PEMROGRAMAN KUADRATIK DENGAN ALGORITMA PIVOTING KOMPLEMENTER

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh
Gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :
TRI SUNARTI
991414028

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

PEMROGRAMAN KUADRATIK DENGAN ALGORITMA PIVOTING KOMPLEMENTER

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh
Gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :
TRI SUNARTI
991414028

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi

PEMROGRAMAN KUADRATIK DENGAN ALGORITMA

PIVOTING KOMPLEMENTER

Oleh:

Tri Sunarti
991414028

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

M. Andy Rudhito, S.Pd, M.Si.

Tanggal: 8 November 2004

SKRIPSI

PEMROGRAMAN KUADRATIK DENGAN ALGORITMA PIVOTING KOMPLEMENTER

Dipersiapkan dan ditulis oleh :

Tri Sunarti
991414028

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 29 Oktober 2004
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA PENGUJI

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, M.T	....
Anggota	M. Andy Rudhito, S. Pd, M. Si.	....
Anggota	Drs. Al. Haryono	....
Anggota	Drs. B. Susanta	....

Yogyakarta, 29 Oktober 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M. Pd

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skipsi ini kupersembahkan kepada:

1. Allah Subhanahu wa Ta'ala dan Muhammad Salallahu alaihi Wassalam, hanya atas kasih sayang dan kemurahanNya skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Bapak dan Ibu (mamak dan bapak) yang telah memberikan segala-galanya dan kasih sayang cinta yang tulus.
3. Yuliatun, Edi susanto, Didik Yulianto, Nining Lestari, Dian Ningsih Fajar Wati, Viky Andriani Lestyorini, atas doa-doa dan dukungan kalian selama ini.
4. Yuni Ahmad Ridwan, S.Pdi (papa), atas semua dorongan, pengertian, doa, dan semua apa yang telah papa berikan.
5. Lily Yulianti Santoso, atas persahabatan sejati kita selama ini.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 8 November 2004

Tri Sunarti

KATA PENGANTAR

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pemurah Lagi Maha Penyayang, Segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam, Maha Pemurah Lagi Maha Penyayang, Yang Menguasai, hari pembalasan, Hanya kepada Engkaulah kami memohon pertolongan, Tunjukilah kami jalan yang lurus, Yaitu jalan orang-orang yang Engkau anugerahkan ni'mat kepada mereka, bukan jalan mereka yang dimurkai dan bukan pula jalan mereka yang sesat.

Puji syukur bagi Allah SWT yang maha kasih atas segala karuniaNya yang dilimpahkan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul pemrograman Kuadratik Dengan Algoritma Pivoting Komplementer dengan baik.

Penulisan skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana strata satu pada jurusan Pendidikan Matematika dan IPA Universitas Sanata Dharma. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ungkapan rasa terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dorongan kepada penulis di dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terimakasih penulis haturkan kepada:

1. Drs.Th Sugiarto, MT, selaku Kaprodi FKIP Jurusan Pendidikan Matematika Dan IPA.
2. M. Andy Rudhito, S.Pd. Msi, selaku dosen pembimbing yang telah membimbing dan mengarahkan penulis sehingga selesainya skripsi ini.

3. Bapak dan Ibu Dosen JPMIPA FKIP Universitas Sanata Dharma di mana penulis memperoleh ilmu pengetahuan.
4. Teman-teman Pendidikan Matematika Angkatan 1999, heti, ebti, lina, eniek, yanti, ana, anas, yuli, winda, rina, rangga, beben, heny, eva, enggal, agus, wury, anton, yanto atas segala dorongan dan waktu yang kita jalani dalam suka dan duka selama lima tahun ini.
5. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu untuk terselesainya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi semua pihak. Dengan iringan doa semoga *Allah Subhanahuwa Ta'ala* melimpahkan pahala kepada semua yang turut andil dalam penyelesaian skripsi ini. *Hanya Allahlah Pembimbing ke jalan yang benar.*

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$	Matriks **A**
$\mathbf{A}^{-1}$	Invers matriks **A**
$\mathbf{A}^{T}$	Transpose dari matriks **A**
$\lvert \mathbf{A} \rvert$	Determinan matriks **A**
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$	Vektor n komponen
$\mathbf{R}^n$	Ruang vektor berdimensi n
$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$	Vektor **X** elemen **R**
K	Himpunan konveks
δ_{xj}	Perubahan pada komponen ke-i dari vektor **X**
λ	Skala bernilai $0 \leq \lambda \leq 1$
ε	Skala error $0 \leq \varepsilon \leq 1$
$f(\mathbf{X})$	Fungsi tujuan
$g(\mathbf{X})$	Funggsi kendala
S	Himpunan titik fisibel
δ_f / δ_{xj}	Turunan titik parsial $f(\mathbf{X})$ terhadap komponen ke-j
$\nabla f(\mathbf{X})$	Gradien f pada titik **X**
$H = \nabla^2 f(\mathbf{X})$	Matriks Hessian
$N(x^*, \lambda)$	Persekitaran dengan radius
I	Matriks identitas

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Pemrograman kuadratik merupakan bagian dari pemrograman non linear dengan fungsi objektifnya adalah fungsi kuadratik dan kendalanya fungsi linear. Permasalahan Pemrograman kuadratik adalah menentukan solusi optimalitas Kuhn Tucker yang merupakan metode penyelesaian dasar. Untuk penyelesaian dan penentuan titik optimal diterapkan teknik persoalan komplementer linear, dan mencari solusi optimal dari persoalan komplementer linear dengan menggunakan Algoritma Pivoting Komplementer.

Pemrograman Kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer diawali dengan persoalan Pemrograman Kuadratik yang kondisi optimalnya sudah sesuai dengan kondisi Kuhn Tucker (syarat perlu dan syarat cukup Kuhn Tucker). Kemudian diubah ke dalam bentuk operasi matriks dan dilanjutkan dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup Kuhn Tucker sehingga diperoleh bentuk bakunya. Langkah selanjutnya adalah membawa bentuk baku Pemrograman Kuadratik untuk ditransformasi ke bentuk persoalan komplementer linear. Dan dilanjutkan dengan penerapan Algoritma Pivoting Komplementer hingga ditemukan solusi akhir optimalitasnya. Penyelesaian akhir dari persoalan komplementer linear dengan Algoritma Pivoting Komplementer adalah dengan penyelesaian layak dasar komplementer yang merupakan penyelesaian terbatas dan dengan *Ray Termination* yang merupakan penyelesaian tak terbatas.

Disini dibahas mengenai penerapan Pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer pada masalah penanaman saham khususnya pada penentuan alokasi dana investasi portofolio untuk mendapatkan keuntungan yang diharapkan dengan resiko yang sekecil mungkin. Dengan melihat data yang lalu, diperkirakan bahwa nilai harapan kembali suatu portofolio adalah $\boldsymbol{\mu}\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ dan variannya adalah $\mathbf{XDX} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$ sehingga investor harus memilih antara memaksimalkan tingkat pengembalian yang diharapkan dari saham *j* dengan nilai harapan terbesar μ_j dan mengurangi resiko yang diukur dengan variansi portofolio. Resiko dapat dikurangi dengan menginvestasikan pada saham yang berkorelasi negatif dengan cara membangun himpunan semua solusi efisien dengan suatu portofolio. Himpunan seluruh solusi efisien dapat dicari dari penyelesaian Pemrograman kuadratik sebagai berikut :

Minimumkan, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{DX} - \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{X}$

Kendala $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$x_j \geq 0$ dengan setiap $j = 1, 2, \ldots, n$

ABSTRACT

Quadratic programming is a part of non linear programming where the objective is a quadratic function and boundaries problem are linear. Quadratic programming problems determined the optimal solutions using Langrange function and Kuhn Tucker optimality conditions for the basic solution. And finding the optimal points using linear complementary technique. The optimal solution from linear complementary problem is determined using Pivoting Complementary Algorithm.

Quadratic programming with pivoting complementary algorithm was preceded by quadratic programming problems that optimality condition was appropriate by Kuhn Tucker conditions (Kuhn Tucker necessary condition and Kuhn Tucker Sufficient condition).Than it was matrix operation and advanced with direct application Kuhn Tucker necessary condition and Kuhn Tucker sufficient condition until was result form the standard. If after is carry form the standard quadratic programming for transformed in form linear complementary problem, and than apply the pivoting complementary Algorithm until finded optimality finished solution. Finished solution from linear complementary problem with pivoting complementary algorithm is complementary feasible basic solution and Ray Termination.

There is examination that apply quadratic programming with pivoting complementary algorithm in problem portion investment especially in allocation appointment capital portfolio investation, for finding profit that hoped with smaller risk with to perceive formerly data, the calculation that value to return portfolio on is $\mu\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ and this variant is $\mathbf{XDX} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$ so that investor should to select between to maximum terrace the return that hope from portion j with value hope biggest μj and subtract risk that wanted with portfolio varians.

The risk can subtract with to invest in portion that negative correlation with manner so build all set efficient solution can finded from solution quadratic programming that is :

Minimum, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X} - \mu^T \mathbf{X}$

Subject to $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

BAB I

PENDAHULUAN

Pada abad dewasa ini perkembangan ilmu dan teknologi dunia sangat maju dan canggih. Di berbagai bidang bisa kita lihat kemajuan yang telah dicapai oleh para ilmuwan dengan menerapkan kemampuan yang dimilikinya. Kemajuan dan perkembangan IPTEK sangat membantu di bidang-bidang tertentu, dan ini adalah suatu bukti bahwa IPTEK sangat bermanfaat di bidang-bidang lainnya.

Seiring dengan perkembangan dan kemajuan jaman matematika pun juga telah tumbuh dan berkembang seiring dengan berkembangnya pemikiran manusia. Matematika yang merupakan salah satu cabang dari ilmu pengetahuan yang dihasilkan oleh buah budi dan karya pikiran manusia sangat besar peranannya di dalam kehidupan. Perkembangan dan kemajuannya bisa dilihat di berbagai segi bidang kehidupan, misalnya ekonomi, bisnis, industri, teknik dan lain sebagainya.

Matematika dengan segala kekhususannya, adalah salah satu alat pendekatan yang logis dan bisa diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu sehingga terbukti bahwa matematika memiliki peran pembantu tersendiri didalam ilmu dan teknologi.

Pemrograman kuadratik adalah salah satu bagian dari matematika, yaitu bagian dari Riset Operasi, dimana Riset Operasi itu sendiri merupakan salah satu cabang dari penerapan matematika yang membahas mengenai metode ilmu pengetahuan dan teknik untuk mendapatkan hasil yang optimal dalam beberapa masalah tertentu. Dan konsep optimasi merupakan pengembangan dari ilmu matematika yang diterapkan pada penyelesaian persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas untuk memperoleh hasil yang optimal sesuai dengan tujuan yang diharapkan. Persoalan optimasi dengan segala kendala dikatakan sebagai suatu persoalan pemrograman matematis di mana untuk mengoptimasikan fungsi objektif $f(\mathbf{X})$, dibentuk nilai vektor variabel :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$, yang merupakan penyelesaian persoalan

Untuk menentukan solusi optimal dari persoalan pemrograman kuadratik dapat menggunakan berbagai metode, misalnya Frank-Wolfe, metode Fungsi Barrier, Metode Program Geometri, metode Lemke (metode Algoritma Pivoting Komplementer). Tetapi penulis sangat tertarik untuk membahas mengenai penentuan solusi optimal dari persoalan pemrograman kuadratik dengan menggunakan metode Algoritma Pivoting Komplementer, sehingga dengan pengetahuan yang dimiliki penulis dan literatur yang mendukung penulis akan mencoba membahas mengenai pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer dan menunjukkan contoh penerapannya.

1.1. Latar Belakang Masalah

Salah satu mata kuliah di FKIP program studi Pendidikan Matematika jenjang S1 adalah Matematika Terapan, khususnya bidang Riset Operasi.

Di bidang riset operasi tersebut di dalamnya terdapat sebuah pengertian optimasi yang didefinisikan sebagai prosedur untuk mendapatkan fungsi objektif atau fungsi tujuan sehingga di capai keadaan optimal (maksimum/minimum). Atau menentukan harga-harga ekstrim dari fungsi objektif jika variabel-variabelnya harus memenuhi satu atau lebih kendala-kendala yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan.

Metode pencarian nilai optimal merupakan teknik pemrograman matematika. Sejumlah teknik dapat dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan optimasi dengan kendala, yaitu suatu masalah yang dalam bentuk standarnya adalah menentukan nilai suatu vektor variabel $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)^T$ yang mengoptimumkan fungsi objektif $f(\mathbf{X})$ terhadap kendala-kendala $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$.

Pemrograman kuadratik juga merupakan bagian dari pemrograman non linear dengan kendala. Di mana fungsi objektifnya berbentuk kuadrat sedangkan kendala-kendala yang membatasinya berbentuk linear.

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang masalah di atas penulis merumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Menentukan kondisi pemrograman kuadratik agar sesuai dengan persoalan komplementer linear (*The Linear Complementary Problem*).
2. Menentukan solusi optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik dengan menggunakan Algoritma Pivoting Komplementer.

3. Memberikan contoh penerapan penyelesaian pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer di bidang ekonomi (penanaman saham)

1.3. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penulisan skripsi ini bertujuan untuk :

1. Membahas penyelesaian kondisi pemrograman kuadratik agar sesuai dengan algoritma pada persoalan komplementer linear (*The Linear Complementary Problem*).
2. Membahas bagaimana cara menentukan solusi optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer.
3. Membahas contoh penerapan penyelesaian pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer di bidang ekonomi (penanaman saham).

1.4. Ruang Lingkup Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini dilakukan pembatasan masalah yang dibahas sebagai berikut :

1. Persoalan pemrograman kuadratik yang dibahas adalah persoalan pemrograman kuadratik dengan ruang solusi tertutup.
2. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan pemrograman kuadratik adalah metode Algoritma Pivoting Komplementer.

3. Setiap penyelesaian masalah optimasi yang akan dibahas selalu mempunyai solusi yang optimal.

1.5. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi pustaka atau studi literatur, yaitu suatu bentuk penelitian di mana dalam menganalisis objek permasalahannya hanya berdasarkan pada beberapa literatur yang berkaitan dengan permasalahan tersebut.

1.6. Sistematika Penulisan

Pada sistematika penulisan ini terdiri dari bab I, bab II, bab III, bab IV dan bab V.

Pada bab I penulis memulai dengan mengemukakan latar belakang masalah, rumusan masalah hingga sampai ke materi prasyarat penulisan skripsi ini.

Pada bab II penulis memulai dengan mengemukakan pembahasan mengenai landasan teori untuk keperluan pembahasan bab inti yaitu mengenai bentuk kuadratik konseksitas hingga simpleks.

Pada bab III penulis memulai dengan mengemukakan pembahasan pemograman konveks linear complementary problems, hingga sampai pemrograman kuadratik dengan algoritma pivoting komplementer.

Pada bab IV penulis mengemukakan satu contoh tentang penerapan pemrograman kuadratik dengan menggunakan algoritma pivoting komplementer pada bidang ekonomi penanaman saham.

Dan pada bab V penulis mengemukakan mengenai beberapa kesimpulan dan beberapa saran yang sekiranya dapat menjadi masukan pada pembaca untuk melanjutkan pembahasan skripsi ini secara lebih lanjut.

1.7. Materi Prasyarat

Pada skripsi ini diasumsikan pembaca telah mengenal konsep-konsep dasar yang dipakai adalah kalkulus, aljabar linear elementer, dan probabilitas.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Bentuk Kuadratik

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X})$ adalah suatu bentuk fungsi tak linear yang hanya mempunyai n suku-suku derajat ke dua, atau dapat dikatakan, bentuk kuadratik $f(\mathbf{X})$ dalam n variabel dinyatakan dengan derajat ke dua yang dapat di tulis, sebagai berikut : $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{CX} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j$

Atau,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) = {} & c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 \cdots + c_{1n}x_1x_n + \\ & c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{2n}x_2x_n + \cdots + \\ & c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + \cdots c_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

di mana, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ adalah vektor kolom dan $\mathbf{C} = (c_{ij})$ adalah matriks persegi (nxn) untuk setiap i = 1,2,…,n dan j = 1,2,…,n.

Matriks $\mathbf{C}$ dapat diasumsikan sebagai matriks simetris, karena setiap elemen dari pasangan koefisien c_{ij} dan c_{ji} untuk setiap i dan j, dapat diwakili oleh $\frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$ tanpa merubah nilai matriks tersebut. Dengan demikian, suatu matriks dalam bentuk kuadratik selalu dapat dikatakan sebagai matriks simetris.

Jika $\mathbf{C} = (c_{ij})$ adalah matriks simetris, maka bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{CX}$ dikatakan sebagai :

1. Definit positif, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{CX} > 0$ untuk setiap $\mathbf{X} \neq 0$.

2. Semi – definit positif, jika $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} \geq 0$ untuk setiap $\mathbf{X}$ dan ada $\mathbf{X} \neq 0$ sedemikian sehingga $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} = 0$.
3. Definit negatif, jika $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} < 0$ untuk setiap $\mathbf{X} \neq 0$.
4. Semi – definit negatif, jika $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} \leq 0$ untuk setiap $\mathbf{X}$ dan ada $\mathbf{X} \neq 0$ sedemikian sehingga $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} = 0$.
5. Indefinit, Jika $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} > 0$ untuk beberapa $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX} < 0$ untuk beberapa $\mathbf{X}$ yang lain.

(Kunzi, et. al, 1978, hal. 296)

Dalam hal ini dapat ditunjukkan bahwa syarat-syarat untuk menyatakan kasus-kasus diatas diberikan oleh :

1. Bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX}$ adalah definit positif (semi definit positif) jika semua akar karakteristik dari $\mathbf{C}$ adalah positif . Dalam hal ini, matriks $\mathbf{C}$ adalah definit positif (semi definit positif).
2. Bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{CX}$ adalah definit negatif jika semua akar karakteristik dari $\mathbf{C}$ mempunyai tanda negatif untuk setiap k = 1, 2, …, n. Dalam hal ini, matriks $\mathbf{C}$ adalah definit negatif.
3. Bentuk kuadatik $\mathbf{X}^T\,\mathbf{CX}$ adalah semi definit negatif jika semua akar karakteristik dari $\mathbf{C}$ mempunyai harga nol atau bertanda negatif untuk setiap k = 1, 2, …, n. Dalam hal ini, matriks $\mathbf{C}$ adalah semi-definit negatif.

Catatan : Akar karakteristik adalah nilai eigen (λ_i) dari suatu matriks yang berordo (n x n), untuk setiap i = 1, 2, …,n.

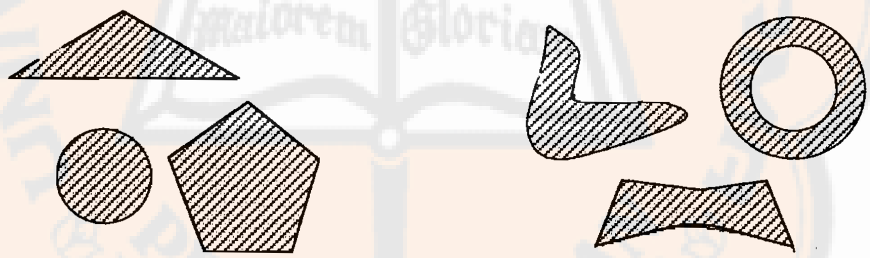
2.2. Konveksitas (Kecembungan)

2.2.1 Himpunan Konveks

Definisi 2.2.1.1:

Misalkan S adalah suatu himpunan titik-titik suatu bidang atau ruang. Jika untuk setiap dua titik pada himpunan S, suatu ruas garis yang menghubungkan seluruhnya terletak pada himpunan S, maka himpunan S disebut himpunan konveks.

Perhatikan pada contoh-contoh himpunan konveks pada Gambar (2. 2) Semua himpunan pada gambar 2. 2.a merupakan himpunan konveks dan semua himpunan pada Gambar 2. 2.b adalah himpunan non konveks.



Gambar 2.2 a Himpunan konveks

Gambar 2.2 b Himpunan non koveks

Gambar 2.2 Himpunan Konfeks dan Non konfeks

Dalam ruang berdimensi 4 atau lebih, interpretasi geometris menjadi sulit karena itu diperlukan definisi himpunan konveks secara aljabar. Untuk tujuan ini diperlukan pengertian akan konsep kombinasi konveks dari vektor, yang merupakan suatu jenis khusus dari kombinasi linear dari dua buah vektor $\mathbf{X_1}$ dan $\mathbf{X_2}$ yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$k_1\mathbf{X_1} + k_2\mathbf{X_2}$$

di mana k_1 dan k_2 merupakan skalar. Jika kedua nilai k tersebut terletak pada interval tertutup [0,1] dan jumlahnya 1, kombinasi linear dikatakan sebagai kombinasi konveks dan dirumuskan sebagai berikut :

$$\lambda \mathbf{X_1} + (1-\lambda)\ \mathbf{X_2} \text{ di mana } (0 \le \lambda \le 1).$$

Dengan demikian definisi (2.2.1.1) dapat juga dinyatakan dalam definisi aljabar sebagai berikut.

Suatu himpunan S adalah konveks jika dan hanya jika, untuk dua vektor $\mathbf{u} \in S$ dan $\mathbf{v} \in S$, dan untuk setiap skalar $\lambda \in [0,1]$, maka berlaku : $[w = \lambda\ \mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}] \in S$

Definisi ini dapat diterapkan tanpa memperhatikan di mana terdapat vektor **u** dan **v.**

2. 2. 2 Fungsi Konveks

Definisi 2. 2. 2. 1 :

Misalkan, fungsi $f(\mathbf{X}) = f[x_1, x_2, \ldots , x_l]$ didefinisikan sebagai suatu himpunan dari titik-titik yang berada dalam suatu himpunan konveks $S \subset \mathbf{R}^n$, maka fungsi $f(\mathbf{X})$ disebut sebagai fungsi konveks, jika :

$$f[\lambda\ \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\ \mathbf{X_2}] \le \lambda\ f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\ f(\mathbf{X}_2)$$

untuk setiap $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2} \in S$ dan $0 \le \lambda \le 1$.

Sebaliknya, suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan sebagai fungsi konkaf, jika $-f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

Teorema 2. 2. 2. 2 :

Fungsi bentuk kuadrat $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{CX}$ yang semi definit positif adalah fungsi konveks, untuk semua **X** di R^n.

Bukti :

Diketahui 2 buah titik $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$ di R^n dan $0 \le \lambda \le 1$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{CX}$, maka berlaku :

$f[\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] \le \lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$

atau,

$[\lambda\mathbf{X} + (1-\lambda)\mathbf{X_2}] - \lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \le 0$ ....(2.1)

Karena $\mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_1 = \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2$, maka ruas kiri dari persamaan (2.1) dapat ditulis:

$$[\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2]^T \mathbf{C}[\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - \lambda\mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 - (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2$$

$$= \lambda^2\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 + (1-\lambda)^2\mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2 + 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2 - \lambda\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 - (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 + (1-\lambda)[(1-\lambda)\, \mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2 - \mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2] + 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2$$

$$= \lambda(\lambda-1)\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 + \quad \lambda(\lambda-1)\mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2 \; 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2$$

$$= \lambda(\lambda-1)[\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_1 + \mathbf{X}_2^T\mathbf{CX}_2 - 2\, \mathbf{X}_1^T\mathbf{CX}_2\,]$$

$$= \lambda(\lambda-1)[(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T\; \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)] \quad \text{......................(2.2)}$$

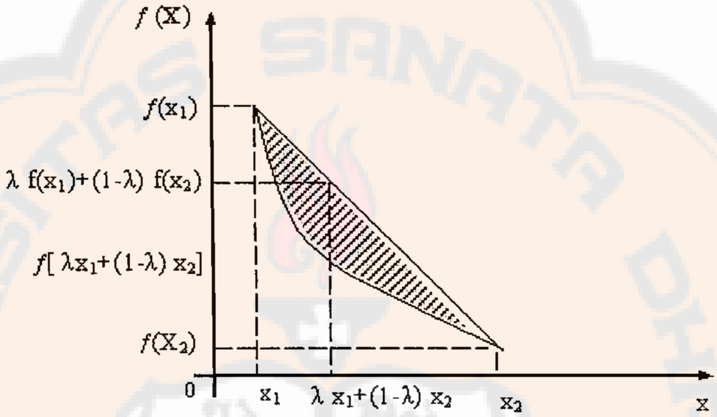
Karena bentuk kuadrat $\mathbf{X}^T \mathbf{CX} \ge 0$ (semi definit positif) untuk beberapa **X**, maka untuk persamaan (2.2) berlaku :

$$[(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T\; \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)] \ge 0$$

Karena $\lambda(\lambda-1) < 0$ untuk $0 < \lambda < 1$ dan $\lambda(\lambda-1) = 0$ untuk $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$ maka persamaan (2.2) akan selalu lebih kecil atau sama dengan nol untuk semua vektor

$\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$, yang mana telah ditunjukkan oleh persamaan (2.2) sehingga $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{C}\mathbf{X}$ yang semi definitif positif adalah konveks untuk setiap **X** di $\mathbf{R}^n$ ■

Catatan : fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konveks mutlak atau fungsi konkaf mutlak.jika hubungan pertidaksamaan tersebut mempunyai tanda "<" atau ">" untuk setiap $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2 \in$ S dan $\lambda \in (0,1)$.

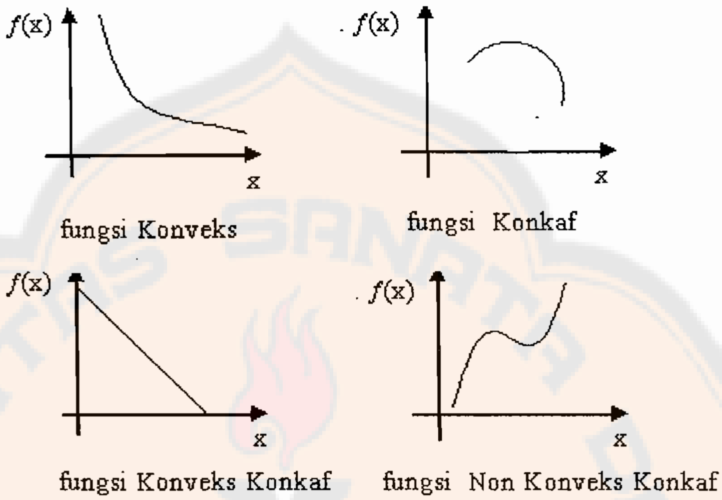


Gambar 2.4

Secara lebih praktis, untuk mengetahui apakah suatu nama belakang fungsi adalah konveks atau konkaf maka digunakan pengujian sebagai berikut:

1. $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konveks, jika $f(\mathbf{X})$ adalah definit positif atau semi definit positif.
2. $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konkaf, jika $f(\mathbf{X})$ adalah definit negatif atau semi definit negatif.

Secara geometris dapat diartikan bahwa, suatu grafik fungsi dikatakan grafik fungsi konveks jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada grafik, seluruhnya akan terletak diatas grafik tersebut. Suatu fungsi dikatakan fungsi konkaf jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada grafik, seluruhnya akan terletak dibawah grafik tersebut. Perhatikan gambar-gambar dibawah ini:



Gambar 2.5 Fungsi Konveks dan fungsi Konkaf

Definisi 2.2.2.3

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan mempunyai minimum global dititik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S.

Jika $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$, maka titik $\mathbf{X}^*$ adalah maksimum global dari fungsi $f(\mathbf{X})$.

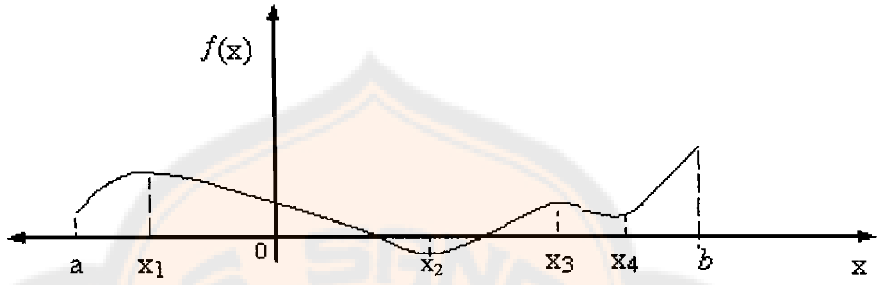
Definisi 2.2.2.4

Suatu fungsi dikatakan mempunyai minimum lokal dititik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$, sedemikian sehingga

$f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S, yang memenuhi $|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}| < \varepsilon$.

Jika $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$, maka titik $\mathbf{X}^*$ adalah maksimum lokal dari fungsi $f(\mathbf{X})$.

Untuk jelasnya, pengertian mengenai minimum atau maksimum global dan lokal dapat diilustrasikan untuk fungsi satu variabel sebagai berikut:



Gambar 2.6 Grafik Optimal Lokal dan Optimal Global

Fungsi $f(\mathbf{X})$ pada gambar (2.6) hanya didefinisikan pada [a,b], maka fungsi $f(\mathbf{X})$ mempunyai :

a. Minimum lokal di a dan x_4 dan minimum global di x_2.

b. Maksimum lokal di x_1 ,x_3.dan maksimum global di b.

Teorema 2.2.2.5

Jika $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks pada suatu himpunan konveks S maka $f(\mathbf{X})$ mempunyai satu minimum lokal. Jika terdapat suatu minimum yang demikian, maka dikatakan sebagai minimum global dan dicapai pada himpunan konveks.

Bukti:

Misalkan, terdapat suatu minimum lokal pada titik $\mathbf{X}^*$ untuk sembarang $\mathbf{X}=\overline{X} \in S$.

Menurut definisi dari minimum lokal dan fungsi konveks maka diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f[\,(1-\lambda)\mathbf{X}^*+\lambda\overline{X}\,] \leq (1-\lambda)\, f\,(\mathbf{X}^*) + \lambda f\,(\overline{X}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

di mana, λ adalah suatu bilangan terkecil secukupnya.

Dari persamaan (2.4) diperoleh:

$f(\mathbf{X}^*) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*)+\lambda f(\overline{X})]$ sehingga, $\lambda f(\mathbf{X}^*) \leq \lambda f(\overline{X})$

Dan karena $\lambda > 0$ maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\overline{X})$ mengakibatkan $f(\mathbf{X}^*)$ adalah suatu minimum global dan titik $\overline{X} \in S$ merupakan titik sembarang. Jika $\mathbf{X}^*$ dan $\mathbf{X}'$ adalah dua titik yang mengakibatkan fungsi $f(\mathbf{X})$ mencapai minimum z_0, maka untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ diperoleh :

$z_0 \leq f[(1-\lambda)f(\mathbf{X}^*)+\lambda\mathbf{X}'] \leq (1-\lambda) f(\mathbf{X}^*)+ \lambda f(\mathbf{X}')$ sehingga, $f(\mathbf{X})$ juga mencapai minimum pada $\mathbf{X} = (1-\lambda)\mathbf{X}^* + \lambda\mathbf{X}'$.

Dengan demikian, himpunan dari solusi-solusinya merupakan himpunan konveks.

Teorema 2.2.2.6

Misalkan, S adalah himpunan yang tidak kosong dan $S \subset R^n$, maka X yang memenuhi kendala- kendala

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \text{ untuk setiap } i = 1,2,\ldots,m$$

$$\mathbf{X} \geq 0$$

Jika $g_i(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks untuk setiap i, maka S merupakan himpunan konveks.

Bukti:

Misalkan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ didefinisikan, $\overline{X} = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$ untuk

$0 \leq \lambda \leq 1$ akan ditunjukkan bahwa titik $\overline{X}$ memenuhi kendala-kendala yang membatasinya.

Diketahui, $\overline{X} \geq 0$ karena $g_i(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks, maka :

$g(\overline{X}) = g_i[\lambda\, \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\, \mathbf{X}_2] \leq \lambda\, g_i(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\, g_i(\mathbf{X}_2)$

tetapi, karena $g_i(\mathbf{X}_1) \leq 0$ dan $g_i(\mathbf{X}_2) \leq 0$ untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ maka

$g_i(\overline{X}) \leq \lambda\, g_i(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\, g_i(\mathbf{X}_2) \leq 0$.

Jadi, S adalah himpunan konveks ■

Berdasarkan uraian dari teorema (2.2.2.5) dan teorema (2.2.2.6) maka, untuk persoalan optimasi untuk meminimumkan (memaksimumkan) fungsi $f(\mathbf{X})$ terhadap kendala $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ untuk setiap i = 1, 2,……,m dan $\mathbf{X} \geq 0$, jika $f(\mathbf{X})$ dan semua g_i $(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks, maka suatu minimum lokal (maksimum lokal) adalah juga minimum global (maksimum global) .

2.3 Vektor Gradien Dan Titik Pelana

Definisi 2.3.1:

Diketahui suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dan semua turunan pertamanya adalah kontinu pada suatu himpunan $S \subset R^n$. vektor gradien dari $f(\mathbf{X})$ pada titik $\mathbf{X}^* \in S$ didefinisikan sebagai suatu vektor kolom berdimensi n dan dinotasikan dengan $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ dengan:

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dimana vektor $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ merupakan suatu vektor yang tegak lurus dengan kontur (countur) $f(\mathbf{X})$ yang melalui titik $\mathbf{X}^*$

Definisi 2.3.2

Misal $f(\mathbf{X})$ fungsi harga riil yang mempunyai turunan kedua dalam $\mathbf{R}^n$ dan misal $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ adalah suatu persekitaran dari $\mathbf{X}$ dalam $\mathbf{R}^n$ di mana

$(\Delta\mathbf{X})^T = [\partial x_1\ \partial x_2 \ldots \partial x_n]$ dan $(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X})^T = [\,x_1 + \partial x_1\ \ x_2 + \partial x_2 \ldots x_n + \partial x_n]$

Deret Taylor untuk fungsi dari n variabel dapat ditulis

$$f(x_1 + \partial x_1\ \ x_2 + \partial x_2 \ldots x_n + \partial x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$\left(\partial x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \partial x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots \partial x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \partial x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots \partial x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f +$$

suku-suku sisa.

Dalam bentuk vektor dapat ditulis dengan :

$$f(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + (\Delta\mathbf{X})^T \nabla f(\mathbf{X}) + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{X})^T \nabla^2 f(\mathbf{X})(\nabla\mathbf{X}) + \text{suku suku sisa}$$

Dari persamaan diatas dapat didefinisikan matriks Hessian nxn dari fungsi $f(X)$ yaitu :

$$H(\mathbf{X}) = \nabla^2 f(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad ; i, j = 1, 2, \ldots n$$

Matrik Hessian jika elemen-elemennya merupakan turunan parsial kedua dari $f(X)$. Matrik Hessian diberi simbol **H** atau $\nabla^2 f$, dan ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 f}{dxdx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

Karena $f(\mathbf{X})$ telah diasumsikan dapat diturunkan dua kali secara kontinu maka turunan-turunan parsial silangnya adalah sama, yaitu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{di mana } i = 1,2,\ldots,n \text{ dan } j = 1,2,\ldots,n.$$

Teorema 2.3.3

Diketahui $f(\mathbf{X})$ didefinisikan pada himpunan konveks S yang terbuka dan $f(\mathbf{X})$ diferensiabel di $\mathbf{X}$, maka fungsi $f(\mathbf{X})$ konveks jika dan hanya jika berlaku:

$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$

untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$

Bukti :

- Syarat cukup ($\Leftarrow$) :

Jika diketahui $f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$, dan dibuktikan bahwa $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks

Untuk $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, misalkan $\mathbf{X}_3 \in S$ sehingga

$\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda) \mathbf{X}_2$

Maka untuk $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_3$ diperoleh :

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \ldots\ldots(2.5)$$

Dan untuk $\mathbf{X}_2$ dan $\mathbf{X}_3$ diproleh:

$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3)$ ……(2.6)

kalikan pesamaan (2.5) dengan λ dan persamaan (2.6) dengan $(1-\lambda)$, kemudian dijumlahkan. Maka diperoleh:

$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_3) \geq \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T$

$\nabla f(\mathbf{X}_3)$ atau

$\lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3) + [\lambda \mathbf{X}_1^T + (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T] \nabla f(\mathbf{X}_3) +$

$- \mathbf{X}_3^T \nabla f(\mathbf{X}_3)$ ……(2.7)

subtitusikan $\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$ pada persamaan (2.7) maka diperoleh:

$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda) \mathbf{X}_2]$

Dengan demikian $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks .

- Syarat perlu ($\Rightarrow$)

Diketahui $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks dan dibuktikan bahwa :

$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$

Untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$, maka berlaku

$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2]$

kurangkan sisi kiri dan sisi kanan dengan $f(\mathbf{X}_2)$, maka :

$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - f(\mathbf{X}_2)$ atau,

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq \frac{f[\lambda X_1 - (1-\lambda)X_2] - f(X_2)}{\lambda}$$

Ambil suatu limit pada suatu sisi kanan,untuk λ mendekati 0, maka diperoleh

$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$ ■

Teorema 2.3.4

Misalkan $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu, yang didefinisikan dalam suatu himpunan konveks S.

Vektor $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S, jika dan hanya jika diturunkan, $(\mathbf{X_1}\text{-}\mathbf{X_2})^T \nabla f(\mathbf{X}^*{}_2) \geq 0$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S.

Bukti :

- Syarat perlu ($\Rightarrow$)

Diketahui $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ dan $\mathbf{X}^*$meminimumkan $f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan dibuktikan bahwa, $(\mathbf{X_1} - \mathbf{X_2})^T \nabla f(\mathbf{X_2}) \geq 0$.

Jika $f(\mathbf{X})$ konveks dan S adalah suatu himpunan konveks, maka untuk $\mathbf{X}^*$ sembarang titik minimum, berlaku :

$f(\mathbf{X}^*) \leq f[\lambda\, \mathbf{X} + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{X}^*]$

untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan $0 \leq \lambda \leq 1$

untuk $\lambda > 0$, maka:

$$\frac{\mathbf{f}[\mathbf{X}^* + \lambda(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)] - \mathbf{f}(\mathbf{X}^*)}{\lambda} \geq 0$$

Ambil suatu limit λ untuk mendekati 0, maka diperoleh $(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$

- Syarat cukup ($\Leftarrow$)

Diketahui $(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$, untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan dibuktikan bahwa $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S

Dari teorema 2.3.2 diperoleh :

$f(\mathbf{X})\text{-}\ f(\mathbf{X}^*) \geq (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla f(\mathbf{X_2}) \geq 0$

Maka, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan titik $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ pada himpunan S.

Untuk suatu titik $\mathbf{X}_1$ yang tidak minimum dan, jika untuk beberapa $\mathbf{X}_2$ diperoleh $f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2)$, maka menurut teorema 2.3.2:

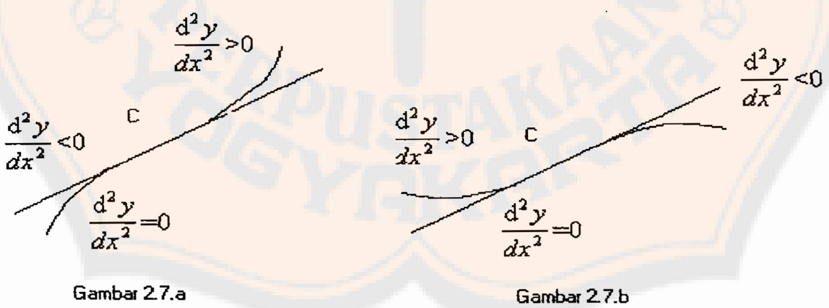
$$0 \geq f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T \nabla f(\mathbf{X}_1) \blacksquare$$

Definisi 2. 3. 5

Suatu titik $\mathbf{X}^* \in$ S disebut sebagai titik pelana dari fungsi $L(\mathbf{X},\lambda)$, jika : $L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*)$ dengan $\lambda^* > 0$ dan untuk semua $X \in S$ dan semua $\lambda \geq 0$.

Jika kondisi di atas dipenuhi, maka fungsi $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ akan memberikan suatu minimum terhadap $f(\mathbf{X}^*)$ dan suatu maksimum terhadap λ^*, yaitu $L(\mathbf{X},\lambda^*)$ mempunyai minimum terhadap $\mathbf{X}$ dan $L(\mathbf{X}^*,\lambda)$ mempunyai maksimum terhadap λ

Syarat titik pelana adalah $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, berlaku untuk n = 1 dan tidak diharuskan dy/dx = 0, pada titik belok itu.



Pada gambar (2.7.a) grafiknya berubah dari konkaf menjadi konveks, sedangkan pada gambar gambar (2.7.b) grafiknya berubah dari konveks menjadi konkaf. Pada gambar tersebut, garis singgung pada titik x = c menembus grafik y = f($\mathbf{X}$) dan titik perpotongan itu dinamakan titik belok.

2.4. Simpleks

3.4.1. Algoritma Simpleks

Sebuah algoritma adalah sebuah himpunan dari cara sistematis untuk mendapatkan penyelesaian suatu masalah. Algoritma simpleks adalah sebuah metode atau cara perhitungan untuk menentukan suatu penyelesaian dasar layak dari sistem persamaan dan menguji penyelesaian tersebut secara optimal.

Algoritma simpleks ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan pemrograman linear yaitu :

Memaksimumkan (meminimumkan),

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{CX} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

terhadap,

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{A\,X} \le \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le b_i \qquad i, = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j, = 1, 2, \ldots, n$$

Sebelum penyelesaian tahap pertama dimulai, perlu dilakukan standarisasi rumusan model, yakni mengubah kendala-kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan. Caranya ialah dengan memasukkan unsur variabel pengetat pada ruas kiri fungsi kendala. Untuk fungsi kendala yang bertanda ≤., dilakukan penambahan variabel senjang (slack variable). Sedangkan untuk fungsi kendala bertanda ≥, dilakukan pengurangan variabel (surplus variable).

Secara umum, fungsi-fungsi kendala yang standar dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \pm S_1 \quad = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \pm S_2 \quad = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \pm S_m \quad = b_m$$

Ringkasannya : $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = b_i$, i= 1, 2, …, m $\qquad s_1, s_2, \ldots, s_m \geq 0$

Hasil-hasil perhitungan pada setiap tahap pengerjaan disajikan ke dalam bentuk tablo (tabel matriks). Berdasarkan angka-angka yang muncul di tablo inilah dilakukan analisis dan ditarik kesimpulan.

Untuk selanjutnya akan disajikan contoh algoritma simpleks dalam persoalan program linear

Memaksimumkan $f(\mathbf{X}) = 5x_1 + 3x_2$ dengan kendala $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan persoalan di atas adalah :

1) Penginisialan tabel simpleks, yaitu mengubah pertidaksamaan di atas menjadi persamaan dengan penambahan variabel slack s_1, s_2, s_3:

   $6x_1 + 2x_2 + s_1 = 36$

   $5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40$

   $2x_1 + 4x_2 + s_3 = 28$

   Kemudian disajikan ke bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 40 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya disajikan dalam tablo simpleks yaitu :

x_1	x_2	S_1	s_2	s_3	Kuantitas
6	2	1	0	0	36
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

………. (2.3.1a)

Indikator

2) Menentukan elemen pivot dan sebuah perubah basis

Untuk menemukan penyelesaian dasar layak yang baru, sebuah variabel baru harus ditentukan untuk menjadi basis dan satu variabel tadi harus dikeluarkan. Cara pemilihan variabel untuk dimasukkan dan variabel untuk dikeluarkan ini disebut perubahan basis.

Indikator negatif dengan nilai mutlak terbesar masuk menjadi basis, maka –5 pada kolom pertama (x_1) adalah indikator negatif dengan nilai mutlak terbesar. Sehingga x_1 menjadi basis dan kolom x_1 menjadi kolom pivot. Lihat anak panah pada (2.3.1a).

Kemudian menentukan pivot baris dengan cara membagi elemen kuantitas dengan elemen pada pivot kolom. Sehingga pivot barisnya adalah $\frac{36}{6}$ karena $\frac{36}{6} < \frac{40}{5} < \frac{28}{2}$. Jadi baris pertama adalah pivot baris, dan elemen pivotnya adalah 6. Karena 6 adalah elemen yang beririsan dengan pivot baris dan pivot kolom.

3) Pivoting

Pivoting adalah suatu cara penyelesaian m persamaan pada suatu variabel m yang akan diperoleh pada basis, sehingga hanya satu variabel baru yang akan masuk ke basis pada setiap proses atau tahap dan tahap ini selalu terjadi pada sebuah matriks identitas.

- Kalikan pivot baris dengan $\frac{1}{6}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Kuantitas
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

- Baris kedua dikurangi 5 kali baris pertama

  baris ketiga dikurangi dengan 2 kali baris pertama

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Kuantitas
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{6}$	1	0	10
0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	16
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	30

Hingga disini penyelesaian dasar $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $x_1 = 6$, $s_2 = 10$, $s_3 = 16$ dan 30 adalah nilai dari fungsi obyektif pada penyelesaian dasar layaknya.

4) Optimisasi

Fungsi obyektif mencapai maksimum ketika sudah tak ada lagi nilai negatif pada indikator di baris terakhir. Karena masih terdapat $-\frac{4}{3}$ pada indikator maka kolom 2 menjadi kolom pivot dan rasio paling kecil adalah pada baris kedua, sehingga $\frac{10}{3}$ menjadi elemen pivot baru

- Kalikan pivot baris kedua dengan $\frac{3}{10}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Kuantitas
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	0	3
0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	16
0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	0	30

- Baris pertama dikurangi $\frac{1}{3}$ kali baris kedua baris ketiga dikurangi dengan $\frac{10}{3}$ kali baris ketiga dan baris kedua kali dengan $\frac{4}{3}$ kemudian tambahkan baris keempat

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Kuantitas
1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{10}$	0	3
0	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	6
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0	34

Pada penyelesaian dasar layak yang ketiga ini $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $s_3 = 6$ mempunyai nilai fungsi obyektif 34 karena sudah tidak ada nilai negatif pada indikator maka 34 adalah nilai fungsi maksimumnya.

Selanjutnya akan disajikan contoh algoritma simpleks untuk persoalan pemrograman linear yaitu meminimumkan.

Minimumkan $f(x) = 2x_1 + 4x_2$ dengan kendala $2x_1 + x_2 \leq 14$

$x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Langkah-langkah untuk menyelesaikannya adalah :

1) Penginisialan tabel simpleks, yaitu mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambahkan variabel slack.

$2x_1 + x_2 - s_1 = 14$

$x_1 + x_2 - s_2 = 12$

$x_1 + 3x_2 - s_3 = 18$

Selanjutnya diubah ke dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Pada matriks di atas jika $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$, penyelesaian dasarnya tidak layak karena $s_1 = -14$, $s_2 = -12$, $s_1 = -18$, untuk itu perlu ditambahkan variabel artifisial yakni sebuah $A_i \geq 0$ untuk membuat penginisialan tabel simpleks menjadi penyelesaian dasar layak.

Selanjutnya bentuk matriks setelah penambahan variabel artifisial adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dibawa ke dalam tablo simpleks untuk "meminimumkan" fungsi obyektif disini mempunyai koefisien nol untuk variabel surplusnya dan koefisien M untuk variabel artifisial dimana M adalah sebuah bilangan besar yang mungkin untuk mencapai solusi yang optimal.

x_1	x_2	S_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
2	1	–1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	–1	0	0	1	0	12
1	3	0	0	–1	0	0	1	18
–2	–4	0	0	0	–M	–M	–M	

Indikator

Selanjutnya menghilangkan M dari kolom-kolom variabel artifisial, dengan menambahkan M (baris 1 + baris 2 + baris 3) dengan baris keempat.

x_1	x_2	S_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
2	1	–1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	–1	0	0	1	0	12
1	3	0	0	–1	0	0	1	18
4M–2	5M–4 ↑	–M	–M	–M	0	0	0	44 M

Dari tablo di atas penyelesaian dasar layak yang pertama adalah $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$ maka penyelesaian dasar layaknya adalah jika $A_1 = 14$, $A_2 = 12$, $A_3 = 18$ dengan fungsi obyektifnya = 44 M

2) Menentukan elemen pivot

Untuk meminimumkan, indikator positif terbesar menentukan pivot kolom dan variabel itu masuk menjadi basis sehingga 5 M – 4 adalah indikator positif terbesarnya sehingga x_2 masuk ke basis dan kolom x_2 menjadi pivot kolom. Pivot baris dan variabel yang meinggalkan basis ditentukan dengan hasil rasio terkecil dengan cara membagi elemen kuantitas dengan elemen pada pivot kolom sehingga $\frac{18}{3} < \frac{12}{1} < \frac{14}{1}$ dan $\frac{18}{3}$ adalah hasil rasio terkecil. Baris ketiga menjadi pivot baris dan A_3 meninggalkan basis. Jadi elemen pivotnya adalah 3 karena beririsan antara pivot kolom dengan pivot baris.

3) Pivoting

- Kalikan baris ke 3 dengan $\frac{1}{3}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
2	1	–1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	–1	0	0	1	0	12
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6
4M–2	5M–4	–M	–M	–M	0	0	0	44 M

- Baris kedua dikurangi baris ketiga

  Baris pertama dikurangi baris ketiga

  Baris keempat dikurangi {(5M – 4) x baris ketiga}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
$\frac{5}{3}$	0	–1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	8
$\frac{2}{3}$	0	0	–1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6
$\frac{7M-2}{3}$ ↑	0	–M	–M	2M–$\frac{4}{3}$	0	0	–5M+$\frac{4}{3}$	14 M + 24

- Karena masih terdapat indikator yang positif maka iterasi dilanjutkan dengan elemen pivot baru yaitu $5/3$ sehingga x_1 masuk menjadi basis dan A_1 meninggalkan basis. Kalikan baris pertama dengan $3/5$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
1	0	-1	0	$1/5$	$3/5$	0	$-1/5$	8
$2/3$	0	0	-1	$1/3$	0	1	$-1/3$	6
$1/3$	1	0	0	$-1/3$	0	0	$1/3$	6
$\frac{7M-2}{3}$	0	$-M$	$-M$	$\frac{2M-4}{3}$	0	0	$\frac{-5M+2}{3}$	$14M+24$

- Baris kedua dikurangi ($\frac{2}{3}$ kali baris pertama) Baris ketiga dikurangi kali ($\frac{1}{3}$ kali baris pertama) Baris ke empat dikurangi ($\frac{7M-2}{3}$ kali baris pertama)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	A_2	a_3	Kuantitas
1	0	$-3/5$	0	$1/5$	$3/5$	0	$-1/5$	$24/5$
0	0	$2/5$	-1	$1/5$	$-2/5$	1	$-1/3$	$14/5$
0	1	$1/5$	0	$-2/5$	$-1/5$	0	$1/3$	$22/5$
0	0	$\frac{2M-2}{5}$	$-M$	$\frac{M-6}{5}$	$\frac{-7M+2}{5}$	0	$\frac{-6M+6}{5}$	$\frac{14M+136}{5}$

- Kalikan baris kedua adengan $5/2$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
1	0	$-3/5$	0	$1/5$	$3/5$	0	$-1/5$	$24/5$
0	0	1	$-5/2$	$1/2$	-1	$5/2$	$-1/5$	$14/5$
0	1	$1/5$	0	$-2/5$	$-1/5$	0	$2/5$	$22/5$
0	0	$\frac{2M-2}{5}$	$-M$	$\frac{M-6}{5}$	$\frac{-7M+2}{5}$	0	$\frac{-6M+6}{5}$	$\frac{14M+136}{5}$

- Baris kedua dikurangi ($\frac{3}{5}$ kali baris kedua) Baris ketiga dikurangi kali ($\frac{1}{5}$ kali baris kedua) Baris ke empat dikurangi ($\frac{2M-2}{5}$ kali baris kedua)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	Kuantitas
1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	9
0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
0	0	0	-1	-1	$-M$	$-M+1$	$-M+1$	30

Sekarang semua indikator sudah bernilai negatif dan ditemukan penyelesaian dasar layak yaitu $\bar{x}_1 = 9$, $\bar{x}_2 = 3$, $\bar{s}_1 = 7$, $\bar{s}_2 = 0$, $\bar{s}_3 = 0$, dengan nilai fungsi obyektif yaitu $\bar{c} = 30$.

3.2.2. Dualitas

Kendala utama suatu Program Linear dapat dibuat dengan hubungan ≥, atau ≤, atau =. Untuk keperluan algoritma simpleks semua kendala diubah ke hubungan =, yaitu dengan menyisipkan perubahan pengetat seperti variabel slack, variabel artifisial. Untuk keperluan dualitas maka kendala utama suatu soal perlu diubah sehingga semua hubungannya berbentuk ≤, atau semua berbentuk ≥.

Akhirnya dapat disusun pola-pola maksimum-baku dan minimum-baku sebagai berikut :

Pola maksimum-baku :

Mencari $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

Memenuhi $\mathbf{AX \le B}$

Dan memaksimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{CX}$

Pola minimum-baku :

Mencari $\mathbf{X \ge 0}$

Memenuhi $\mathbf{AX \ge B}$

Dan meminimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{CX}$

Contoh :

Maksimumkan

$f(\mathbf{X}) = g_1x_1 + g_2\,x_2 + g_3\,x_3$ dengan kendala $a_{11}\,x_1 + a_{11}\,x_1 + a_{11}\,x_1 \le b_1$

$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_1 + a_{23}\,x_1 \le b_2$

$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_1 + a_{33}\,x_1 \le b_3$

$x_1, x_2, x_3, \ge 0$

maka dualitasnya adalah :

minimumkan

$f(\mathbf{X}) = b_1z_1 + b_2\,z_2 + b_3\,z_3$ dengan kenadala : $a_{11}\,z_1 + a_{11}\,z_1 + a_{11}\,z_1 \ge g_1$

$a_{21}\,z_1 + a_{22}\,z_1 + a_{23}\,z_1 \ge g_2$

$a_{31}\,z_1 + a_{32}\,z_1 + a_{33}\,z_1 \ge g_3$

$z_1, z_2, z_3, \ge 0$

Cara mengubah suatu persoalan Program Linear berpola minimum-baku menjadi berpola maksimum-baku yaitu kendala utama yang relasinya ($\ge$) dikalikan dengan -1, sedangkan fungsi obyektif diambil lawannya. Demikian pula sebaliknya.

Jadi,

Minimumkan $f(\mathbf{X}) = \mathbf{CX}$

adalah ekuivalen dengan

Maksimumkan $-f(\mathbf{X}) = -\mathbf{CX}$

Kedua rumusan ini menghasilkan penyelesaian optimal yang sama.

Alasan mengapa kedua rumusan ini adalah ekuivalen adalah bahwa semakin kecil $f(\mathbf{X})$, semakin besar $-f(\mathbf{X})$, sehingga penyelesaian yang menghasilkan nilai $f(\mathbf{X})$ terkecil dalam seluruh daerah layak juga harus menghasilkan nilai $-f(\mathbf{X})$ yang terbesar dalam daerah ini.

BAB III

PEMROGRAMAN KUADRATIK DENGAN ALGORITMA PIVOTING KOMPLEMENTER

3.1 Pemrograman Konveks

Persoalan pemrograman konveks adalah suatu persoalan optimasi dengan kendala, di mana semua fungsi obyektifnya adalah fungsi-fungsi konveks yang kontinu dan diferensiabel. Bentuk umum dari persoalan pemrograman konveks adalah :

$$\begin{aligned} &\textit{Minimumkan}, \quad f(\mathbf{X}) \\ &\textit{kendala} \ \ g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ ; untuk setiap} \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &\qquad \mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0 \text{ ; untuk setiap} \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1)$$

di mana, $f(\mathbf{X})$ dan semua kendala $g_i(\mathbf{X})$ adalah fungsi-fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu. (Kunzi, et.al, Non Linear Programming, hal : 303)

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, didefinisikan Fungsi Langrange, sebagai berikut :

$$L(\mathbf{X},\lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}) \quad \ldots\ldots\ldots (3.1.b)$$

di mana, $\lambda = \{\lambda_i\}$ disebut sebagai pengali Langrange (*Langrange Multiplier*), untuk setiap i = 1, 2,….,m. Sehingga, terbentuk fungsi yang baru, yaitu permasalahan titik pelana.

Masalah titik pelana adalah suatu persoalan untuk menentukan vektor-vektor $\mathbf{X}^*$ dan λ^* dari fungsi Langrange $L(\mathbf{X},\lambda)$, sedemikian sehingga berlaku:

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

di mana, $\mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,….,n dan $\lambda = \{\lambda i\} \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,… ,m. Titik $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ dinyatakan sebagai suatu titik pelana yang positif.

Titik $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ pada persoalan titik pelana dan solusi optimal pada persoalan pemrograman konveks dihubungkan dengan suatu teorema, sebagai berikut:

Teorema 3.1.1 (Teorema Kuhn Tucker)

Vektor $\mathbf{X}^* = \{x_j\}$, untuk setiap j =1, 2,….n adalah suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks, jika dan hanya jika, terdapat suatu vektor $\lambda = \{\lambda_i\}$ untuk setiap i =1, 2,….m sedemikian sehingga $(\mathbf{X}^*, \lambda^*) = (x_j^*, \lambda_i^*)$ merupakan suatu solusi untuk persoalan titik pelana. (Kunzi, et. al, Non Linear Programing, hal. 303)

Bukti :

- *Syarat cukup* ($\Rightarrow$)

Diketahui $(\mathbf{X}^*, \lambda^*) = (x_j^*, \lambda_i^*)$ adalah suatu solusi untuk persoalan titik pelana dan dibuktikan bahwa $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ untuk setiap j = 1, 2,…n adalah suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks, dengan memperoleh suatu vektor $\lambda = \{\lambda_i\}$

Bukti syarat cukup ditunjukkan dengan pernyataan bahwa kondisi titik pelana merupakan syarat cukup untuk menjamin $f(\mathbf{X}^*)$ sebagai salah satu solusi untuk persoalan pemrograman konveks. Untuk titik pelana $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dan persamaan (3.1.b), maka dari pertidaksamaan (3.2) diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}) \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

di mana, $\mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,….,n dan $\lambda = \{\lambda_i\} \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2….m.

Dari hubungan pertidaksamaan sebelah kiri pada persamaan (3.3), dan untuk memenuhi semua $\{\lambda_i\} \geq 0$, maka $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ dan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ untuk setiap i = 1, 2, …, m

Dari pertidaksamaan sebelah kiri pada persamaan (3.3) terdapat hubungan :

$$f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}^*) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \quad \text{.......................................}(3.4)$$

Jika $g_i(\mathbf{X}^*) > 0$, maka pilih $\lambda > 0$ sehingga persamaan (3.4) tidak dipenuhi dengan demikian $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk setiap, i =1, 2,….m. Dan jika $x_j^* \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,…n. maka $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ memenuhi kendala-kendala pada permasalahan-permasalahan konveks persamaan (3.1). Persamaan (3.4) juga harus memenuhi $\lambda_i = 0$, sehingga diperoleh : $0 \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*)$. Karena $\lambda_i^* \geq 0$ dan $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ maka $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$. Sehingga mengakibatkan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) = 0$, untuk setiap i = 1, 2, …, m. Dengan demikian, $\lambda_i^* = 0$ atau $g_i(\mathbf{X}^*) = 0$ atau kedua-duanya sama dengan nol.

Dari hubungan pertidaksamaan sebelah kanan pada persamaan (3.3), yaitu:

$$f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i g_i(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}^*) \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i g_i(\mathbf{X})$$

$$\text{atau } f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X})$$

di mana, $X = \{x_j\} \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,…n.. Dan jika $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,…m. maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(X)$ untuk setiap $x_j \geq 0$ dan $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$. Dengan demikian, selama $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk setiap i = 1, 2,…m, maka $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ adalah suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks.

- *Syarat perlu* ($\Rightarrow$)

Diketahui $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ untuk setiap j = 1, 2,.….n adalah suatu solusi untuk persoalan pemrograman konveks, jika dan hanya jika, terdapat suatu vektor $\lambda = \{\lambda_i\}$dan dibuktikan bahwa $\{\mathbf{X}^*,\lambda^*) = (x_j^*,\lambda_i^*)$ adalah suatu solusi untuk persoalan titik pelana.

Bukti syarat perlu ditunjukkan dengan memisalkan $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ adalah untuk solusi persamaan (3.1). Maka terdapat $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}$, dimana $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,…,m sedemikian sehingga $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ memenuhi persoalan titik pelana. Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, maka dibentuk 2 himpunan titik, yaitu $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$, yang berada di R^{m+1} dengan vektor-vektor $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \ldots y_m)$, sebagai berikut:

$\mathbf{K}_1 = \{\mathbf{Y} \mid f(\mathbf{X}) \leq y_0,\ g_i(\mathbf{X}) \leq y_i$; untuk setiap i =1, 2,….m dan terdapat paling sedikit satu $\mathbf{X} = \{x_j\}$ di mana $x_j \geq 0$ untuk j = 1, 2, …..,n

$\mathbf{K}_2 = \{\mathbf{Y} \mid f(\mathbf{X}^*) > y_0,\ 0 > y_i$, untuk setiap i = 1, 2,….m}

Karena $f(\mathbf{X})$ dan semua kendala $g_i(\mathbf{X})$ adalah konveks, maka $\mathbf{K}_1$ adalah suatu himpunan konveks. $\mathbf{K}_2$ juga merupakan himpunan konveks, karena $\mathbf{K}_2$ dinyatakan sebagai himpunan konveks. Karena $\mathbf{K}_2$ dinyatakan sebagai himpunan bagian yang terbuka di R^{m+1}, yang dibatasi oleh bidang-bidang terhadap sumbu koordinat R^{m+1}. Karena $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\}$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ untuk semua $x_j \geq 0$, maka $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ tidak mempunyai titik-titik yang bersamaan artinya $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 = \varnothing$. Sehingga, terdapat suatu vektor $\mathbf{a} \neq 0$ dan suatu skalar α sedemikian sehingga ; $\mathbf{aY} = \alpha$ memisahkan $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$, yaitu :

$$\mathbf{aY_1} \geq \mathbf{aY_2} \quad \text{.......} (3.5)$$

untuk semua $\mathbf{Y_1} \in \mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{Y_2} \in \mathbf{K}_2$ karena setiap komponen dari $\mathbf{Y_2}$ dapat dibuat dengan berubah-ubah, maka dapat disimpulkan bahwa $a_i \geq 0$, maka untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$. Jika $a_1 < 0$ untuk beberapa i, maka hubungan komponen dari $\mathbf{Y_2}$ dapat ditentukan sesuai dengan yang dinginkan, sehingga persamaan (3.5) tidak dipenuhi. Jika dipilih $\mathbf{Y_1} = [f(\mathbf{X}), g_1(\mathbf{X}), \ldots, g_m(\mathbf{X})]$ dan $\mathbf{Y_2} = [f(\mathbf{X}), 0, 0, \ldots, 0]$. Sehingga persamaan (3.5) dipenuhi untuk semua titik batas dari $\mathbf{K}_2$, maka diperoleh :

$$a_o f(X) + \sum_{i=1}^{m} a_i g_i(X) \geq a_o f(\mathbf{X}^*) \quad \text{.......} (3.6)$$

di mana, $x_j \geq 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$. Jika $a_o = 0$ maka persamaan (3.6) menjadi:

$$a_1 g_1(\mathbf{x}) + \ldots + a_m g_m(\mathbf{X}) \geq 0 \quad \text{.......} (3.7)$$

di mana, $a_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan ada elemen $a_i \neq 0$. Dan diasumsikan terhadap $\mathbf{X} = \{x_j\}$, di mana $\mathbf{X} \geq 0$, misalkan $\overline{\mathbf{X}} = \{\overline{x}_j\}$, sedemikian sehingga $g_i(\overline{\mathbf{X}})$

< 0 untuk setiap i =1, 2,..., m, maka persamamaan (3.7) menjadi lebih kecil dari nol. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $a_o > 0$. Dan hasil bagi persamaan (3.6) dengan a_o menjadi :

$$f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i (\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*) \quad \text{......}(3.8)$$

dengan, $\lambda_i^* = \dfrac{a_i}{a_o} \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,..., m. Sehingga persamaan (3.8) dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\mathbf{X},\lambda^*) \geq f(\mathbf{X}^*) \quad \text{......}(3.9)$$

untuk setiap $\mathbf{X} \geq 0$ dan diberikan $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$, maka persamaan (3.8) akan menjadi

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \geq f(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X}^*)$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i (\mathbf{X}^*) \geq 0$$

Untuk semua $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ dan setiap $\lambda_i^* \geq 0$ maka diperoleh $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i (\mathbf{X}^*) \leq 0$,

sehingga $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i (\mathbf{X}^*) = 0$, untuk setiap i = 1, 2,..., m. Dengan demikian,

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) = f(\mathbf{X}^*) \quad \text{......}(3.10)$$

Demikian pula untuk semua $\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk setiap i = 1, 2,... m maka :

$$f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i (\mathbf{X}^*) = L(\mathbf{X}^*,\lambda) \quad \text{......}(3.11)$$

Dari persamaan (3.9) dan persamaan (3.11) diperoleh

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq f(\mathbf{X}^*) = L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) = f(\mathbf{X}^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*)$$

Atau

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*) \qquad \blacksquare$$

Pembuktian teorema (3.11) di atas menjelaskan bahwa, jika $f(\mathbf{X})$ dan $g_i(\mathbf{X})$ (untuk setiap i = 1, 2,…,m) adalah fungsi-fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu, maka pertidaksamaan titik pelana adalah ekivalen dengan kondisi-kondisi yang merupakan syarat-syarat perlu dan cukup untuk menetapkan suatu solusi yang optimal dari suatu persoalan pemrograman konveks. Kondisi-kondisi optimalitas tersebut dinyatakan dalam suatu teorema sebagai berikut :

Teorema 3.1.2 (Kondisi Optimalitas Kuhn Tucker)

Jika $f(\mathbf{X})$ dan semua $g_i(\mathbf{X})$ adalah fungsi-fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu (untuk setiap i = 1, 2,…,m) dan $\mathbf{X} = \{x_j\}$ untuk setiap j = 1, 2,…, n, maka syarat perlu dan cukup untuk setiap titik $(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ yang memenuhi persoalan titik pelana, $L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*)$ adalah (Kunzi, et. al, Non Linear Programing, Teo 10 ; hal. 308)

1. $\dfrac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_j} = \dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \dfrac{\sum_{m=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_i^* \partial \mathbf{g}(\mathbf{X}^*)}{\partial \mathbf{x}_j} \geq \mathbf{0}$ ....(3.12a)

2. $(X^*)^T \left[\dfrac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}}\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}^*_j \left\{\dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j}\right\} = 0$ ....(3.12b)

3. $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\} \geq 0$ ....(3.12c)

4. $\dfrac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(\boldsymbol{X}^*) \leq 0$ ....(3.13a)

5. $\lambda^*\left[\dfrac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda}\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \mathbf{g}_i(\mathbf{X}^*) = 0$ ....(3.13b)

6. $\lambda^* = \{\lambda_i *\} \geq 0$ ....(3.13c)

untuk setiap i = 1, 2,…,m dan j = 1, 2,…,n.

Untuk setiap $\{x_j^*\} \geq 0$ dan dari persamaan (3.12a dan c), maka diperoleh persamaan (3.12b) adalah,

$$x_j^* \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} \right\} = 0$$

Demikian pula untuk persamaan (3.13a dan c), sehingga mengakibatkan persamaan (3.13b) menjadi :

$$\lambda_i^* \, g_i(\mathbf{X}^*) = 0$$

Bukti :

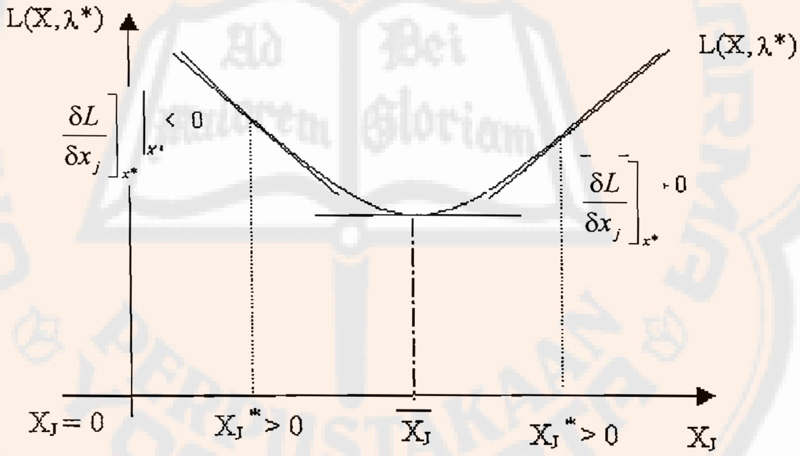
Syarat Perlu Kuhn Tucker ($\Leftarrow$)

Diketahui($\mathbf{X}^*$,λ^*) adalah suatu solusi titik pelana dan dibuktikan bahwa persamaan (3.12 : a,b, dan c) dan persamaan (3.13a, b dan c) masing-masing menyatakan bahwa, $L(\mathbf{X},\lambda^*)$ mempunyai suatu minimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ dan $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ mempunyai suatu maksimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$, sedemikian sehingga berlaku :

$$L(\mathbf{X}^*,\lambda) \leq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*)$$

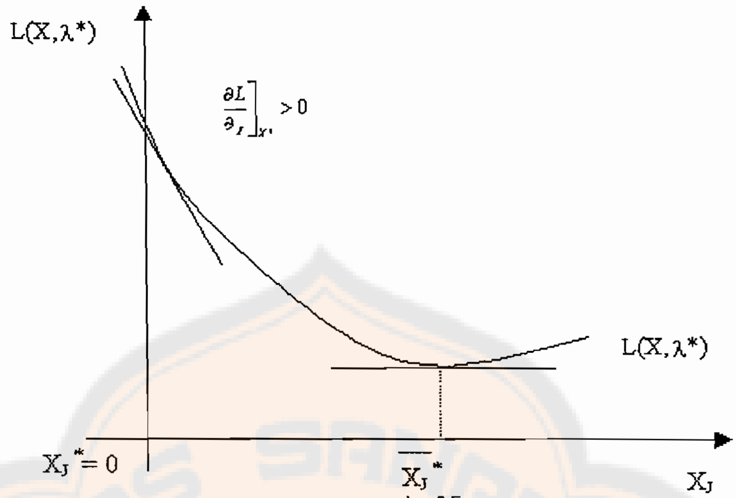
Untuk membuktikan bahwa persamaan (3.12: a,b dan c) adalah syarat perlu untuk $L(\mathbf{X},\lambda^*)$ mempunyai suatu minimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$, diasumsikan bahwa persamaan (3.12 a dan b) tidak dipenuhi oleh $\mathbf{X}_j^* \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,…,n. Untuk $\lambda = \lambda^*$, dinyatakan bahwa $L(\mathbf{X},\lambda^*)$ adalah fungsi konveks dari **X**. Jika ada $x_j^* > 0$ merupakan titik interior dan $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} \neq 0$, maka $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ dapat dikurangi dengan mengambil suatu nilai yang berbeda dari **X,** misalnya $\overline{\mathbf{X}}$, sehingga $L(\overline{\mathbf{X}},\lambda^*) < L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$

Perhatikan gambar 3.4 dibawah ini, gambar tersebut adalah ilustrasi untuk fungsi konveks satu variabel



gambar 3.4

Jika $x_j^* = 0$ untuk setiap j = 1, 2,…, n yaitu suatu titik batas, dan $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} < 0$, maka dapat diperoleh $\overline{\mathbf{x}}_j \geq 0$ untuk setiap j = 1, 2,.., n, sedemikian sehingga $L(\overline{\mathbf{X}},\lambda^*) < L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$. Perhatikan gambar (3.5) dibawah ini :



gambar 3.5

Kondisi $L(\overline{\mathbf{X}},\lambda^*) < L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ ini tidak dapat terjadi selama L(**X**,λ) di minimumkan oleh $\mathbf{X}^*$ untuk selama λ . Jadi, jika $x_j^* > 0$ untuk setiap j = 1 ,2 ,… n, maka harus berlaku : $\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} = 0$ demikian pula untuk $x_j^* = 0$ maka : $\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} \geq 0$ (dari teorema 2.4.3 pada bab terdahulu, untuk membuktikan bahwa, $\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} = 0$ dengan, $x_j^* > 0$ dan $\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{x}_j} \geq 0$ dan untuk setiap $x_j^* = 0$. Dengan demikian persamaan (3.12 a dan b) harus dipenuhi demikian pula untuk $x_j^* > 0$, demikian juga persamaan (3.12c), dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa persamaan (3.13, a, b dan c) adalah syarat perlu untuk $L(\mathbf{X}^*,\lambda)$ mempunyai suatu maksimum lokal pada $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$.

Untuk $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ dan diketahui bahwa $L(\mathbf{X}^*,\lambda)$ adalah fungsi linear dari λ_i dan untuk setiap i = 1, 2,…, m. Dan dari persamaan (3.4) diketahui bahwa untuk semua $\lambda \geq 0$ dan $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$, berlaku :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(X^*\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} g_i\left(X^*\right);\ \text{untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.14)$$

Jika $\dfrac{\partial L\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} = g_i\left(X^*\right)$, maka untuk $\dfrac{\partial L\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} > 0$, berlaku, g_i (X^*) > 0 untuk setiap i = 1, 2,…, m. Dari persamaan (3.14), jika g_i (X^*) > 0 maka dapat dipilih λ_i yang sangat besar sedemikian sehingga pada persamaaan (3.14) tidak dipenuhi. Dengan demikian $\dfrac{\partial L\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} = g_i\left(X^*\right) \leq 0$, selanjutnya dari teorema (3.11) telah dibuktikan bahwa $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(X^*\right) = 0$ dan $\lambda_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,…m. Dengan demikian persamaan (3.13:a,b, dan c) terpenuhi.

Syarat cukup Kuhn Tucker ($\Rightarrow$)

Diketahui persamaan (3.12 : a,b dan c) dan dibuktikan bahwa persamaan (3.12a, b, dan c) dan dibuktikan bahwa persamaan (3.13a, b dan c) dan persamaan (3.13 : a,b dan c) merupakan syarat cukup untuk memenuhi kendala-kendala dari persoalan titik pelana, yaitu : $L(X^*,\lambda) \leq L(X^*,\lambda^*) \leq L(X,\lambda^*)$

Bukti syarat cukup Khun Tucker adalah sebagai berikut

Menurut teorema (2.42) pada bab terdahulu, dan $L(X,\lambda^*)$ adalah fungsi konveks dari **X**, maka diperoleh :

$$L(X,\lambda^*) \geq L(X^*,\lambda^*) + (X - X^*)^T \left[\frac{\partial L(X^*,\lambda^*)}{\partial X}\right]$$

atau

$$L(\mathbf{X},\lambda^*) \geq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) + \mathbf{X}^T \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{X}}\right] - (\mathbf{X}^*)^T \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{X}}\right] \quad \text{............(3.15)}$$

dari persamaan (3.12), a dan b) dan $\mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0$, untuk setiap j = 1, 2,….n, dapat diketahui bahwa : $\mathbf{X}^T \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{X}}\right] \geq 0$ dan $(\mathbf{X}^*)^T \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \mathbf{X}}\right] = 0$ sehingga persamaan (3.15) menjadi positif sehingga dapat ditulis, $L(\mathbf{X},\lambda^*) \geq L(\mathbf{X}^*,\lambda^*)$ Demikian pula karena $L(\mathbf{X},\lambda^*)$ juga merupakan fungsi konveks yang linear dari λ.

Maka diperoleh

$$L(\mathbf{X},\lambda^*) = L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) + (\lambda - \lambda^*) \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda^*}\right]$$

Atau,

$$L(\mathbf{X},\lambda^*) = L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) + \lambda \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda^*}\right] - \lambda^* \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda^*}\right] \quad \text{................(3.16)}$$

dari persamaan (3.13 a dan b) dan $\lambda = \{\lambda_i\} \geq 0$, untuk setiap i = 1, 2,…m, dapat diketahui bahwa $\lambda \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda^*}\right] \leq 0$, dan $\lambda^* \left[\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}^*,\lambda^*)}{\partial \lambda^*}\right] = 0$, sehingga persamaan (3.16) menjadi $L(\mathbf{X}^*,\lambda)$ $L(\mathbf{X}^*,\lambda^*) \leq L(\mathbf{X},\lambda^*)$.

Demikian juga untuk $\mathbf{X}_j^* \geq 0$ dan setiap j = 1, 2, …, m, dan $\mathbf{X}_i^* \geq 0$ untuk setiap i = 1, 2,…, m memenuhi kendala-kendala dari titik pelana. ■

3.2. Persoalan Komplementer Linear

Persoalan komplementer linear merupakan teknik pemrograman matematika yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pemrograman non-linear. Penyelesaian persoalan komplementer linear ini menggunakan *Algoritma pivoting komplementer*, yaitu suatu algoritma yang merupakan modifikasi dari algoritma simpleks dengan metode iterasi yang disajikan dalam bentuk tabel.

Misalkan **M** adalah matriks yang berordo (pxp) dan **q** adalah suatu vektor yang berdimensi p. Persoalan linear komplementer didefinisikan sebagai suatu persoalan untuk menentukan vektor-vektor **w** dan **z** yang dinyatakan, sebagai berikut.

$$\mathbf{w}\text{-}\mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{q} \quad \text{.......} (3.17a)$$

$$\mathbf{w_j} \geq 0, \mathbf{z_j} \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{.......} (3.17b)$$

$$\mathbf{w_j}\,\mathbf{z_j} = 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{.......} (3.17c)$$

Dalam hal ini ($\mathbf{w}_j$,$\mathbf{z}_j$) adalah suatu pasangan dari variabel-variabel komplementer. Suatu solusi (**w**,**z**) untuk sistem persaman (3.17a) di atas disebut sebagai penyelesaian layak dasar komplementer (*complementary basic feasible solution*) jika (**w**,**z**) merupakan solusi fisibel basis untuk persamaan (3.17 a dan b), dan salah satu variabel dari pasangan ($\mathbf{w_j}$,$\mathbf{z_j}$) adalah variabel basis, untuk setiap j = 1, 2,..., p.

Jika **q** = {$\mathbf{q_i}$}≥ 0 untuk setiap i = 1, 2, ..., p, maka suatu solusi yang memenuhi sistem persamaan (3.17 a, b dan c), diperoleh dengan memisalkan **w** = **q** dan **z** = **0**, jika **q** ≥ **0** tidak terpenuhi maka ditambah satu kolom baru yang dinamakan variabel artifisial untuk beberapa i, dan memenuhi persamaan:

$$\mathbf{w}\text{-}\mathbf{M}\ \mathbf{z}\text{-}\mathbf{1}\mathbf{z_o} = \mathbf{q} \quad \text{.......} (3.18a)$$

$$\mathbf{w_j} \geq 0, \mathbf{z_j} \geq 0, \mathbf{z_0} \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{.......} (3.18b)$$

$$\mathbf{w_j}\,\mathbf{z_j} = 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{.......} (3.18c)$$

Dengan, $\mathbf{z_0}$ adalah suatu variabel artifisial yang mempunyai koefesien sebesar 1(satu).

Untuk persamaan (3.18: a , b dan c) solusi fisibel($\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z_0}$) disebut sebagai penyelesaian layak dasar hampir komplementer (*almost complementary feasible basic solution*), jika:

1. ($\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z_0}$) adalah solusi fisibel basis untuk persamaan (3.18a) dan (3.18b).
2. Baik $\mathbf{w_s}$ maupun $\mathbf{z_s}$ adalah bukan variabel basis untuk beberapa S$\in$ {1, 2,…., p).
3. $\mathbf{z_0}$ adalah variabel basis dan tepat satu variabel dari pasangan komplementer ($\mathbf{w_j}, \mathbf{z_j}$) adalah variabel basis untuk setiap (j = 1, 2,…., p) dan j $\notin$ s

Jika ($\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z_0}$) adalah suatu penyelesaian layak dasar hampir komplementer dengan $\mathbf{w_s}$ dan $\mathbf{z_s}$ sebagai varibel-variabel lengkap, maka akan terdapat suatu penyelesaian dasar tetangga hampir komplementer (*adjacent almost complementari basic feasible solution*) yaitu $(\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{\mathbf{z}}_0, \hat{\mathbf{z}}_0)$, yang diperoleh dengan memasukkan salah satu variabel non-basis $\mathbf{w_s}$ atau $\mathbf{z_s}$ ke dalam basis jika *pivoting* mengendalikan suatu variabel basis yang lain dari pada $\mathbf{z_0}$.

Dari definisi diatas, jelas bahwa setiap penyelesaian layak dasar hampir komplementer mempunyai paling banyak 2 buah penyelesaian dasar tetangga hampir komplementer. Jika peningkatan $\mathbf{w_s}$ atau $\mathbf{z_s}$ mengendalikan $\mathbf{z_0}$ keluar dari basis atau menghasilkan suatu sinar (*Ray*) dari sistem yang didefinisikan persamaan (3.18 a dan b) maka akan diperoleh kurang dari 2 penyelesaian dasar tetangga hampir komplementer.

3.3. Algoritma Pivoting Komplementer

Algoritma Pivoting Komplementar dikembangkan untuk memecahkan masalah komplementer linear. Pemasukan suatu variabel artifisial $\mathbf{z_0}$ dalam proses perhitungan akan memberikan suatu kondisi yang menyebabkan perhitungan algoritma ini bergerak di antara penyelesaian layak dasar komplementer, atau ditemukannya suatu petunjuk arah tak terbatas dari daerah yang didefinisikan oleh sistem persamaan (3.18 a dan c)

Langkah-langkah yang harus dilakukan pada Algoritma Pivoting Komplementer adalah sebagai berikut :

Langkah awal

Jika $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ untuk setiap i = 1, 2,..., p, maka proses perhitungan dihentikan sehingga $(\mathbf{w},\mathbf{z}) = (\mathbf{q},\mathbf{0})$ adalah suatu solusi fisibel basis komplementer jika $\mathbf{q_i} < 0$ untuk beberapa i, maka sistem yang didefinisikan oleh persamaan (3.18 a dan b) akan berlaku, dan proses perhitungan dapat dinyatakan dalam suatu tabel, sebagai berikut :

Basis	w-Mz – 1z₀							RHS
	$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$	$\mathbf{w_p}$	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_p}$	$\mathbf{z_0}$	**Q**
$\mathbf{w_1}$	1	0	0	M_{11}	M_{12}	M_{1p}	-1	q_1
$\mathbf{w_2}$	0	1	0	M_{21}	M_{22}	M_{2p}	-1	q_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\mathbf{w_p}$	0	0	1	M_{p1}	M_{p2}	M_{pp}	-1	q_p

Misalkan $-q_s$ = maksimum {$-q_i$: $1 \le i \le p$. Maka perbarui tabel dengan pivoting pada basis s dari kolom $\mathbf{z_o}$, sehingga varibel-variabel basis $\mathbf{z_o}$ dan $\mathbf{w_j}$ adalah positif untuk j =1, 2,…., p dan j ≠ s. Dalam hal ini, baris s disebut sebagai persamaan pivot, kolom $\mathbf{z_o}$ disebut sebagai kolom pivot dan koefisien yang terletak pada perpotongan antara persamaan pivot dan kolom pivot disebut elemen pivot. Variabel $\mathbf{z_o}$ merupakan variabel masukan (*entering variable*) yang akan memasuki basis pada persamaan pivot dan meninggalkan basis sebagai variabel keluaran (*leaving variable*).

Pembaharuan tabel dengan *pivoting* ini dilakukan berdasarkan metode gauss jordan. Metode ini akan mengubah persamaan-persamaan basis dalam 2 tipe perhitungan, yaitu:

1. **Tipe-1** untuk persamaan pivot/baris pivot

   Persamaan pivot baru = (pers. Pivot lama) : (elemen pivot)

2. **Tipe-2** persaman-persamaan basis lainnya

   Pers. baru = (Pers. Lama)- [(koef. kolom entering) x (pers. Pivot baru)]

   Selanjutnya misalkan $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_s}$ proses perhitungan dilanjutkan ke langkah utama.

Langkah utama :

1. Misalkan $\mathbf{d_s}$, adalah kolom pivot untuk $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_s}$ jika $\mathbf{d_s} \le \mathbf{0}$, maka prosedur perhitungan dilanjutkan kelangkah 4. Jika sebaliknya suatu indeks r berdasarkan pengujian rasio minimum,

$$\frac{\bar{q}_r}{d_{rs}} = \text{minimum}\left\{\frac{\bar{q}_r}{d_{rs}} : d_{is} \rangle 0\right\} \qquad ,\text{dan } 1 \le i \le p$$

dimana $\overline{q}$ adalah kolom right hand side (RHS) untuk $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_s}$ yang menunjukan nilai-nilai dari variabel basis

Jika hasil dari pengujian rasio minimum menunjukan bahwa varibel basis pada basis r adalah $\mathbf{z_o}$, maka prosedur perhitungan dilanjutkan ke langkah 3. Jika sebaliknya maka prosedur perhitungan dilanjutkan ke langkah 2.

2. Varibel basis pada baris r adalah salah satu diantara $\mathbf{w_1}$ atau $\mathbf{z_1}$, pada langkah ini jika $1 \neq s$ maka variabel $\mathbf{y_s}$ memasuki basis dan dan tabel diperbarui dengan pivoting pada baris r dan kolom $\mathbf{y_s}$.

   Jika variabel yang meninggalkan basis adalah $\mathbf{w_1}$, maka iterasi berikutnya, $\mathbf{y_s} = \mathbf{w_1}$ dan jika variabel yang meninggalkan basis adalah $\mathbf{z_1}$, maka pada iterasi berikutnya, $\mathbf{y_s} = \mathbf{w_1}$ selanjutnya prosedur perhitungan ke langkah 1.
3. Pada langkah ini, $\mathbf{y_s}$ memasuki basis $\mathbf{z_o}$ meninggalkan basis. Pivot pada kolom $\mathbf{y_s}$ dan baris $\mathbf{z_o}$ akan memberikan suatu penyelesaian layak dasar komplementer, dan prosedur perhitungan dihentikan.
4. Prosedur perhitungan dihentikan dengan *ray termination*, suatu sinar $\mathbf{R} = \{(\mathbf{w,z,zo}) + \lambda\ \mathbf{d}\ ;\ \lambda \geq 0\}$, ditemukan, jika setiap titik dalam sinar $\mathbf{R}$ memenuhi sistem persamaan (3. 18 ; a, b dan c). Dalam hal ini $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z_o})$ adalah penyelesaian layak dasar hampir komplementer yang berhubungan dengan tabel terakhir dan d adalah suatu arah ekstrim dari sistem yang didefinisikan oleh persamaan (3. 18 a dan b), dan mempunyai nilai 1 pada baris yang sesuai dengan $\mathbf{y_s}$, $\mathbf{-d_s}$ pada baris-baris yang merupakan variabel basis dan 0 pada setiap tempat lainya.

Dengan demikian, algoritma pivoting komplementer akan menyelesaikan setiap persoalan komplementer linear dalam sejumlah iterasi yang terbatas. Jika prosedur penghitungan algoritma ini menghasilkan suatu penyelesaian layak dasar komplementer, maka solusi tersebut merupakan solusi optimum untuk persoalan komplementer linear. Jika prosedur penghitungan dihentikan dengan *ray termination*, maka solusi optimum yang diperoleh merupakan solusi yang tidak terbatas.

3.4. Pemrograman Kuadratik

Pemrograman kuadratik merupakan suatu persoalan optimasi dengan kendala di mana fungsi obyektif (fungsi tujuan) dari persoalan dinyatakan sebagai suatu fungsi matematis yang berbentuk kuadratik dan kendala-kendala yang membatasinya dinyatakan sebagai fungsi-fungsi matematis yang berbentuk hubungan linear.

3.4.1. Bentuk Umum Pemrograman Kuadratik

Bentuk umum dari suatu persoalan pemrograman kuadratik dirumuskan, sebagai berikut:

$$\textit{Minimumkan},\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{p}^T\mathbf{X}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_k h_{kj} x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\textit{terhadap} \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} \le \mathbf{b}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad ,i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m$$

$$\mathbf{X} = \{x_j\} \geq 0 \qquad ,j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$$

dimana,

p = $[P_j]$ adalah vektor kolom berdimensi -n

b = $[b_i]$ adalah vektor kolom berdimensi -m

A = $[a_{ij}]$ adalah matriks (mx n)

H = $[h_{kj}]$ adalah matriks Hessian (nxn), dan

X = $[x_k]$ = $[x_j]$ adalah vektor kolom variabel berdimensi -n

Fungsi $\mathbf{X}^T$ **HX** yang dinyatakan dalam fungsi obyektif dari persoalan pemrograman kuadratik di atas didefinisikan sebagai bentuk kuadrat, di mana **H** merupakan matriks simetris yang berordo (n x n). Dari teorema 2.3.2 dan syarat-syarat optimasi Kuhn-Tucker dapat diketahui bahwa, jika persoalan pemrograman adalah persoalan maksimisasi, maka matriks **H** diasumsikan sebagai matriks yang positif-semidefinit sebagai fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ merupakan suatu (fungsi konkaf) pada **X**. Sebaliknya, jika persoalan tersebut adalah persoalan minimisasi maka matriks Hessian diasumsikan sebagai matriks yang negatif-semidefinit sehingga fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ merupakan suatu fungsi konveks pada **X**. Kendala-kendala yang diasumsikan berbentuk hubungan linear pada kasus ini adalah untuk menjamin sebuah ruang solusi yang merupakan himpunan konveks.

Pemrograman kuadratik adalah suatu persoalan optimasi untuk menentukan suatu titik $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ yang fisibel sehingga, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$

untuk persoalan minimisasi dan, $f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X}^*)$ untuk persoalan maksimisasi. Dalam hal ini, titik $\mathbf{X}^*$ adalah suatu vektor dari variabel-variabel keputusan yang elemen-elemennya merupakan solusi yang optimal bagi persoalan tersebut.

Dalam pemrograman kuadratik terdapat beberapa metode penyelesaian yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimal dari persoalan baru tersebut. Metode-metode tersebut merupakan pengembangan dari algoritma simpleks pemrograman linear yang bertitik tolak pada kondisi-kondisi optimalitas Kuhn-Tucker. Salah satu diantaranya adalah dengan algoritma penyelesaian persoalan komplementer linear.

3.4.2 Kondisi Optimalitas Pemrograman Kuadratik

Pada dasarnya, solusi untuk masalah ini ditentukan oleh aplikasi secara langsung dari syarat perlu Kuhn-Tucker. Karena fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ diasumsikan sebagai fungsi konveks (fungsi konkaf) untuk persoalan minimisasi (persoalan maksimisasi), dan ruang solusi diasumsikan sebagai suatu himpunan konveks, maka menurut teorema syarat-syarat ini juga merupakan syarat cukup untuk menjamin sebuah optimum yang global.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan bentuk umum persoalan Pemrograman Kuadratik dalam bentuk operasi matriks, sebagai berikut:

Minimumkan, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ .... (3.22a)

Kendala $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$ .... (3.22b)

$\mathbf{X} \geq 0$ .... (3.22c)

Misalkan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m)^T$ adalah suatu vektor kolom dari pengali Langrange untuk kendala : $\mathbf{AX} - \mathbf{b} \leq 0$ maka, fungsi Langrange untuk sistem persamaan (3.22 a) diatas adalah :

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{p}^T \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} + \lambda^T (\mathbf{AX} - \mathbf{b}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.23)$$

Karena $\{\mathbf{X}_k\} = \{\mathbf{X}_j\}$ untuk setiap $k = j = 1, 2, \ldots\ldots, m$.

Maka ; $\dfrac{\partial \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}^T \mathbf{H}$ maka, derivatif-derivatif untuk fungsi langrange di atas, yaitu :

$$\frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial X} = p^T + X^T H + \lambda^T A$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{AX} - \mathbf{b}$$

Maka aplikasi langsung dari kondisi optimalisasi Kuhn-Tucker untuk persoalan pemrograman kuadratik di atas sebagai berikut :

(1) $\mathbf{p}^T + (\mathbf{X}^*)^T \mathrm{H} + (\lambda^*)^T \mathbf{A} \geq 0$ .... (3.24a)

(2) $(\mathbf{X}^*) [\mathbf{p}^T + (\mathbf{X}^*)^T \mathbf{H} + (\lambda^*)^T \mathbf{A}] = 0$ .... (3.24b)

(3) $\mathbf{X}^* = \{x_j\} \geq 0$

Untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$ .... (3.24c)

(4) $\mathbf{AX}^* - \mathbf{b} \leq 0$ .... (3.25a)

(5) $(\lambda^*)^T [\mathbf{AX}^* - \mathbf{b}] = 0$ .... (3.25b)

(6) $\lambda^* = \{\lambda_i^*\} \geq 0$

Untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ .... (3.25c)

Dalam hal ini, kondisi optimalisasi Kuhn-Tucker diatas dipandang sebagai kendala baru dari persoalan pemrograman kuadrat untuk menentukan suatu titik Kuhn- Tucker $\mathbf{X}^*$, yang merupakan solusi optimal untuk persoalan tersebut.

Misalkan $\mu^* = \mathbf{p} + \mathbf{HX}^* + \mathbf{A}^T \lambda^*$ dan $\mathbf{S}^* = \mathbf{AX}^* - \mathbf{b}$ adalah vektor-vektor kolom dari variabel-variabel slack s_i^* dan μ_i^* yang non -negatif, untuk setiap i = 1, 2, …, m. Maka, kondisi optimalisasi Kuhn–Tucker untuk sistem persamaan (3.24 ; a, b dan c) dan (3.25, a, b dan c) di atas dinyatakan, sebagai berikut :

(1) $\mathbf{p}^T + (\mathbf{X}^*)^T \mathbf{H} + (\lambda^*)^T \mathbf{A} - (\mu)^T = 0$ ....(3.26a)

(2) $(\mathbf{X}^*)^T \mu^* = 0$ ....(3.26b)

(3) $\mathbf{X}^* = \{x_j^*\} \geq 0$ Untuk setiap j = 1, 2,….,n ....(3.26c)

(4) $\mathbf{AX}^* + \mathbf{S}^* = \mathbf{b}$ ....(3.27a)

(5) $(\lambda^*)^T \mathbf{S}^* = 0$ ....(3.27b)

(6) $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}^T \geq 0$ Untuk setiap i = 1, 2,…,m ....(3.27c)

Bentuk-bentuk kondisi optimalitas Kuhn-Tucker yang dinyatakan oleh sistem persamaan (3.26 ; a,b dan c) dan (3.27 ; a, b dan c) dapat disederhanakan, sebagai berikut:

(a). $\mathbf{AX}^* + \mathbf{S}^* = \mathbf{b}$ ....(3.28)

(b). $-(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{H} - (\lambda^*)^T \mathbf{A} - (\mu^*)^T = \mathbf{p}^T$ ....(3.29)

(c). $(\mathbf{X}^*)^T \mu^* = 0, (\lambda^*)^T \mathbf{S}^* = 0$ ....(3.30)

(d). $\mathbf{X}^* \geq 0, \quad \mathbf{S}^* \geq 0, \quad \lambda^* \geq 0 \quad \mu^* \geq 0$ ....(3.31)

Oleh karena transpose dari matriks Hessian (**H**) adalah matriks **H** itu sendiri, maka transpose untuk persamaan (3.29) diatas menjadi :

$$-\mathbf{HX}^* - \mathbf{A}^T\lambda^* + \mu^* = \mathbf{p}$$

Dengan demikian, optimalitas Kuhn–Tucker untuk persoalan pemrograman kuadratik dapat dinyatakan dalam suatu bentuk baku (*standart*) sebagai berikut :

Kondisi optimalitas pemrograman kuadratik:

(a). $\mathbf{AX}^* + \mathbf{S}^* = \mathbf{b}$

(b). $\mathbf{HX}^* + \mathbf{A}^T\lambda^* - \mu^* = \mathbf{D}$

(c). $(\mathbf{X}^*)^T \ \mu^* = 0 \qquad (\lambda^*)^T \ \mathbf{S}^* = 0$

(d). $\mathbf{X}^* \geq 0, \quad \mathbf{S}^* \geq 0, \quad \lambda^* \geq 0 \quad \mu^* \geq 0$

di mana, **b** adalah vektor yang berdimensi -m, **p** adalah vektor yang berdimensi n, **A** adalah matriks (mxn), **H** adalah matriks Hessian (nxn) $\mathbf{X}^*$ adalah vektor dari variabel keputusan $\mathbf{X_j}^*$ yang berdimensi-n λ^* adalah pengali Langrange λ^*_i yang berdimensi -m dan S^* dan μ^* adalah vektor-vektor dari varibel Slack μ_i^* dan S_i^* yang berhubungan dengan kendala-kendala baru : $\mathbf{AX}^* - \mathbf{b} \leq 0$ dan $\mathbf{p} + \mathbf{HX}^* + \mathbf{A}^T \lambda^* \geq 0$,

Kondisi optimalitas pemrograman kudratik diatas dapat dinyatakan dalam bentuk-bentuk operasi matriks sebagai berikut:

Aa dan b:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mu^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^* & \mu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d. $$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mu^* \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \mathbf{dan} \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad ; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mu^* \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix}$$

maka kondisi optimalitas pemrograman kuadratik dalam bentuk operasi matrik diatas adalah identik dengan persoalan komplementer linear yang syarat-syaratnya merupakan kendala-kendala dari pemrograman linear yaitu :

$$\mathbf{w}\text{-}\mathbf{Mz} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{W}^T\mathbf{z} \;\; = 0$$

$$\mathbf{w} \geq 0 \;\; ; \;\; \mathbf{z} \geq 0$$

Dengan **M** adalah suatu matriks (pxp) dan **q** adalah suatu vektor kolom berdimensi -p. **w** dan **z** merupakan vektor-vektor dari variabel komplementer w_j dan $\mathbf{z_j}$ yang elemen-elemennya ditentukan melalui algoritma pivoting komplementer. Dengan demikian algoritma pivoting komplementer yang telah diuraikan pada bahasan sebelumnya dapat digunakan untuk menemukan suatu titik Kuhn-Tucker yang akan memberikan suatu solusi yang optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik.

3.5. Prosedur Penyelesaian Pemrograman Kuadratik

Berdasarkan uraian dan pembahasan mengenai penurunan rumus-rumus kondisi Kuhn-Tucker di atas maka akan diberikan suatu prosedur perhitungan untuk menentukan kondisi optimal dari suatu persoalan pemrograman kuadratik langkah-langkah yang harus diselesaikan dalam menyelesaikan persoalan pemrograman kuadratik adalah sebagai berikut :

langkah 0 : *Langkah inisial*

Sebagai langkah awal dari proses perhitungan algoritma pemrograman kuadratik adalah mengubah semua permasalahan ke dalam bentuk operasi matriks menurut bentuk umum pemrograman kuadratik. Selanjutnya prosedur perhitungan selanjutnya pada *langkah 1* :

Langkah 1: *Pendekatan* pertama

Langkah berikutnya adalah menentukan kecembungan atau kecekungan dari fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ sebagai langkah awal untuk menerapkan kondisi-kondisi optimalitas Kuhn-Tucker. Dalam hal ini. Persoalan pemrograman kuadratik harus memenuhi asumsi-asumsi, sebagai berikut :

a. Jika persoalan tersebut adalah persoalan minimisasi, maka $f(\mathbf{X})$ diasumsikan sebagai fungsi konveks (cembung). Pada kasus ini matriks Hessian (**H**) adalah matriks yang semi definit positif, artinya akar-akar karakteristiknya dari matrik **H** adalah positif.

b. Jika persoalan tersebut adalah persoalan maksimisasi, maka $f(\mathbf{X})$ diasumsikan sebagai fungsi konkaf (cekung). Pada kasus ini matriks Hessian adalah matriks yang negatif semidefenit, artinya akar-akar karaktersitik dari **H** adalah non-positif.

Jika pengasumsian tersebut dipenuhi maka prosedur perhitungan dilanjutkan pada *langkah 2*, jika sebaliknya maka dilanjutkan ke *langkah 4*.

Langkah 2 : *Kondisi optimalitas pemrograman kuadratik*

Pada langkah ini aplikasi langsung dari syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn-Tucker akan menurunkan persoalan pemrograman kuadratik menurut bentuk baku sebagai berikut :

(a). $\mathbf{AX}^* + S^* = \mathbf{b}$

(b). $-\mathbf{HX}^* - \mathbf{A}^T\lambda^* + \mu^* = \mathbf{p}$

(c). $(\mathbf{X})^T\ \mu^* = 0$, $(\lambda^*)^T\ S^* = 0$

(d). $\mathbf{X}^* \geq 0$, $\mathbf{S}^* \geq 0$, $\lambda^* \geq 0$ $\mu^* \geq 0$

dimana **b**, **p**, **H**, dan **A** adalah vektor-vektor dan matriks yang telah didefinisikan pada bentuk umum persoalan : $\mathbf{X}^*$, $\mathbf{S}^*$, λ^*, μ^* adalah vektor-vektor variabel yang optimal. Selanjutnya, prosedur perhitungan dilanjutkan pada *langkah 3.*

Langkah 3 : *Penerapan Persolaan Komplementer Linear*

Pada langkah ini, kondisi optimalitas Kuhn-Tucker dari pemrograman kuadratik ditransformasikan ke dalam bentuk persoalan komplementer linear, yaitu: $\mathbf{w}\text{-}\mathbf{Mz} = \mathbf{q}$, $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$ dan $\mathbf{w},\mathbf{z} \geq 0$, dimana :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mu^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan nilai (elemen) dari vektor-vektor **w** dan **z** dengan menerapkan prosedur perhitungan algoritma pivoting komplementer. Jika proses perhitungan dari *algoritma pivoting komplementer* menghasilkan suatu penyelesaian layak dasar komplementer, yaitu [$\mathbf{R} = \{\mathbf{w}^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}_0^*\} + \lambda\ \mathbf{d}^*$ dimana $\lambda \geq 0$,] maka solusi tersebut merupakan penyelesaian akhir dari persoalan komplementer linear, dan prosedur perhitungan dilanjutkan pada *langkah 4*

Langkah 4 : *Aturan pemberhentian*

Pada langkah ini, proses perhitungan untuk persoalan pemrograman kuadratik dihentikan jika :

1. Fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ dari persoalan pemrograman kuadratik tidak memenuhi asumsi-asumsi kecembungan dan kecekungan. Sehingga persoalan tersebut tidak dapat memenuhi syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn-Tucker. Pada khusus ini persoalan pemrograman kuadratik dikatakan tidak mempunyai solusi.
2. $(\mathbf{w},\mathbf{z})$ adalah solusi dari persoalan komplementer linear karena $(\mathbf{w}^*,\mathbf{z}^*) = [(\mathbf{S}^*, \mu^*),(\lambda^*,\mathbf{X}^*)]$, maka solusi optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik diperoleh $\mathbf{X}^*$ dengan nilai optimum $f(\mathbf{X}^*)$
3. $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z_0})$ adalah solusi yang tak terbatas dari persoalan komplementer linear karena $(\mathbf{w}^*,\mathbf{z}^*) = [(\mathbf{S}^*,\mu^*),(\lambda^*,\mathbf{X}^*)]$, maka solusi optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik diperoleh pada suatu sinar $\mathbf{R}$, yaitu $\mathbf{R} = \mathbf{X}^* + \lambda d^*$, dimana, dengan nilai-nilai $f(\mathbf{X}^*)$ yang tak terbatas. Pada kasus ini, solusi optimal dari persoalan pemrograman kuadratik merupakan solusi tidak terbatas.

Pada pembahasan ini akan diberikan contoh penyelesaian pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer seperti pembahasan di bab empat awal telah kita ketahui bahwa hasil penyelesaian pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer ada dua macam yaitu dengan suatu Penyelesaian layak dasar komplementer jika solusinya merupakan solusi optimum yang terbatas dan dengan *ray termination* jika solusi optimumnya tidak terbatas.

Contoh Penyelesaian pemrograman kuadratik dengan algoritma pivoting komplementer dengan menggunakan Penyelesaian layak dasar komplementer adalah sebagai berikut :

Selesaikan persoalan pemrograman kuadratik dibawah ini dengan menggunakan Metode Lemke/Algoritma pivoting komplementer dengan Penyelesaian layak dasar komplementer.

Minimumkan $-2x_1 - 6x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$

Kendala $x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Langkah 1 : Permasalahan pemrograman kuadratik diatas sudah berada dalam bentuk umum pemrograman kuadratik yaitu $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{P}^T\mathbf{X}$ dengan kendala $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$ dan $x \geq 0$

Langkah 2 : Persoalan pemrograman kuadratik di atas merupakan persoalan minimisasi yang memiliki matriks Hessian Semidefinit positif dan fungsi obyektifnya $f(\mathbf{X})$ adalah konveks. Aplikasi langsung dari syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn Tucker diperoleh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

dengan vektor-vektor variabel slack, dan vektor pengali langrange untuk pembatas A $x \leq$ b dan $x \geq 0$ oleh u dan v.

Langkah 3 : Karena kondisi optimalitas Kuhn Tucker sudah dipenuhi maka di bawa ke bentuk persoalan komplementer linear :

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{w}_z^T = 0 \text{ dan } \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0$$

yaitu dimisalkan

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^t & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 : Bentuk persoalan komplementer linear di atas adalah untuk menentukan nilai-nilai variabel komplementer **w** dan **z**. Sehingga langkah berikutnya adalah penerapan prosedur perhitungan dengan Algoritma Pivoting Komplementer yaitu :

- Langkah awalnya adalah, persoalan komplementer linear di atas dinyatakan dalam tabel sebagai berikut :

Variabel	**Variabel lengkap**									**RHS Q**
	$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$	$\mathbf{w_3}$	$\mathbf{w_4}$	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$	$\mathbf{z_0}$	
$\mathbf{w_1}$	1	0	0	0	0	0	1	1	-1	2
$\mathbf{w_2}$	0	1	0	0	0	0	-1	2	-1	2
$\mathbf{w_3}$	0	0	1	0	-1	1	-2	2	-1	-2
$\mathbf{w_4}$	0	0	0	1	-1	-2	2	-4	-1	-6

Tabel diatas menunjukkan bahwa $\mathbf{q_4}$ = minimum $\{\mathbf{q_i} = 1 \leq i \leq 4\}$. Maka perbaharui tabel tersebut dengan pivoting pada baris w_4 dan kolom z_0 (kolom pivot). Dalam hal ini, variabel lengkap z_0 merupakan variabel keluaran.

Selanjutnya, prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi dengan $y_s = z_4$.

* Iterasi -1, hasil pivoting terhadap baris w_4 dan kolom z_0 adalah sebagai berikut :

Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	Z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
w_1	1	0	0	-1	1	2	-1	5	0	8
w_2	0	1	0	-1	1	2	-3	6	0	8
w_3	0	0	1	-1	0	3	-4	6	0	4
z_0	0	0	0	-1	1	2	-2	4	1	6

Disini $y_2 = z_4$ masuk menjadi basis. Dengan pengujian rasio minimum, w_3 meninggalkan basis, maka untuk pembaharuan tabel dengan pivoting dilakukan pada baris 3 selanjutnya, prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi -2 dengan $y_s = z_3$.

Iterasi -2, hasil pivoting terhadap baris w_3 dan kolom z_4 adalah sebagai berikut :

Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	Z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
w_1	1	0	$-5/6$	$-1/6$	1	$-1/2$	$7/3$	0	0	$14/3$
w_2	0	1	-1	0	1	-1	1	0	0	4
z_4	0	0	$1/6$	$-1/6$	0	$1/2$	$-2/3$	1	0	$2/3$
z_0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	1	0	$2/3$	0	1	$10/3$

Pada iterasi ini, $y_z = z_3$ masuk menjadi basis. Dengan pengujian rasio minimum, w_1 meninggalkan basis; maka untuk tujuan iterasi selanjutnya adalah $y_s = z_1$. Dengan demikian pembaharuan tabel dengan pivoting dilakukan pada baris w_1 (persamaan pivot) dan kolom z_3 (kolom pivot). Selanjutnya, prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi-3 dengan $y_s = z_1$.

Iterasi-3 : Hasil pivoting terhadap baris w_1 dan kolom z_3 adalah sebagai berikut :

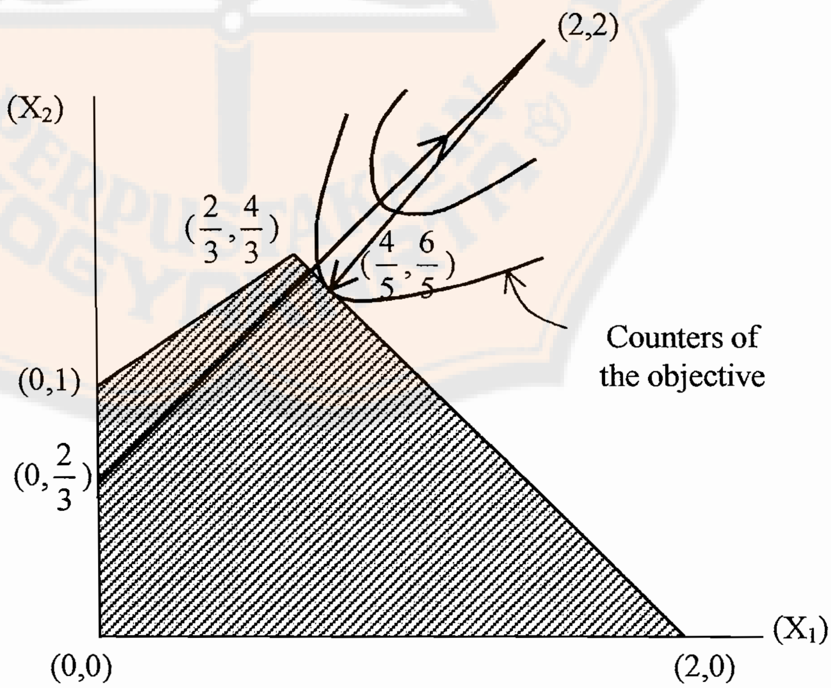
Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
z_3	$3/7$	0	$-5/14$	$-1/14$	$3/7$	$-3/14$	1	0	0	2
w_2	$-3/7$	1	$-9/14$	$1/14$	$4/7$	$-11/14$	0	0	0	2
z_4	$2/7$	0	$-1/14$	$-3/14$	$2/7$	$5/14$	0	1	0	2
z_0	$-2/7$	0	$-3/7$	$-2/7$	$5/7$	$1/7$	0	0	1	2

Disini, $y_s = z_1$ masuk menjadi basis. Dengan pengujian rasio minimum, z_0 meninggalkan basis. Pivoting pada baris z_0 feasible solution dengan tabel sebagai berikut :

Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
z_3	$3/5$	0	$-1/10$	$1/10$	0	$-3/10$	1	0	$-3/5$	$4/5$
w_2	$-1/5$	1	$-3/10$	$3/10$	0	$-9/10$	0	0	$-4/5$	$2/5$
z_4	$2/5$	0	$1/10$	$-1/10$	0	$3/10$	0	1	$-2/5$	$6/5$
z_1	$-2/5$	0	$-3/5$	$-2/5$	1	$1/5$	0	0	$7/5$	$14/5$

Dari sini disimpulkan bahwa hasil nilai algoritma pivoting komplementer adalah ($\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$, $\mathbf{w_4}$, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$, $\mathbf{z_4}$) = $\left(0, \tfrac{2}{5}, 0, 0, \tfrac{14}{5}, 0, \tfrac{4}{5}, \tfrac{6}{5}\right)$ dimana hanya satu variabel dari pasangan ($\mathbf{w_j}$, $\mathbf{z_j}$) adalah positif untuk j = 1, …, 4.

Catatan bahwa Algoritma pivoting komplementer dimulai dari nilai (0,0), kemudian titik $\left(0, \tfrac{2}{3}\right)$ kemudian titik (2,2), dan terakhir pada nilai KKT (Karush Kuhn Tucker) $\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{6}{5}\right)$ karena H positif definit, fungsi obyektifnya adalah konveks dan juga KKT (Karush Kuhn Tucker) nilainya $\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{6}{5}\right)$ adalah sungguh-sungguh optimal, gambar dari hasil optimal Algoritma Pivoting Komplementer ditunjukkan pada gambar sebagai berikut :



Contoh Penyelesaian pemrograman kuadratik dengan Algoritma pivoting komplementer yang kedua adalah sebagai berikut :

Minimumkan $-2x_1 - 4x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

Kendala $-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 4$

$x_1, \; x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Langkah 1 : Persoalan pemrograman kuadratik di atas sudah berada dalam bentuk umum pemrograman kuadratik yaitu $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T \mathbf{HX} + \mathbf{P}^T\mathbf{X}$ dengan kendala $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$ dan $x \geq 0$.

Langkah 2 : Persoalan pemrograman kuadratik di atas merupakan persoalan minimisasi yang memiliki matriks Hessian Semidefinit positif dan fungsi obyektifnya $f(\mathbf{X})$ adalah konveks.

Aplikasi langsung dari syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn Tucker diperoleh :

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

dengan vektor-vektor variabel slack, dan vektor pengali langrange untuk pembatas $\mathbf{A}\ x \leq \mathbf{b}$ dan $x \geq 0$ oleh $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

Langkah 3 : Karena kondisi optimalitas Kuhn Tucker sudah dipenuhi maka di bawa ke bentuk persoalan komplementer linear :

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{w}_z^T = 0$$

$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

yaitu dimisalkan

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^t & \mathbf{H} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 : Bentuk persoalan komplementer linear di atas adalah untuk menentukan nilai-nilai variabel komplementer **w** dan **z**.. Sehingga langkah berikutnya adalah penerapan prosedur perhitungan dengan Algoritma Pivoting Komplementer.

* Langkah awalnya adalah, persoalan komplementer linear di atas dinyatakan dalam tabel sebagai berikut :

Variabel	**Variabel lengkap**									**RHS Q**
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
w_1	1	0	0	0	0	0	-1	1	-1	1
w_2	0	1	0	0	0	0	1	-2	-1	4
w_3	0	0	1	0	1	-1	-2	2	-1	-2
w_4	0	0	0	1	-1	2	2	-2	-1	-4

Tabel diatas menunjukkan bahwa $\mathbf{q_4}$ = minimum $\{\mathbf{q_i} = 1 \leq i \leq 4\}$ maka perbaharui tabel diatas dengan pivoting pada baris $\mathbf{w_4}$ dan kolom $\mathbf{z_0}$. Dalam hal ini variabel lengkap $\mathbf{z_0}$

merupakan variabel masukan dan variabel basis $\mathbf{w_4}$ merupakan variabel keluaran.

Selanjutnya, prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi dengan $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_4}$.

* Iterasi – 1

Hasil pivoting terhadap baris $\mathbf{w_4}$ dan kolom $\mathbf{z_0}$ adalah sebagai berikut :

Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	Z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	
w_1	1	0	0	-1	1	-2	-3	3	0	5
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
w_3	0	0	1	-1	2	-3	-4	4	0	2
z_0	0	0	0	-1	1	-2	-2	2	1	4

Disini $\mathbf{y_2} = \mathbf{z_4}$ masuk menjadi basis. Dengan pengujian perbandingan (rasio) minimum, $\mathbf{w_3}$ variabel keluaran basis. Sehingga pada tabel yang akan di kerjakan selanjutnya adalah pivoting pada baris $\mathbf{w_3}$ dan kolom $\mathbf{z_4}$, dan selanjutnya dikerjakan iterasi -2 dengan $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_3}$ adalah sebagai berikut

Iterasi -2

Variabel	Variabel lengkap									RHS Q
	w_1	w_2	w_3	w_4	Z_1	Z_2	z_3	z_4	z_0	
w_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
z_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
z_0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	3

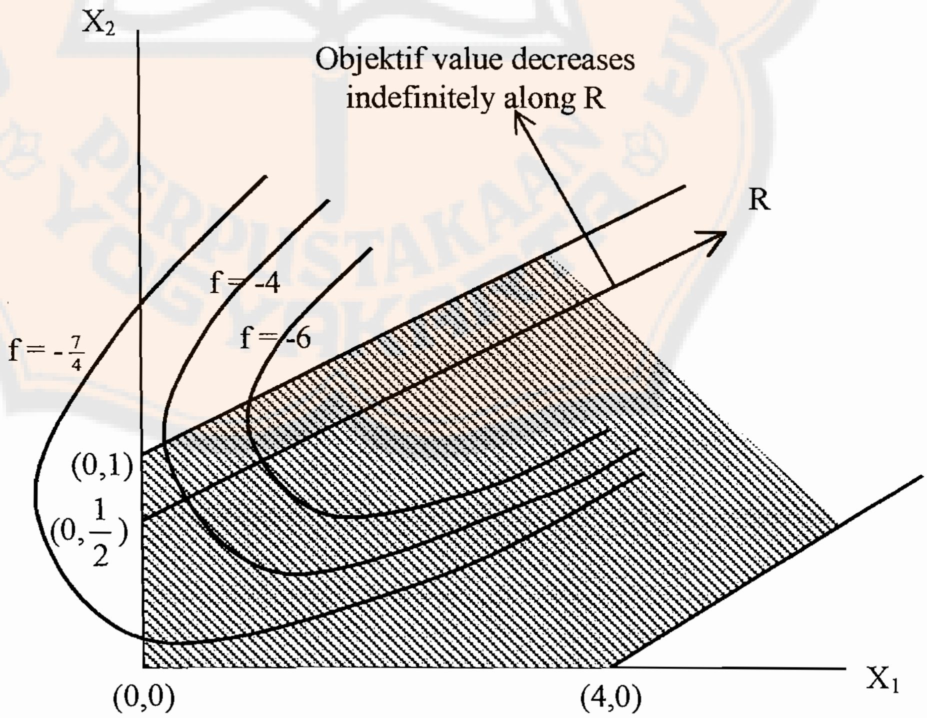
Disini $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_3}$ seharusnya menjadi entering basis. Akan tetapi semua yang menjadi masukkan dibawah kolom $\mathbf{z_3}$ adalah non positif, maka kita harus menghentikan dengan ray termination. Sehingga dari sini kita dapatkan Ray $\mathbf{R}$ = $\{(\mathbf{w}, \mathbf{z}., \mathbf{z_0}) = \left(\frac{7}{2}, 8, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 3\right) + \lambda\,(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$ $: \lambda \geq 0\}$ dimana setiap nilai pada ray diatas sesuai dengan bentuk persoalan komplementer linear.

$\mathbf{w}\text{-}\mathbf{Mz}\text{-}1\mathbf{z_0} = \mathbf{q}$ .... (3.18a)

$\mathbf{w_j} \geq 0$, $\mathbf{z_j} \geq 0$, $\mathbf{z_0} \geq 0$ untuk $j = 1, \ldots, p$ .... (3.28b)

$\mathbf{w_j}\ \mathbf{z_j} = 0$ untuk $j = 1, \ldots$ p .... (3.18c)

Algoritma Pivoting Komplementer untuk contoh 2 ditunjukkan pada gambar



BAB IV

PENERAPAN DALAM MASALAH PENANAMAN SAHAM

Pemodelan Pemrograman kuadratik dalam investasi saham adalah bagaimana menentukan proporsi investasi dalam portofolio sehingga diperoleh tingkat pengembalian tentu dengan resiko minimum. Untuk memodelkan persoalan portofolio kebentuk Pemrograman kuadratik ditunjukan dalam contoh sebagai berikut.

Seorang investor ingin menginvestasikan asset dalam pasar saham portofolio dia menginvestasikan n saham yang berbeda dan akan menentukan proporsi yang akan diinvestasikan dalam saham j :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$$

dan $x_j \geq 0$ dengan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dengan data yang lalu diperkirakan bahwa nilai harapan kembali suatu portofolio adalah $\mu\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ dan variannya adalah $\mathbf{XDX} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$. Matrik **D** adalah definite positif dikarenakan sifat dari pengembalian saham dianggap berdistribusi seragam diskrit artinya untuk setiap periode ke-j mempunyai peluang pengembalian yang sama. Investor harus memilih antara memaksimalkan tingkat pengembalian yang diharapkan dari saham j dengan nilai harapan terbesar μ_j dan mengurangi resiko yang diukur dengan variansi portofolio.

Resiko dapat dikurangi dengan menginvestasikan pada saham yang berkorelasi negatif karena konflik ini sang investor memutuskan untuk membangun himpunan semua solusi efesien dengan suatu portofolio. Himpunan seluruh solusi efesien dapat dicari dari penyelesaian pemrograman kuadratik sebagai berikut :

Minimumkan, $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}-\mu^T\mathbf{X}$

Kendala $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$x_j \geq 0$ dengan setiap $j = 1, 2, \ldots, n$

Berikut dibahas masalah yang lebih kongkrit dalam penanaman saham (Saus I : 264 – 256)

Masalah :

Seorang investor akan menginvestasikan asetnya. Dengan pilihan tiga jenis investasi dengan nilai harapan masing-masing investasi dapat dilihat dalam tabel (3.2) sang investor mengharapkan keuntungan 12,6% pada akhir investasi. Oleh karena itu proporsi dalam tiap investasi agar keuntungan yang diharapkan dapat tercapai. Dengan nilai harapan dan varian untuk tiga investasi sebagai berikut :

Tabel 3.2 Nilai harapan dan varian untuk tiga investasi

Investasi	Nilai harapan = μ	Standard deviasi = σ
1	0.12	0.30
2	0.18	0.50
3	0.08	0.40

Sehingga koefesien korelasi dari ketiga investasi yaitu:

1. $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = 0{,}12$; 2. $\rho_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_2\sigma_3} = 0{,}20$; 3. $\rho_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{\sigma_1\sigma_3} = -0.10$

Permasalahan ini dapat dimodelkan kedalam bentuk progam kuadratik yang diselesaikan dengan mengguakan Algoritma Pivoting Komplementer sehingga didapatkan suatu solusi yang merupakan proposi dari masing-masing investasi Untuk ini dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menentukan matriks kovarian yaitu matriks **D** *sebagai berikut* :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_1^{\,2} = 0.09$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2^{\,2} = 0.25$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3^{\,2} = 0.16$$

$$\sigma_{12} = \rho_{12} / \sigma_1 \sigma_2 = 0{,}018$$

$$\sigma_{23} = \rho_{23} / \sigma_2 \sigma_3 = 0{,}04$$

$$\sigma_{13} = \rho_{13} / \sigma_1 \sigma_3 = \text{-}0{,}012$$

$$\text{sehingga matrik } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0{,}09 & 0{,}018 & -0{,}012 \\ 0{,}018 & 0{,}25 & 0{,}04 \\ -0{,}012 & 0{,}04 & 0{,}16 \end{bmatrix}$$

b. Pemodelan kebentuk Pemrograman kuadratik

Minimumkan; $\qquad f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X} - \mu^T\mathbf{X}$

Kendala $\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$x_j \geq 0, \qquad$ dengan setiap $j = 1, 2, \ldots, n$

Dari data diatas dapat dibentuk model Pemrograman kuadratik sebagai berikut :

$$f(\mathbf{X}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 0.09 & 0.018 & -0.012 \\ 0.018 & 0.25 & 0.04 \\ -0.012 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - (0{,}12\ ;\ 0{,}12\ ;\ 0{,}08)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Fungsi obyektif ; $f(\mathbf{X})$

$f(\mathbf{X}) = 0.09\,x_1^2 + 0.25x_2^2 + 0.16x_3^2 + 0.036\,x_1x_2 + 0.08x_2x_3 - 0.024\,x_1x_3 - 0.12x_1 - 0.18x_2 - 0.08\,x_3$

Kendala, $x_1 + x_2 + x_3 \le 1$

Dan $x_1, x_2, x_3 \ \ge 0$

c. Penyelesaian dengan Algoritma Pivoting Komplementer

Langkah awal

Pada langkah ini permasalahan diatas diubah ke dalam bentuk umum pemrograman kuadratik, sehingga diperoleh :

Minimumkan, $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{p}^T\mathbf{X}$

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 0.09 & 0.018 & -0.012 \\ 0.018 & 0.25 & 0.04 \\ -0.012 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - (0.12 \quad 0.18 \quad 0.08)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kendala : $\mathbf{AX} \le \mathbf{b} = (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le 1$

$$\mathbf{X} \ge 0, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ge 0$$

Langkah 1

Karena persoalan tersebut merupakan persoalan minimasi maka matriks Hessian harus semidefinit positif sehingga fungsi obyektif $f(\mathbf{X})$ adalah konveks. Untuk menyelediki apakah fungsi tersebut konveks atau konkaf dapat dilakukan dengan mensubtitusikan harga x_1, $x_2 \geq 0$ dan $x_3 = 0$ dan dihasilkan $f(\mathbf{X})$ positif sehingga $f(\mathbf{X})$ merupakan fungsi konveks. Prosedur perhitungan dilanjutkan pada langkah 2.

Langkah 2

Aplikasi langsung dari syarat-syarat perlu dan cukup Kuhn-Tucker akan menurunkan persoalan pemrograman kuadratik diatas menurut bentuk standart (baku), sebagai berikut :

a. $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix}=[1\}$$

b. $$\begin{bmatrix}0.018 & 0.036 & -0.024\\0.036 & 0.50 & 0.08\\-0.024 & 0.08 & 0.32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}-(1\,1\,1)\begin{bmatrix}\lambda_1^*\\\lambda_2^*\\\lambda_3^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu_1^*\\\mu_2^*\\\mu_3^*\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}08\end{pmatrix}^T$$

c. $$\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix};\begin{bmatrix}S_1^*\\S_2^*\\S_3^*\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\lambda_1^*\\\lambda_2^*\\\lambda_3^*\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\mu_1^*\\\mu_2^*\\\mu_3^*\end{bmatrix}\geq 0$$

Dengan $S^* = (s_1^*, s_2^*)$ dan $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*)$ adala vektor-vektor variabel slack, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ adalah vektor pengali langrange dan $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)$ adalah vektor variabel keputuan. Prosedur perhitungan dilanjutkan ke langkah 3.

Langkah 3: *Penerapan Persoalan Komplementer Linier*

Langkah selanjutnya adalah mentranformasikan kondisi optimalitas pemrograman kuadratik diatas sebagai persoalan komplementer linier : **w-Mz** = **q** $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$ dan **w,z** ≥ 0, dimana :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.036 & 0.024 & -1 \\ -0.036 & -0.50 & -0.80 & -1 \\ 0.024 & -0.08 & -0.32 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} S^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ \mu_1^* \\ \mu_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \\ \\ \mathbf{X}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \end{bmatrix}$$

Karena **q** bukan vektor yang non-negatif, maka bentuk umum dari persoalan linier komplementer, adalah : $\mathbf{w}\text{-}\mathbf{Mz}\text{-}1\mathbf{z}_0 = \mathbf{q}$

$\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$

$\mathbf{w},\mathbf{z},\mathbf{z}_0 \geq 0$

Dimana $\mathbf{z}_0$ adalah suatu variabel *artificial* (*dummy*) yang mempunyai koefisien 1 Persoalan linier komplementer diatas adalah untuk menentukan nilai-nilai dari variabel-variabel komplementer **w** dan **z** maka, langkah berikutnya adalah menerapkan prosedur perhitungan berdasarkan pivoting komplementer.

Algoritma pivoting komplementer

Langkah awal :

Sebagai langkah awal, persoalan linier komplemeter diatas dinyatakan dalam table format, sebagai berikut :

Variabel basis	Variabel non-basis									RHS
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	Q
w_1	1	0	0	0	-0.18	-0.036	0.024	-1	-1	-0.12
w_2	0	1	0	0	-0.036	-0.50	-0.08	-1	-1	-0.18
w_3	0	0	1	0	0.024	-0.08	-0.32	-1	-1	-0.08
w_4	0	0	0	1	1	1	1	0	-1	1

Tabel diatas menunjukkan bahwa q_2 = minimum $\{q_1: 1 \le i \le 4\}$. Maka, perbaharui tabel tersebut dengan pivoting pada baris w_2 dan kolom z_o (kolom pivot). Dalam hal ini, variabel lengkap z_o merupakan entering variabel dan variabel basis w_2 merupakan leaving variabel.

Selanjutnya prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi dengan $y_s = z_2$.

Iterasi-1 :

Hasil pivoting terhadap baris w_2 dan kolom z_0 adalah sebagai berikut :

Variabel basis	Variabel non-basis									RHS
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	Q
w_1	1	-1	0	0	-0.144	0.464	0.104	0	0	0.16
z_0	0	-1	0	0	0.036	0.500	0.08	1	1	0.18
w_3	0	-1	1	0	0.060	0.420	-0.24	0	0	0.10
w_4	0	-1	0	1	1.036	1.500	1.080	1	0	1.18

Pada iterasi ini $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_2}$ ini berarti, variabel lengkap $\mathbf{z_2}$ merupakan variabel masukan yang akan memasuki basis pada iterasi berikutnya. Pengujian rasio minimum antara $\bar{\mathbf{q}}_2$ (kolom $\mathbf{q}$ untuk $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_2}$) dan $\mathbf{d_2}$ (kolom $\mathbf{z_2}$) menunjukkan bahwa variabel basis $\mathbf{w_1}$ akan meninggalkan basis sebagai variabel keluaran pada iterasi berikutnya. Dengan demikian, pembaharuan tabel dengan pivoting dilakukan pada baris $\mathbf{w_1}$ (persamaan pivot) dan kolom $\mathbf{z_2}$ (kolom pivot).

Selanjutnya prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi-2 dengan $\mathbf{y_s}$=$\mathbf{z_2}$.

Iterasi-2 :

Hasil pivoting terhadap baris $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{z_2}$ kolom adalah sebagai berikut:

Variabel basis	Variabel non-basis									RHS
	$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$	$\mathbf{w_3}$	$\mathbf{w_4}$	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$	$\mathbf{z_0}$	$\mathbf{Q}$
$\mathbf{z_1}$	2.155	-2.155	0	0	-0.310	1	0.224	0	0	0.129
$\mathbf{z_0}$	-1.077	0.0775	0	0	0.191	0	-0.032	1	1	0.1155
$\mathbf{w_3}$	-0.905	-0.0919	1	0	0.1902	0	-0.334	0	0	0.0458
$\mathbf{w_4}$	-3.233	2.2325	0	1	1.501	0	0.774	1	0	0.9865

Pada iterasi ini, $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_2}$ ini berarti, variabel non-basis $\mathbf{z_2}$ merupakan variabel masukan yang akan memeasuki basis pada iterasi berikutnya. Pengujian rasio minimum antara $\bar{\mathbf{q}}_2$ (kolom $\mathbf{q}$ untuk $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_2}$) dan $\mathbf{d_2}$ (kolom $\mathbf{z_2}$) menunjukkan bahwa variabel basis $\mathbf{w_3}$ akan meninggalkan basis sebagai variabel keluaran pada iterasi berikutnya. Dengan demikian, pembaharuan tabel dengan pivoting dilakukan pada baris $\mathbf{w_3}$ (persamaan pivot) dan kolom $\mathbf{z_1}$ (kolom pivot).

Selanjutnya prosedur perhitungan dilanjutkan pada iterasi-3 dengan $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_2}$

Iterasi-3

Hasil pivoting terhadap baris $\mathbf{w_3}$ dan kolom $\mathbf{z_1}$ adalah sebagai berikut:

Variabel basis	Variabel non-basis									RHS
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	**Q**
z_2	0.680	2.304	1.629	0	0	1	0.320	0	0	0.2034
z_0	-0.169	0.169	-1.004	0	0	0	0.303	1	1	0.0696
z_1	4.758	-0.483	5.257	0	1	0	-1.756	0	0	0.240
w_4	3.909	2.957	-7.890	1	0	0	3.379	1	0	0.6263

Pada iterasi ini $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_1}$. ini berarti, variabel lengkap $\mathbf{z_1}$ merupakan variabel masukan yang akan memasuki basis pada iterasi berikutnya. Pengujian rasio minimum antara $\mathbf{q_1}$ (kolom $\mathbf{q}$ untuk $\mathbf{y_s} = \mathbf{z_1}$) dan $\mathbf{d_1}$ (kolom $\mathbf{z_1}$ menunjukkan bahwa variabel basis $\mathbf{w_4}$ akan meninggalkan basis pada iterasinya berikutnya. Dengan demikian, pembaharuan tabel dengan pivoting dilakukan pada baris $\mathbf{w_4}$ (baris pivot) dan kolom $\mathbf{z_3}$ sebagai kolom pivot .

Iterasi-4:

Hasil pivoting terhadap baris $\mathbf{w_4}$ dan kolom $\mathbf{z_3}$ adalah sebagai berikut :

Variabel basis	Variabel non-basis									RHS
	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	**Q**
z_2	0.310	-2.024	2.3746	-0.094	0	1	0	-0.094	0	0.260
z_0	0.519	-0.096	-0.298	-0.089	0	0	0	0.91	1	0.0135
z_1	-2.728	1.053	1.165	0.518	1	0	0	0.518	0	0.565
z_3	1.156	0.875	-2.33	0.295	0	0	1	0.295	0	0.185

Tabel ini merupakan tabel iterasi terakhir dari perhitungan algoritma pivoting komplementer. Maka solusi fisibel basis komplementer diatas diperoleh pada titik $(\mathbf{z_1,z_2,z_3})$ = (0.565, 0.260, 0,185) karena $(\mathbf{z_1,z_2,z_3}) = (\mathbf{x_1^*,x_2^*,x_3^*})$ sehingga $(\mathbf{x_1^*,x_2^*,x_3^*})$ = (0,565, 0,260, 0,185).

Berdasarkan perhitungan menggunakan Algoritma Pivoting Komplementer dihasilkan suatu solusi optimal untuk permasalahan minimasi pemrograman kuadratik yaitu $\mathbf{x_1^*}$ adalah proposi investasi untuk saham kesatu = 0.565 ; $\mathbf{x_2^*}$ adalah proporsi investasi untuk saham kedua = 0.260 dan $\mathbf{x_3^*}$ adalah proporsi investasi untuk saham ketiga besar = 0.185. sehingga sang investor dapat membagi asetnya menurut proporsi untuk saham kesatu sebesar 56%, saham kedua sebesar 26% dan saham ketiga besar 18% agar memperoleh keuntungan sebesar 12.6%.

BAB V

KESIMPULAN DAN DASAR

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan di bab-bab sebelumnya penulis menyimpulkan hal-hal sebagai berikut :

1. Teori dasar pemrograman non linear, yaitu syarat perlu dan syarat cukup Kuhn Tucker memberikan ide analitis yang mampu mengidentifikasi suatu karakter solusi dari masalah umum pemrograman non linear, yaitu apakah merupakan optimum global atau maksimum lokal. Dalam pemrograman kuadratik syarat-syarat ini merupakan solusi basis awal dalam membentuk matriks partisi yang juga merupakan kendala baru dari persoalan pemrograman kuadratik.
2. Sebagai dasar untuk menyelesaikan pemrograman kuadratik maka digunakan bentuk persoalan komplementer linear dengan algoritma pivoting komplementer sebagai metode alternatif penyelesaiannya. Metode ini merupakan pengembangan dari algoritma simpleks untuk pemrograman linear yang bertitik tolak pada kondisi optimalitas Kuhn Tucker pemrograman linear kuadratik.
3. Solusi optimal untuk persoalan pemrograman kuadratik dihasilkan pada suatu titik Kuhn Tucker yang diperoleh dari perhitungan algoritma pivoting komplementer.
4. Penyelesaian pemrograman kuadratik dengan algoritma pivoting komplementer dimulai dengan membawa persoalan pemrograman kuadratik

ke dalam bentuk operasi matriks menurut bentuk umum pemrograman kuadratik dan disesuaikan dengan kondisi Kuhn Tuckter. Kemudian diubah ke bentuk baku dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup Kuhn Tuckter, selanjutnya diubah ke bentuk persoalan komplementer linear sehingga dapat diperoleh solusi optimal dengan menggunakan algoritma pivoting komplementer

5. Solusi optimal dari perhitungan algoritma pivoting komplementer diperoleh dengan dua cara yaitu solusi terbatas dengan penyelesaian layak dasar komplementer dan solusi tak terbatas dengan *Ray Termination*.

6. Penerapan Pemrograman kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer adalah pada masalah penanaman saham khususnya pada penentuan alokasi dana investasi portofolio untuk mendapatkan keuntungan yang diharapkan dengan resiko yang sekecil mungkin. Dengan melihat data yang lalu, diperkirakan bahwa nilai harapan kembali suatu portofolio adalah $\mu\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ dan variannya adalah $\mathbf{XDX} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$ sehingga investor harus memilih antara memaksimalkan tingkat pengembalian yang diharapkan dari saham j dengan nilai harapan terbesar μ_j dan mengurangi resiko yang diukur dengan variansi portofolio. Resiko dapat dikurangi dengan menginvestasikan pada saham yang berkorelasi negatif dengan cara membangun himpunan semua solusi efisien dengan suatu portofolio. Himpunan seluruh solusi efisien dapat dicari dari penyelesaian Pemrograman kuadratik sebagai berikut :

Minimumkan, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{DX} - \mu^T\mathbf{X}$

Kendala $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$x_j \geq 0$ dengan setiap $j = 1, 2, \ldots, n$

5.2. SARAN

Pada penulisan skripsi ini penulis akan memberikan beberapa saran, yang nantinya diharapkan dapat membantu melengkapi skripsi ini. Beberapa saran dari penulis yaitu:

1. Pada skripsi ini penulis belum dapat membahas "program komputer" yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Pemrograman Kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer, sehingga diharapkan nantinya akan ada penulis lain yang membahas pemrograman kuadratik dengan algoritma pivoting komplementer ini.
2. Penyelesaian Pemrograman Kuadratik dengan Algoritma Pivoting Komplementer adalah salah satu dari sekian banyak metode penyelesaian program kuadratik, sehingga dari sini diharapkan akan ada penulis lain yang membahas metode lain untuk menyelesaikan pemrograman kuadratik dengan metode lain.
3. Pada penerapan pemrograman kuadratik dengan algoritma pivoting komplementer di bidang perekonomian (penanaman saham), penulis belum dapat membahas secara luas dan menyeluruh. Sehingga dari sini diharapkan akan ada penulis lain yang akan membahasnya.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bazaraa, Mokhtar S, *Non Linear Programing Theory and Algorithm*, John Wiley and Sons, Inc, Singapore, 1993

2. Kunzi, Hans P dan Wilhelm Krelle, *Non Linear Programing*, Blaisdell Publishing Company, London, 1978

3. Gass, Saus I, *Linear Programing Methods and Aplications*, Mc Graw Hill Book Company, tokyo, 1969

4. Mulyono, Sri, *Operation Research*, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta 1999

5. Susanta B, *Program Linier- Sari Buku Ajar*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, 1994

6. Wapole, ronald E, *Ilmu Peluang dan statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Penerbit ITB Bandung, 1995

7. Setiawan, Hendra, *Pemrograman Kuadrat Dan Penerapannya Dalam Investasi Saham*, Skripsi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2003