan garis m tidak sejajar apabila dua titik tidak menentukan satu garis. Sehingga Garis l dan garis m berlainan dan keduanya berpotongan di titik P dan titik P'.

Jika prinsip pemisahan tidak digunakan maka titik P dan titik P' dapat berimpit. Bila prinsip pemisahan tetap digunakan maka titik P dan titik P' harus berlainan. Dengan demikian terdapat dua kemungkinan, yaitu:

1. Setiap dua garis berpotongan pada satu titik dan tidak ada garis yang memisahkan suatu bidang menjadi dua setengah bidang

(prinsip bahwa dua titik menentukan satu garis tetap digunakan namun prinsip pemisahan tidak digunakan).

2. Setiap dua garis berpotongan pada dua titik dan setiap garis memisahkan bidang dalam dua setengah bidang (prinsip bahwa dua titik menentukan satu garis tidak digunakan namun prinsip pemisahan digunakan).

Kemungkinan pertama menghasilkan geometri *Single Elliptic* dan kemungkinan kedua menghasilkan geometri *Double Elliptic*. Sehingga diperoleh perbedaan mendasar antara geometri *Single Elliptic* dan geometri *Double Elliptic*, yaitu :

Geometri *Single Elliptic*

- Dua garis berpotongan pada satu titik.
- Tidak ada garis yang memisahkan bidang menjadi dua setengah bidang.

Geometri *Double Elliptic*

- Dua garis berpotongan pada dua titik.
- Setiap garis memisahkan bidang menjadi dua setengah bidang.

Dalam geometri Eliptik, garis yang dapat ditarik dari satu titik di luar suatu garis dan tegak lurus garis tersebut banyaknya lebih dari satu garis. Titik potong garis – garis tersebut disebut kutub dari garis tadi.

1. Sifat Kutub

Misalkan terdapat suatu garis l . Maka ada suatu titik K yang disebut kutub dari garis l , sedemikian hingga :

1. Setiap segmen yang menghubungkan titik K dengan suatu titik pada garis l tegak lurus pada garis l .
2. Titik K berjarak sama dari setiap titik pada garis l .

2. Jumlah Besar Sudut Suatu Segitiga dalam Geometri Elliptik

Dalam geometri Elliptik, jumlah besar sudut suatu segitiga lebih dari jumlah besar dua sudut siku – siku.

Teorema 2.14

Jumlah besar sudut – sudut suatu segitiga lebih dari dua sudut siku – siku.

Teorema 2.14 akan dibuktikan pada bab IV subbab E.1.

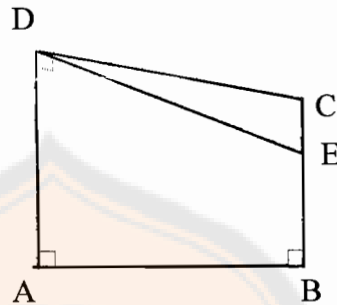
3. Sisiempat Lambert

Sisiempat Lambert berupa sisiempat dengan ketiga sudutnya berupa sudut siku – siku sedangkan sudut keempatnya berupa sudut tumpul.

Teorema 2.15

Dalam sisiempat Lambert, ketiga sudutnya siku – siku sedangkan sudut keempatnya tumpul dan setiap sisi yang menyusun sudut tumpul ini mempunyai panjang kurang dari sisi di hadapannya.

Bukti :



Gambar 2.23 Sisiempat Lambert ABCD

Misalkan ABCD suatu sisiempat Lambert dengan sudut siku – siku di titik A, B, dan D seperti pada gambar 2.23. Akan dibuktikan bahwa $\angle C$ tumpul.

Menurut teorema 2.14, jumlah besar sudut masing – masing $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$ lebih dari dua sudut siku – siku. Oleh karena itu jumlah besar sudut sisiempat ABCD lebih dari 360. Karena $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle D$ siku – siku maka $\angle C$ tumpul.

Akan dibuktikan bahwa $DC < AB$ dan $BC < AD$.

Misalkan $BC = AD$, terbentuk sisiempat Saccheri ABCD. Sehingga $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ sama besar dan keduanya tumpul. $\angle ADC$ siku – siku. Terdapat kontradiksi dan disimpulkan BC tidak sama panjang dengan AD .

Misalkan $BC > AD$. Ditentukan titik E pada \overline{BC} sehingga $BE = AD$ dan $m\angle ADE = m\angle BED$. $\angle ADE$ lancip. Terdapat kontradiksi dan disimpulkan bahwa BC tidak lebih besar dari AD . $BC < AD$. Dengan langkah yang sama diperoleh $DC < AB$. ■

BAB III

MODEL – MODEL GEOMETRI NON-EUCLIDES

Bidang Euclides banyak digunakan untuk melakukan pengukuran – pengukuran dalam berbagai kegiatan. Oleh karena itu tidak sulit membayangkan dan menggambarkan bidang Euclides dalam selembar kertas. Bidang Euclides berupa bidang datar. Pada bab ini, bidang Euclides digunakan untuk menggambarkan bidang dari geometri non-Euclides. Ada dua model yang digunakan yaitu model konformal dan model proyektif untuk menggambarkan bidang dalam geometri Hiperbolik. Sedangkan bidang dalam geometri Eliptik digambarkan dengan model dari geometri *Double Eliptic*.

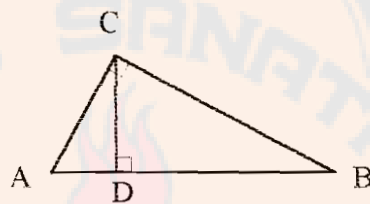
A. MODEL KONFORMAL

Model konformal merupakan salah satu cara yang digunakan untuk menggambarkan bidang Hiperbolik dalam bidang Euclides. Penyajian titik, garis, dan bidang Hiperbolik dalam bidang Euclides adalah sebagai berikut.

- Bidang Hiperbolik berupa suatu bidang lingkaran tetap Ω .
- Titik Hiperbolik berupa sepasang titik invers terhadap Ω .
- Garis Hiperbolik berupa lingkaran yang tegak lurus pada lingkaran tetap Ω .

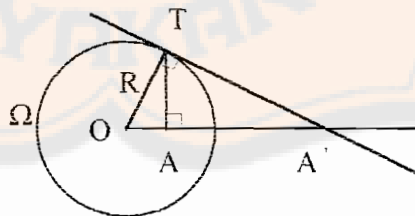
1. Titik Hiperbolik

Sebuah titik Hiperbolik berupa sepasang titik invers terhadap lingkaran Ω . Titik – titik A dan A' disebut sepasang titik invers terhadap lingkaran Ω yaitu $\odot(O,R)$ jika $OA.OA' = R^2$. Misalkan ABC segitiga siku – siku di titik C. Diambil titik D pada \overline{AB} sehingga \overline{CD} tegak lurus \overline{AB} .



Gambar 3.1 ΔABC sebangun dengan ΔACD

Karena ΔABC sebangun dengan ΔACD maka $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ atau $AD.AB = (AC)^2$. Dengan demikian panjang segmen \overline{AD} dikalikan panjang segmen \overline{AB} sama dengan kuadrat panjang sisi miring ΔACD . Hasil tersebut akan dipergunakan untuk menentukan invers titik A. Misalnya diketahui titik A terletak dalam lingkaran Ω . Akan ditentukan A' invers dari titik A.

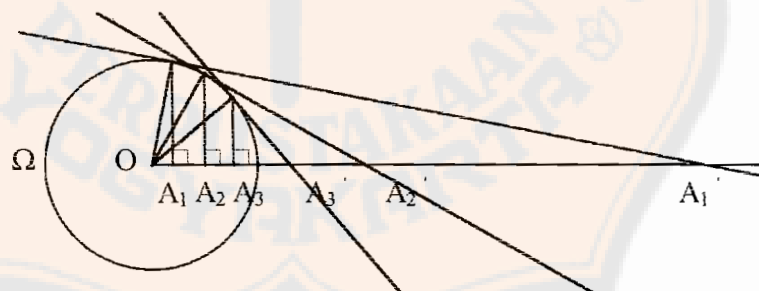


Gambar 3.2 Sepasang titik invers A dan A'

Lukisan :

- 1) Ditarik garis \overline{OA} .
- 2) Ditarik garis melalui titik A tegaklurus pada \overline{OA} dan memotong lingkaran tetap di titik T.
- 3) Ditarik garis singgung pada lingkaran tetap Ω di titik T yang memotong \overline{OA} di titik A'. Diperoleh $OA \cdot OA' = R^2$ dan A' merupakan invers dari titik A terhadap $\odot(O,R)$.

Invers dari titik O tidak dapat ditentukan karena garis tegaklurus pada garis yang melalui titik O tak hingga banyaknya. Untuk titik A tidak sama dengan titik O, semakin jauh letak titik A dari titik O maka letak titik A' semakin dekat dengan titik O. Oleh karena itu titik A yang terletak pada lingkaran tetap Ω mempunyai invers A' berimpit dengan titik A. Titik – titik seperti ini menggambarkan titik – titik di jauh tak terhingga.

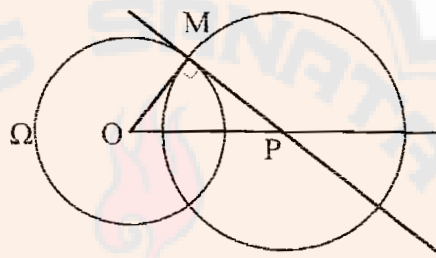


Gambar 3.3 Semakin jauh letak titik A dari titik O,

A' semakin dekat dengan titik O

2. Garis Hiperbolik

Garis Hiperbolik berupa lingkaran yang tegaklurus pada lingkaran tetap Ω . Dalam geometri Euclides, dua lingkaran disebut saling tegaklurus bila garis singgung masing – masing lingkaran di titik potongnya saling tegaklurus. Garis Hiperbolik diperoleh dengan langkah – langkah sebagai berikut.



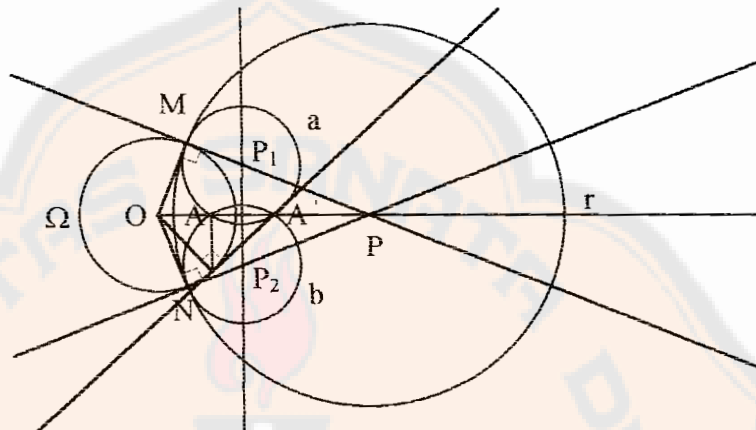
Gambar 3.4 Salah satu garis Hiperbolik berupa $\odot(P,PM)$

Lukisan :

- 1) Pada lingkaran Ω berupa $\odot(O,R)$, diambil titik M, ditarik garis singgung pada $\odot(O,R)$ di titik M.
- 2) Ditarik suatu garis melalui titik O yang memotong garis singgung tadi di titik P.
- 3) Dibuat $\odot(P,PM)$ yang tegaklurus pada lingkaran Ω yang menggambarkan sebuah garis Hiperbolik.

Postulat kesejajaran Hiperbolik menyatakan bahwa melalui titik A di luar garis r dapat ditentukan lebih dari satu garis yang sejajar dengan r. Misalnya terdapat garis r berupa $\odot(P,PM)$ dan titik A tidak

pada r . Garis – garis yang sejajar dengan garis r dan melalui titik A berupa $\odot(P_1, P_1M)$ dan $\odot(P_2, P_2N)$ seperti pada gambar 3.5. Garis – garis yang sejajar dengan garis r tersebut digambarkan dengan langkah – langkah berikut.



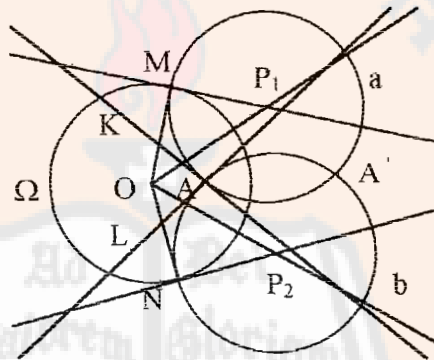
Gambar 3.5 Garis – garis a dan b berupa $\odot(P_1, P_1M)$ dan $\odot(P_2, P_2N)$ sejajar dengan garis r

Lukisan :

- 1) Ditentukan garis r berupa $\odot(P, PM)$ yang tegak lurus pada lingkaran Ω .
- 2) Ditentukan titik Hiperbolik di luar garis r berupa sepasang titik invers A dan A' .
- 3) Dibuat garis a berupa $\odot(P_1, P_1M)$ yaitu lingkaran yang melalui titik – titik A, A' , dan M .
- 4) Dibuat garis b berupa $\odot(P_2, P_2N)$ yaitu lingkaran yang melalui titik – titik A, A' , dan N .

3. Sudut Antara Dua Garis Hiperbolik

Garis Hiperbolik berupa lingkaran, oleh karena itu sudut antara dua garis Hiperbolik diperoleh dengan menentukan sudut antara dua lingkaran. Dalam geometri Euclides, sudut antara dua lingkaran yang berpotongan diperoleh dengan mengukur besarnya sudut antara garis singgung kedua lingkaran di titik potongnya. Besar sudut antara dua garis Hiperbolik yang berpotongan ditentukan dengan langkah – langkah berikut.



Gambar 3.6 $\angle KAL$ adalah sudut antara garis a dan garis b

Lukisan :

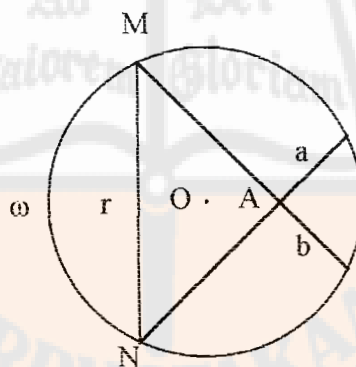
- 1) Ditentukan garis a berupa $\odot(P_1, P_1M)$ yang tegak lurus pada lingkaran Ω .
- 2) Ditentukan garis b berupa $\odot(P_2, P_2N)$ yang tegak lurus pada lingkaran Ω .
- 3) Ditarik garis singgung pada $\odot(P_1, P_1M)$ di titik A yaitu \overrightarrow{KA} .

- 4) Ditarik garis singgung pada $\odot(P_2, P_2N)$ di titik A yaitu \vec{LA} . Besar sudut antara garis a dan garis b sama dengan besar $\angle KAL$.

B. MODEL PROYEKTIF

Model proyektif untuk bidang Hiperbolik dalam bidang Euclides yang akan digunakan adalah model proyektif yang ditemukan oleh Beltrami. Dalam model ini, garis, titik, dan bidang digambarkan dengan cara berikut.

- Bidang Hiperbolik berupa bidang lingkaran tetap ω .
- Titik Hiperbolik berupa titik – titik dalam lingkaran tetap ω .
- Garis Hiperbolik berupa tali busur lingkaran tetap ω .



Gambar 3.7 Garis a dan b sejajar dengan garis r

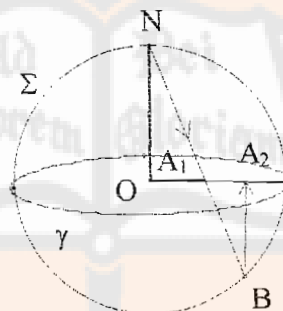
Lukisan :

1. Ditarik garis a berupa tali busur a.
2. Ditarik garis b berupa tali busur b yang memotong a di titik A.
3. Ditarik garis yang sejajar berupa tali busur MN. M dan N titik – titik ideal b dan a.



Garis – garis yang sejajar dengan r dan melalui titik A ditunjukkan dalam gambar 3.7. M dan N titik akhir garis r . Garis a dan garis b sejajar dengan r pada arah yang berbeda. Garis a sejajar dengan garis r pada arah N sedangkan garis b sejajar dengan garis r pada arah M .

Dalam model proyektif, sudut – sudut antara dua garis yang berpotongan berubah. Oleh karena itu penulis merasa perlu untuk membahas model Beltrami-Klein. Model Beltrami-Klein dapat dikatakan sebagai gabungan antara model konformal dan model proyektif karena dalam model ini sebuah titik dan garis dapat dilukiskan dengan model konformal dan model proyektif secara bersamaan. Model ini akan digunakan untuk mengukur besar sudut terutama sudut siku – siku.



Gambar 3.8 Bola Σ

Misalkan suatu bola Σ dalam ruang Euclides dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dan γ bidang ekuator bola Σ dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0$ dan N kutub utara dari bola Σ dengan koordinat $(0,0,1)$. Diketahui titik A_1 terletak pada bidang ekuator γ seperti pada gambar 3.8. Titik A_1 diproyeksikan pada titik B yang terletak pada

setengah bola Σ belahan selatan menggunakan proyeksi stereografik. Kemudian titik B diproyeksikan pada titik A_2 yang terletak pada bidang ekuator γ menggunakan proyeksi orthogonal. Dengan cara yang sama, diameter lingkaran γ diproyeksikan pada dirinya sendiri.

Misalkan koordinat titik A_1 adalah $(x_1, y_1, 0)$ terletak pada lingkaran δ , akan ditentukan koordinat titik B. Karena $N(0,0,1)$ dan $A_1(x_1, y_1, 0)$,

maka $\frac{x-0}{x_1-0} = \frac{y-0}{y_1-0} = \frac{z-1}{0-1}$. Diperoleh $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = -z + 1$.

Misalkan $-z + 1 = \lambda$, maka $x = \lambda x_1$, $y = \lambda y_1$, dan $z = 1 - \lambda$. Persamaan

bola Σ menjadi

$$\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 y_1^2 + (1-\lambda)^2 = 1$$

$$\lambda^2 (x_1^2 + y_1^2 + 1) = 2\lambda$$

Bila $\lambda = 0$, maka diperoleh $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 1$ yaitu koordinat titik N.

Bila $\lambda = \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}$, maka diperoleh

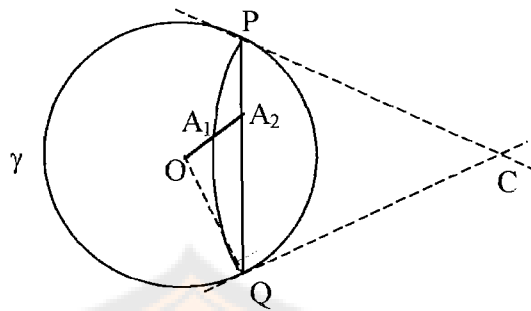
$$x = \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad y = \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad \text{dan}$$

$$z = 1 - \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}.$$

Jadi koordinat titik B adalah $\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} \right)$.

Titik B diproyeksikan orthogonal pada titik A_2 dengan koordinat

$$\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, 0 \right)$$



Gambar 3.9 Garis \overline{PQ} dalam model Beltrami-Klein

Misalkan δ suatu lingkaran tegak lurus pada lingkaran γ di titik P dan Q. Kemudian ditarik tali busur PQ dan C titik pusat lingkaran δ dengan koordinat (a,b). Persamaan lingkaran dengan pusat di titik tengah \overline{OC} adalah

$$(x - 1/2a)^2 + (y - 1/2b)^2 = (1/2a)^2 + (1/2b)^2$$

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0 \quad \dots\dots\dots \text{Persamaan (1)}$$

Karena $x^2 + y^2 = 1$ maka persamaan (1) menjadi

$$ax + by = 1 \quad \dots\dots\dots \text{Persamaan (2)}$$

Persamaan garis kutub dari P terhadap lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1$ ditunjukkan oleh persamaan (2). Karena lingkaran δ tegak lurus pada lingkaran γ maka $\angle OQC$ siku – siku dan dengan teorema Phitagoras diperoleh

$$(CQ)^2 = (CO)^2 - (OQ)^2$$

$$= (a^2 + b^2) - 1$$

yaitu kuadrat panjang jari – jari lingkaran δ sehingga persamaan lingkaran δ menjadi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$$

atau

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by - 1$$

Misalkan terdapat titik $A_1(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran δ dan

$A_2(x_1', y_1')$ maka

$$x_1' = \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad y_1' = \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}$$

atau

$$x_1' = \frac{x_1}{ax_1 + by_1}, \quad y_1' = \frac{y_1}{ax_1 + by_1}$$

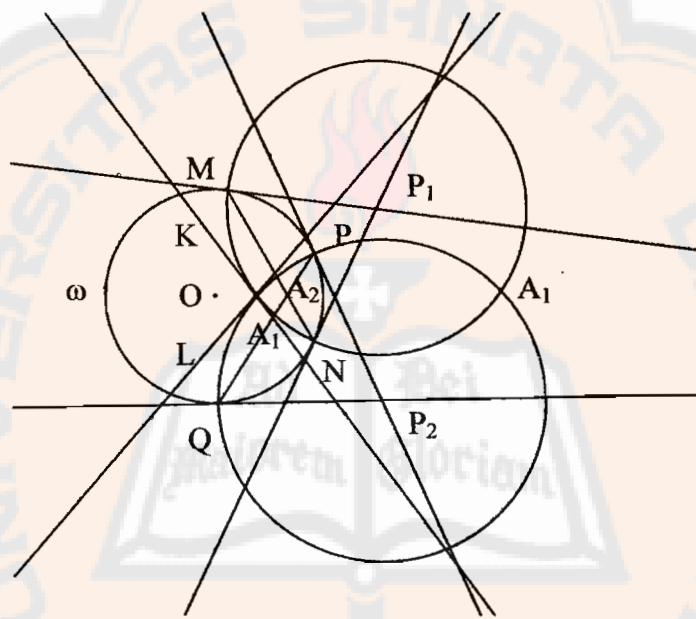
Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} & a x_1' + b y_1' \\ &= \frac{ax_1}{ax_1 + by_1} + \frac{by_1}{ax_1 + by_1} \\ &= \frac{ax_1 + by_1}{ax_1 + by_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian titik A_2 terletak pada garis kutub dari P terhadap δ . ■

Kutub garis \overline{PQ} terletak pada titik potong garis singgung lingkaran γ di P dan Q . Misalkan C kutub garis \overline{PQ} . Suatu garis dalam model proyektif dapat dilukiskan dalam model konformal dengan membuat lingkaran dengan pusat di kutub garis tersebut dan melalui titik – titik akhirnya. Sebaliknya, suatu garis dalam model konformal dapat dilukiskan

dalam model proyektif dengan menarik segmen garis yang menghubungkan kedua titik akhirnya. Karena garis – garis dalam model proyektif dapat dilukiskan kembali dalam model konformal maka besar sudut antara dua garis yang berpotongan dapat diukur. Besar sudut antara dua garis dalam model proyektif sama dengan besar sudut antara dua lingkaran yang menggambarkan garis tadi dalam model konformal.



Gambar 3.10 \overline{MN} dan \overline{PQ} berpotongan di titik A_2

Lukisan :

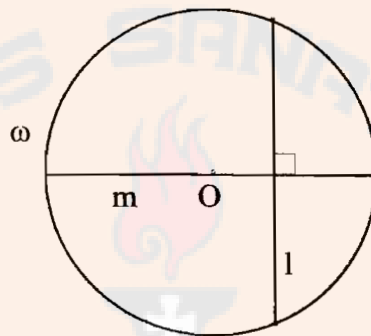
1. Ditentukan tali busur \overline{MN} yang menggambarkan garis \overline{MN} .
2. Ditentukan tali busur \overline{PQ} yang menggambarkan garis \overline{PQ} . \overline{MN} dan \overline{PQ} berpotongan di titik A_2 .
3. Ditarik garis singgung pada lingkaran ω di titik M dan N yang berpotongan di titik P_1 .

4. Dibuat $\odot(P_1, P_1M)$.
5. Ditarik garis singgung pada lingkaran ω di titik P dan Q yang berpotongan di titik P_2 .
6. Dibuat $\odot(P_2, P_2P)$ yang memotong $\odot(P_1, P_1M)$ di A_1 dan A_1' .
7. Ditarik garis singgung pada $\odot(P_1, P_1M)$ di titik A_1 . Titik K terletak pada garis singgung tersebut.
8. Ditarik garis singgung pada $\odot(P_2, P_2P)$ di titik A_1 . Titik L terletak pada garis singgung tersebut. Salah satu sudut yang terbentuk antara garis \overline{MN} dan \overline{PQ} besarnya sama dengan besar $\angle KA_1L$.

Misalkan \overline{MN} dan \overline{PQ} berpotongan di titik A. Dalam model proyektif, garis \overline{MN} dan \overline{PQ} berupa \overline{MN} dan \overline{PQ} dan titik A berupa titik A_2 . Dalam model konformal, garis \overline{MN} dan \overline{PQ} berupa $\odot(P_1, P_1M)$ dan $\odot(P_2, P_2P)$ dan titik A berupa sepasang titik Invers A_1 dan A_1' . Salah satu sudut yang terbentuk antara garis \overline{MN} dan \overline{PQ} besarnya sama dengan besar $\angle KA_1L$ dengan K pada garis singgung $\odot(P_1, P_1M)$ dan L pada garis singgung $\odot(P_2, P_2P)$.

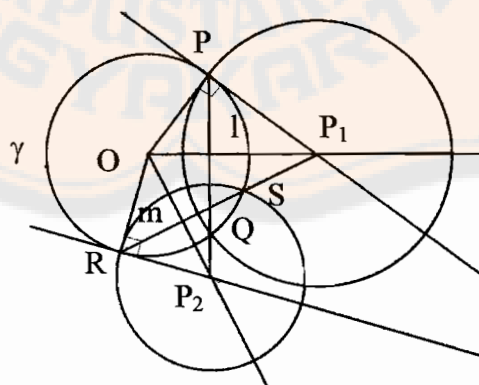
Selanjutnya akan dilukiskan dua garis yang saling tegak lurus, misalnya kedua garis tersebut adalah garis l dan m. Ada tiga kemungkinan lukisan garis l dan m.

- ◆ Kemungkinan pertama, l dan m berupa diameter lingkaran tetap ω .
 Dalam kejadian ini, garis l dan m dilukiskan tegaklurus sama seperti dalam geometri Euclides.
- ◆ Kemungkinan kedua, hanya m yang berupa diameter. Maka garis l berupa tali busur lingkaran tetap ω yang tegaklurus garis diameter m .



Gambar 3.11 Garis l tegaklurus pada m

- ◆ Kemungkinan ketiga, l dan m bukan diameter. l dan m tegaklurus jika l dan m digambarkan oleh dua lingkaran yang berpotongan tegaklurus. Misalkan P dan Q titik akhir garis m serta R dan S titik akhir garis l . Garis l berupa $\odot(P_1, P_1P)$ dan garis m berupa $\odot(P_2, P_2R)$.



Gambar 3.12 Garis l tegaklurus m

Lukisan :

1. Ditentukan garis l berupa tali busur l dengan titik ideal di P dan Q .
2. Dicari titik kutub \overline{PQ} yaitu titik P_1 .
3. Dibuat $\odot(P_1, P_1P)$.
4. Ditarik garis singgung lingkaran γ di titik R yang memotong \overline{PQ} di titik P_2 .
5. Dibuat $\odot(P_2, P_2R)$ yang memotong lingkaran γ di titik R dan S .
6. Ditarik tali busur \overline{RS} yang menggambarkan garis m tegak lurus garis l .

Dari pembahasan mengenai model konformal dan model proyektif disimpulkan adanya persamaan dan perbedaan kedua model tersebut.

Persamaan model konformal dan model proyektif

- Bidang Hiperbolik berupa bidang lingkaran.
- Titik akhir suatu garis berupa titik pada lingkaran tetap Ω atau ω .
- Dua garis sejajar digambarkan berpotongan pada lingkaran tetap Ω atau ω .

Perbedaan model konformal dan model proyektif

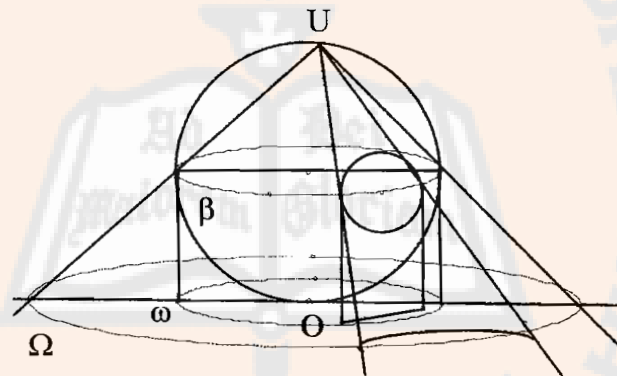
- Model konformal :
 - ❖ Titik berupa sepasang titik invers terhadap lingkaran tetap Ω .

- ❖ Garis berupa lingkaran yang tegak lurus pada lingkaran tetap Ω .

➤ Model proyektif

- ❖ Titik berupa titik dalam lingkaran tetap ω .
- ❖ Garis berupa tali busur lingkaran tetap ω .

Hubungan antara model konformal dan model proyektif tampak jelas dalam proyeksi suatu bola pada bidang Euclides. Bola tersebut mempunyai jari – jari sama dengan jari – jari lingkaran ω dan menyinggung bidang Euclides di titik O.



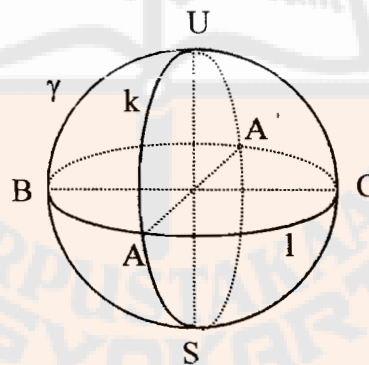
Gambar 3.13 Proyeksi suatu bola pada bidang Euclides

Bidang bola diproyeksikan pada bidang Euclides menggunakan proyeksi orthogonal sehingga diperoleh lingkaran ω yang sama besar dengan lingkaran ekuator β . Sedangkan proyeksi stereografik bidang bola pada bidang Euclides menghasilkan lingkaran Ω .

Proyeksi lingkaran yang tegak lurus pada ekuator β berupa lingkaran yang tegak lurus pada lingkaran Ω terletak pada bidang Euclides. Titik – titik pada setengah bola di bawah lingkaran ekuator β di proyeksikan pada titik – titik dalam bidang lingkaran Ω . Sedangkan titik – titik pada setengah bola di atas lingkaran ekuator β di proyeksikan pada titik – titik di luar bidang lingkaran Ω .

C. MODEL DARI GEOMETRI *DOUBLE ELLIPTIC*

Model dari geometri *Double Elliptic* dalam ruang Euclides berupa bola. Titik dalam geometri *Double Elliptic* berupa titik pada bola dan garis berupa lingkaran besar bola. Lingkaran besar bola merupakan lingkaran pada bola dengan titik pusat bola sebagai titik pusat lingkaran.



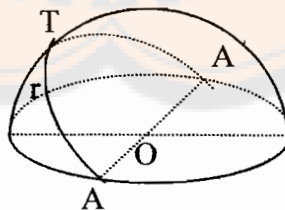
Gambar 3.14. 1 salah satu garis dalam model dari geometri *Double Elliptic*

Diambil satu garis pada bidang bola γ , misalnya garis l . Garis – garis yang tegak lurus garis l berpotongan pada titik U dan titik S . Titik U

dan titik S disebut kutub dari garis l. Panjang setiap garis Elliptik sama dan konstan karena bidang Elliptik berupa bola. Masing – masing garis tersebut membagi bidang Elliptik menjadi dua setengah bidang sehingga setiap dua garis saling berpotongan pada dua titik.

Garis Elliptik berupa lingkaran besar bola dalam ruang Euclides. Oleh karena itu sudut antara dua garis yang berpotongan ditentukan dengan mengukur sudut antara dua lingkaran yang berpotongan. Misalkan garis k dan garis l berpotongan di titik A dan A' seperti dalam gambar 3.14. Sudut antara garis k dan garis l sama dengan sudut antara bidang yang melalui lingkaran AUA'S dan bidang yang melalui lingkaran BACA'.

Selain model dari geometri *Double Elliptic*, bidang dalam geometri Elliptik juga dapat digambarkan dengan model dari geometri *Single Elliptic*. Apabila setiap dua titik yang diametrial dipandang sebagai satu titik maka akan diperoleh model dari geometri *Single Elliptic* dalam ruang Euclides berupa setengah bola. Dalam model ini, titik – titik Elliptik digambarkan oleh titik – titik pada bidang setengah bola dan garis Elliptik digambarkan oleh busur lingkaran besar pada bidang setengah bola.



Gambar 3.15 Garis r berupa busur ATA'

Garis – garis Elliptik selalu tertutup sehingga titik A diidentikkan dengan titik A' dengan A' titik yang diametrial dengan titik A. Garis – garis tidak memisahkan bidang Elliptik menjadi dua setengah bidang sehingga setiap dua garis berpotongan pada satu titik.

Dari pembahasan mengenai model geometri *Double Elliptic* dan model dari geometri *Single Elliptic* diperoleh persamaan dan perbedaan kedua model geometri Elliptik tersebut.

Persamaan

- Setiap garis memiliki kutub.
- Panjang garis – garis Elliptik sama dan konstan.

Perbedaan

- Model dari geometri *Double Elliptic*:
 - ❖ Bidang Elliptik berupa bidang bola.
 - ❖ Garis Elliptik berupa lingkaran besar bola.
 - ❖ Prinsip pemisahan digunakan.
 - ❖ Setiap dua garis berpotongan pada dua titik.
- Model dari geometri *Single Elliptic*:
 - ❖ Bidang Elliptik berupa bidang setengah bola.
 - ❖ Garis Elliptik berupa busur lingkaran besar bola.
 - ❖ Prinsip pemisahan tidak digunakan.
 - ❖ Setiap dua garis berpotongan pada satu titik.

BAB IV

**BEBERAPA PENGGUNAAN MODEL – MODEL
GEOMETRI NON-EUCLIDES UNTUK MEMBUAT LUKISAN**

Dalam bab ini akan dibicarakan beberapa penggunaan model – model geometri non-Euclides yaitu untuk menggambarkan adanya garis – garis yang melalui satu titik di luar garis r dan sejajar dengan garis r , suatu garis yang sejajar dengan dua garis berpotongan, suatu garis yang tegak lurus pada salah satu dari dua garis berpotongan dan sejajar dengan garis yang lain, sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert.

**A. LUKISAN DUA GARIS MELALUI SATU TITIK SEJAJAR
DENGAN SUATU GARIS DALAM GEOMETRI HIPERBOLIK**

Postulat kesejajaran Hiperbolik menyatakan bahwa melalui satu titik A di luar garis r terdapat lebih dari satu garis melalui A yang sejajar dengan garis r . Garis – garis sejajar tersebut akan digambarkan dalam model konformal dan model proyektif.

A.1. Dalam Model Konformal

Garis r berupa lingkaran yang tegak lurus lingkaran Ω dan titik A berupa sepasang titik invers A dan A' . Misalkan titik M dan N merupakan titik akhir garis r . Garis – garis yang melalui titik A

dan sejajar dengan garis r berupa lingkaran yang tegak lurus pada lingkaran Ω dan melalui titik A dan A' . Salah satu lingkaran juga melalui titik M dan lingkaran yang lain melalui titik N seperti dalam gambar 3.5.

A.2. Dalam Model Proyektif

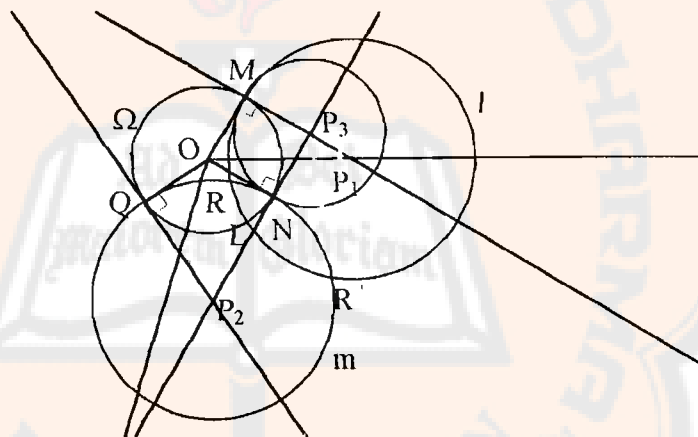
Garis r berupa tali busur lingkaran ω dan titik A berupa titik dalam lingkaran ω . Misalkan titik M dan N merupakan titik akhir garis r . Garis – garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis r berupa tali busur lingkaran ω dan melalui titik A . Salah satu tali busur tersebut juga melalui titik M dan tali busur yang lain melalui titik N seperti dalam gambar 3.7.

B. LUKISAN GARIS SEJAJAR PESEKUTUAN DENGAN DUA GARIS DALAM GEOMETRI HIPERBOLIK

Pada subbab sebelumnya telah dilukis garis – garis yang sejajar dengan suatu garis yang diketahui dan melalui satu titik di luar garis tersebut. Pada subbab ini akan dibuat lukisan sebaliknya. Diketahui dua garis yang melalui satu titik kemudian akan dilukis suatu garis yang sejajar dengan kedua garis tersebut.

B.1. Dalam Model Konformal

Garis l dan garis m berupa lingkaran tegaklurus pada lingkaran Ω . Lingkaran yang menggambarkan garis l memotong lingkaran Ω di titik titik L dan M adalah titik - titik akhir garis l . Lingkaran yang menggambarkan garis m memotong lingkaran Ω di titik titik N dan Q adalah titik akhir - titik garis m . Kedua lingkaran yang menggambarkan garis l dan garis m berpotongan di titik R dan R' . Akan dilukiskan garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m berupa lingkaran yang tegaklurus pada lingkaran Ω dan melalui titik M dan N .



Gambar 4.1 \overline{MN} garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m dalam model konformal

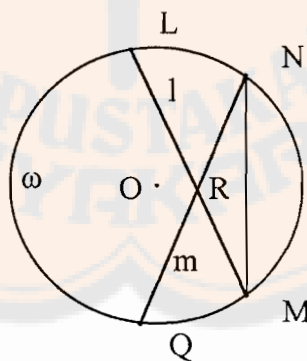
Lukisan :

- a. Ditentukan garis l berupa $\odot(P_1, P_1M)$ tegaklurus pada lingkaran Ω .
- b. Ditentukan garis m berupa $\odot(P_2, P_2N)$ tegaklurus pada lingkaran Ω .

- c. Ditarik garis singgung lingkaran Ω di titik M dan N. Kedua garis singgung tersebut berpotongan di titik P_3 .
- d. Dibuat $\odot(P_3, P_3Q)$ menggambarkan \overline{MN} yang sejajar dengan garis l dan m.

B.2. Dalam Model Proyektif

Garis l dan garis m berupa tali busur lingkaran ω yang berpotongan di titik R. Tali busur yang menggambarkan garis l memotong lingkaran Ω di titik titik L dan M adalah titik – titik akhir garis l. Tali busur yang menggambarkan garis m memotong lingkaran Ω di titik titik N dan Q adalah titik – titik akhir garis m. Kedua tali busur yang menggambarkan garis l dan garis m berpotongan di titik R. Akan dilukiskan garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m berupa tali busur yang melalui titik M dan N.



Gambar 4.2 \overline{MN} garis sejajar persekutuan untuk garis l dan m dalam model proyektif

Lukisan :

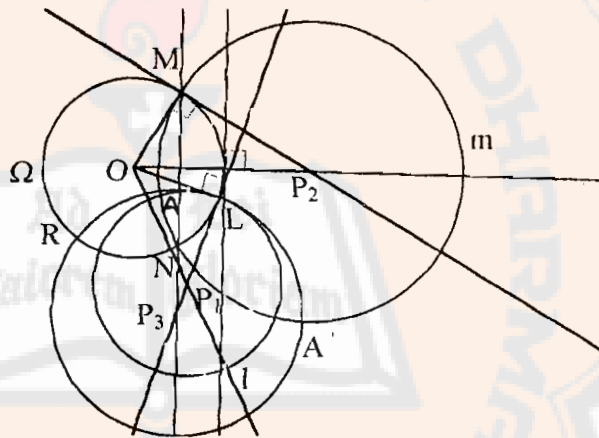
- a. Ditentukan garis l berupa tali busur lingkaran ω yang melalui titik L dan M .
- b. Ditentukan garis m berupa tali busur lingkaran ω yang melalui titik N dan Q .
- c. Ditarik \overline{MN} yang menggambarkan \overline{MN} yang sejajar dengan garis l dan m .

C. LUKISAN GARIS TEGAKLURUS PADA SATU GARIS DAN SEJAJAR DENGAN YANG LAIN DALAM GEOMETRI HIPERBOLIK

Pada subbab berikut akan dilukis garis yang tegaklurus pada salah satu dari dua garis yang berpotongan dan sejajar dengan garis yang lain. Dengan kata lain akan dilukis suatu jarak yang berkorespondensi dengan suatu sudut lancip yang dipandang sebagai sudut kesejajaran. Sudut lancip tersebut sama dengan sudut lancip yang terbentuk oleh kedua garis yang berpotongan tidak tegaklurus tadi. Jarak yang berkorespondensi dengan sudut lancip tersebut akan diperoleh dengan melukis suatu garis sejajar persekutuan dalam model konformal dan model proyektif.

C.1. Dalam Model Konformal

Garis l dan garis m berupa lingkaran tegak lurus pada lingkaran Ω . Lingkaran yang menggambarkan garis l memotong lingkaran Ω di titik titik K dan L adalah titik akhir garis l . Lingkaran yang menggambarkan garis m memotong lingkaran Ω di titik titik M dan N adalah titik akhir garis m . Kedua lingkaran yang menggambarkan garis l dan garis m berpotongan di titik A dan A' membentuk sudut lancip. Akan dilukiskan garis \overline{LR} yang sejajar dengan garis l dan tegak lurus pada garis m berupa lingkaran yang tegak lurus lingkaran Ω di titik L dan tegak lurus lingkaran yang menggambarkan garis m .



Gambar 4.3 Garis \overline{LR} tegak lurus pada garis m dan sejajar dengan garis l

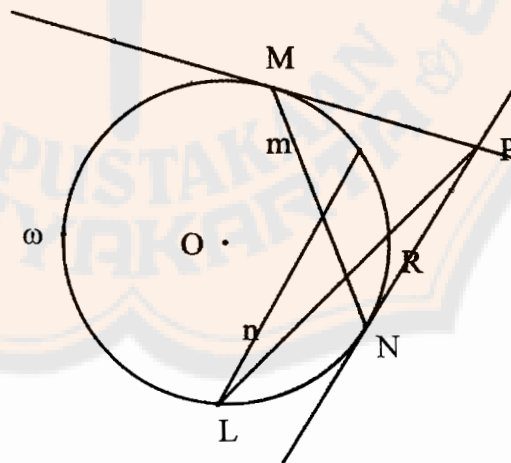
Lukisan :

- 1) Ditentukan garis l berupa $\odot(P_1, P_1L)$ tegak lurus pada lingkaran Ω .

- 2) Ditentukan garis m berupa $\odot(P_2, P_2M)$ tegak lurus pada lingkaran Ω dan memotong $\odot(P_1, P_1L)$ di titik A dan A' . $\odot(P_2, P_2M)$ memotong lingkaran Ω di titik M dan N .
- 3) Ditarik garis \overline{MN} dan garis singgung lingkaran Ω di titik L . Kedua garis tersebut berpotongan di titik P_3 .
- 4) Dibuat $\odot(P_3, P_3L)$ yang menggambarkan \overline{LR} garis sejajar dengan garis l dan tegak lurus pada garis m .

C.2. Dalam Model Proyektif

Garis \overline{LR} yang tegak lurus pada garis m dan sejajar dengan garis l dalam model proyektif berupa tali busur yang terletak pada garis yang melalui kutub garis m dan salah satu titik akhir garis l .



Gambar 4.4 Garis \overline{LR} dalam model proyektif

D. SIFAT YANG DIMILIKI OLEH SETIAP SISIEMPAT SACCHERI DAN SISIEMPAT LAMBERT DALAM GEOMETRI HIPERBOLIK

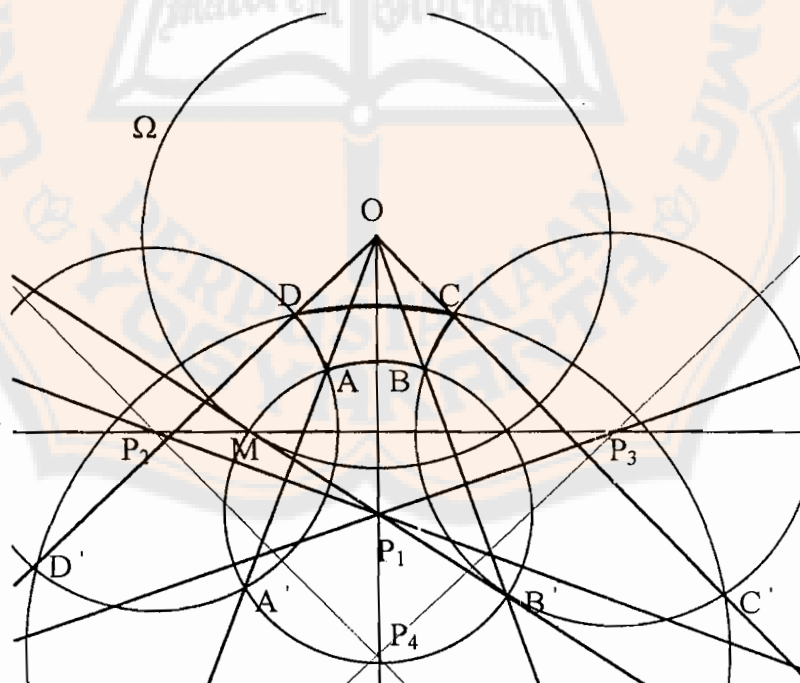
Dalam subbab berikut akan dilukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert menggunakan model konformal dan model proyektif.

D.1. Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Saccheri

Sifat yang dimiliki oleh setiap sisiempat Saccheri adalah besar sudut puncaknya sama dan lancip. Sifat ini telah dibuktikan dalam teorema 2.8 dan akan ditunjukkan dalam model konformal dan model proyektif.

D.1.a Dalam Model Konformal

Ditentukan segmen \overline{AB} berupa busur AB dari lingkaran yang tegak lurus lingkaran Ω . Ditarik \overline{AD} tegak lurus pada \overline{AB} di titik A. Ditarik \overline{BC} tegak lurus pada \overline{AB} di titik B dengan $BC = AD$.



Gambar 4.5 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model konformal

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

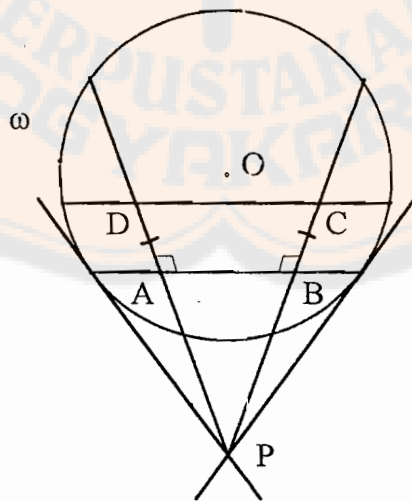
Lukisan :

- 1) Ditentukan \overleftrightarrow{AB} berupa $\odot(P_1, P_1M)$ tegak lurus pada lingkaran Ω .
- 2) Ditarik garis melalui titik A dan tegak lurus \overleftrightarrow{AB} berupa $\odot(P_2, P_2A)$ dengan P_2 titik potong garis kuasa Ω dan $\odot(P_1, P_1M)$ dengan sumbu $\overleftrightarrow{AA'}$. Ditentukan titik D pada $\odot(P_2, P_2A)$.
- 3) Ditarik garis melalui titik B dan tegak lurus \overleftrightarrow{AB} berupa $\odot(P_3, P_3B)$ dengan P_3 titik potong garis kuasa Ω dan $\odot(P_1, P_1M)$ dengan sumbu $\overleftrightarrow{BB'}$. Ditentukan titik C pada $\odot(P_3, P_3B)$ dengan $AD = BC$.
- 4) Ditarik \overleftrightarrow{DC} berupa $\odot(P_4, P_4D)$ dengan P_4 titik potong sumbu $\overleftrightarrow{CC'}$ dan $\overleftrightarrow{DD'}$.

D.1.b Dalam Model Proyektif

Ditentukan segmen \overline{AB} berupa tali busur lingkaran ω .

Ditarik \overline{AD} tegak lurus pada \overline{AB} di titik A. Ditarik \overline{BC} tegak lurus pada \overline{AB} di titik B dengan $BC = AD$.



Gambar 4.6 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model proyektif

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJ

Lukisan :

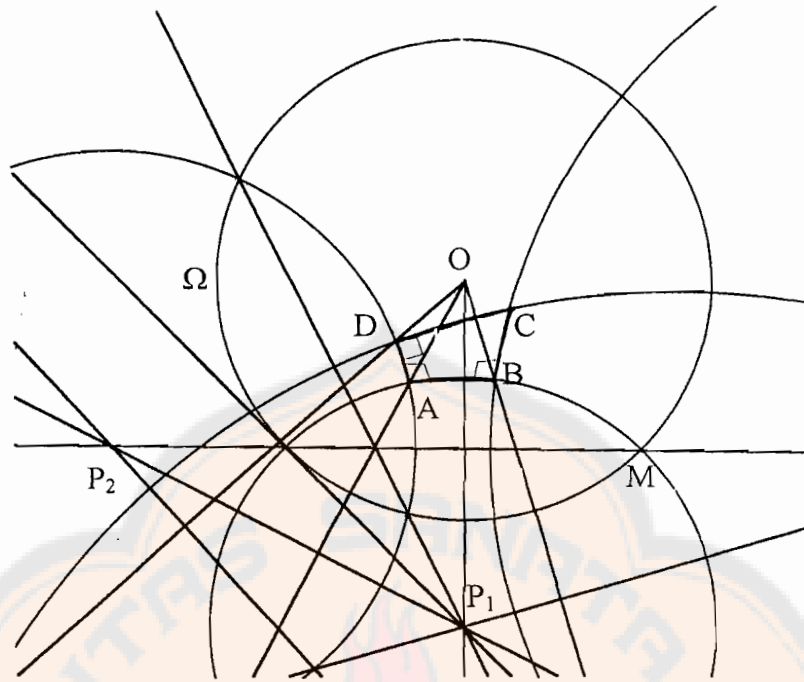
- 1) Ditentukan \overline{AB} yang digambarkan oleh tali busur MN.
- 2) Dicari kutub dari \overline{MN} yaitu titik P.
- 3) Ditarik garis \overline{AP} dan \overline{BP} .
- 4) Ditarik \overline{AD} yang terletak pada \overline{AP} .
- 5) Ditarik \overline{BC} yang terletak pada \overline{BP} dengan $BC = AD$.
- 6) Ditarik \overline{CD} . ABCD Sisiempat Saccheri dalam model proyektif.

D.2 Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Lambert

Sifat yang dimiliki oleh setiap sisiempat Lambert adalah besar sudut keempatnya kurang dari sudut siku – siku. Ketiga sudut yang lain berupa sudut siku – siku. Sifat ini akan ditunjukkan dengan lukisan dalam model konformal dan model proyektif.

D.2.a Dalam Model Konformal

Ditentukan garis – garis \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AD} , dan \overline{DC} berupa lingkaran – lingkaran yang tegak lurus lingkaran Ω membentuk suatu sisiempat dengan $\angle CBA$, $\angle BAD$, dan $\angle ADC$ siku – siku.



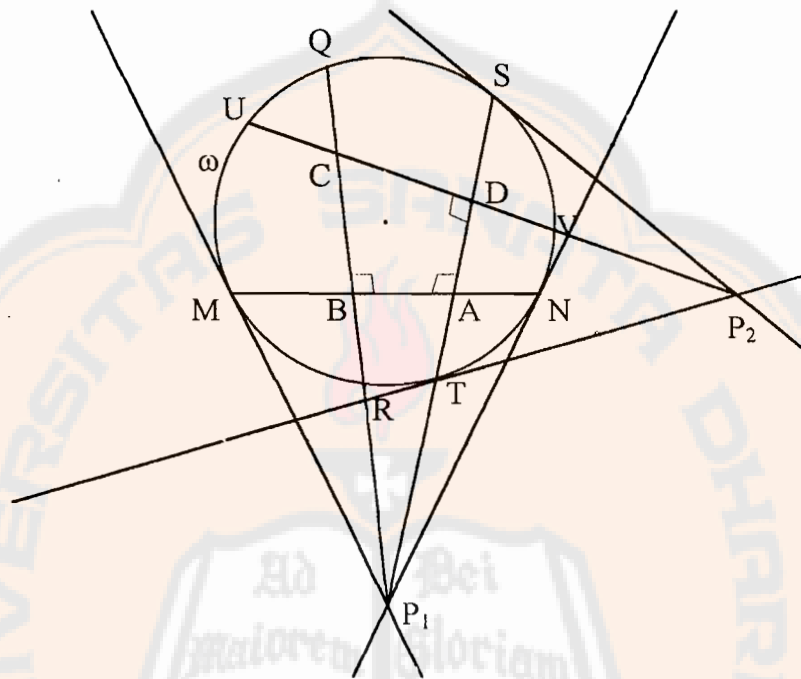
Gambar 4.7 Sisiempat Lambert ABCD dalam model konformal

Lukisan :

- 1) Ditentukan garis \overline{AB} berupa $\odot(P_1, P_1M)$ tegak lurus pada lingkaran Ω .
- 2) Ditarik suatu garis yang melalui titik B dan tegak lurus pada \overline{AB} berupa lingkaran yang melalui titik B dan pusat pada titik potong garis kuasa lingkaran Ω dan sumbu $\overline{BB'}$. Ditentukan titik C pada lingkaran tersebut.
- 3) Ditarik suatu garis yang melalui titik A dan tegak lurus pada \overline{AB} berupa $\odot(P_2, P_2A)$, P_2 titik potong garis kuasa lingkaran Ω dan sumbu $\overline{AA'}$. Ditentukan titik D pada lingkaran tersebut dengan $BC = AD$.
- 4) Ditarik \overline{DC} berupa lingkaran yang melalui titik C dan D dengan pusat pada titik potong sumbu $\overline{CC'}$ dan $\overline{DD'}$.

D.2.b Dalam Model Proyektif

Ditentukan garis – garis \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} , dan \overrightarrow{DC} berupa tali busur lingkaran ω membentuk suatu sisiempat dengan $\angle CBA$, $\angle BAD$, dan $\angle ADC$ siku – siku.



Gambar 4.8 Sisiempat Lambert ABCD dalam model proyektif

Lukisan :

- 1) Ditentukan \overrightarrow{AB} yang digambarkan oleh tali busur MN.
- 2) Dicari kutub garis \overrightarrow{MN} yaitu titik P_1 .
- 3) Ditarik garis tegak lurus pada \overrightarrow{AB} di titik B berupa tali busur QR yang terletak pada $\overrightarrow{BP_1}$.
- 4) Ditarik garis tegak lurus pada \overrightarrow{AB} di titik A berupa tali busur ST yang terletak pada $\overrightarrow{AP_1}$.

- 5) Dicari kutub garis \overline{MN} yaitu titik P_2 .
- 6) Ditarik \overline{DC} berupa tali busur UV yang terletak pada $\overline{DP_2}$. Garis ini memotong \overline{QR} di titik C. ABCD suatu sisiempat Lambert.

E. SIFAT YANG DIMILIKI OLEH SETIAP SISIEMPAT SACCHERI DAN SISIEMPAT LAMBERT DALAM GEOMETRI ELLIPTIK

Dalam subbab berikut akan dilukiskan sisiempat Saccheri dan sisiempat Lambert menggunakan model dari geometri Elliptik berupa bola.

E.1. Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Saccheri Dalam Geometri Elliptik

Sifat yang dimiliki oleh setiap sisiempat Saccheri adalah besar sudut puncaknya sama dan tumpul yang akan dibuktikan dalam teorema 4.1.

Namun sebelumnya terlebih dahulu dibuktikan lemma 4.1. q menyatakan jarak polar suatu garis yaitu jarak antara suatu garis dengan titik kutubnya.

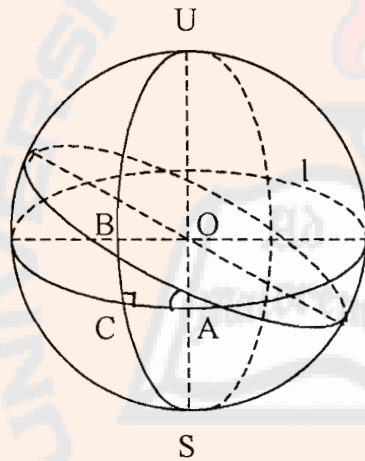
Lemma 4.1

Dalam suatu segitiga yang salah satu sudutnya siku – siku, kedua sudut yang lain kurang dari, sama dengan, atau lebih besar dari sudut siku – siku, tergantung sisi di hadapannya kurang dari, sama dengan, atau lebih besar dari jarak polar q, dan sebaliknya.

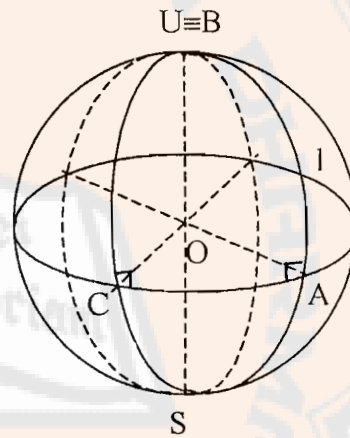
Bukti :



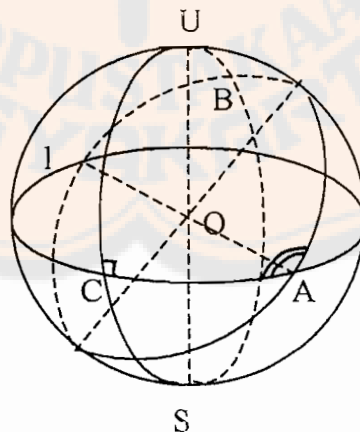
Misalkan $\angle C$ dalam segitiga ABC merupakan sudut siku – siku seperti pada gambar 4.9. U dan S merupakan kutub – kutub garis l $CU = q$. Jika titik U dihubungkan dengan titik A, maka $\angle CAU$ suatu sudut siku – siku. Jika CB kurang dari CU maka $m\angle CAB$ kurang dari besar sudut siku – siku. Jika CB sama dengan atau lebih besar dari jarak polar q maka $m\angle CAB$ sama dengan atau lebih besar dari besar sudut siku – siku. ■



Gambar 4.9a. $CB < CU$



Gambar 4.9b. $CB = CU$

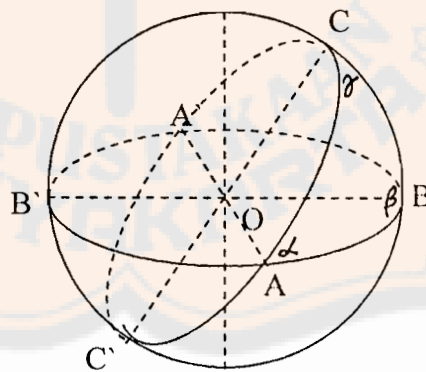


Gambar 4.9c. $CB > CU$

Segitiga siku – siku ABC digambarkan dalam model dari geometri *Double Elliptic*. Misalkan garis l berupa lingkaran besar yang melalui titik A dan titik C dari bola η . Garis l mempunyai kutub di titik U dan S. Garis \overline{BC} berupa lingkaran besar yang melalui titik C, U, dan S sehingga $CU = q$ dan $m\angle ACB = 90^\circ$.

Bila titik B berimpit dengan titik U maka $m\angle CAB = m\angle CAU$ siku – siku seperti dalam gambar 4.9b. Bila $CB < CU$ maka $m\angle CAB < m\angle CAU$. Oleh karena itu bila CB kurang dari q maka $m\angle CAB$ kurang dari besar sudut siku – siku seperti dalam gambar 4.9a. Bila $CB > CU$ maka $m\angle CAB > m\angle CAU$. Oleh karena itu bila CB lebih besar dari jarak polar q maka $m\angle CAB$ lebih besar dari sudut siku – siku seperti dalam gambar 4.9c.

Bukti Teorema 2.14



Gambar 4.10 Jumlah besar sudut segitiga ABC lebih dari 180°

Misalkan $m\angle A = \alpha$, $m\angle B = \beta$, dan $m\angle C = \gamma$. Luas bola pada gambar 4.10 adalah $L = 4\pi r^2$ dengan r jari – jari bola. Luas bidang $A(BC)A'$, $B(AC)B'$, dan $C(AB)C'$ berturut – turut $\frac{\alpha}{360}L$, $\frac{\beta}{360}L$, dan $\frac{\gamma}{360}L$. Diperoleh,

$$\frac{\alpha}{360}L + \frac{\beta}{360}L + \frac{\gamma}{360}L = 1/2L + 2\Delta$$

dengan Δ adalah luas ΔABC .

$$\left(\frac{\alpha}{360} + \frac{\beta}{360} + \frac{\gamma}{360}\right)L = 1/2L + 2\Delta$$

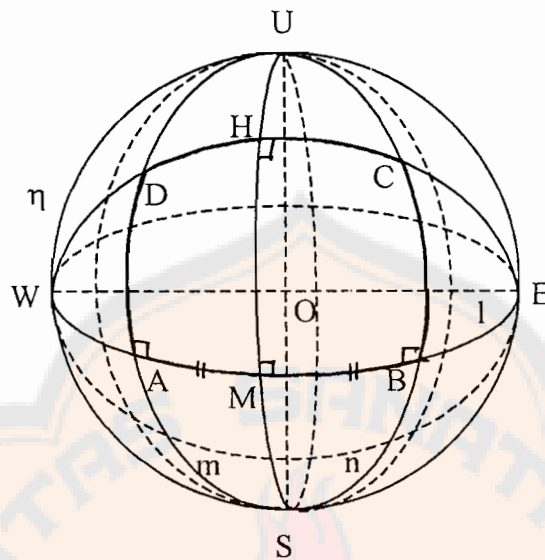
$$\Delta = 1/2L \left(\frac{\alpha}{360} + \frac{\beta}{360} + \frac{\gamma}{360} - \frac{180}{360}\right)$$

$$\Delta > 0 \text{ sehingga } \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{360} > 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma - 180 > 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma > 180$$

Jadi, jumlah besar sudut suatu segitiga lebih dari dua sudut siku – siku. ■



Gambar 4.11 Sisiempat Saccheri ABCD dalam model dari geometri Elliptik

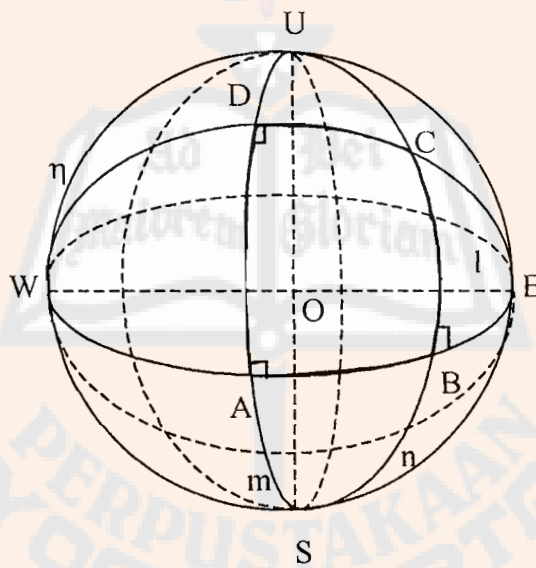
Telah dibuktikan dalam teorema 2.9 bahwa garis yang menghubungkan titik tengah alas dan puncak sisiempat Saccheri tegak lurus pada keduanya serta sudut puncaknya sama dan tumpul. Dalam gambar 4.11, titik - titik A, B, dan M terletak pada garis l berupa lingkaran ekuator bola η dengan kutub di titik U dan S dengan $AM = BM$. Ditarik garis tegak lurus pada garis l di titik A dan B yaitu garis m dan n . Garis m berupa lingkaran besar yang melalui titik - titik A, U, dan S. Sedangkan garis n berupa lingkaran besar yang melalui titik - titik B, U, dan S.

Ditarik garis yang melalui titik M dan tegak lurus pada garis l serta ditentukan titik H pada garis tersebut sehingga diperoleh garis

\overline{MH} . Kemudian ditarik garis yang melalui titik H dan tegak lurus garis \overline{MH} . Garis ini memotong garis m dan n di titik D dan C sehingga diperoleh sisiempat Saccheri ABCD.

E.2. Sifat Yang Dimiliki Oleh Setiap Sisiempat Lambert Dalam Geometri Elliptik

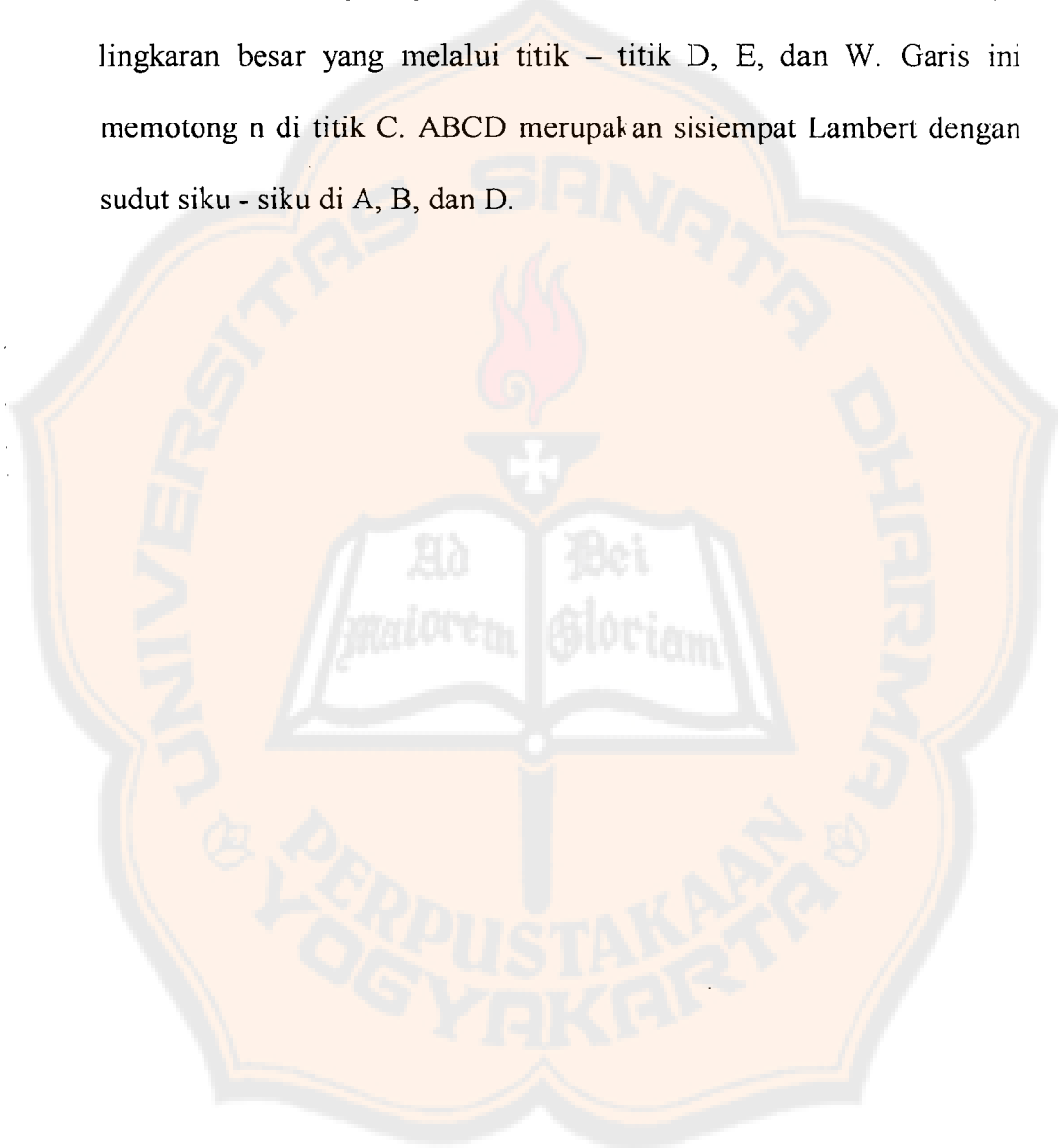
Sifat yang dimiliki oleh setiap sisiempat Lambert adalah besar sudut keempatnya lebih dari sudut siku – siku seperti yang telah dibuktikan dalam teorema 2.13.



Gambar 4.12 Sisiempat Lambert ABCD dalam model dari geometri Elliptik

Dalam gambar 4.12, titik A dan B terletak pada garis l yang memiliki kutub di titik U dan S. Ditarik garis yang tegak lurus pada garis l di titik A dan B yaitu garis m dan garis n. Garis m berupa

lingkaran besar yang melalui titik - titik A, U, dan S. Garis n berupa lingkaran besar yang melalui titik - titik B, U, dan S. Titik – titik E dan W merupakan kutub garis m, ditentukan titik D pada garis m. Kemudian ditarik garis yang melalui titik D dan tegak lurus m berupa lingkaran besar yang melalui titik – titik D, E, dan W. Garis ini memotong n di titik C. ABCD merupakan sisiempat Lambert dengan sudut siku - siku di A, B, dan D.



BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Geometri non-Euclides klasik terdiri dari geometri Hiperbolik dan geometri Eliptik. Perbedaan utama kedua geometri tersebut terletak pada postulat keseajarannya. Postulat kesejajaran Hiperbolik menyatakan bahwa melalui titik A tidak pada garis r yang ditentukan, terdapat lebih dari satu garis yang sejajar dengan garis r . Sedangkan postulat kesejajaran Eliptik menyatakan bahwa melalui titik A tidak pada garis r yang ditentukan, tidak ada garis yang sejajar dengan garis r .

Karena adanya perbedaan postulat kesejajaran tersebut maka diperlukan suatu model untuk menggambarkan dua garis sejajar dalam geometri Hiperbolik dan geometri Eliptik. Ada dua model bidang Hiperbolik dalam bidang Euclides yaitu model konformal yang ditemukan oleh Poincare dan model proyektif yang ditemukan oleh Beltrami-Klein.

Dalam model konformal, bidang dalam geometri Hiperbolik berupa bidang lingkaran yang ditentukan yaitu lingkaran Ω . Garis – garis dalam geometri Hiperbolik berupa lingkaran – lingkaran yang tegak lurus pada lingkaran Ω . Dua garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis r berupa dua lingkaran yang berpotongan di titik A dan A serta melalui titik akhir garis r . Dalam model proyektif, bidang dalam geometri Hiperbolik berupa bidang lingkaran yang ditentukan yaitu lingkaran ω . Garis – garis

dalam geometri Hiperbolik berupa tali busur lingkaran ω . Dua garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis r berupa dua tali busur yang berpotongan di titik A dan melalui titik akhir garis r.

Model untuk bidang dalam geometri *Double Elliptic* dalam ruang Euclides adalah bola. Titik – titik dalam geometri Elliptik berupa titik – titik pada bidang bola dan garis – garis berupa lingkaran besar bola dan setiap dua garis selalu berpotongan di dua titik. Titik potong garis – garis yang tegaklurus pada garis r disebut kutub garis r. Kutub garis r berjarak sama dari setiap titik pada garis r. Model untuk bidang dalam geometri *Single Elliptic* dalam ruang Euclides adalah setengah bola. Titik – titik dalam geometri Elliptik berupa titik – titik pada bidang setengah bola dan garis – garis berupa setengah lingkaran besar bola dan setiap dua garis selalu berpotongan di satu titik.

B. SARAN

Dengan mempelajari model – model dari geometri non-Euclides ini penulis dapat mengenal geometri selain geometri Euclides. Penerapan model – model dalam tulisan ini terbatas dalam bidang matematika yaitu untuk menunjukkan konsistensi geometri non-Euclides. Yang tertarik dengan geometri non-Euclides dapat membahas penerapan model – model dari geometri non-Euclides dalam bidang lain. Misalnya dalam fisika untuk menggambarkan medan gravitasi lubang hitam.

DAFTAR PUSTAKA

- Coxeter, H.S.M. (1986). *Introduction to Geometry*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Greenberg, Marvin. (1979). *Euclidean and non-Euclidean Geometries*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- Hadiwidjojo, Moeharti. (1998). *Sistem - Sistem Geometri*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.
- Prenowitz, Walter dan Jordan, Meyer. (1965). *Basic Concepts of Geometry*. London: Blaisdell Publishing Company.
- Wallace, Edward dan West, Stephen. (1992). *Roads to Geometry*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Wolfe, Harold. (1945). *Introduction to non-Euclidean Geometries*. USA: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

