DERET PANGKAT KOMPLEKS

Skripsi

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Driyanto Widagdo

NIM: 991414038

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2005

SKRIPSI

DERET PANGKAT KOMPLEKS

Oleh:

Driyanto Widagdo

NIM: 991414038

Telah disetujui oleh

Pembimbing

Drs. A. Tutoyo, M.Sc

Tanggal 7 Maret 2005

SKRIPSI

DERET PANGKAT KOMPLEKS

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Driyanto Widagdo

NIM: 991414038

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 14 Februari 2005 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, MT.	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....

Yogyakarta, 14 Februari 2005

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd

Persembahan

Dengan penuh rasa syukur kepada Tuhan skripsi ini kupersembahkan untuk "Kedua Orang Tuaku, mBak Eko, mBak Yani, Kekasihku Yuli, Tyas, Awang, Fajar, Isna dan semua teman-temanku".

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, Februari 2005

Penulis

Driyanto Widagdo

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui pengertian barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks. Selain itu penulisan skripsi ini juga bertujuan untuk mengetahui konvergensi barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks. Penulisan skripsi ini menggunakan metode studi pustaka.

Barisan bilangan kompleks merupakan perluasan dari barisan bilangan real. Suatu barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi yang bernilai kompleks dengan daerah asal semua bilangan asli dan biasa ditulis dengan notasi kurawal $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan konvergen jika memiliki limit z_0 untuk n menjadi besar tak hingga.

Apabila kita menjumlahkan suku-suku barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, maka terbentuk deret bilangan kompleks. Sehingga deret bilangan kompleks adalah jumlah tak hingga banyak suku barisan bilangan kompleks. Deret ini umumnya ditulis dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ disebut konvergen apabila barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen, dengan $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$

Jika suku-suku deret bilangan kompleks memuat suatu variabel kompleks, maka deret menjadi deret pangkat kompleks. Sehingga deret pangkat kompleks adalah deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel kompleks dan biasa ditulis $\sum_{n=o}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, dengan C_n adalah konstanta kompleks, n = 0, 1, 2 ,... dan z suatu variabel kompleks. Deret ini disebut deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$. Jika kita ambil $z_0 = 0$, maka menjadi deret pangkat kompleks dalam z dan mempunyai bentuk umum $\sum_{n=o}^{\infty} C_n z^n$. Dari kedua deret pangkat ini terdapat masing-masing tiga kemungkinan yaitu: deret konvergen mutlak untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di z_0 atau 0 dan berjari-jari R, deret konvergen mutlak untuk semua $z \in C$, atau deret konvergen mutlak pada z_0 atau 0 (tergantung dari deret pangkat kompleks yang digunakan)

Sedangkan deret yang berbentuk $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ disebut sebagai deret Taylor. Deret ini merupakan deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$, dengan $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, n = 1, 2, 3,... Pada titik $z_0 = 0$ didefinisikan deret Maclaurin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, sehingga deret Maclaurin merupakan keadaan khusus dari deret Taylor pada titik $z_0 = 0$. Penerapan dari deret Maclaurin dan deret Taylor dapat digunakan dalam memperoleh nilai pendekatan untuk fungsi-fungsi eksponensial, trigonometri dan logaritma.

ABSTRACT

The aim of this thesis writing is to find out the definition of sequence complex numbers, series complex numbers, and power series complex. Besides that, this thesis writing is also used to find out the convergence of sequence complex numbers, series complex number, and power series complex. For known, this thesis writing uses literature study method.

Sequence of complex numbers basically is the extension of sequence real number. A sequence complex number is a function that has complex values with domain all natural numbers. It is usually written in braces notation $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. A sequence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ is converges if it has a limit z_o as n become infinite.

If we sum all the term in seguence of complex number $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, then will be formed series of complex number. So we can conclude that series of complex number are the infinites sum up of all the term in sequence of complex number. This series is usually written in sigma notation $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ .A series $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is converges if the sequence of partial sums $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is converges, with $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

If all the term in series of complex number related to complex variables, then the series will be the power series complex. So that a power series complex is a series that its terms related to complex variables and it is usually written in $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, with C_n is complex coefficient, n = 0, 1, 2, ... and z is complex variable. This series is power series complex in ($z - z_o$). If we take $z_o = 0$, then become the power series complex in z will have $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$. From both power series, we can see three probabilities: series converges absolutely inside a circle with sentral z_0 or 0 and has radius R, series converges absolutely for all $z \in C$, and series converges absolutely in z_o or 0.(depend on what power series complex is used).

While the series in form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ is called Taylor series. This series is power series complex in ($z - z_o$), with $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, n = 1, 2, 3, ... On the point $z_0 = 0$ we had Maclaurin series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, so Maclaurin series is specific condition of Taylor series. The application of Maclaurin series and Taylor series can be used to gain approach values for exponential function, trigonometry, and logarithm.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga skripsi dengan judul "Deret Pangkat Kompleks" dapat penulis selesaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan bantuan berbagai pihak, penulis dapat melalui hambatan dan rintangan tersebut. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih atas segala bantuan kepada semua pihak antara lain:

1. Drs. A. Tutoyo, M.Sc, yang telah membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini dengan penuh kesabaran dan penuh perhatian sampai penulisan skripsi ini terselesaikan.
2. Drs. Th. Sugiarto, MT, selaku Ketua Program Studi yang telah berkenan memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis selama persiapan ujian skripsi.
3. Staf Perpustakaan Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan pelayanan dan fasilitas yang penulis butuhkan selama penyusunan skripsi.
4. Kedua orang tua dan saudara-saudaraku yang telah memberikan dukungan baik moril, maupun materiil, yang sangat penulis butuhkan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Kekasihku Yuli, yang senantiasa memberikan semangat dan dorongan disaat penulis mengalami kesulitan yang tiada henti sejak dari awal kuliah sampai dengan penyusunan skripsi ini berakhir.
6. Sobat-sobatku Agung (ceki), Yati, Wuri, Agung (togek) dan Almarhum Agus Puranto yang selalu menanyakan "Bagaimana skripsimu?, Kapan selesai?" yang menjadikan motivasi bagi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
7. Semua teman-teman Universitas Sanata Dharma Program Studi Pendidikan Matematika, khususnya angkatan '99 yang telah memberikan dukungan kepada penulis.
8. Kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya masih banyak kekurangan dan kelemahan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu mengharapkan segala masukan, saran dan kritik yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan skripsi ini.

Yogyakarta, Februari 2005

Penulis

Driyanto Widagdo

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

PERSETUJUAN DOSEN PEMBIMBING ii

PENGESAHAN iii

PERSEMBAHAN iv

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA v

ABSTRAK vi

ABSTRACT vii

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Perumusan Masalah 7

1.3 Tujuan Penulisan 7

1.4 Manfaat Penulisan 8

1.5 Pembatasan Masalah 8

1.6 Metode Penulisan 8

1.7 Sistematika Penulisan 9

BAB II LANDASAN TEORI 10

2.1 Barisan 10

2.2 Deret Tak Hingga 15

2.3 Deret Pangkat 33

2.4 Bilangan Kompleks 44

2.5 Fungsi Kompleks 55

2.6 Limit Fungsi Kompleks 60

2.7 Turunan Fungsi Kompleks 62

2.8 Fungsi Analitik 64

2.9 Turunan Tingkat Tinggi 65

BAB III BARISAN DAN DERET BILANGAN KOMPLEKS 66

3.1 Barisan Bilangan Kompleks 66

3.2 Deret Bilangan Kompleks 71

BAB IV DERET PANGKAT KOMPLEKS 79

4.1 Deret Pangkat Kompleks 79

4.2 Deret Taylor 88

4.3 Deret Maclaurin 93

4.4 Penerapan Deret Maclaurin Dan Deret Taylor 102

BAB V PENUTUP 108

5.1 Kesimpulan 108

5.2 Saran 110

DAFTAR PUSTAKA 111

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kita telah mengenal berbagai jenis bilangan, pada awalnya bilangan di perlukan untuk menyatakan jumlah elemen suatu himpunan yang tidak kosong, yaitu bilangan bulat positif atau bilangan asli. Himpunan bilangan asli ini diperluas dengan bilangan nol dan bilangan bulat negatif sehingga terbentuk himpunan bilangan bulat.

Bilangan rasional diperlukan orang untuk menyatakan hasil bagi dua bilangan bulat. Sehingga himpunan bilangan rasional merupakan perluasan himpunan bilangan bulat, dengan demikian bilangan bulat adalah bilangan rasional dengan pembagi satu.

Dengan hanya memiliki bilangan rasional, kita tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2 = 2$, karena $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1,41423...$, sehingga tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan dua. Bilangan semacam ini tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat dan dinamakan bilangan irasional. Gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional dinamakan himpunan bilangan real.

Himpunan semua bilangan real dinyatakan dengan huruf R. Di dalam R terdapat operasi hitung yang mengoperasikan bilangan real yang satu dengan bilangan real yang lain, sehingga R membentuk suatu sistem yang dinamakan sistem bilangan real.

Dengan hanya berbekal pengetahuan mengenai sistem bilangan real kebutuhan orang belum tercukupi. Hal ini disebabkan untuk setiap $x \in R$ selalu berlaku $x^2 \geq 0$, maka kalau kita hanya bekerja didalam R kita tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2 + 1 = 0$. Sehingga selain bilangan real kita memerlukan bilangan jenis baru, bilangan jenis baru inilah yang dinamakan bilangan kompleks.

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $x + yi$ atau $x + iy$ dengan x dan y bilangan real dan $i^2 = -1$. Dengan demikian persamaan $x^2 + 1 = 0$ telah memiliki penyelesaian. Bilangan kompleks sering dinyatakan dengan huruf z, huruf x dan y menyatakan bilangan real. Jika $z = x + iy$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka x dinamakan bagian real dari z yang dilambangkan dengan Re(z) dan y dinamakan bagian imajiner dari z yang dilambangkan dengan Im(z) untuk menyatakan himpunan semua bilangan kompleks digunakan notasi C, sehingga $C = \{z \mid z = x + iy, x \in R, y \in R \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$. Andaikan Im(z) = 0 maka bilangan kompleks z menjadi bilangan real x, sehingga bilangan real adalah keadaan khusus dari bilangan kompleks. Jadi himpunan semua bilangan real adalah himpunan bagian dari semua himpunan bilangan kompleks.

Jika z menyatakan sembarang anggota dari suatu himpunan bilangan-bilangan kompleks, maka z disebut peubah kompleks. Andaikan S dan T himpunan-himpunan bilangan kompleks dan untuk setiap $z \in S$ terdapat aturan yang mengawankan secara tunggal, misal kita namakan f dengan bilangan $w \in T$, maka f disebut fungsi dari himpunan S ke dalam himpunan T. Secara umum w ditulis f(z) sehingga w = f(z).

Karena z adalah peubah kompleks dan fungsi f mengawankan bilangan kompleks $z \in S$ dengan $w \in T$, maka fungsi f disebut fungsi kompleks.

Di dalam kalkulus kita telah mengenal istilah barisan, deret tak hingga dan juga deret pangkat. Istilah barisan digunakan untuk menyatakan suatu perturutan benda-benda atau kejadian-kejadian yang diketahui dalam urutan khusus. Secara informal istilah barisan dalam matematika digunakan untuk menyatakan suatu perturutan tak terbatas dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam barisan itu disebut suku-suku barisan. Contoh dari barisan:

$1, 2, 3, 4, \ldots$

$3, 6, 9, 12, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

$1, -1, 1, -1, \ldots$

Barisan dapat dinotasikan dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan ini dapat dipandang sebagai rumus suatu fungsi dengan variabel "n" pada himpunan bilangan bulat positif. Sehingga kita dapat mendefinisikan barisan tak hinggga $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif.

Apabila barisan tak hingga kita jumlahkan suku-sukunya $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots +$ $a_n + \ldots$, maka kita akan memperoleh suatu deret tak hingga. Dengan demikian suatu deret tak hingga adalah suatu bentuk penjumlahan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ atau dapat ditulis sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dengan $a_1, a_2, a_3 \ldots$ disebut suku suku deret.

Contoh deret tak hingga.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$3 + 6 + 9 + 12 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 3n$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

Sedangkan yang dimaksud dengan deret pangkat adalah suatu deret tak hingga yang berbentuk $C_0 + C_1 (x\text{-}a) + C_2 (x\text{-}a)^2 + \ldots + C_n (x\text{-}a)^n + \ldots$ dengan a dan C_n, n = 0, 1, 2, 3,... adalah suatu konstanta dan x adalah suatu variabel. Bila deret pangkat ini kita nyatakan dengan notasi sigma menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$. Apabila kita ambil a = 0, maka deret pangkat itu menjadi deret kuasa dalam x dan mempunyai bentuk umum $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + \ldots$

Di dalam kuliah telah dibahas konvergensi dari barisan, deret tak hingga dan deret pangkat dengan suku-suku real. Permasalahan baru akan timbul apabila suku-suku barisan maupun deret tersebut bukan lagi bilangan real melainkan bilangan kompleks, sehingga terbentuk barisan dan deret dengan suku-suku kompleks.

Sesuai dengan definisi dari barisan yaitu suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif, maka kita dapat mendefinisikan barisan bilangan kompleks yaitu suatu fungsi yang mengawankan setiap bilangan bulat positif n dengan suatu bilangan kompleks. Barisan bilangan kompleks dapat kita notasikan ke dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Contoh dari barisan bilangan kompleks :

$i, -1, -i, 1, \ldots \qquad = \{i^n\}_{n=1}^{\infty}$

$i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad = \left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\frac{3i}{2}, \frac{3i}{4}, \frac{3i}{8}, \frac{3i}{16}, \ldots \qquad = \left\{\frac{3i}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Berikutnya kita mengalihkan perhatian pada deret bilangan kompleks. Misalnya $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah suatu barisan bilangan kompleks dengan suku-sukunya $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ Jika suku-suku dari barisan itu kita jumlahkan menjadi $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$, maka kita memperoleh suatu deret bilangan kompleks. Secara lebih singkat kita dapat menuliskan deret itu menjadi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Contoh dari deret bilangan kompleks:

$$i - 1 - i + 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} i^n$$

$$i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$\frac{3i}{2} + \frac{3i}{4} + \frac{3i}{8} + \frac{3i}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3i}{2^n}$$

Sedangkan yang disebut sebagai deret pangkat kompleks adalah suatu deret yang berbentuk $C_0 + C_1 (z-z_0) + C_2 (z-z_0)^2 + \ldots + C_n (z-z_0)^n + \ldots$ dengan z_0 dan C_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ adalah suatu konstanta kompleks dan z adalah suatu variabel kompleks. Deret pangkat kompleks ini dapat kita tuliskan ke dalam bentuk yang lebih sederhana menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$.

Dalam barisan dan deret dengan suku-suku real kita telah mempelajari kekonvergenan dari barisan dan deret. Permasalahan yang timbul di sini adalah bilamana barisan dan deret dengan suku-suku kompleks tersebut konvergen ?

Dengan adanya perubahan kurikulum khususnya di program studi pendidikan matematika yaitu dari kurikulum tahun 1999 menjadi kurikulum tahun 2002, maka banyak mata kuliah yang belum ditempuh oleh mahasiswa tetapi mata kuliah tersebut telah dihapus. Salah satunya adalah mata kuliah analisis IV yang berisi materi bilangan kompleks. Hal ini menyebabkan banyak mahasiswa pendidikan matematika kurang begitu menguasai bilangan komplek. Mengingat begitu pentingnya peranan bilangan kompleks dalam matematika. Perlulah kiranya kita mempelajari barisan dan deret bilangan kompleks, serta deret pangkat dengan suku-suku kompleks.

1.2 Perumusan Masalah

Pokok perumusan masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini dapat di rumuskan sebagai berikut:

1. Apakah yang dimaksud dengan barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks ?
2. Bilamana barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks konvergen ?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah memahami pengertian barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks. Selain itu penulisan ini juga bertujuan untuk mengetahui kovergensi dari barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks.

1.4 Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan ini bagi penulis adalah penulis lebih memahami pengertian dan mengetahui konvergensi dari barisan dan deret bilangan kompleks serta deret pangkat kompleks.

Untuk bidang ilmu yang bersangkutan, diharapkan dengan adanya penulisan ini dapat menambah wawasan bahwa konvergensi dari barisan dan deret itu tidak hanya pada suku-suku real melainkan juga pada suku-suku kompleks. Sehingga dapat lebih menarik minat untuk mempelajari dan mengembangkan lebih lanjut.

1.5 Pembatasan Masalah

Materi yang akan dibahas pada penulisan ini meliputi tiga hal yaitu barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks dan deret pangkat kompleks. Tetapi dalam penulisan ini tidak akan membahas teorema De'Moivre, bentuk sisa Lagrange dan pengintegralan kompleks. Sehingga dalam mendefinisikan deret Taylor melalui pendekatan fungsi dengan polinomial kompleks.

1.6 Metode Penulisan

Metode yang akan dipergunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka. Sehingga dalam penulisan ini belum dapat ditemukan hal-hal baru.

1.7 Sistematika Penulisan

Sebagai pendahuluan sebelum kita membahas landasan teori pada bab pertama akan disajikan latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, pembatasan masalah, metode penulisan, sistematika penulisan. Pada bab kedua dan ketiga merupakan materi prasarat untuk membahas deret pangkat kompleks yang meliputi barisan, deret tak hingga, deret pangkat, bilangan kompleks, fungsi kompleks, limit fungsi kompleks, turunan fungsi kompleks, fungsi analitik, turunan tingkat tinggi, barisan bilangan kompleks dan deret bilangan kompleks. Pada bab keempat dibahas deret pangkat kompleks, deret Taylor, deret Maclaurin, penerapan deret Maclaurin dan deret Taylor. Sedangkan pada bagian penutup terdiri dari kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Barisan

Istilah barisan dalam bahasa sehari-hari digunakan untuk menyatakan perturutan benda-benda atau kejadian-kejadian yang diketahui dalam suatu urutan khusus. Secara informal, istilah barisan dalam matematika digunakan untuk menyatakan suatu perturutan tak terbatas dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam barisan itu disebut sebagai suku-suku barisan. Contoh barisan :

1, 2, 3, 4, ...

2, 4, 6, 8, ...

1, ½, 1/3, ¼, ...

1, -1, 1, -1, ...

Pada contoh di atas, titik-titik digunakan untuk menyatakan bahwa barisan itu terus ke takhingga mengikuti suatu pola yang jelas. Contoh barisan diatas dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan sering disebut sebagai notasi kurawal. Dengan demikian kita dapat menuliskan kembali contoh-contoh di atas ke dalam notasi kurawal menjadi :

$\{n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{2n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Kita tinjau kembali barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, maka barisan ini dapat kita pandang sebagai rumus suatu fungsi dengan variabel n pada himpunan bilangan bulat positif. Jadi sekarang kita telah memiliki definisi formal dari suatu barisan yaitu :

Definisi 2.1.1

Suatu barisan (barisan tak hingga) adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif.

Definisi 2.1.2

Suatu barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut mempunyai limit L bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $|a_n - L| < \epsilon$.

Barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut konvergen bila dan hanya bila $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Contoh 2.1.1

Buktikan barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen 0.

Penyelesaian :

Ambil ε > 0 sedemikian sehingga

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \text{ untuk semua } n \geq N$$

$$\frac{1}{|n|} < \varepsilon, \text{ untuk semua } n \geq N$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ untuk semua } n \geq N$$

Maka ada $N = \frac{1}{\varepsilon}$ sedemikian sehingga $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap ε > 0 yang diberikan ada bilangan bulat posotif $N = \frac{1}{\varepsilon}$, sedemikian sehingga untuk semua $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ belaku $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Sehingga terbukti barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen 0.

Definisi 2.1.3

Suatu barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut :

Naik bila $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ atau $a_n < a_{n+1}$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Tidak turun bila $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \leq a_n \leq \ldots$ atau $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Turun bila $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$atau $a_n > a_{n+1}$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Tidak naik bila $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$atau $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Suatu barisan yang tidak naik atau tidak turun disebut barisan monoton dan barisan yang naik atau turun disebut monoton secara terbatas.

Definisi 2.1.4

Bilangan M disebut batas atas dari himpunan terurut S jika $\forall$ x $\in$ S, berlaku $x \leq M$.

Definisi 2.1.5

Bilangan U adalah batas atas dari suatu himpunan S bila U lebih besar atau sama dengan setiap bilangan dalam S, dan bila S mempunyai batas atas terkecil, maka bilangan ini disebut batas atas terkecil dari himpunan S.

Aksioma 2.1.1 (Aksioma Kelengkapan)

Bila suatu himpunan tidak kosong S dari bilangan real mempunyai batas atas, maka S mempunyai batas atas terkecil.

Teorema 2.1.1

Untuk suatu barisan yang tidak turun $a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq \ldots$ Maka ada dua kemungkinan :

a) Ada konstanta M sedemikian sehingga $a_n \leq M$ untuk semua n, dalam hal ini barisan konvergen ke suatu limit L yang memenuhi $L \leq M$

b) Tidak ada konstanta seperti itu, dalam hal ini $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Bukti :

a) Andaikan ada konstanta M sedemikian sehingga $a_n \leq M$ untuk $n = 1, 2,3,\ldots$, maka M adalah batas atas dari himpunan suku-suku dalam barisan. Dengan aksioma 2.1.1, maka ada batas atas terkecil untuk suku-suku barisan, sebutlah L. Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang dan akan ditunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Karena L adalah batas atas terkecil suku-suku barisan , maka $L - \varepsilon$ bukan batas atas suku-suku barisan, yang berarti bahwa ada sekurang-kurangnya satu suku a_N sedemikian sehingga $a_N > L - \varepsilon$. Karena $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan tidak turun, maka harus berlaku juga $L - \varepsilon < a_n \leq L$, untuk $n \geq N$.

Dengan demikian diperoleh $-\varepsilon < a_n - L \leq 0 < \varepsilon$ dan $|a_n - L| < \varepsilon$, untuk $n \geq N$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Karena M adalah batas atas dari suku-suku barisan dan L adalah batas atas terkecil, maka haruslah $L \leq M$

b) Jika tidak ada konstanta M ssedemikian sehingga $a_n \leq M$, untuk $n = 1, 2,3, \ldots$, maka bagaimanapun juga besarnya M yang kita pilih, dapat kita temukan suku a_N sedemikian sehingga $a_N > M$.

Karena barisan tidak turun, maka $a_n \geq a_N > M$, untuk $n \geq N$. Jadi, suku-suku barisan menjadi besar sekendak jika n naik yaitu : $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

2.2 Deret Tak Hingga

Pada sub bab ini kita akan membahas jumlah dari suku-suku barisan $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ yaitu $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$, jumlah suku-suku barisan inilah yang disebut deret tak hingga, sehingga diperoleh definisi :

Definisi 2.2.1

Suatu deret tak hingga adalah suatu bentuk penjumlahan $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$, atau dapat ditulis dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$

$U_1, U_2, U_3, \ldots$ disebut suku-suku deret.

Andaikan S_n menyatakan jumlah n suku pertama dari deret, maka kita memperoleh :

$S_1 = U_1$

$S_2 = U_1 + U_2$

$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$

....

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots U_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_k$

Bilangan S_n disebut jumlah parsial ke-n dari deret dan barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut sebagai barisan jumlah parsial. Dalam penulisan selanjutnya deret tak hingga cukup ditulis deret.

Definisi 2.2.2

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ disebut konvergen bila dan hanya bila barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke S, dengan $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$ dan S disebut jumlah deret dan ditulis : $\sum_{k=1}^{\infty} U_k = S$

Contoh 2.2.1

Tentukan apakah deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ konvergen atau divergen, jika konvergen tentukan jumlahnya.

Penyelesaian

Diketahui deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$U_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{(k+1)} + \frac{B}{(k+2)} \qquad (1)$$

$$1 = A\,(k+2) + B\,(k+1)$$

$$1 = Ak + Bk + 2A + B$$

$$1 = (A+B)k + (2A+B)$$

Dengan demikian kita peroleh :

$2A + B = 1$ (2) dan $A + B = 0$ (3)

Kita kurangkan persamaan (2) dengan persamaan (3) diperoleh :

$A = 1$ dan $B = -1$

Kita masukkan nilai A dan B kedalam persamaan (1) menjadi :

$$U_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

....

$$U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

---------------------------+

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$, maka barisan jumlah bagian $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\frac{1}{2}$. Jadi deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ konvergen dan jumlah deretnya $\frac{1}{2}$ atau dapat kita tulis $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$

Teorema 2.2.1

Jika deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

Bukti :

Diketahui deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ dan andaikan S_n adalah jumlah parsial ke- n , maka :

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-1} + U_n$

$S_{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-1}$

Sehingga kita peroleh $S_n - S_{n-1} = U_n$. S_n adalah jumlah n suku pertama dan S_{n-1} adalah jumlah n-1suku pertama. Jika S menyatakan jumlah deret, maka $\lim\limits_{n\to\infty} S = S$ dan karena $(n-1) \to \infty$ jika $n \to \infty$ kita juga mempunyai $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, maka

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Teorema 2.2.2 (Uji Divergensi)

Jika $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen

Bukti :

Diketahui $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$. Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen, maka berdasarkan teorema 2.2.1 diperoleh $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Sehingga terdapat kontradiksi dengan yang diketahui.

Jadi terbukti jika $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen

Teorema 2.2.3

a. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ adalah deret-deret yang konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n)$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n - V_n)$ konvergen dan jumlah dari deret ini dihubungkan oleh : $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} V_n$

   dan $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n - V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \sum_{n=1}^{\infty} V_n$

b. Jika C suatu konstanta bukan 0, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} CU_n$ keduanya konvergen atau keduanya divergen. Dalam hal deret konvergen, jumlahnya dihubungkan oleh : $\sum_{n=1}^{\infty} CU_n = C\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

c. Konvergensi atau divergensi tidak dipengaruhi oleh penghapusan sejumlah suku tertentu dari deret semula, yaitu untuk sembarang bilangan bulat n, deret-deret. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$ dan $\sum_{k=n}^{\infty} U_k = U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots$ keduanya konvergen atau keduanya divergen.

Teorema 2 . 2. 4

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan jika ada konstanta M sedemikian sehingga $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n \leq M$. untuk setiap n , maka deret konvergen dan jumlah S memenuhi $S \leq M$.

Jika tidak ada konstanta M seperti itu maka deret divergen.

Bukti :

Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ adalah deret dengan suku-suku positif.

Andaikan Sn adalah jumlah parsial ke-n, maka $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots$ Jika ada konstanta M sedemikian sehingga $S_n \leq M$, untuk semua n, maka menurut teorema 2.1.1, barisan jumlah parsial akan konvergen ke limit S yang memenuhi $S \leq M$.

Jika tidak ada konstanta M yang memenuhi $S_n \leq M$, maka $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ dan deret divergen.

Untuk menguji konvergensi deret tak hingga selain menggunakan definisi 2.2.2 kita juga dapat menggunakan cara lain. Sebagai contoh kita dapat menggunakan uji banding, uji rasio, uji akar dan uji konvergensi yang lain. Berikut ini akan kita bahas tentang uji konvergensi tersebut.

Teorema 2.2.5 (Uji Banding)

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan $U_n \leq V_n$, untuk semua n, maka :

a) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ juga konvergen.

b) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ juga divergen

Bukti :

a) Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ konvergen dan jumlahnya V, maka untuk semua n berlaku $V_1 + V_2 + \ldots + V_n < \sum_{n=1}^{\infty} V_n = V$. Telah diketahui bahwa $U_n \leq V_n$, untuk semua n, maka $U_1 + U_2 + \ldots + U_n \leq V_1 + V_2 + \ldots + V_n$, sehingga $U_1 + U_2 + \ldots + U_n < V$. Jadi setiap jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ kurang dari V, maka menurut teorema 2.2.4 deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen.

b) Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ konvergen, maka berdasar teorema 2.2.5 (a) diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen. Terdapat kontradiksi dengan yang diketahui karena $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen. Jadi terbukti jika $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ juga divergen.

Teorema 2.2.6 (Uji Rasio)

Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan andaikan

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \rho$, maka :

a) Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen

b) Jika $\rho > 1$, maka deret divergen

c) Jika $\rho = 1$, maka deret dapat konvergen atau divergen.

Bukti :

a) Andaikan $\rho < 1$ dan $r = \frac{1}{2}(1 + \rho)$. Jadi $\rho < r < 1$, karena r adalah titik tengah antara ρ dan 1. Andaikan $\epsilon = r - \rho$ dan $\varepsilon > 0$.

Karena $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif N

Sedemikan sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} - \rho \right| < \varepsilon$ sehingga

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < \rho + \varepsilon$ dan karena $\varepsilon = r - \rho$ maka $U_{n+1} < r\, U_n$, untuk $n \geq N$

Kita memperoleh pertidaksamaan sebagai berikut :

$U_{N+1} < r\, U_N$

$U_{N+2} < r\, U_{N+1} < r^2\, U_N$ (i)

$U_{N+3} < r\, U_{N+2} < r^3\, U_N$

....

Diketahui $\rho < r < 1$dan ρ tidak mungkin bernilai negatif maka $|r| < 1$ sehingga $r\, U_N + r^2\, U_N + r^3\, U_N$ adalah deret geometri yang konvergen.

Dari ketidaksamaan (i) dan teorema uji banding maka deret $\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n = U_{N+1} + U_{N+2} + U_{N+3} + \ldots$, juga konvergen. Jadi terbukti bahwa :

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$ konvergen.

b) Andaikan $\rho > 1$dan $\varepsilon = \rho - 1$ adalah bilangan positif

Karena $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif N

sedemikan sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} - \rho \right| < \varepsilon$

Jadi $\frac{U_{n+1}}{U_n} > \rho - \varepsilon$ untuk $n \geq N$. Karena $\varepsilon = \rho - 1$ maka $U_{n+1} > U_n$ untuk $n \geq N$. Kita memperoleh ketidaksamaan sebagai berikut :

$U_{N+1} > U_N$

$U_{N+2} > U_{N+1} > U_N$

$U_{N+3} > U_{N+2} > U_N$

....

Karena $U_N > 0$ maka $U_n > U_N > 0$ untuk $n \geq N$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} U_n \neq 0$ sehingga menurut Teorema 2.2.2 maka $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n +$ divergen.

c) Perhatikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Keduanya mempunyai $\rho = 1$ karena deret yang pertama adalah deret harmonis yang divergen dan deret yang kedua adalah deret-p yang konvergen, maka uji rasio tak dapat menentukan kekonvergenan dari deret bila $\rho = 1$.

Teorema 2.2.7 (Uji Akar)

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan andaikan

$\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n \to \infty} (U_n)^{1/n}$

a) Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen

b) Jika $\rho > 1$, maka deret divergen

c) Jika $\rho = 1$, maka deret dapat konvergen atau divergen

Bukti :

a) Andaikan $\rho < 1$ dan $r = \frac{1}{2}(1 + \rho)$. Jadi $\rho < r < 1$ karena r adalah titik tengah antara 1 dan ρ . Andaikan $\in = r - \rho$ dan $\varepsilon > 0$.

Karena $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} (U_n)^{1/n}$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif N sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|(U_n)^{1/n} - \rho| < \varepsilon$ sehingga $(U_n)^{1/n} < \rho + \varepsilon$. Karena $\varepsilon = r - \rho$, maka $(U_n)^{1/n} < r$ atau $U_n < r^n$ untuk $n \geq N$.

Kita memperoleh pertidaksamaan sebagai berikut :

$U_1 < r$

$U_2 < r^2$

$U_3 < r^3$

. . . . . .

sehingga kita dapat membentuk deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots$

karena $r < 1$, maka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ konvergen, sehingga berdasarkan teorema 2.2.5

karena $U_n < r^n$ maka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ juga konvergen.

b) Andaikan $\rho > 1$ dan $\varepsilon = \rho - 1$ adalah bilangan positif.

Karena $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} (U_n)^{1/n}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif N sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|(U_n)^{1/n} - \rho| < \varepsilon$, sehingga

$(U_n)^{1/n} > \rho - \varepsilon$. Karena $\varepsilon = \rho - 1$ maka $(U_n)^{1/n} > 1$ atau $U_n > 1^n$ untuk semua $n \geq N$. Kita memperoleh pertidaksamaan sebagai berikut :

$U_1 > 1^1$

$U_2 > 1^2$

$U_3 > 1^3$

. . . . . .

sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots$ dan $\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 0$, maka menurut teorema 2.2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ divergen. Karena $1^n < U_n$ untuk $n \geq N$ dan diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ divergen maka menurut teorema 2.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ divergen.

c) Pembuktian ini seperti pada pembuktian teorema 2.2.6 bagian c.

Teorema 2.2.8 (Limit Uji Banding)

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan andaikan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$

Jika ρ berhingga dan $\rho > 0$ maka keduanya konvergen atau divergen.

Bukti :

Andaikan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif N

sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $\left| \frac{U_n}{V_n} - \rho \right| < \varepsilon$ atau

$-\varepsilon < \frac{U_n}{V_n} - \rho < \varepsilon$, untuk semua $n \geq N$

$\rho - \varepsilon < \frac{U_n}{V_n} < \rho + \varepsilon$, untuk semua $n \geq N$

Kita perhatikan pertidaksamaan $\frac{U_n}{V_n} < \rho + \varepsilon$ dan andaikan $\varepsilon = \frac{\rho}{2} > 0$

Maka $\frac{U_n}{V_n} < \frac{3}{2}\rho$, untuk semua $n \geq N$ atau $U_n < \frac{3}{2}\rho V_n$, untuk semua $n \geq N$

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\rho V_n = \frac{3}{2}\rho \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ juga konvergen

karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\rho V_n$ konvergen dan $U_n < \frac{3}{2}\rho V_n$ untuk semua $n \geq N$ maka menurut

teorema 2.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ juga konvergen.

Kita perhatikan pertidaksamaan $\rho - \varepsilon < \frac{U_n}{V_n}$ dan andaikan $\varepsilon = \frac{\rho}{2} > 0$

Maka $\frac{\rho}{2} < \frac{U_n}{V_n}$ untuk semua $n \geq N$ atau $U_n > \frac{\rho}{2} V_n$ untuk semua $n \geq N$

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{2} V_n$ juga divergen

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{2} V_n$ divergen dan $\frac{\rho}{2}$ $V_n < U_n$ untuk semua $n \geq N$ maka menurut teorema 2.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ juga divergen.

Contoh 2.2.2

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4 - 2n^3 + 1}{n^5 + n^3 - 2n}$ konvergen atau divergen

Penyelesaian

Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4 - 2n^3 + 1}{n^5 + n^3 - 2n}$ deret ini bersifat seperti deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$ yang divergen. Sehingga $U_n = \frac{6n^4 - 2n^3 + 1}{n^5 + n^3 - 2n}$ dan $V_n = \frac{6}{n}$

Maka $\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{6n^4 - 2n^3 + 1}{n^5 + n^3 - 2n}$ x $\frac{n}{6} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{6n^5 - 2n^4 + n}{6n^5 + 6n^3 - 12n}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{6 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}}{6 + \frac{6}{n^2} - \frac{12}{n^4}} = 1$$

Karena $\rho = 1 > 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$ adalah deret yang divergen maka menurut teorema 2.2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4 - 2n^3 + 1}{n^5 + n^3 - 2n}$ juga divergen.

Berikut ini kita akan melanjutkan pembahasan pada deret yang memuat suku-suku negatif. Deret khusus yang penting adalah deret dengan suku-suku positif dan negatif berganti-ganti. Deret seperti ini sering disebut deret selang seling. Ada dua bentuk umum dari deret selang seling yaitu :

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ atau

$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$ dengan a_n semua positif.

Teorema 2.2.9 (Uji Deret Selang Seling)

Suatu deret selang seling $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ atau $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergen apabila dua syarat berikut dipenuhi: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Untuk membuktikan teorema ini kita memerlukan fakta berikut tentang barisan : jika suku-suku bernomor genap dari suatu barisan menuju ke suatu limit L, dan jika suku-suku bernomor ganjil dari barisan menuju ke limit yang sama L, maka barisan lengkap menuju ke limit L.

Bukti :

Perhatikan bentuk $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ dan andaikan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$. Dengan demikian ada dua kemungkinan untuk $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ yaitu : $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ untuk suku bernomor genap dan $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ untuk suku bernomor ganjil. Sehingga diperoleh :

$S_2 = a_1 - a_2$

$S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \geq S_2$

$S_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \geq S_4$

……………………………

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$

Maka $S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq \ldots$ (i)

Selain itu suku-suku dalam barisan semuanya kurang atau sama dengan a_1, karena itu kita dapat menuliskan

$S_2 = a_1 - a_2 \leq a_1$

$S_4 = a_1 - (a_2 - a_3) - a_4 \leq a_1$

$S_6 = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - a_6 \leq a_1$

……………………………

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) - \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$

Maka $S_{2n} \leq a_1$ untuk semua n (ii)

Dari (i) dan (ii), maka menurut teorema 2.1.1 barisan $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke suatu limit L yang memenuhi $L \leq a_1$. Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = L$

Sekarang perhatikan barisan $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}, \ldots$ Karena suku ke-2n dalam deret selang seling adalah $-a_{2n}$, maka berlaku : $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n}$ atau $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$

Tetapi $2n \to \infty$ jika $n \to \infty$, jadi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ (menurut syarat kedua).

Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L + 0 = L$.

Karena $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$ dan $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = L$, maka barisan $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

konvergen ke L. Jadi terbukti bahwa deret selang-seling $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergen.

Definisi 2.2.3

Suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$ disebut konvergen mutlak bila dan hanya bila deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| = |U_1| + |U_2| + |U_3| + \ldots + |U_n| + \ldots$, konvergen. Suatu deret yang konvergen tetapi deret nilai mutlaknya divergen maka deret itu disebut konvergen bersyarat.

Teorema 2.2.10

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| = |U_1| + |U_2| + |U_3| + \ldots + |U_n| + \ldots$, konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$, juga konvergen.

Bukti :

Kita bentuk deret baru $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| + U_n$, dengan demikian ada dua kemungkinan yaitu : $|U_n| + U_n = 2|U_n|$ Jika U_n positif dan $|U_n| + U_n = 0$ jika U_n negatif maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty}((|U_n| + U_n) - |U_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(|U_n| + U_n) - \sum_{n=1}^{\infty}|U_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| - \sum_{n=1}^{\infty}|U_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ juga konvergen.

Teorema 2.2.11 (Uji Rasio Untuk Konvergen mutlak)

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ adalah suatu deret dengan suku-suku tidak nol dan andaikan

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$$

a) Jika $\rho < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ konvergen mutlak.

b) Jika $\rho > 1$ atau $\rho = \infty$ maka, deret $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ divergen.

c) Jika $\rho = 1$ tidak dapat ditarik kesimpulan bahwa deret konvergen.

Pembuktian dari teorema ini tidak dibahas karena serupa dengan bukti teorema 2.2.6 (Uji Rasio)

Contoh : 2.2.3

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^n}$ konvergen atau divergen

Penyelesaian :

Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^n}$, maka $U_n = \frac{n}{5^n}$ dan $U_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$

Sehingga $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{5^{n+1}} x \frac{5^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{5^n.5} x \frac{5^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{5n}{n}} = \frac{1}{5}$$

Karena $\rho = \frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{5} < 1$ maka menurut teorema 2.2.11 maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5^n}$

konvergen mutlak.

2.3. Deret Pangkat (Kuasa)

Dalam sub bab ini kita akan mempelajari deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel dan deret ini sering disebut sebagai deret pangkat.

Definisi 2.3.1.

Jika $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ adalah konstanta-konstanta dan x adalah suatu variabel, maka deret yang berbentuk :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n + \ldots$$

disebut deret pangkat dalam (x–a), dengan a suatu konstanta.

Apabila kita ambil a = 0 maka deret menjadi deret pangkat dalam x dan mempunyai bentuk umum : $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots$

Contoh 2.3.1.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ adalah deret pangkat dalam x

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n} = 1 + \frac{(x-3)}{2} + \frac{(x-3)^2}{4} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{2^n} + \ldots$ adalah deret pangkat dalam (x–3)

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, adalah deret pangkat dalam x.

Untuk menetukan konvergensi deret pangkat dalam x kita bentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n.x^n| = |C_0| + |C_i x| + |C_2 x^2| + \ldots + |C_n x^n| + \ldots$ Sehingga terbentuk deret dengan suku-suku positif, maka semua teorema deret dengan suku-suku positif berlaku untuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} |U_n|$

Permasalahan yang timbul adalah untuk nilai-nilai yang manakah deret pangkat konvergen. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut kita gunakan uji rasio pada deret $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n\, x^n|$, maka $U_n = C_n\, x^n$ dan $U_{n+1} = C_{n+1}\, x^{n+1}$

Sehingga $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$

Deret pangkat konvergen mutlak bila $\rho < 1$, maka

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| < 1 \text{ atau } |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

Kita perhatikan $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$ maka nilai limitnya ada dalam R atau nilainya ∞

Sehingga diperoleh beberapa kemungkinan

1. Andaikan $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$ ada dan misalnya $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = R$,

   maka $|x| < R$ atau $-R < x < R$. Jadi deret konvergen mutlak untuk $-R < x < R$ dan deret pangkat divergen bila $|x| > R$. Pada ujung-ujung interval perlu diadakan pemeriksaan yaitu di $x = R$ dan $x = -R$.

   Untuk $x = R$ maka deretnya menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n$

   Untuk $x = -R$ maka deretnya menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (-R)^n$

   Dengan demikian diperoleh deret dengan suku-suku konstan

2. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \infty$, maka $|x| < \infty$ atau $-\infty < x < \infty$ maka deret pangkat konvergen untuk semua x

3. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = 0$, maka deret pangkat konvergen hanya untuk $x = 0$. Deret pangkat menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$

Apabila kita bekerja dengan deret pangkat dalam (x – a) yang mempunyai bentuk umum $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-a)^n$, maka sifat-sifat konvergensi deret pangkat dalam (x – a) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan x – a ke dalam x sehingga ada tiga kemungkinan yang terjadi untuk deret pangkat dalam (x – a) yaitu :

a) Deret konvergen hanya untuk x = a

b) Deret konvergen mutlak untuk semua x

c) Deret konvergen mutlak untuk semua x dalam suatu interval terbuka tertentu (a – R, a + R) dan divergen bila x < a – R atau x > a + R. Pada titik-titik x = a – R dan x = a + R deret dapat konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen tergantung pada deret khusus.

Dari ketiga kemungkinan ini, kita dapatkan jari-jari konvergensinya berturut-turut adalah 0, ∞ dan R. Himpunan semua titik x yang menjadikan deret pangkat konvergen disebut interval konvergensi.

Contoh 2.3.2

Tentukan jari-jari konvergensi dari deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

Penyelesaian :

Diketahui deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, kita bentuk deret nilai mutlaknya yaitu

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n+1}\right|$ maka $U_n = \frac{x^n}{n+1}$ dan $U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+2}$

Sehingga diperoleh bahwa $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{x^n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n \cdot x}{n+2} \cdot \frac{n+1}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|x \cdot \frac{n+1}{n+2}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = |x|.1 = |x|$$

Maka $\rho = |x|$ sehingga deret pangkat akan konvergen bila $\rho < 1$ dan divergen bila $\rho > 1$. Jadi untuk $|x| < 1$ atau $-1 < x < 1$deret konvergen dan deret pangkat divergen bila $x > 1$ atau $x < -1$. Dengan mensubstitusikan nilai $x = 1$ ke dalam deret yang diketahui diperoleh :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$ merupakan deret harmonis yang divergen. Dengan mensubstitusikan nilai $x = -1$ ke dalam deret yang diketahui diperoleh : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots$, kita lakukan pengujian deret selang seling maka $U_n = \frac{1}{n+1}$, $U_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

Jadi $U_n > U_{n+1}$ dan $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Berdasarkan teorema 2.2.9 maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergen

Jadi interval konvergensinya adalah (–1, 1] dan jari-jari konvergensinya R = 1

Contoh 2.3.3

Tentukan jari-jari konvergensi dan interval konvergensi dari deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$$

Penyelesaian :

Diketahui deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$, kita bentuk deret nilai mutlaknya yaitu

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(x-3)^n}{2^n} \right|$, maka $U_n = \frac{(x-3)^n}{2^n}$ dan $U_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}$

Sehingga diperoleh ρ $= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(x-3)^n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^n (x-3)}{2^n.2} \cdot \frac{2^n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)}{2} \right|$$

$$= |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |x-3|$$

Maka $\rho = \frac{1}{2}\ |x - 3|$, deret pangkat akan konvergen bila $\rho < 1$ dan divergen bila $\rho > 1$. Jadi untuk $\rho = \frac{1}{2}\ |x - 3| < 1$ atau $1 < x < 5$ deret konvergen dan divergen bila $x > 5$ atau $x < 1$.

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 1$ ke dalam deret yang diketahui diperoleh :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ merupakan deret yang divergen

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 5$ ke dalam deret yang diketahui diperoleh :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ merupakan deret yang divergen

Jadi interval konvergensinya (1, 5) dan jari-jari konvergensinya $R = 2$.

Aksioma 2.3.1

Andaikan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (x - a)^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\ (x - a)^n$ adalah dua deret yang konvergen, masing-masing ke $f(x)$ dan $g(x)$ untuk $|x - a| < R$, maka pernyataan berikut benar untuk $|x - a| < R$ yaitu :

a) Kedua deret dapat dijumlahkan satu demi Satu

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (x - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\ (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\ (a_n + b_n)(x - a)^n$$

b) Kedua deret dapat dikurangkan satu demi satu

$$f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x-a)^n$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ bila $a_n = b_n$ untuk $n = 0, 1, 2 \ldots$

d) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$

dengan $C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$

Pada sub bab ini kita telah memperoleh bahwa jika kita mempunyai suatu deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ yang konvergen ke suatu fungsi f(x), maka kita dapat menyatakan hal ini menjadi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$. Ini berarti bahwa untuk suatu fungsi f(x), kita dapat mendekati fungsi ini dengan deret pangkat. Untuk dapat mendekati suatu fungsi dengan deret pangkat, kita dapat menggunakan ekspansi deret Maclaurin atau ekspansi deret Taylor.

Definisi 2.3.2

Jika f(x) berturunan n kali pada x = 0, maka kita definisikan polinomial Maclaurin ke-n untuk f(x) sebagai berikut :

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Polinomial ini bersifat bahwa nilainya dan nilai-nilai n derevatif pertamanya bersesuaian dengan nilai f(x) dan n derevatif pertamanya pada x = 0.

Definisi 2.3.3

Jika f(x) berturunan pada semua tingkat pada x = 0, maka didefinisikan deret Maclaurin untuk fungsi f(x) disekitar titik x = 0, yaitu :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Definisi 2.3.4

Jika f(x) berturunan n kali pada x = a, maka kita definisikan polinomial Taylor ke-n di sekitar x = a, sebagai berikut :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{3!}$$

Definisi 2.3.5

Jika f(x) berturunan pada semua tingkat pada x = a, maka didefinisikan deret Taylor untuk fungsi f(x) di sekitar titik x = a, yaitu :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Definisi 2.3.6

Andaikan $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, dengan interval konvergensi $-1 < x \leq 1$ dan $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$, dengan interval konvergensi $-1 \leq x < 1$, maka didefinisikan Deret Gregory sebagai berikut:

$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right]$, dengan interval kebenaran $-1 < x < 1$.

Deret ini digunakan untuk menghitung logaritma natural dari bilangan positif y dengan memisalkan $x = \frac{y-1}{y+1}$, sehingga $y = \frac{1+x}{1-y}$.

Contoh 2.3.4

Tentukan deret Taylor dari fungsi $f(x) = e^x$ disekitar titik $a = 2$

Penyelesaian

Diketahui : $f(x) = e^x \Rightarrow f(2) = e^2$

maka $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(2) = e^2$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(2) = e^2$

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(2) = e^2$

....

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(2) = e^2$

Diperoleh deret Taylor untuk fungsi f(x) = e^x disekitar titik a = 2, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}.(x-2)^2 + \ldots + \frac{e^2}{n!}.(x-2)^n + \ldots$$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$. Jadi deret yang dicari adalah $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$

Contoh 2.3.5

Tentukan deret Maclaurin dari fungsi f(x) = e^{ax}

Penyelesaian :

Diketahui : $f(x) = e^{ax} \Rightarrow f(0) = 1 = a^0$

maka $f'(x) = ae^{ax} \Rightarrow f'(0) = a = a^1$

$f''(x) = a^2e^{ax} \Rightarrow f''(0) = a^2 = a^2$

$f'''(x) = a^3e^{ax} \Rightarrow f'''(0) = a^3 = a^3$

……………………………………

$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \Rightarrow f^{(n)}(0) = a^n$

Jadi deret Maclaurin untuk fungsi f(x) = e^{ax} adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}x^n = 1 + ax + \frac{a^2.x^2}{2!} + \frac{a^3.x^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n.x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}x^n$$

Sehingga kita dapat menyatakan bahwa $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}x^n$

Contoh 2.3.6

Tentukan nilai dari ln2.

Penyelesaian:

Kita andaikan y = 2, maka $x = \frac{1}{3}$, sehingga diperoleh:

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9}{9} + \ldots\right]$$

$$= 2[0{,}33333 + 0{,}01235 + 0{,}00082 + 0{,}00007 + 0{,}00001 + \ldots]$$

$\approx 2[0{,}34657]$ = 0,69314. Jika kita mengiginkan pembulatan sampai empat tempat desimal, maka kita peroleh $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

2.4 Bilangan Kompleks

Sebelum mempelajari barisan dan deret bilangan kompleks, terlebih dahulu kita harus mempelajari konsep tentang bilangan kompleks.

Definisi 2.4.1

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk x + iy atau x + yi dengan x dan y bilangan real dan $i^2 = -1$.

Bilangan kompleks sering dinyatakan dengan huruf z, huruf x dan y menyatakan bilangan real. Jika z = x + iy menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka x dinamakan bagian real dari z yang dilambangkan dengan Re(z) dan y dinamakan bagian imajiner yang dilambangkan dengan Im(z). Untuk menyatakan hinpunan semua bilangan kompleks digunakan notasi C, sehingga C = {z | z = x + iy, $x \in R, y \in R$ dan $i = \sqrt{-1}$ }. Andaikan Im(z) = 0, maka bilangan kompleks z menyatakan bilangan real x. Jika Re(z) = 0 dan Im(z) $\neq$ 0, maka z dinamakan bilangan imajiner murni.

Definisi 2.4.2

Bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dikatakan sama dan ditulis $z_1 = z_2$ bila dan hanya bila $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Definisi 2.4.3

Andaikan bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ dan $z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Kita telah mengetahui bahwa bilangan real x adalah keadaan khusus dari bilangan kompleks z = x + iy untuk y = 0. Bilangan kompleks x + i0, yaitu bilangan real x akan kita tuliskan dengan x saja dan dapat diperlakukan seperti halnya bilangan real. Khususnya jika x = 0 dan jika x =1, maka kita memperoleh 0 + i0 yaitu bilangan real 0 dan 1 + i0 yaitu bilangan real 1.

Dalam sistem bilangan kompleks bilangan 0 merupakan eleman identitas terhadap operasi penjumlahan dan bilangan 1 adalan elemem identitas terhadap operasi perkalian, sehingga berlaku :

$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy$

$z \, . \, 1 = (x + iy) \, . \, (i + i0) = (x \, .1 - y \, .0) + i(x \, . \, 0 + 1 \, . \, y) = x + iy$

Definisi 2.4.4

Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ terdapat tepat satu bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$, sehingga $z + z_1 = 0$, yaitu $z_1 = -x + i(-y)$ yang dinamakan negatif dari z dan merupakan invers dari z terhadap operasi penjumlahan . Bilangan ini sering dinyatakan dengan $-z$ dan diperoleh $z + (-z) = 0$ untuk setiap bilangan kompleks z dengan $z = x + iy$ dan $-z = -x - iy$.

Definisi 2.4.5

Andaikan $z \neq 0$, maka terdapat tepat satu bilangan kompleks z_2 sehingga berlaku $z \, . \, z_2 = 1$, dengan $z_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$, dan dinamakan invers dari z terhadap operasi perkalian.

Definisi 2.4.6

Bilangan $z_1 - z_2$ dinamakan selisih dari bilangan z_1 dan z_2

Definisi 2.4.7

Bilangan $\frac{z_1}{z_2}$ dinamakan hasil bagi dari bilangan z_1 dan z_2.

Definisi 2.4.8

Jika n bilangan bulat positif dan $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, maka

$z_1 \,.\, z_2 \,.\, z_3 \ldots z_n = z \,.\, z \,.\, z \ldots z = z^n$.

Definisi 2.4.9

Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan bilangan kompleks

$\bar{z} = x - iy$ yang dinamakan konjugat dari bilangan z.

Teorema 2.4.1

Andaikan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka berlaku :

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan b) $z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$

Bukti :

Diketahui $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka :

a) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) = z_2 + z_1$

b) $z_1 \,.\, z_2 = (x_1 + iy_1) \,.\, (x_2 + iy_2) = (x_1 \,.\, x_2 - y_1 \,.\, y_2) + i(x_1 \,.\, y_2 + x_2 \,.\, y_1)$

$= (x_2 \,.\, x_1 - y_2 \,.\, y_1) + i(y_2 \,.\, x_1 + y_1 \,.\, x_2) = (x_2 + iy_2) \,.\, (x_1 + iy_1) = z_2 \,.\, z_1$

Jadi terbukti bahwa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$

Teorema 2.4.2

Andaikan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ dan $z_3 = x_3 + iy_3$, maka berlaku :

a) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dan b) $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$

Bukti :

Diketahui $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ dan $z_3 = x_3 + iy_3$, maka :

a) $z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1) + ((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3))$

$= (x_1 + iy_1) + ((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)$

$= (x_1 + (x_2 + x_3)) + i(y_1 + (y_2 + y_3)$

$= ((x_1 + x_2) + x_3) + i((y_1 + y_2) + y_3)$

$= ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) + (x_3 + iy_3)$

$= ((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) + (x_3 + iy_3)$

$= (z_1 + z_2) + z_3$

Jadi terbukti bahwa $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

b) $z_1 . (z_2 . z_3) = (x_1 + iy_1) . ((x_2 + iy_2) . (x_3 + iy_3))$

$= (x_1 + iy_1) . ((x_2 . x_3 - y_2 . y_3) + i(x_2 . y_3 + x_3 . y_2)$

$= (x_1(x_2 . x_3 - y_2 . y_3)) - y_1(x_2 . y_3 + x_3 . y_2) + i(x_1(x_2 . y_3 + x_3 . y_2) +$

$(x_2 . y_3 + x_3 . y_2) y_1)$

$= (x_1(x_2.x_3)-x_1(y_2.y_3)-y_1(x_2.y_3)-y_1(x_3.y_2)) + i((x_1(x_2.y_3) + x_1(x_3.y_2)) +$

$(x_2.x_3)y_1-(y_2.y_3)y_1)$

$= (x_1(x_2.x_3) -y_1(x_3.y_2) -x_1(y_2.y_3) -y_1(x_2.y_3)) +$

$i((x_1(x_2.y_3) -(y_2.y_3)y_1) + (x_1(x_3.y_2) + (x_2.x_3)y_1)$

$= ((x_1.x_2-y_1.y_2)x_3 - (x_1.y_2 + x_2.y_1)y_3) +$

$i((x_1.x_2 - y_1.y_2)y_3 + x_3(x_1.y_2 + x_2.y_1))$

$(z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3 = ((x_1 + iy_1) \,.\, (x_2 + iy_2)) \,.\, (x_3 + iy_3)$

$= ((x_1.x_2 - y_1.y_2) + i(x_1.y_2 + x_2.y_1)) \,.\, (x_3 + iy_3)$

$= ((x_1.x_2 - y_1.y_2)x_3 - (x_1.y_2 + x_2.y_1)y_3) +$

$i((x_1.x_2 - y_1.y_2)y_3 + x_3(x_1.y_2 + x_2.y_1))$

Jadi terbukti bahwa $z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3) = (z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3$

Teorema 2.4.3

Andaikan $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ dan $z_3 = x_3 + iy_3$, maka berlaku :

$z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

Bukti :

Diketahui $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ dan $z_3 = x_3 + iy_3$, maka

$z_1 \,.\, (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1)((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3))$

$= (x_1 + iy_1)((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3))$

$= ((x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)) + i((x_1(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y_1)$ dan

$z_1.z_2 + z_1.z_3 = ((x_1 + iy_1) \,.\, (x_2 + iy_2)) + ((x_1 + iy_1) \,.\, (x_3 + iy_3))$

$= ((x_1.x_2 - y_1.y_2) + i(x_1.y_2 + x_2.y_1)) + ((x_1.x_3 - y_1.y_3) + i(x_1.y_3 + x_3.y_1))$

$= ((x_1.x_2 - y_1.y_2) + (x_1.x_3 - y_1.y_3)) + i((x_1.y_2 + x_2.y_1) + (x_1.y_3 + x_3.y_1))$

$= (x_1.x_2 + x_1.x_3 - y_1.y_2 - y_1.y_3) + i(x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_3.y_1)$

$= ((x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)) + i((x_1(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y_1)$

Jadi terbukti bahwa $z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

Teorema 2.4.4

Andaikan $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka berlaku :

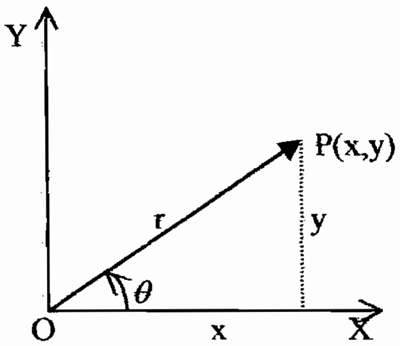
a) $\overline{\overline{z}} = z$ d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ g) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ h) $z . \overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

c) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ f) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Dalam system bilangan kompleks tidak berlaku relasi "kurang dari" dan "lebih dari". Relasi $z_1 < z_2$ atau $z_1 > z_2$ mempunyai arti hanya jika z_1 dan z_2 keduanya merupakan bilangan real atau $Im(z_1) = Im(z_2) = 0$

Selain menggunakan bentuk kartesius yaitu $z = x + iy$, kita juga dapat menyatakan bilangan kompleks z dalam bentuk kutub sebagai berikut :



Gambar 2.4.1

Kita perhatikan gambar 2.4.1

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, sehingga $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.

Dengan demikian bilangan kompleks z = x + iy dapat dinyatakan dalam bentuk lain yaitu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, yang dinamakan bentuk kutub bilangan kompleks, sedangkan θ dinamakan argumen dari z dan ditulis arg z.

Definisi 2.4.10

Nilai mutlak atau modulus bilangan kompleks z = x + iy yang dinyatakan dengan $|z|$ dan didefinisikan oleh $\sqrt{x^2 + y^2}$. Sehingga dapat dituliskan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Teorema 2.4.5

Jika z sembarang bilangan kompleks, maka berlaku :

a) $|z| \geq 0$

b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

c) $|-z| = |z|$

d) $|\bar{z}| = |z|$

e) $z.\ \bar{z} = |z|^2$

f) $\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z|$

g) $\text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$

Teorema ini tidak dibuktikan di sini, karena dapat dibuktikan langsung dengan menggunakan definisi nilai mutlak dan konjugat.

Teorema 2.4.6

Jika z_1 dan z_2 bilangan kompleks maka berlaku :

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| \text{ dan } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Bukti :

a) Karena $|z|^2 = z.\ \bar{z}$ dan andaikan $z = z_1.z_2$, $\bar{z} = \overline{z_1.z_2}$ maka diperoleh :

$$|z_1.z_2|^2 = (z_1.z_2).(\overline{z_1.z_2}) = z_1.z_2.\ \overline{z_1}\ .\ \overline{z_2} = z_1.\ \overline{z_1}\ .z_2.\ \overline{z_2} = |z_1|^2\ .\ |z_2|^2$$

Kita lakukan penarikan akar pada kedua ruas persamaan

$$\sqrt{|z_1.z_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2.|z_2|^2}$$

$$|z_1.z_2| = |z_1|\ |z_2|.$$

b) Karena $|z|^2 = z.\ \bar{z}$ dan andaikan $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, $\bar{z} = \overline{\dfrac{z_1}{z_2}}$, maka diperoleh :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right).\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{z_1.\overline{z_1}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

Kita lakukan penarikan akar pada kedua ruas persamaan

$$\sqrt{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2} = \sqrt{\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Sehingga terbukti $|z_1.z_2| = |z_1|\ |z_2|$ dan $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Teorema 2.4.7 (Ketaksamaan Segitiga)

Nilai mutlak jumlah dua bilangan kompleks tidak lebih dari jumlah nilai mutlak masing-masing suku dan tidak kurang dari nilai mutlak selisih nilai mutlak masing-masing suku atau dapat ditulis sebagai berikut :

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dan $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2|$

Bukti :

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2).(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$

Karena $z_2 = \overline{\overline{z_2}}$, maka ruas kanan dari persamaan ini dapat ditulis

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}})$

Mengingat rumus $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ dan $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, maka

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1.\overline{z_2}|$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|\overline{z_2}|$

$\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

Sehingga $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ Kita lakukan penarikan akar pada kedua ruas

$$\sqrt{|z_1+z_2|^2} \le \sqrt{(|z_1|+|z_2|)^2}$$

$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$, maka terbuktilah ketaksamaan yang pertama

Ketaksamaan yang kedua dapat diturunkan dari ketaksamaan yang pertama sehingga diperoleh :

$$|z_1| = |(z_1+z_2)+(-z_2)| \le |z_1+z_2| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \qquad \text{(i)}$$

Demikian juga diperoleh :

$$|z_2| = |(z_1+z_2)+(-z_1)| \le |z_1+z_2| + |z_1|$$

$$-|z_1+z_2| \le |z_1| - |z_2| \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $-|z_1+z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2|$

Jadi $|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$. Kedua ketaksamaan ini dapat digabungkan menjadi:

$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Contoh 2.4.1

Diketahui $|z-2|=3$, buktikan: a. $|z^2-5z| \le 18$ dan b. $|z^2-5z| \ge 6$

Pembuktian:

a. $|z^2-5z| = |(z^2-4z+4)-z-4| = |(z-2)^2-z-4|$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga kita peroleh:

$$\left|(z-2)^2-z-4\right| \le |z-2|^2+|z+4| = 9+\left|(z-2)+6\right| \le 9+|z-2|+6 \le 18$$

Sehingga terbukti $\left|z^2-5z\right| \le 18$.

b. $\left|z^2-5z\right| = \left|(z-2)^2-(z-2)\right|$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga kita peroleh:

$$\left|(z-2)^2-(z-2)\right| \ge \left||z-2|^2-|z-2|\right| = |9-3| = 6$$

Sehingga terbukti $\left|z^2-5z\right| \ge 6$

2.5 Fungsi kompleks

Andaikan z menyatakan sembarang anggota dari suatu himpunan bilangan kompleks, maka z disebut peubah kompleks. Jika S dan T himpunan-himpunan bilangan kompleks dan untuk setiap $z \in S$ terdapat pemasangan yang mengawankan secara tunggal dengan $w \in T$. Misalkan aturan tersebut kita namakan f, maka f disebut fungsi dari himpunan S ke dalam himpunan T. Secara umum w ditulis w = f(z).

Karena z adalah peubah kompleks dan fungsi f mengawankan setiap bilangan kompleks $z \in S$ dengan tunggal $w \in T$, maka definisi fungsi f bernilaikan bilangan kompleks. Dengan demikian fungsi f disebut fungsi bernilai kompleks dan disingkat fungsi kompleks.

Meskipun dalam definisi fungsi bernilai tunggal, namun dalam fungsi kompleks dikenal fungsi bernilai banyak. Misalnya $w = z^{\frac{1}{2}}$, untuk setiap z dalam himpunan yang tidak memuat titik nol, maka w akan memiliki dua nilai. Jadi menurut definisi $w = z^{\frac{1}{2}}$ bukan merupakan suatu fungsi. Tetapi sebenarnya $w = z^{\frac{1}{2}}$ terdiri dari dua fungsi yang masing-masing bernilai satu dan dinamakan suatu cabang dari fungsi bernilai dua ini. Fungsi-fungsi bernilai dua dan fungsi-fungsi bernilai banyak lainya dinamakan suatu relasi, sedangkan fungsinya sendiri adalah keadaan khusus dari relasi tersebut.

Macam-Macam Fungsi Kompleks

1. Fungsi polinomial kompleks

Bentuk umum dari fungsi polinomial kompleks adalah:

$f(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + ... + C_2 z^2 + C_1 z + C_0$, disebut fungsi polinomial derajat n dengan $C_n \neq 0$ dan C_0, C_1, C_2, ..., C_n adalah koefisien-koefisien kompleks.

Contoh 2.5.1

$f(z) = 10z^4 - 7z^2 + 5z - 4$, adalah fungsi polinomial berderajat 4.

2. Fungsi rasional kompleks

Bentuk umum dari fungsi rasional kompleks adalah $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, dengan g(z) dan h(z) adalah fungsi polinomial dan $h(z)\neq 0$.

Contoh 2.5.2

$f(z)=\dfrac{3z^2+2z+1}{z^2-z+1}$, adalah fungsi rasional kompleks dengan $g(z) = 3z^2 + 2z + 1$ dan $h(z) = z^2 - z + 1$

3. Fungsi transendental

Yang termasuk fungsi transendental adalah:

a. Fungsi trigonometri

Untuk setiap bilangan kompleks z, didefinisikan fungsi trigonometri sebagai berikut:

$\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$ dan $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, sedangkan $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$.

b. Fungsi eksponensial

Fungsi eksponensial kompleks didefinisikan oleh $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, dengan e = 2,71828...

Jika diambil y = 0, maka definisi ini berubah menjadi fungsi eksponensial real dan x = 0 definisi di atas menjadi $e^{iy} = \cos y + i\sin y$.

c. Fungsi hiperbolik

Untuk setiap bilangan kompleks z, didefinisikan fungsi hiperbolik sebagai berikut:

$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ dan $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, sedangkan $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

Contoh 2.5.3

Uraikan cos z dalam bentuk u + iv.

Penyelesaian :

Andaikan z = x + iy, maka kita peroleh :

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x - \frac{i}{2}(e^{y} - e^{-y})\sin x$$

$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

d. Fungsi logaritma

Untuk setiap bilangan kompleks z, didefinisikan logaritma natural dari z sebagai berikut:

$\ln z = \ln|z| + i \arg z$, dengan $\arg z = \theta + 2k\pi$ dan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Contoh 2.5.4

Tentukanlah logaritma natural dari bilangan z = 2 dan z = -1.

Penyelesaian :

$\ln 2 = \ln|2| + i \arg 2 = \ln 2 + i(2k\pi) = \ln 2 + 2k\pi i = 0{,}693 \pm 0, \pm 2i\pi, \pm 4i\pi, \ldots$

$\ln(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi) = \pm i\pi, \pm 3i\pi, \pm 5i\pi, \ldots$

Karena logaritma natural bilangan kompleks mempunyai tak berhingga nilai yang berbeda maka fungsi ini disebut fungsi bernilai banyak. Untuk mendefinisikan fungsinya sendiri kita menggunakan nilai utama ln z yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Ln}\, z = \ln|z| + i\theta\,,$$

dengan $0 \le \theta < 2\pi$ atau kita dapat menggunakan selang yang lainnya misalnya $-\pi < \theta \le \pi$ dan sebagainya.

Dengan demikian kita dapat menentukan nilai utama dari ln 2 dan ln(-1) dalam contoh 2.5.4 sebagai berikut:

Ln 2 = 0,693 dan Ln (-1) = $i\pi$.

2.6 Limit Fungsi Kompleks

Definisi 2.6.1

Suatu fungsi f(z) dikatakan mempunyai limit L untuk z mendekati titik z_0 dan ditulis $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk semua z dengan $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku ketaksamaan $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.6.1

Jika suatu fungsi mempunyai limit pada titik z_0 yang diberikan, maka limitnya mempunyai nilai tunggal.

Bukti:

Dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan limitnya tidak tunggal $\lim_{z\to z_0} f(z) = M$ dan $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, dengan $M \neq L$. Berdasarkan definisi 2.6.1 diperoleh $|f(z) - M| < \varepsilon$ dan $|f(z) - L| < \varepsilon$, bila $0 < |z - z_0| < \delta$. Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}|M - L|$.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga kita peroleh:

$$|M - L| = |M - f(z) + f(z) - L| \leq |M - f(z)| + |f(z) - L| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$|M - L| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$|M - L| < \frac{1}{2}|M - L| + \frac{1}{2}|M - L|$$

$$|M - L| < |M - L|$$

Pada hasil terakhir ini diperoleh suatu hal yang tidak mungkin. Jadi pengandaian salah dan terbukti bahwa limit suatu fungsi tunggal.

Teorema 2.6.2

Andaikan $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ dan $\lim_{z\to z_0} g(z) = M$, maka berlaku:

a. $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = L + M$

b. $\lim_{z\to z_0}(f(z) - g(z)) = L - M$

c. $\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z)) = L.M$

d. $\lim_{z\to z_0}(\frac{f(z)}{g(z)}) = \frac{L}{M}$, dengan $M \neq 0$

Contoh 2.6.1

Jika $f(z)=\dfrac{z-i}{z^2+1}$, tentukan nilai dari $\lim\limits_{z\to i} f(z)$

Penyelesaian :

$$\lim_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)}=\frac{1}{2i}$$

2.7 Turunan Fungsi Kompleks

Definisi 2.7.1

Jika f(z) bernilai tunggai dalam suatu daerah R di bidang z, maka turunan fungsi f di titik z_0 didefinisikan sebagai $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, asalkan limit ini ada , maka fungsi f(z) berturunan di titik z_0

Definisi 2.7.2 (Turunan Fungsi kompleks)

Jika $f'(z_0)$ ada untuk setiap z_0 dalam suatu daerah R, maka fungsi f(z) berturunan pada setiap $z_0 \in C$.

Untuk memudahkan dan mempercepat proses dalam mencari turunan fungsi kompleks berikut akan disajikan rumus –rumus turunan fungsi kompleks.

Rumus-Rumus Turunan Fungsi Kompleks

1. $\dfrac{d}{dz}(c)=0$
2. $\dfrac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$

3. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$

4. $\dfrac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$

5. $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$

6. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$

7. $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$

8. $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$

9. $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$

10. $\dfrac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$

11. $\dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$

12. $\dfrac{d}{dz}\log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$

13. $\dfrac{d}{dz}\sin^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

14. $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1} z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

15. $\dfrac{d}{dz}\tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$

16. $\dfrac{d}{dz}\cot^{-1} z = \dfrac{-1}{1+z^2}$

17. $\dfrac{d}{dz}\sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$

18. $\dfrac{d}{dz}\csc^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$

19. $\dfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$

20. $\dfrac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

21. $\dfrac{d}{dz}\tanh z = \sec h^2 z$

22. $\dfrac{d}{dz}\coth z = -\cosh^2 z$

23. $\dfrac{d}{dz}\sec hz = -\sec hz \tanh z$

24. $\dfrac{d}{dz}\csc hz = -\csc hz \coth z$

25. $\dfrac{d}{dz}\sinh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

26. $\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

27. $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$

28. $\dfrac{d}{dz}\coth^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$

$$29.\ \frac{d}{dz}\operatorname{sec}h^{-1}z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}} \qquad 30.\ \frac{d}{dz}\operatorname{csc}h^{-1}z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$$

Contoh 2.7.1

Jika w = f(z) = z^3- $2z^2$, tentukan f'(z) !

Penyelesaian:

$\frac{d}{dz}(z^3 - 2z^2) = \frac{d}{dz}z^3 - \frac{d}{dz}2z^2 = 3z^2 - 4z$. Jadi f'(z) = $3z^2 - 4z$

2.8 Fungsi Analitik

Definisi 2.8.1

Fungsi f(z) dikatakan analitik di titik z = z_0 di dalam suatu domain D, jika f(z) berturunan pada titik z_0.

Definisi 2.8.2

Jika fungsi f(z) analitik untuk setiap z_0 di dalam D, maka fungsi f(z) dikatakan analitik untuk semua $z_0 \in C$.

Contoh 2.8.1

Suatu fungsi polinomial yang berbentuk f(z) = $C_0 + C_1z + C_2z^2 + \ldots + C_nz^n$, adalah fungsi yang analitik diseluruh bidang kompleks karena f(z) berturunan pada semua z.

Contoh 2.8.2

Fungsi $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z}$, adalah fungsi yang analitik kecuali pada titik z = 0. Karena pada titik z = 0 fungsi f(z) tidak mempunyai turunan.

2.9 Turunan Tingkat Tinggi

Jika f(z) analitik dalam suatu daerah, maka turunannya diberikan oleh f'(z). Jika f'(z) juga analitik dalam suatu daerah, maka turunannya dinyatakan dengan f''(z). Dengan cara yang sama apabila $f^{(n-1)}(z)$ analitik dalam suatu daerah maka turunan ke-n dari f(z) dinyatakan dengan $f^{(n)}(z)$, n dinamakan tingkat dari turunan. Jadi turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya diberikan oleh $f'(z), f''(z), f'''(z),\ldots, f^{(n)}(z),\ldots$ Perhitungan turunan tingkat tinggi mengikuti rumus-rumus turunan fungsi kompleks.

Contoh 2.9.1

Tentukan f'(z), f''(z), f'''(z) jika $f(z)=3z^5-2z^3+z$.

Penyelesaian:

Dengan rumus turunan fungsi kompleks kita peroleh:

$f'(z)=15z^4-6z^2+1$, $f''(z)=60z^3-12z$, $f'''(z)=180z^2-12$

BAB III

BARISAN DAN DERET BILANGAN KOMPLEKS

Dalam bab III ini akan dibahas pengertian barisan dan deret bilangan kompleks, serta kekonvergenan dari barisan dan deret bilangan kompleks tersebut. Berikut akan dibahas pengertian barisan bilangan kompleks.

3.1 Barisan Bilangan Kompleks

Definisi 3.1.1

Suatu barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi bernilai kompleks yang daerah asalnya adalah himpunan semua bilangan asli N = {1,2,...}

Sehingga f : N → C adalah suatu barisan bilangan kompleks, nilai fungsi f (n) yang sering dinyatakan dengan z_n disebut suku ke n dari barisan. Barisan bilangan kompleks z_1, z_2, z_3, ...,z_n, ... biasa dituliskan dengan notasi kurawal menjadi $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sebagai contoh barisan adalah i, -1, -i, 1, i, -1, ... , merupakan suatu representasi yang memudahkan untuk fungsi yang menetapkan setiap bilangan bulat positif 1, 2, 3, ... dengan bilangan kompleks i, i^2, i^3, ... Secara lebih singkat barisan itu dapat ditulis sebagai $\{i^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Seperti halnya dengan barisan bilangan real, permasalahan yang timbul berkaitan dengan barisan bingan kompleks adalah bila mana barisan bilangan kompleks itu konvergen. Untuk dapat menyelesaikan permasalahan itu kita perhatikan definisi berikut :

Definisi 3.1.2

Suatu barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan mempunyai limit z_0 apabila untuk setiap $\in > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $|z_n - z_0| < \in$.

Bilangan kompleks z_0 ini kita namakan limit barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ untuk $n \to \infty$ dan dituliskan $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang memiliki limit z_0 untuk $n \to \infty$ kita katakan barisan itu konvergen ke z_0 dan sering dituliskan $z_n \to z_0$

Teorema 3.1.1

Jika $z_n = x_n + iy_n$ dengan $x_n \in R$ dan $y_n \in R$, maka barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di dalam C bila dan hanya bila $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di dalam R.

Bukti :

Jika barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen z, maka ada $z_n = x_n + iy_n \in$ C dengan sifat untuk setiap $\in > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $|z_n - z| < \in$

$|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \in$, untuk semua $n \geq N$

Kita gunakan ketaksamaan segitiga, maka diperoleh:

$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \in$, untuk semua $n \ge N$

Hal ini berarti bahwa

$|x_n - x| < \in$, untuk semua $n \ge N$

$|y_n - y| < \in$, untuk semua $n \ge N$

Dengan demikian barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x dan barisan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke y.

Langkah berikutnya andaikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x dan barisan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke y, maka untuk setiap $\in > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \ge N$ berlaku.

$|x_n - x| < \frac{\in}{2}$ dan $|y_n - y| < \frac{\in}{2}$.

Sehinggga $|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)|$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$|(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \in$ untuk semua $n \ge N$

Maka $|z_n - z| < \in$, untuk semua $n \ge N$.

Jadi barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke z.

Teorema 3.1.2 (Ketunggalan Limit Barisan)

Jika suatu barisan konvergen, maka limit barisan itu tunggal.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan limit barisan tidak tunggal dan mempunyai dua nilai :

$\lim\limits_{z \to z_0} z_n = M$ dan $\lim\limits_{z \to z_0} z_n = L$, dengan $M \neq L$.

Ambil bilangan positif $\in = \frac{1}{2}|M - L|$.

Berdasarkan definisi limit barisan (Definisi 3.1.2) diperoleh :

$|z_n - M| < \in$ dan $|z_n - L| < \in$

Kita gunakan ketaksamaan segitiga maka,

$$|M - L| = |M - z_n + z_n - L| \leq |M - z_n| + |z_n - L| < \in + \in = \frac{1}{2}|M - L| + \frac{1}{2}|M - L|$$

$$= |M - L|$$

Sehingga kita mendapatkan relasi $|M - L| < |M - L|$, ini jelas merupakan suatu hal yang tidak mungkin, jadi pengandaian salah dan terbukti bahwa jika suatu barisan konvergen maka limit barisan itu tunggal.

Teorema 3.1.3 (Sifat-sifat Limit Barisan)

Andaikan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke z dan $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke w, dan andaikan c adalah suatu konstanta, maka untuk semua $n \in N$ berlaku :

1. $\{z_n + w_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen karena $\lim\limits_{n \to \infty}\{z_n + w_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} z_n + \lim\limits_{n \to \infty} w_n = z + w$

2. $\{cz_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen karena $\lim\limits_{n \to \infty} cz_n = c \lim\limits_{n \to \infty} z_n = cz$

3. $\{z_n w_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen karena $\lim\limits_{n \to \infty} z_n w_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n . \lim\limits_{n \to \infty} w_n = z.w$

4. $\left\{\frac{1}{z_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen karena $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}=\frac{1}{z}$ asal $z\neq 0$ dan $z_n\neq 0$.

Contoh 3.1.1

Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1$, untuk setiap z dan tentukan apakah barisan $\left\{1+\frac{z}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

Diberikan suatu $\in>0$, kita harus dapat menentukan N sedemikian sehingga

$\left|1+\frac{z}{n}-1\right|<\in$, untuk semua $n\geq N$.

Sehingga $\left|\frac{z}{n}\right|<\in$, untuk semua $n\geq N$

$$\frac{|z|}{|n|}=\frac{|z|}{n}<\in, \text{ untuk semua } n\geq N$$

$$n>\frac{|z|}{\in}, \text{ untuk semua } n\geq N$$

Jadi terbukti jika $n\geq N=\frac{|z|}{\in}$, maka $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1$.

Karena $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1$, maka barisan $\left\{1+\frac{z}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 1.

3.2 Deret Bilangan Kompleks

Pada bagian ini kita akan membahas jumlah dari suku-suku barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ yaitu $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$, jumlah tak hingga banyak suku barisan bilangan kompleks inilah yang disebut deret bilangan kompleks, sehingga diperoleh definisi :

Definisi 3.2.1

Suatu deret bilangan kompleks adalah suatu bentuk penjumlahan $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$, atau dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$

$z_1, z_2, z_3, \ldots$ disebut suku-suku deret.

Andaikan S_n menyatakan jumlah n suku pertama dari deret bilangan kompleks, maka kita memperoleh :

$S_1 = z_1$

$S_2 = z_1 + z_2$

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$

……………………………

$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$

Bilangan S_n disebut jumlah parsial ke-n dari deret bilangan kompleks dan barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut sebagai barisan jumlah parsial.

Definisi 3.2.2

Deret bilangan kompleks $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ disebut konvergen bila dan hanya bila barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen z_0, dengan $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ dan z_0 disebut jumlah deret dan ditulis $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_0$

Teorema 3.2.1

Jika deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Bukti :

Diketahui deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka menurut definisi 3.2.2 barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen z_0 atau ditulis $\lim_{n\to\infty} S_n = z_0$. Karena $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan bilangan kompleks, maka menurut teorema 3.1.1 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen x_0 dan $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen y_0. Dengan demikian kita dapat menuliskan $\lim_{n\to\infty} X_n = x_0$ dan $\lim_{n\to\infty} Y_n = y_0$. Karena (n-1)$\to \infty$ jika n $\to\infty$, maka kita juga mempunyai $\lim_{n\to\infty} X_{n-1} = x_0$ dan $\lim_{n\to\infty} Y_{n-1} = y_0$. Sehingga kita dapat menuliskan $\{X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x_0 dan $\{Y_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen y_0. Berdasarkan teorema 3.1.1, maka $\{S_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke z_0 dan ditulis $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = z_0$.

Andaikan S_n adalah jumlah parsial ke-n dari deret bilangan kompleks dan S_n adalah bilangan kompleks, maka kita peroleh:

$$S_n = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_{n-1} + iy_{n-1}) + (x_n + iy_n)$$

$$S_{n-1} = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_{n-1} + iy_{n-1})$$

Sehingga kita peroleh $S_n - S_{n-1} = x_n + iy_n = z_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$, berdasarkan sifat limit barisan, maka:

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = z_0 - z_0 = 0$

Jadi terbukti jika deret bilangan kompleks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Teorema 3.2.2 (Uji Divergensi)

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ maka deret bilangan kompleks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen

Bukti :

Diketahui $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$. Andaikan deret bilangan kompleks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka berdasarkan teorema 3.2.1 diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

Sehingga terdapat kontradiksi dengan yang diketahui.

Jadi terbukti jika $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ maka deret bilangan kompleks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen

Teorema 3.2.3

Deret bilangan kompleks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen ke z_0 bila dan hanya bila $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke x_0 dan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen ke y_0.

Bukti :

Andaikan jumlah parsial dari n suku pertama deret-deret tersebut adalah :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Sehingga diperoleh hubungan antara barisan jumlah parsial yaitu $S_n = X_n + iY_n$, untuk semua $n \in N$, maka menurut Teorema 3.1.1 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen bila dan hanya bila $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ keduanya konvergen.

Misalkan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke z_0, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x_0 dan $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke y_0, maka terbukti deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen ke z_0 bila dan hanya bila deret bilangan real $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke x_0 dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen ke y_0.

Teorema 3.2.4

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ini disebut konvergen mutlak.

Bukti :

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen, akan dibuktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Karena $|z_n| = \sqrt{x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}}$, $|x_n| = \sqrt{x_n^{\ 2}}$ dan $|y_n| = \sqrt{y_n^{\ 2}}$, maka :

$|x_n| \leq |z_n|$ dan $|y_n| \leq |z_n|$ untuk semua $n \in N$.

Berdasarkan teorema 2.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ keduanya konvergen.

Sehingga menurut teorema 2.2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ keduanya konvergen.

Jadi menurut teorema 3.2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ juga konvergen.

Dengan adanya teorema ini telah memberikan kemudahan kepada kita dalam menentukan konvergensi dari deret bilangan kompleks, yaitu dengan membentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ yang merupakan deret dengan suku-suku real positif, sehingga semua aturan yang berlaku dalam deret dengan suku-suku real positif juga berlaku pada deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ini.

Teorema 3.2.5 (Uji Banding)

Jika diketahui deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dan deret bilangan real $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dengan suku-suku positif yang konvergen dan $|z_n| \leq U_n$ untuk semua n, maka deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Bukti :

Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen dan andaikan jumlahnya U, maka untuk semua n berlaku $U_1 + U_2 + \ldots + U_n < \sum_{n=1}^{\infty} U_n = U$

Diketahui juga $|z_n| \leq U_n$ untuk semua n, maka

$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| \leq U_1 + U_2 + \ldots + U_n < U$

Sehingga $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| < U$

Jadi $S_n = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| < U$ untuk semua n, maka menurut teorema 2.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen, sehingga berdasarkan teorema 3.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Teorema 3.2.6 (Uji Rasio)

Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ adalah deret bilangan kompleks dengan $z_n \neq 0$ dan andaikan $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \rho$, maka :

a. Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen mutlak.

b. Jika $\rho > 1$, maka deret divergen.

c. Jika $\rho = 1$, maka deret dapat konvergen atau divergen.

Teorema 3.2.7 (Uji Akar)

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ adalah deret bilangan kompleks dan andaikan

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} |z_n|^{\frac{1}{n}} = \rho$, maka:

a. Jika $\rho < 1$, deret konvergen mutlak.

b. Jika $\rho > 1$, deret divergen.

c. Jika $\rho = 1$, deret dapat konvergen atau divergen.

Contoh 3.2.1

Tentukan apakah deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

Diketahui deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$, maka $|z_n| = \left|\frac{(100+75i)^n}{n!}\right|$ dan

$$|z_{n+1}| = \left|\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Dengan demikian $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!} x \frac{n!}{(100+75i)^n}\right|$

$$= \left|\frac{(100+75i)}{n+1}\right| = \frac{125}{n+1}$$

Sehingga $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n+1} = 0$

Karena $\rho = 0 < 1$, maka berdasarkan teorema 3.2.6 deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$ konvergen.

Contoh 3.2.2

Tentukan apakah deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(4-i)^n}{2^{2n}}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

Diketahui deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(4-i)^n}{2^{2n}}$, maka $|z_n| = \left|\frac{(4-i)^n}{2^{2n}}\right|$

Kita selesaikan dengan teorema 3.2.7 sehingga diperoleh

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(4-i)^n}{2^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|(4-i)^n|}}{\sqrt[n]{|2^{2n}|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|4-i|}{|2^2|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1$$

Karena $\rho > 1$, maka berdasarkan teorema 3.2.7 deret $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(4-i)^n}{2^{2n}}$ divergen.

BAB IV

DERET PANGKAT KOMPLEKS

Sekarang kita sampai pada bagian terpenting dari penulisan ini yaitu mengenai deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel. Bab IV ini merupakan perluasan dari deret pangkat real. Jika pada deret pangkat real variabelnya adalah variabel real, maka pada bab ini yang digunakan adalah variabel kompleks. Sehingga yang dimaksud dengan deret pangkat kompleks di sini adalah deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel kompleks.

Pada bab IV ini akan di bahas deret pangkat kompleks, dilanjutkan dengan deret fungsi yang meliputi deret Maclaurin dan deret Taylor serta penerapannya.

4.1 Deret Pangkat Kompleks

Setelah kita membahas deret bilangan kompleks, kita akan melanjutkan pada deret pangkat kompleks. Di atas kita telah sedikit membahas mengenai deret pangkat kompleks yaitu deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel kompleks, maka sekarang kita dapat mendefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.1.1

Jika $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ adalah konstanta-konstanta kompleks dan z suatu variabel kompleks, maka deret yang berbentuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \ldots + C_n(z-z_0)^n + \ldots$$

disebut deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$, dengan z_0 adalah konstanta kompleks.

Apabila kita ambil $z_0 = 0$, deret menjadi deret pangkat kompleks dalam z dan mempunyai bentuk umum $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots$

Contoh 4.1.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \ldots$, adalah deret pangkat kompleks dalam z.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n!} = 1 + (z+2i) + \frac{(z+2i)^2}{2!} + \ldots + \frac{(z+2i)^n}{n!} + \ldots$, adalah deret pangkat kompleks dalam (z + 2i).

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{2n}}{2^n} = 1 - \frac{(z-i)^2}{2} + \frac{(z-i)^4}{4} - \ldots + (-1)\frac{(z-i)^{2n}}{2^n} + \ldots$,

   adalah deret pangkat kompleks dalam (z – i)

Seperti halnya dalam deret pangkat real, yang menjadi permasalahan adalah bilamana deret pangkat kompleks konvergen? Permasalahan ini akan segera terjawab dengan definisi berikut.

Definisi 4.1.2

Deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ konvergen pada titik z bila dan hanya bila barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ mendekati suatu limit untuk n menjadi besar tak hingga dengan $S_n = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n$.

Karena S_n adalah jumlah parsial ke-n dari deret pangkat kompleks, maka S_n dapat kita pisahkan ke dalam bagian real dan bagian imaginer menjadi $S_n = X_n + iY_n$, maka $S_n \to x + iy$ bila dan hanya bila $X_n \to x$ dan $Y_n \to y$. Oleh karena itu $|S_n - (x+iy)| = |(X_n - x) + i(Y_n - y)|$ $= \sqrt{(X_n - x)^2 + (Y_n - y)^2}$, mendekati nol bila dan hanya bila $(X_n - x) \to 0$ dan $(Y_n - y) \to 0$. Dengan demikian barisan $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke x + iy bila dan hanya bila barisan bagian real $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke x dan barisan bagian imaginer $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke y.

Teorema 4.1.1

Jika deret $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n|$ konvergen, maka deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ konvergen.

Bukti:

Diketahui deret $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n|$ konvergen, deret ini merupakan deret dengan suku-suku real positif. Andaikan $C_n z^n = x_n + iy_n$, dengan n = 0, 1, 2, 3,... dan x_n, y_n bilangan real, maka diperoleh:

$|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |C_n z^n|$ dan $|y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |C_n z^n|$

Karena deret $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n|$ konvergen, kemudian juga berlaku $|x_n| \le |C_n z^n|$ dan $|y_n| \le |C_n z^n|$ untuk semua n, maka menurut teorema 3.2.5 (uji banding) $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|$ dan $\sum_{n=0}^{\infty}|y_n|$ keduanya konvergen.

Dengan demikian berdasarkan teorema 3.2.4 deret $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ juga konvergen. Karena hasil kali deret dengan konstanta tidak mempengaruhi konvergensi dari deret, maka berdasarkan teorema 2.2.3.b deret $i\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} iy_n$ tetap konvergen. Dengan menggunakan teorema 2.2.3.a kita dapatkan $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} iy_n = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + iy_n)$ juga merupakan deret yang konvergen.

Karena $C_n z^n = x_n + iy_n$, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ juga konvergen. Deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ ini disebut konvergen mutlak.

Contoh 4.1.2

Tentukan apakah deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, konvergen atau divergen!

Penyelesaian:

Diketahui deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, kita bentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=0}^{\infty}|z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ maka diperoleh $S_n = 1+|z|+|z|^2+|z|^3+\ldots+|z|^n$ dan

$|z|S_n = |z|+|z|^2+|z|^3+|z|^4\ldots+|z|^n+|z|^{n+1}$

Sehingga $S_n - |z|S_n = 1-|z|^{n+1}$ atau $(1-|z|)S_n = 1-|z|^{n+1}$, maka

$$S_n = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|} - \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-|z|} - \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-|z|} - \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

Dalam kasus semacam ini limit S_n untuk n menjadi besar tak hingga akan mendekati nilai $\frac{1}{1-|z|}$ bila kita ambil $|z|<1$, maka barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\frac{1}{1-|z|}$. Berdasarkan definisi 4.1.2, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ konvergen ke $\frac{1}{1-|z|}$.

Karena deret $\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ konvergen bila $|z|<1$, maka berdasarkan teorema 4.1.1 deret $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ juga konvergen untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di 0 dan berjari-jari 1 atau dapat ditulis $|z|<1$.

Dengan adanya teorema 4.1.1 telah membuka jalan kepada kita dalam menentukan konvergensi dari deret pangkat kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ yaitu dengan membentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n z^n\right|$, sehingga terbentuk deret dengan suku-suku real positif. Oleh karena itu semua aturan yang berlaku pada deret dengan suku-suku real juga berlaku pada deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n z^n\right|$ ini.

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menentukan konvergensi deret pangkat kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ adalah dengan teorema 3.2.6 (uji rasio), maka kita bentuk $\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n z^n\right|$. Sehingga $Z_n = C_n z^n$ dan $Z_{n+1} = C_{n+1} z^{n+1}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1} z^{n+1}}{C_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1} z}{C_n}\right| = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$$

Deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n z^n\right|$ konvergen bila $\rho < 1$, maka

$$|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| < 1 \text{ atau } |z| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Oleh karena itu timbul beberapa kemungkinan:

1. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = R$ (ada), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ konvergen mutlak untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di 0 dan berjari-jari R atau dapat ditulis $|z| < R$.

2. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \infty$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ konvergen mutlak untuk setiap $z \in C$.

3. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ konvergen mutlak untuk

   z = 0. Sehingga deret pangkat kompleks menjadi $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = C_0 + 0 + 0 + \dots$

Apabila kita bekerja dengan deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$, maka kita mempunyai bentuk umum $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$. Konvergensi dari deret ini dapat diperoleh dengan membentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} \left|C_n (z - z_0)^n\right|$, kemudian kita lakukan pengujian dengan teorema 3.2.6 (uji rasio). Sehingga diperoleh $Z_n = C_n (z - z_0)^n$ dan $Z_{n+1} = C_{n+1}(z - z_0)^{n+1}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{C_n (z - z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}(z - z_0)}{C_n}\right| = \left|z - z_0\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$$

Deret nilai mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} \left|C_n (z - z_0)^n\right|$ konvergen bila $\rho < 1$, maka diperoleh

$\left|z - z_0\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| < 1$ atau $\left|z - z_0\right| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$. Sehingga terdapat tiga kemungkinan yang terjadi untuk deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$ yaitu:

1. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = R$ (ada), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ konvergen mutlak untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di z_0 dan berjari-jari R atau dapat ditulis $\left|z - z_0\right| < R$.

2. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \infty$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ konvergen mutlak untuk setiap $z \in C$.

3. Andaikan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ konvergen mutlak

untuk $z = z_0$.

Dari ketiga kemungkinan ini kita memperoleh jari-jari konvergensi deret pangkat kompleks secara berturut-turut R, ∞, 0. Himpunan semua titik z yang menjadikan deret pangkat kompleks konvergen disebut lingkaran konvergensi.

Contoh 4.1.3

Tentukan lingkaran konvergensi dan jari-jari konvergensi dari deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n!}$

Penyelesaian:

Diketahui deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n!}$, kita bentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(z-2i)^n}{n!}\right|$. Sehingga $Z_n = \frac{(z-2i)^n}{n!}$ dan $Z_{n+1} = \frac{(z-2i)^{n+1}}{(n+1)!}$,

maka: $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2i)^{n+1}}{(n+1)!} x \frac{n!}{(z-2i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-2i}{n+1}\right| = 0$

Karena $\rho = 0 < 1$, untuk semua z, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n!}$ konvergen mutlak untuk semua z. Sehingga diperoleh lingkaran konvergensi $|z-2i| < \infty$ dan jari-jari konvergensi $R = \infty$.

Jari-jari konvergensi juga dapat diperoleh dengan rumus $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$,

dimana $C_n = \frac{1}{n!}$ dan $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, maka

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!} x \frac{(n+1)!}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty .$$

Contoh 4.1.4

Tentukan jari-jari dan lingkaran konvergensi dari deret pangkat kompleks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n(z-i)^n}{n^3}$

Penyelesaian:

Diketahui deret pangkat kompleks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n(z-i)^n}{n^3}$, maka $C_n = \frac{e^n}{n^3}$ dan $C_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)^3}$.

Sehingga $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^n}{n^3} x \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+3n^2+3n+1}{en^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$,

maka deret pangkat kompleks konvergen untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di 0 dan berjari-jari $\frac{1}{e}$. Jadi jari-jari konvergensi dari deret pangkat kompleks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n(z-i)^n}{n^3}$ adalah $R = \frac{1}{e}$ dan lingkaran konvergensinya $|z| < \frac{1}{e}$.

Sebagai kelanjutan dari pembahasan deret pangkat berikut akan kita sajikan dua buah deret fungsi penting dalam kalkulus yaitu deret Taylor dan deret Maclaurin.

4.2 Deret Taylor

Dalam sub bab ini kita akan mendefinisikan deret Taylor melalui pendekatan fungsi dengan polinomial kompleks. Untuk mendekati nilai fungsi pada sebuah titik $z = z_0$ dapat dilakukan dengan pendekatan polinomial kompleks dalam $(z - z_0)$, maka kita dapat menyatakan polinomial kompleks ke dalam bentuk: $P(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + ... + C_n(z - z_0)^n$, dengan $C_0, C_1, C_2, ... C_n$ adalah konstanta kompleks.

Kita andaikan n turunan pertama dari f ada di $z = z_0$, dan kita berikan syarat sebagai berikut:

$f(z_0) = P(z_0)$, $f'(z_0) = P'(z_0)$, $f''(z_0) = P''(z_0)$, ..., $f^{(n)}(z_0) = P^{(n)}(z_0)$

Dengan adanya syarat ini, maka nilai P(z) dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan f(z) dan n turunan pertamanya di $z = z_0$. Apabila kita menambahkan syarat bahwa turunan tingkat tinggi dari P(z) dan f(z) tetap bersesuaian, maka P(z) dan f(z) akan tetap cukup dekat di sekitar $z = z_0$, hal ini disebabkan:

$P(z) = C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + C_3(z-z_0)^3 + ... + C_n(z-z_0)^n$

$P'(z) = C_1 + 2C_2(z-z_0) + 3C_3(z-z_0)^2 + ... + nC_n(z-z_0)^{n-1}$

$P''(z) = 2C_2 + 3.2.C_3(z-z_0) + ... + n(n-1)C_n(z-z_0)^{n-2}$

$P'''(z) = 3.2.C_3 + ... + n(n-1)(n-2)C_n(z-z_0)^{n-3}$

....

$P^{(n)}(z) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1C_n = n!C_n$

Pada titik $z = z_0$ kita memperoleh:

$P(z_0) = C_0$

$P'(z_0) = C_1$

$P''(z_0) = 2C_2 = 2!C_2$

$P'''(z_0) = 3.2C_3 = 3!C_3$

....

$P^{(n)}(z_0) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1C_n = n!C_n$

Sehingga berdasarkan syarat yang diberikan, maka:

$f(z_0) = C_0$, $f'(z_0) = C_1$, $f''(z_0) = 2!C_2$, $f'''(z_0) = 3!C_3$, ..., $f^{(n)}(z_0) = n!C_n$

Dengan demikian diperoleh:

$C_0 = f(z_0)$, $C_1 = f'(z_0)$, $C_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2!}$, $C_3 = \dfrac{f'''(z_0)}{3!}$, ..., $C_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai C_0, C_1, C_2, ..., C_n ke dalam polinomial di atas, maka diperoleh definisi polinomial Taylor. Definisi ini merupakan perluasan dari definisi 2.3.4. Pada definisi 2.3.4 variabelnya adalah variabel real, sedangkan disini variabel kompleks.

Definisi 4.2.1

Jika $f(z)$ berturunan n kali pada $z = z_0$, maka kita definisikan polinomial Taylor ke-n disekitar $z = z_0$, sebagai berikut:

$$P_n(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Definisi polinomial Taylor ini dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih singkat dengan menggunakan notasi sigma yaitu $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$. Karena nilai dari f dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan nilai polinomial Taylor dan n turunan pertama pada $z = z_0$, maka jika n naik polinomial Taylor untuk f pada $z = z_0$ akan mendekati nilai f(z) setidak-tidaknya disekitar $z = z_0$. Sehingga kita memperoleh definisi deret Taylor sebagai berikut:

Definisi 4.2.2

Jika f(z) berturunan pada semua tingkat pada $z = z_0$, maka kita definisikan deret Taylor untuk fungsi f di sekitar titik $z = z_0$, yaitu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Apabila kita amati deret Taylor ini merupakan suatu deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$, dengan konstanta-konstanta komplek

$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, n = 0, 1, 2, 3, ...

Contoh 4.2.1

Tentukan deret Taylor di sekitar z = 2 untuk $f(z)=\frac{1}{z}$, kemudian tentukan lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Diketahui $f(z)=\frac{1}{z}$, maka:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{0!}{z} \qquad f(2)=\frac{1}{2}$$

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}=-\frac{1!}{z^2} \qquad f'(2)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(z)=\frac{2}{z^3}=\frac{2!}{z^3} \qquad f''(2)=\frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(z)=-\frac{3.2}{z^4}=-\frac{3!}{z^4} \qquad f'''(2)=-\frac{3!}{2^4}$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{4.3.2}{z^5}=\frac{4!}{z^5} \qquad f^{(4)}(2)=\frac{4!}{2^5}$$

....

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{n!}{z^{(n+1)}} \qquad f^{(n)}(2)=(-1)^n\frac{n!}{2^{(n+1)}}$$

Sehingga kita memperoleh deret Taylor $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$.

Langkah berikutnya kita akan menentukan lingkaran konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$, maka kita bentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n\right|=$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-2)^n$, maka $C_n=\frac{1}{2^{n+1}}$ dan $C_{n+1}=\frac{1}{2^{n+2}}$.

Dengan demikian $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{n+1}}x2^{n+2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$.

Jadi deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-2)^n$ konvergen bila $|z-2|<2$. Oleh karena itu berdasarkan teorema 3.2.4, maka deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$ konvergen mutlak untuk setiap titik z dalam lingkaran yang berpusat di z = 2 dan berjari-jari 2. Sehingga lingkaran konvergensi deret tersebut adalah $|z-2|<2$.

Contoh 4.2.2

Tentukan deret Taylor di sekitar z = 3i untuk $f(z)=e^z$, kemudian tentukanlah lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Diketahui $f(z)=e^z$, maka

$f(z)=f'(z)=f''(z)=f'''(z)=f^{(4)}(z)=\dots=f^{(n)}(z)=e^z$.

Sehingga $f^{(n)}(3i)=e^{3i}$. Dengan demikian kita memperoleh deret taylor

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{3i}}{n!}(z-3i)^n$, maka $C_n=\frac{e^{3i}}{n!}$ dan $C_{n+1}=\frac{e^{3i}}{(n+1)!}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^{3i}}{n!}x\frac{(n+1)!}{e^{3i}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} n+1=\infty$, sehingga deret Taylor

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{3i}}{n!}(z-3i)$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z-3i|<\infty$.

4.3 Deret Maclaurin

Pada sub bab ini kita akan melanjutkan pembahasan pada kejadian khusus dari polinomial Taylor yaitu pada z = 0 yang disebut polinomial Maclaurin. Untuk memperoleh definisi polinomial Maclaurin kita ganti nilai $z = z_0$ dengan z = 0 pada polinomial Taylor, sehingga diperoleh definisi sebagai berikut.

Definisi 4.3.1

Jika f(z) berturunan n kali pada z = 0, maka kita definisikan polinomial Maclaurin ke-n disekitar z = 0 untuk f yaitu

$$Pn(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Definisi 4.3.2

Jika f(z) berturunan pada semua tingkat pada z = 0, maka kita definisikan deret Maclaurin untuk fungsi f di sekitar titik z = 0, yaitu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Contoh 4.3.1

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(z) = e^z$, kemudian tentukan lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Seperti dalam contoh 4.2.2, kita gantikan nilai z = 3i dengan z = 0, maka diperoleh $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

Sehingga diperoleh deret Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Selanjutnya kita akan menentukan lingkaran konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,

maka $C_n = \frac{1}{n!}$ dan $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n!} x (n+1)! \right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty$$

Oleh karena itu deret Maclaurin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < \infty$.

Contoh 4.3.2

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(z) = \sin z$ dan $f(z) = \cos z$, kemudian tentukan lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

i) Diketahui $f(z) = \sin z$, maka $f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(z) = \cos z$ $\quad f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(z) = -\sin z$ $\quad f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(z) = -\cos z$ $\quad f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$f^{(4)}(z) = \sin z \qquad\qquad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

Karena $f^{(4)}(z) = f(z) = \sin z$, maka nilai $f^{(n)}(0)$ akan berulang 0, 1, 0, -1.

Oleh karena itu kita memperoleh deret Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Selanjutnya kita tentukan lingkaran konvergensi dengan membentuk deret nilai mutlak sehingga diperoleh $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, maka $C_n = \frac{1}{(2n+1)!}$ dan $C_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+1)!} x (2n+2)! \right| = \lim_{n\to\infty} 2n+2 = \infty$$

Sehingga deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < \infty$. Oleh karena itu berdasarkan teorema 3.2.4, maka deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < \infty$.

ii) Untuk memperoleh deret Maclaurin dari $f(z) = \cos z$, dapat dilakukan dengan menurunkan suku demi suku demi suku dari deret Maclaurin untuk $f(z) = \sin z$.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Untuk menentukan lingkaran konvergensi dari deret ini, kita bentuk deret nilai mutlak $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, sehingga $C_n = \frac{1}{(2n)!}$ dan $C_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$

$Lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n)!}x(2n+1)!\right| = \lim_{n\to\infty} 2n+1 = \infty$, sehingga deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < \infty$. Oleh karena itu berdasarkan teorema 3.2.4, maka deret

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < \infty$.

Contoh 4.3.3

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(z) = \sinh z$ dan $f(z) = \cosh z$, kemudian tentukan pula lingkaran konvergensi kedua deret tersebut!

Penyelesaian:

i) Diketahui $f(z) = \sinh z$, kita dapat menuliskan $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, maka

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-z)^n}{n!} + \ldots\right]$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin untuk $f(z) = \sinh z$ yaitu:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

ii) Diketahui $f(z)=\cosh z$, sedangkan $\cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$, maka

$$\cosh z=\frac{1}{2}\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{(-z)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin untuk $f(z)=\cosh z$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Mengenai lingkaran konvergensi dari kedua deret $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dan $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ telah dibuktikan pada contoh 4.3.2 yaitu kedua deret konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z|<\infty$, sehingga lingkaran konvergensinya $|z|<\infty$.

Contoh 4.3.4

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(z)=\frac{1}{1-z}$, tentukan pula lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Diketahui $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$, maka $\quad f(0)=\dfrac{1}{1-0}=1$

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \qquad f'(0)=\frac{1}{(1-0)^2}=1$$

$$f''(z)=\frac{2!}{(1-z)^3} \qquad f''(0)=\frac{2!}{(1-0)^3}=2!$$

$$f'''(z)=\frac{3!}{(1-z)^4} \qquad f'''(0)=\frac{3!}{(1-0)^4}=3!$$

....

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0)=\frac{n!}{(1-0)^{n+1}}=n!$$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin untuk $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$, yaitu:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots$$

Selanjutnya kita akan menentukan lingkaran konvergensi dari deret ini, maka $C_n=1$ dan $C_{n+1}=1$. Oleh karena itu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$. Jadi deret

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z|<1$.

Contoh 4.3.5

Tentukan deret Maclaurin untuk untuk $f(z)=\ln(1+z)$, kemudian tentukan pula lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Diketehui $f(z)=\ln(1+z)$, maka $\quad f(0)=\ln(1+0)=0$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \qquad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2!}{(1+z)^3} \qquad f'''(0) = \frac{2!}{(1+0)^3} = 2!$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{3!}{(1+z)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{3!}{(1+0)^4} = -3!$$

....

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin untuk $f(z) = \ln(1+z)$, yaitu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Untuk menentukan lingkaran konvergensi dari deret ini kita bentuk deret nilai mutlaknya $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$, maka $C_n = \frac{1}{n+1}$ dan $C_{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}x(n+2)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}1 = 1$$

Dengan demikian deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < 1$, sehingga berdasarkan teorema 3.2.4 deret $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$ konvergen mutlak setiap z dalam lingkaran $|z| < 1$.

Contoh 4.3.6

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(z) = \tan^{-1} z$, kemudian tentukan lingkaran konvergensinya!

Penyelesaian:

Diketahui $f(z) = \tan^{-1} z$, apabila kita lakukan proses penurunan seperti contoh-contoh sebelumnya maka kita dapatkan:

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -2, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 24,$

$f^{(6)}(0) = 0\,, f^{(7)}(0) = -720, \ldots$

Dengan demikian kita memperoleh deret Maclaurin untuk $f(z) = \tan^{-1} z$,

yaitu: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

Untuk menentukan lingkaran konvergensi dari deret ini kita bentuk deret nilai mutlaknya, sehingga diperoleh $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, maka $C_n = \dfrac{1}{2n+1}$ dan

$C_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$. Oleh karena itu $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{1}{2n+1} x(2n+2) \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Jadi deret $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$ konvergen untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < 1$,

sehingga menurut teorema 3.2.4 deret $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$ konvergen mutlak

untuk setiap z dalam lingkaran $|z| < 1$.

Dari contoh 4.3.1 sampai dengan contoh 4.3.6 kita dapat merangkum dalam suatu daftar sebagai berikut:

Daftar 4.3.1

Deret Maclaurin	Lingkaran konvergensi
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$	$\lvert z\rvert < 1$
$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$	$\lvert z\rvert < 1$
$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$	$\lvert z\rvert < 1$

4.4 Penerapan Deret Maclaurin Dan Deret Taylor

Dalam sub bab ini kita akan memperlihatkan bagaimana deret Taylor dan Maclaurin dapat digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan untuk fungsi-fungsi eksponensial, trigonometri dan logaritma. Tentunya dalam perhitungan ini akan terjadi kesalahan baik itu kesalahan pemotongan maupun kesalahan pembulatan. Untuk memperoleh pendekatan nilai-nilai fungsi sampai ketelitian n tempat desimal dilakukan dengan menghitung masing-masing suku sampai n +1 tempat desimal kemudian dijumlahkan dan pembulatan ke n tempat desimal dilakukan pada akhir perhitungan.

Contoh 4.4.1

Tentukan nilai cos i, teliti sampai empat tempat desimal!

Penyelesaian:

Diketahui dari daftar 4.3.1

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$, sehingga $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^4}{4!} - \frac{i^6}{6!} + \ldots$

$\cos i = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots$

Kita lakukan perhitungan suku demi suku sampai lima tempat desimal, maka

$1 = 1{,}00000$, $\frac{1}{2!} = 0{,}50000$, $\frac{1}{4!} = 0{,}04167$, $\frac{1}{6!} = 0{,}00139$, $\frac{1}{8!} = 0{,}00002$

Kemudian kita jumlahkan nilai-nilai itu, setelah dilakukan pembulatan sampai empat tempat desimal kita peroleh $1{,}54308 \approx 1{,}5431$.

Jadi nilai $\cos i \approx 1{,}5431$

Contoh 4.4.2

Tentukan nilai $\sin\frac{\pi}{60}i$, teliti sampai lima tempat desimal!

Penyelesaian:

Diketahui $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$, kita masukkan nilai $z = \frac{\pi}{60}i$ ke dalam persamaan tersebut sehingga diperoleh:

$$\sin\frac{\pi}{60}i = \frac{\pi}{60}i - \frac{\left(\frac{\pi}{60}i\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}i\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{60}i\right)^7}{7!} + \ldots$$

$$= \frac{\pi}{60}i + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 i}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^5 i}{5!} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^7 i}{7!} + \ldots$$

$$= i\left[\frac{\pi}{60} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^7}{7!} + \ldots\right]$$

Kita lakukan perhitungan suku demi suku sampai enam tempat desimal, maka

$\frac{\pi}{60} = 0{,}052359$, $\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^3}{3!} = 0{,}000024$, kita jumlahkan nilai-nilai itu kemudian kita bulatkan sampai lima tempat desimal, maka diperoleh $0{,}052383 \approx 0{,}05238$. Hasil ini masih harus kita kalikan dengan i sehingga di dapatkan 0,05238i.

Jadi nilai $\sin\frac{\pi}{60}i \approx 0{,}05238i$

Contoh 4.4.3

Tentukan nilai $\sin\frac{4\pi i}{9}$, teliti sampai empat tempat desimal.

Penyelesaian:

Kita dapat menggunakan deret Taylor untuk sin z di sekitar $z=\frac{\pi}{2}$, maka

setelah kita perderetkan sin z ke dalam deret Taylor di sekitar $z=\frac{\pi}{2}$

diperoleh $\sin z = 1-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6+\ldots$

Kita substitusikan nilai $z=\frac{4\pi i}{9}$ ke dalam persamaan ini sehingga diperoleh:

$$\sin\frac{4\pi i}{9}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{4\pi i}{9}-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{4\pi i}{9}-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{4\pi i}{9}-\frac{\pi}{2}\right)^6+\ldots$$

Setelah dilakukan proses perhitungan suku demi suku kita dapatkan:

$$\sin\frac{4\pi i}{9}=1-(0{,}25888-2{,}19322i)+(-0{,}79052+2{,}89511i)$$

$$-(0{,}004133+0{,}11234i)+(-0{,}00428-0{,}00428i)-(0{,}00025-0{,}00667i)$$

$$=-0{,}09526+4{,}97838i$$

Kita lakukan pembulatan sampai empat tempat desimal, maka

$$\sin\frac{4\pi i}{9}\approx -0{,}0953+4{,}9784i$$

Contoh 4.4.4

Tentukan nilai $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}i\right)$, teliti sampai empat tempat desimal

Penyelesaian:

Berdasarkan contoh 2.3.5 kita peroleh:

$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Sehingga $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}i\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cosh\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{3}\sinh\frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}i\right) = 0{,}5000\left[1 + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + \ldots\right]$$

$$- i.0{,}8660\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!} + \ldots\right]$$

Kita lakukan perhitungan suku demi suku:

Untuk $\cosh\frac{\pi}{4}$:

$$1 = 1{,}00000,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} = 0{,}30842,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} = 0{,}01585,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} = 0{,}00032$$

Kita jumlahkan nilai-nilai itu kemudian kita bulatkan keempat tempat desimal, maka $\cosh\frac{\pi}{4} \approx 1{,}3246$.

Untuk $\sinh\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} = 0{,}08074,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} = 0{,}00249,\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!} = 0{,}00004$$

Setelah kita jumlahkan nilai-nilai itu kemudian kita bulatkan sampai empat tempat desimal diperoleh $\sinh\frac{\pi}{4} \approx 0{,}8687$.

Dengan demikian kita dapatkan:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}i\right) \approx 0{,}5000.1{,}3246 - i.0{,}8660.0{,}8687 \approx 0{,}6623 - i.0{,}7523$$

Contoh 4.4.5

Tentukan nilai $e^{(2+\frac{\pi}{30}i)}$, teliti sampai empat tempat desimal!

Penyelesaian:

Diketahui $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, maka

$$e^{(2+\frac{\pi}{30}i)} = e^2(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30})$$

$$= e^2\left[\left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^6}{6!} + \ldots\right]\right.$$

$$\left. + i\left[\frac{\pi}{30} - \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^7}{7!} + \ldots\right]\right]$$

Setelah kita lakukan perhitungan seperti contoh-contoh sebelumnya dan kita lakukan pembulatan sampai empat tempat desimal diperoleh $\cos\frac{\pi}{30} \approx 0{,}9945$ dan $\sin\frac{\pi}{30} \approx 0{,}1045$.

Dengan demikian kita dapatkan:

$$e^{(2+\frac{\pi}{30}i)} \approx e^2(0,9945 + i0,1045) \approx 7,3484 + i0,7722$$

Contoh 4.4.6

Tentukan nilai $\mathrm{Ln}(1+i\sqrt{3})$, teliti sampai empat tempat desimal!

Penyelesaian:

Diketahui $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\theta$ dan $z = 1 + i\sqrt{3}$, maka $|z| = 2$, karena nilai mutlak z adalah bilangan real maka kita dapat menggunakan deret Gregory untuk menentukan nilai dari ln 2 seperti dalam contoh 2.3.6, sehingga diperoleh $\ln 2 \approx 0,6931$.

Jika kita gunakan perbandingan trigonometri kita dapat menentukan besar sudut $\theta = \frac{\pi}{6}$. Oleh karena itu $\mathrm{Ln}(1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\theta = 0,6931 + i\frac{\pi}{6}$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Sesuai dengan perumusan masalah yang telah disajikan dalam bab pendahuluan maka kita dapat menarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi bernilai kompleks yang daerah asalnya himpunan semua bilangan bulat positif. Barisan ini biasa ditulis dengan notasi kurawal $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Suatu barisan bilangan kompleks $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan mempunyai limit z_0 apabila untuk setiap $\in > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $|z_n - z_0| < \in$. Barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang mempunyai limit z_0 untuk n menjadi besar tak hingga kita katakan barisan itu konvergen ke z_0, jika sebaliknya kita katakan barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergen.
2. Deret bilangan kompleks yaitu suatu bentuk penjumlahan $z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$ atau dapat ditulis dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Untuk menentukan konvegensi dari deret bilangan komplek $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ dilakukan dengan jalan membentuk barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari deret tersebut dengan $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$. Karena deret bilangan kompleks $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$

konvergen bila dan hanya bila barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen. Secara teknis untuk lebih mudahnya kita dapat membentuk deret nilai mutlak $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ dalam menentukan konvergensi dari deret bilangan kompleks, karena jika deret $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ konvergen maka deret bilangan kompleks $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ juga konvergen. Deret $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ merupakan deret dengan suku-suku real positif. Oleh karena itu kita dapat menggunakan semua aturan yang berlaku dalam deret dengan suku-suku real positif untuk menentukan konvergensi dari deret nilai mutlak ini.

3. Deret pangkat kompleks adalah deret yang berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ dengan $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ adalah konstanta kompleks dan z suatu variabel kompleks. Deret ini disebut deret pangkat kompleks dalam $(z - z_0)$. Untuk setiap deret pangkat kompleks terdapat tiga kemungkinan yaitu: deret pangkat kompleks konvergen mutlak untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di z_0 dan berjari-jari R, deret konvergen mutlak untuk semua $z \in C$ atau deret konvergen mutlak untuk $z = z_0$. Apabila kita ambil $z_0 = 0$, maka deret menjadi deret pangkat kompleks dalam z yang mempunyai bentuk umum $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$. Untuk deret pangkat kompleks ini juga terdapat tiga kemungkinan yaitu: deret pangkat kompleks konvergen mutlak untuk setiap z dalam lingkaran yang berpusat di 0 dan berjari-jari

R, deret konvergen mutlak untuk semua $z \in C$ atau deret konvergen mutlak untuk z = 0.

4. Sebagai pengembangan dari deret pangkat kompleks dibahas deret fungsi yang terdiri dari deret Taylor dan Maclaurin. Jika f(z) berturunan pada semua tingkat pada z = z_0, maka didefinisikan deret Taylor untuk fungsi f di sekitar titik z = z_0 yaitu: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$. Deret ini merupakan deret pangkat kompleks dalam (z − z_0), dengan $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, n = 0, 1, 2, 3, ... Sebagai kejadian khusus dari deret Taylor di sekitar z = 0 didefinisikan deret Maclaurin sebagai berikut: Jika f(z) berturunan pada semua tingkat pada z = 0, maka didefinisikan deret Maclaurin untuk fungsi f di sekitar titik z = 0 yaitu: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

5.2 Saran

Dalam menentukan konvergensi deret pangkat kompleks ini, hanya menggunakan dua cara yaitu menggunakan definisi dan teorema uji rasio. Untuk penulisan selanjutnya diharapkan teknik pengujian konvergensi deret yang lain dapat disajikan, dan diharapkan dibahas pula penerapan deret pangkat kompleks dalam kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Anton Howard. (1980). *Calculus With Analitic Geometry*. Canada: Drexel University.

Churchill. Ruel. V. and J. W. Brown.(1990). *Complex Variables and Applications*. Singapore: Mc Graw-Hill.

Kaplan Wilfred. (1952). *Advanced Calculus*. America: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Paliouras. John. D.(1987). *Peubah Kompleks Untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Terjemahan Gunawan Wibisono. Jakarta: Erlangga.

Spiegel. Murray. R.(1987). *Peubah Kompleks*. Terjemahan oleh Koko Martono. Jakarta: Erlangga.

Sumantri. R. *Fungsi Perubah Kompleks*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Thomas and Finney. (1978). *Calculus And Analytic Geometry*. San Francisco: Mary Cafarella.