RUANG VEKTOR DARI TRANSFORMASI LINEAR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh:
Sumiyati
NIM: 991414060

Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta

2004

RUANG VEKTOR DARI TRANSFORMASI LINEAR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Sumiyati

NIM : 991414060

Program Studi Pendidikan Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Yogyakarta

2004

RUANG VEKTOR DARI TRANSFORMASI LINEAR

Oleh:

Sumiyati

NIM : 991414060

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc.

Tanggal : 15 Oktober 2004

RUANG VEKTOR DARI TRANSFORMASI LINEAR

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Sumiyati

NIM: 991414060

Telah Dipertahankan di Depan Panitia Penguji

Pada tanggal 22 September 2004

dan Dinyatakan Telah Memenuhi Syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	: Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Drs. A. Mardjono	....

Yogyakarta, 22 September 2004

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta,15 Oktober 2004
Penulis

Sumiyati

Serahkanlah Segala Perbuatanmu Kepada TUHAN,

Maka Terlaksanalah Segala Rencanamu

(Amsal 16 :3)

Dengan penuh syukur kepada Tuhanku Yesus kristus, skripsi ini kupersembahkan kepada:

- *Ayah dan Ibu tercinta*
- *Adikku Yuli*
- *Koko Fery terkasih*

ABSTRAK

Skripsi ini membahas pengertian ruang vektor dari transformasi linear atas lapangan K, yang berarti bahwa himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor U atas lapangan K ke ruang vektor V atas lapangan K yang dilambangkan dengan L(U,V) membentuk ruang vektor atas lapangan yang sama yakni K. Dalam konsep ruang dual dari suatu ruang vektor, jumlah langsung (*direct sum*) dan ruang pembagi dapat diperlihatkan bahwa transformasi linear dapat membentuk isomorfisma.

Dualitas ruang vektor merupakan himpunan semua transformasi linear dari U(K) ke K dan dilambangkan dengan U^*. Elemen dari U^* disebut dengan fungsional linear atau bentuk linear dari U. Bila U(K) berdimensi n maka U^* berdimensi n. Akibatnya U^{**} juga berdimensi n. Sehingga U dengan U^{**} isomorfis.

Transformasi linear yang terjadi pada jumlah langsung (*direct sum*) dan ruang pembagi merupakan transformasi linear dari V ke V. Jika $V = U \oplus W$, maka transformasi linear $L : V \rightarrow U \oplus W$ isomorfisma. Lebih lanjut transformasi linear $L: V \rightarrow V/W$ juga isomorfisma.

ABSTRACT

This thesis discusses about the vector space of the linear transformations over some field K. It means that the set of all linear transformations from the vector space U(K) to the vector space V(K) form a vector space over same field. In the concept of dual space of vector space, the direct sum and the quotient space, it can be shown that linear transformation can form an isomorphism.

The duality of vector space is the set of all linear transformations from U(K) to K which is symbolized by U^*. The element of U^* is called functional linear or linear form of U. If U(K) has n dimension, then U^* has n dimension also. Consequently, U^{**} has n dimension as well. Therefore, U and U^{**} are isomorphic. The linear transformation, which works on the direct sum and quotient space, is a linear transformation from V to V. If $V = V \oplus W$, then linear transformation $L: V \to V \oplus W$ is an isomorphism. Furthermore, linear transformation $L: V \to V/W$ is an isomorphism also.

KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Allah Bapa di surga atas segala penyertaan dan bimbingan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar. Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata I (SI) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tidak lepas dari keterlibatan banyak pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini sudah selayaknya penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc., atas segala kesabarannya dalam memberikan bimbingan selama penyusunan skripsi.
2. Bapak Drs. Th. Sugiarto, M.T., selaku Kaprodi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
3. Pak Sugeng dan Pak Narjo, atas segala keramahannya dalam melayani mahasiswa-mahasiswi untuk kelancaran studi.
4. Bapak dan Ibu tercinta yang selama ini selalu mendampingi, memberi dorongan, semangat dan juga doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Adikku Yuli yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
6. Koko Fery yang selalu memberikan dukungan, semangat dan juga doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

7. Semua teman-teman angkatan 1999, terima kasih atas perhatian, dukungan dan kebersamaannya selama ini.
8. Sobat-sobatku Agung (Ceki), Alm.Agus Puranto (brekele), Agung (Togex), Wury (brewok) yang selalu memberikan perhatian dan memanjakan penulis.
9. Teman – temanku Anas, Heti, Ebti, Ana, Heni, Wiwid, Krecek, Yuli, Asih yang selalu memberikan dorongan serta menemani penulis di perpustakaan.
10. Adik-adik angkatan, yang selalu menanyakan kapan lulusnya, terutama bagi angkatan 2000, angkatan 2001 dan angkatan 2002 khususnya kepada: Atik, Ligna, Erni, Paulin, Yulia, Eni, Gati, Ari, Waryanti, Siska ('02), Mbak Ina (angkatan 98) atas perhatiannya dan waktunya untuk berdiskusi dengan penulis.
11. Semua teman – teman gerejaku yang selalu memberikan semangat pada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari akan segala kekurangan yang termuat dalam skripsi. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran guna menyempurnakan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, Oktober 2004

Penulis

Sumiyati

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dalam aljabar linear kita mengenal ruang vektor atas suatu lapangan dengan berbagai sifatnya, serta transformasi linear yang telah dikenal sebagai suatu pemetaan L dari ruang vektor V ke ruang vektor W atas suatu lapangan K yang memenuhi :

1. $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$
2. $L(c\,\mathbf{x}) = c\,L(\mathbf{x})$ untuk semua $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ dan $c \in K$

Kita tahu bahwa dalam kuliah aljabar linear konsep ruang vektor dan transformasi linear atas suatu lapangan itu dibahas secara terpisah. Di dalam skripsi ini penulis akan memperlihatkan bahwa dari dua konsep tersebut dapat ditemukan adanya keterkaitan yakni bahwa kita dapat menemukan ruang vektor yang terbentuk dari transformasi linear atas suatu lapangan.

Dengan konsep-konsep seperti dualitas ruang vektor, annihilator pada suatu ruang bagian, pemetaan dari ruang vektor V(K) ke U⊕W, dengan U, W adalah ruang bagian V(K) dan pemetaan dari ruang vektor V(K) ke V/W dengan W ruang bagian V(K) dapat diperlihatkan bahwa semua transformasi linear dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lainnya atas suatu lapangan merupakan ruang vektor atas lapangan yang sama juga. Selain itu bisa diperlihatkan bahwa transformasi linear dalam konsep di atas adalah isomorfisma.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Apa yang dimaksud dengan ruang vektor dari transformasi linear atas suatu lapangan?
2. Konsep-konsep matematika apa yang terkait dengan ruang vektor dari transformasi linear ?
3. Bagaimana bentuk pemetaan dari transformasi linear atas suatu lapangan yang isomorfisma?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Untuk mengetahui pengertian ruang vektor dari transformasi linear atas suatu lapangan.
2. Untuk mengetahui konsep-konsep apa saja yang terkait dengan ruang vektor dari transformasi linear atas suatu lapangan.
3. Untuk mengetahui bentuk pemetaan yang terjadi dalam transformasi linear atas suatu lapangan yang isomorfisma.

D. Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dalam mempelajari ruang vektor dari transformasi linear atas suatu lapangan adalah :

1. Dapat mengenal lebih lanjut bahwa himpunan transformasi linear atas suatu lapangan memenuhi aksioma-aksioma dari ruang vektor.
2. Dapat mengetahui bahwa pengertian ruang vektor dan transformasi linear yang selama ini sudah diperoleh dalam kuliah dapat digunakan untuk mengembangkan konsep yang lain.

E. Pembatasan Masalah

Pada pembahasan ini, penulis membatasi pada ruang vektor dari transformasi linear atas lapangan bilangan real saja.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka sehingga dalam penulisan ini belum ditemukan hal-hal yang baru. Buku-buku yang penulis gunakan sebagai acuan terlampir dalam daftar pustaka di akhir pembahasan skripsi ini.

E. Sistematika Bahasan

Bab I. Pendahuluan

A. Latar Belakang Masalah

B. Perumusan Masalah

C. Tujuan Penulisan

D. Manfaat

E. Pembatasan Masalah

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Ruang Vektor Euclides Berdimensi –n

Bidang (R^2) merupakan kumpulan dari semua pasangan terurut $(x,y)^T$ dengan x dan y bilangan real dan dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Sedangkan ruang (R^3) adalah kumpulan dari semua $(x,y,z)^T$ dengan x, y, z merupakan bilangan real dan juga dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Gagasan ini dapat diperluas untuk lebih banyak koordinat. Oleh karena itu, kita perlu mempelajari R^n untuk sebarang bilangan asli n dengan membahasnya secara aljabar.

Kumpulan terurut yang terdiri dari n bilangan asli ditulis sebagai $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Elemen dari R^n disebut vektor . Vektor $\mathbf{x} \in R^n$ ditulis:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bilangan real ke- i, i = 1,2,...,n disebut komponen ke-i dari vektor **x**.

Definisi 2.1

Dua buah vektor $\mathbf{u} = (u_1,u_2, \dots, u_n)^T$ dan $\mathbf{v} = (v_1,v_2, \dots, v_n)^T$ dalam R^n dikatakan sama yakni $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ bila $u_i = v_i$ untuk setiap i =1,2,...,n.

Definisi 2.2

Bila **u** dan **v** vektor dalam R^n : $\mathbf{u} = (u_1,u_2, \ldots, u_n)^T$ dan $\mathbf{v} = (v_1,v_2, \ldots, v_n)^T$ penjumlahan **u** dan **v** ditulis **u** + **v** adalah vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots +u_n +v_n)^T$$

Perkalian skalar antara vektor $\mathbf{u} = (u_1,u_2, \ldots, u_n)^T$ dengan bilangan real k ditulis **ku** adalah vektor

$$\mathbf{ku} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)^T$$

Definisi 2.3

Suatu vektor dalam R^n yang semua komponennya sama dengan nol disebut vektor nol dan dilambangkan dengan $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)^T$.

Jika $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots, x_n)^T$ sebagai vektor dalam R^n, maka vektor $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)^T$ disebut negatif (atau invers terhadap operasi penjumlahan) dari **x**, dan dilambangkan $-\mathbf{x}$. Sedangkan operasi pengurangan dalam R^n didefinisikan sebagai berikut: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$

$$= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^T$$

untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots, y_n)^T$ dalam R^n.

Definisi 2.4

Suatu persamaan linear dalam n peubah (variabel) adalah persamaan dengan bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 +\ldots+ a_nx_n = b$ dengan $a_1,a_2,\ldots,a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1,x_2,\ldots,x_n$ adalah peubah. Suatu sistem linear dari m persamaan dalam n peubah adalah suatu sistem yang berbentuk:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dengan a_{ij} dan b_i semuanya adalah bilangan-bilangan real. Persamaan (1) disebut sebagai sistem persamaan linear mxn.

Sistem persamaan linear disebut konsisten jika persamaan tersebut mempunyai sedikitnya satu penyelesaian. Jika sistem persamaan linear tidak memiliki penyelesaian maka sistem persamaan linear disebut tak konsisten. Sistem yang konsisten dapat mempunyai tepat satu penyelesaian atau mempunyai banyak penyelesaian.

Sistem persamaan linear (1) di atas dapat ditulis dengan notasi matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Atau lebih singkat ditulis dengan AX = B, dengan A = (a_{ij}) yaitu *matriks koefisien* , X = $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ dan B = $(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$.

Definisi 2.5

Sistem persamaan linear disebut sistem persamaan homogen jika konstanta $b_1,b_2,\ldots,b_m$ di persamaan (1) semuanya sama dengan nol. Oleh karena itu, sistem persamaan homogen mempunyai bentuk umum:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Setiap sistem persamaan homogen selalu mempunyai penyelesaian *trivial*, yaitu penyelesaian $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, . . ., $x_n = 0$. Sedangkan bila terdapat penyelesaian lain maka disebut penyelesaian *tak trivial*.

Teorema 2.1

Sistem persamaan linear homogen mxn memiliki penyelesaian tak trivial jika n>m.

Bukti:

Sistem homogen selalu konsisten. Bentuk eselon baris dari matriks yang bersangkutan memiliki paling banyak m baris bukan nol. Jadi terdapat paling banyak m peubah utama. Karena terdapat n peubah dan n>m, maka pasti ada n–m peubah bebas. Untuk peubah-peubah bebas ini dapat ditetapkan nilai sebarang yang akan memberikan penyelesaian non trivial pada sistem tersebut. ■

Definisi 2. 6

Suatu matriks bujur sangkar A berordo nxn dikatakan <u>*tak singular*</u> (*non singular*) atau <u>*dapat dibalik*</u> (*invertible*) jika terdapat matriks A^{-1} sehingga $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$. Matriks A^{-1} disebut sebagai invers perkalian dari A.

Definisi 2.7

Suatu matriks nxn dikatakan *singular* jika tidak memiliki invers perkalian.

Kita tunjukkan bahwa invers dari suatu matriks bujur sangkar, misalkan matriks A, adalah tunggal. Andaikan invers dari A tidak tunggal. Berarti ada invers yang lain misalnya B dengan $A^{-1} \neq B$. Maka :

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= I \\
(A^{-1}A)B &= IB \\
A^{-1}(AB) &= B \\
A^{-1}I &= B \\
A^{-1} &= B \text{ (kontradiksi)}
\end{aligned}
$$

Jadi invers dari suatu matriks bujur sangkar adalah tunggal.

Definisi 2.8

Matriks B dikatakan *ekuivalen baris* dengan A jika terdapat matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sehingga;

$B = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$ atau $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} B$

Dengan perkataan lain, B ekuivalen baris dengan A jika B dapat diperoleh dari A dengan operasi-operasi baris elementer yang berhingga banyaknya.

Teorema 2.2

Misalkan A matriks nxn, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen;

a) A tak singular.

b) A**x** = **0** hanya mempunyai penyelesaian trivial.

c) A ekuivalen baris dengan I.

Bukti:

a) $\Rightarrow$ b)

Andaikan A tak singular dan $\hat{x}$ penyelesaian untuk A**x** = **0** maka :

$\hat{x} = I\,\hat{x} = (A^{-1}A)\,\hat{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Jadi A**x** = **0** hanya mempunyai penyelesaian trivial.

b) $\Rightarrow$ c)

Dengan operasi baris elementer, sistem tersebut dapat ditransformasikan menjadi bentuk U**x** = **0**, dengan U berbentuk eselon baris. Jika salah satu elemen diagonal dari U adalah 0, maka baris terakhir dari U seluruhnya terdiri dari 0 sehingga sistem A **x** =**0** akan ekuivalen dengan sistem yang lebih banyak peubah dari pada persamaan, dan karena itu menurut teorema 2.1 sistem A**x** = **0** akan memiliki penyelesaian tak trivial . Jadi U haruslah merupakan matriks segitiga dengan elemen-elemen diagonal semuanya sama dengan 1. Sehingga eselon baris tereduksi dari A adalah matriks identitas I.

Jadi A ekuivalen baris dengan I.

c) $\Rightarrow$ a)

Jika A ekuivalen baris dengan I, maka ada matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sehingga;

$A = E_k E_{k-1} \ldots E_1 I = E_k E_{k-1} \ldots E_1$

Tetapi karena masing-masing E_i dapat dibalik, maka hasil kali $E_k E_{k-1} \ldots E_1$ juga dapat balik.

Jadi A tak singular dan $A^{-1} = (E_k E_{k-1} \ldots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$ ■

Akibat 2.1

Suatu sistem yang terdiri dari n persamaan linear dengan n peubah A**x** = **b** memiliki penyelesaian tunggal jika dan hanya jika A tak singular.

Bukti:

($\Leftarrow$)

Andaikan A tak singular dengan invers A^{-1}, maka $A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})b = I\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

Sehingga $\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian untuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Sekarang kita harus memperlihatkan sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tunggal. Andaikan **y** juga merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, maka $A\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$A^{-1}\,A\,\mathbf{y} = A^{-1}\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{y} = A^{-1}\,\mathbf{b} = \mathbf{x} \text{ (kontradiksi)}$$

Jadi $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ merupakan penyelesaian tunggal untuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

($\Rightarrow$)

Andaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal $\mathbf{x}_1$. Andaikan A singular, menurut teorema 2.2 maka $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai suatu penyelesaian $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Andaikan $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{z}$. Jelas bahwa $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_1$ dan $A\mathrm{y} = A\,\mathbf{x}_1 + A\mathrm{z} = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b}$.

Jadi y juga penyelesaian dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (kontradiksi).

Oleh karena itu, jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki penyelesaian tunggal, maka A harus tak singular. ■

Untuk membantu menentukan bahwa suatu matriks berordo nxn adalah tak singular, akan dibahas teorema yang berkaitan dengan determinan.

Teorema 2.3

Suatu matriks A berordo nxn adalah tak singular jika dan hanya jika det (A) $\neq 0$

Bukti:

$\Rightarrow$

Andaikan A tak singular. Misalkan invers dari A adalah A^{-1} maka $I = AA^{-1}$.

Sekarang $1 = \det(I) = \det(A). \det(A^{-1})$.

Jadi $\det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$

Andaikan $\det(A) \neq 0$.

Matriks A dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris dengan operasi-operasi baris yang berhingga banyaknya. Jadi kita dapat mencari $E_1, E_2, \ldots E_k$ sehingga :

$U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 \times A$ atau $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_k^{-1}U$

Jadi $\det A = \det E_1^{-1} \det E_2^{-1} \ldots \det E_k^{-1} \det U \neq 0$. Haruslah $\det U \neq 0$.

Maka U tidak mempunyai suatu baris yang elemennya nol semua, sehingga U = I. Oleh karena itu A ekuivalen baris dengan I dan menurut teorema 2.2 maka A tak singular. ■

B. Ruang Vektor

Dalam konsep ruang vektor, operasi-operasi yang kita gunakan adalah operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang memenuhi beberapa aksioma. Akan kita tetapkan sejumlah aksioma-aksioma yang harus dipenuhi oleh anggota-anggota yang tidak kosong.

Definisi 2.9

Misalkan V adalah himpunan yang padanya didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dan misalkan K adalah lapangan. Dengan ini kita mengartikannya bahwa untuk setiap pasang elemen $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam V, kita dapat mengasosiasikannya dengan elemen $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ yang tunggal, yang juga berada di V. Dan dengan setiap elemen $\mathbf{x}$ di V dan setiap skalar $\alpha \in$ K, kita dapatkan elemen $\alpha\mathbf{x}$ yang tunggal di dalam V. Himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dikatakan membentuk suatu **ruang vektor atas lapangan K** dilambangkan dengan V(K) jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di V(K).
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ di V(K).
3. Terdapat elemen $\mathbf{0}$ di V(K) sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x}$ di dalam V(K).
4. Untuk setiap $\mathbf{x} \in$ V(K) terdapat elemen $-\mathbf{x}$ di V(K) sehingga $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ untuk setiap skalar $\alpha \in$ K dan setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in$ V(K).

6. $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ untuk setiap skalar $\alpha,\beta \in$ K dan setiap $\mathbf{x} \in$ V(K).
7. $(\alpha\,\beta)\,\mathbf{x} = \alpha\,(\beta\mathbf{x})$ untuk setiap skalar $\alpha,\beta \in$ K dan setiap $\mathbf{x} \in$ V(K).
8. $1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in$ V(K).

Elemen-elemen dari V(K) disebut ***vektor***. Ruang vektor disebut *ruang vektor real*, jika skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan real.

Contoh 2. 1

Misalkan diketahui himpunan P = $\{a_0+a_1x+ \ldots + a_n x^n \mid a_0,a_1,\ldots, a_n \in R$ dan n bilangan bulat positif$\}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

Jika : $\mathbf{p} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$ dan

$\mathbf{q} = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n$

maka jumlah polinom **p** dan **q** didefinisikan sebagai

$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_n+b_n)x^n \in$ P karena $a_i+b_i \in R$, $\forall_i = 1\ldots n$

Sedangkan perkalian skalar didefinisikan sebagai

$k\,\mathbf{p} = ka_0 + ka_1\,x + ka_2\,x^2 + \ldots + ka_n\,x^n \in$ P karena $k\,a_i \in R$, $\forall_i=1\ldots n$

Buktikan bahwa P adalah ruang vektor!

Penyelesaian :

1. Ambil sebarang **p** dan **q** dalam P

   $\mathbf{p} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$

   $\mathbf{q} = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n$

Maka:

$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0+a_1\, x+a_2\, x^2+ \ldots +a_n\, x^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_n\, x^n\,)$

$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2+\ldots + (a_n+b_n)x^n$

$= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2+\ldots + (b_n+a_n)x^n$

$= (b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_n\, x^n)+ (a_0+a_1\, x+a_2\, x^2+ \ldots +a_n\, x^n)$

$= \mathbf{q} + \mathbf{p}$

$\therefore(\forall\ \mathbf{p}, \mathbf{q} \in P)$ berlaku $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$

2. Ambil sebarang **p**, **q**, **z** dalam P

$\mathbf{p} = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$

$\mathbf{q} = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \ldots + b_n\, x^n$

$\mathbf{z} = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots + c_n\, x^n$

Maka $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{z}$

$= ((a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n\, x^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_n\, x^n\,))+ (c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots +c_n\, x^n)$

$= ((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2+\ldots + (a_n+b_n)x^n)+ (c_0 +c_1x + c_2\, x^2 + \ldots +c_n\, x^n)$

$=(((a_0+b_0)+c_0)+ ((a_1+b_1)+c_1)x + ((a_2+b_2)+c_2)x^2+\ldots + ((a_n+b_n)+c_n)x^n)$

$=((a_0+(b_0+c_0)) + (a_1+(b_1+c_1))x + (a_2+(b_2+c_2))x^2+\ldots + (a_n+(b_n+c_n)x^n))$

$= (a_0+a_1x+a_2x^2+. \quad . \quad . \quad +a_n \quad x^n)+((b_0+b_1x+b_2x^2+. \quad . \quad .+b_n \quad x^n \quad) \quad +$

$(c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots + c_n\, x^n))$

$= \mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{z})$

$\therefore\ (\forall\ \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \in P$ berlaku $(\ \mathbf{p}+\mathbf{q})+\mathbf{z} = \mathbf{p}+(\mathbf{q}+\mathbf{z})$

3. Ada $\mathbf{0} \in$ P, dengan $\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\mathbf{p} \in P$ berlaku $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$

   Sekarang: $(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n\ ) + (0+0x+0x^2 + \ldots + 0x^n)$

   $= (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n\ ).$

   $\therefore\ \exists\ \mathbf{0} \in P$ sehinga $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$

4. Ambil sebarang $\mathbf{p} = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n \in P$. Akan diperlihatkan ada $-\mathbf{p} \in P$ sehingga $\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

   Sekarang $(a_0+a_1x+a_2x^2 + \ldots + a_n\, x^n) + (-p) = (0 + 0x+0x^2 + \ldots + 0x^n\ )$

   $-(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n)+(a_0+ a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n)+ -(\mathbf{p})$

   $= -(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n) + (0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n\ )$

   Sehingga diperoleh :

   $(0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n) + (-\mathbf{p}) = -(\ a_0 + a_1x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n)$

   $-\mathbf{p} = -(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n)$

$\therefore\ (\forall\ \mathbf{p} \in P\ )\ (\exists\ -\mathbf{p} \in P)\ (\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) = \mathbf{0})$

5. Ambil sebarang $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P$ dan α adalah skalar. Akan diperlihatkan $\alpha\,(\ \mathbf{p} + \mathbf{q}) = \alpha\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$

α (**p** + **q**)

$= \alpha\ ((a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_n x^n))$

$= \alpha\ ((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots + (a_n+b_n)x^n)$

$= \alpha\ (a_0+b_0) + \alpha\ (a_1+b_1)x + \alpha\ (a_2+b_2)x^2 + \ldots + \alpha\ (a_n+b_n)x^n$

$= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x^2 + \ldots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n$

$= (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n) + (\alpha b_0 + \alpha b_1 x + \alpha b_2 x^2 + \ldots + \alpha b_n x^n)$

$= \alpha\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + \alpha\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$

= α **p** + α **q**

$\therefore$ ($\forall$ **p** $\in$ P) berlaku α (**p** + **q**) = α **p** + α **q**

6. Ambil sebarang **p** = $a_0 + a_1x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ $\in$ P. Andaikan α, β adalah skalar.

   Akan diperlihatkan ($\alpha + \beta$) **p** = α **p** + β **p**

   Sekarang: ($\alpha + \beta$) **p** = $(\alpha + \beta)\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$

   $= (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1 x + (\alpha + \beta)a_2 x^2 + \ldots + (\alpha + \beta)\ a_n x^n$

   $= (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n) + (\beta a_0 + \beta a_1 x + \beta a_2 x^2 + \ldots + \beta a_n x^n)$

   $= \alpha\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + \beta(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$

   = α **p** + β **p**

   $\therefore$ ($\forall$ **p**,**q** $\in$ P) berlaku ($\alpha + \beta$) **p** = α **p** + β **p**

7. Ambil sebarang $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in P$, α,β adalah suatu skalar.

   Akan diperlihatkan $(\alpha \beta) \mathbf{p} = \alpha (\beta \mathbf{p})$

   $(\alpha \beta) \mathbf{p} = (\alpha \beta)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$

   $= (\alpha \beta) a_0 + (\alpha \beta) a_1 x + (\alpha \beta) a_2 x^2 + \ldots + (\alpha \beta) a_n x^n$

   $= \alpha (\beta a_0) + \alpha(\beta a_1)x + \alpha(\beta a_2)x^2 + \ldots + \alpha(\beta a_n x^n)$

   $= \alpha (\beta(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n))$

   $= \alpha (\beta \mathbf{p})$

   $\therefore (\forall \mathbf{p} \in P)$ berlaku $(\alpha \beta) \mathbf{p} = \alpha (\beta \mathbf{p})$

8. Untuk setiap $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in P$, ada $1 \in K$ sehingga $1.\ \mathbf{p} = \mathbf{p}$

   Jadi P adalah ruang vektor.

Contoh 2. 2

Diketahui W = { $(a,0)^T$ | a bilangan real}. Apakah W suatu ruang vektor?

Penyelesaian :

$(a,0)^T \in W$ yakni suatu matriks yang elemennya bilangan real. Operasi penjumlahan vektor di W adalah operasi penjumlahan matriks, begitu juga operasi perkalian skalar dengan vektor di W juga operasi perkalian skalar dengan matriks berordo 2x1. Kita tahu bahwa dalam bilangan real berlaku sifat ketertutupan, sifat komutatif dan assosiatif baik terhadap operasi penjumlahan maupun perkalian selain itu berlaku pula sifat distributif. Bilangan real a juga memiliki invers yakni –a, memiliki elemen netral 0, dan memiliki identitas yakni 1. Dengan sifat-sifat yang dimiliki pada bilangan real, maka kedelapan aksioma bisa dipenuhi oleh W.

Teorema 2.4

Jika V adalah ruang vektor atas lapangan K dan **x**, **y** sebarang vektor dalam V, maka:

(i). $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(ii). Jika $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ (yaitu invers jumlahan dari vektor x adalah tunggal)

(iii). $(-1)\,\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

Bukti:

(i). Menurut aksioma 6 dan 8 :

$\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} = (1 + 0)\,\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + 0\,\mathbf{x}$.

Jadi

$-\mathbf{x} + \mathbf{x} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + 0\,\mathbf{x}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + 0\,\mathbf{x}$ (Aksioma 2)

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\,\mathbf{x}$ (Aksioma 3 dan 4)

Terbukti $0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(ii). Andaikan $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$

Maka $-\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{0}$

$= -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})$

$= (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y}$

$= \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$ (Aksioma 1,2,3,4)

Terbukti $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$

(iii). Menurut (i) dan aksioma 6 :

$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{x} = (1 + (-1))\,\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x}.$

$\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x}$

Menurut (ii) : $(-1)\,\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ ■

Definisi 2.10

Jika S adalah himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V(K), dan S memenuhi syarat-syarat berikut:

i. $\alpha\mathbf{x} \in S$ untuk setiap $\mathbf{x} \in S$, untuk sebarang skalar α.

ii. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

maka S disebut ruang bagian (*subspace*) dari V(K).

Contoh 2.3

Apakah himpunan $V=\{ (x_1,x_2)^T | \; x_1 = 3x_2\}$ merupakan ruang bagian dari R^2 ?.

Penyelesaian :

i. Ada $(0,0)^T \in V$ sebab $0 = 3 \cdot 0$

$\therefore V \neq \varnothing$

ii. Ambil sebarang $\mathbf{x} = (a,b)^T \in V$ maka $a = 3b$, α adalah suatu skalar. Sehingga $\alpha\,\mathbf{x} = \alpha\,(a,b)^T = (\alpha a, \alpha b)^T$

Jadi $\alpha\,\mathbf{x} \in V$ sebab $a = 3b$, sehingga $\alpha a = \alpha (3b)$

iii. Ambil sebarang $\mathbf{x} = (a,b)^T \in V$ dan $\mathbf{y} = (c,d)^T \in V$

Maka $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a,b)^T + (c,d)^T = (a+c, b+d)^T$

Telah diketahui bahwa $(a,b)^T \in V$ berarti $a = 3b$ dan $(c,d)^T \in V$ berarti $c = 3d$.

Sehingga diperoleh $a + c = 3b + 3d = 3(b + d)$

Jadi $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$.

Jadi $\{ (x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2 \}$ adalah ruang bagian dari R^2

B.1 Kombinasi linear dan Kebebasan Linear.

Definisi 2.11

Misalkan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V atas lapangan K. Jumlahan vektor yang berbentuk $\alpha\,\mathbf{v_1} + \alpha\,\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha\,\mathbf{v_n}$, dengan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar-skalar , disebut suatu *kombinasi linear* dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$.

Himpunan semua kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ disebut *rentang* dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. Rentang dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ dilambangkan dengan Rentang $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, v_n)$.

Contoh 2.4

Apakah sebarang $(a,b,c)^T$ di R^3 dapat dibuat kombinasi linear dari himpunan $\{ (1,0,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T \}$.

Penyelesaian :

Ambil sebarang vektor $(a,b,c)^T$ di R^3 dan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ sedemikian sehingga : $(a,b,c)^T = \alpha_1 (1,0,0)^T + \alpha_2 (0,1,1)^T + \alpha_3 (1,0,1)^T$

Ini memberikan sistem persamaan :

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ b &= \alpha_2 \\ c &= \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Matriks koefisien dari sistem persamaan (1) di atas adalah tak singular sebab $\det \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = 1 \neq 0$, sehingga sistem ini memiliki penyelesaian tunggal.

Dengan menggunakan metode subtitusi, kita peroleh penyelesaian dari sistem persamaan (1) adalah $\alpha_1 = a - (c - b)$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c - b$. Atau dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-(c-b) \\ b \\ c-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ b \\ c-b \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a+b-c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c-b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga sebarang $(a,b,c)^T$ di R^3 dapat dibuat kombinasi linear dari himpunan $\{ (1,0,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T \}$.

Teorema 2.5

Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ adalah elemen-elemen dari ruang vektor V(K), maka Rentang $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$ adalah ruang bagian dari V(K).

Bukti:

i. Rentang $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}) \neq \emptyset$, sebab $\mathbf{0} \in$ Rentang $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

ii. Misalkan β suatu skalar dan ambil $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ sembarang elemen dari Rentang$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

   Maka : $\beta \mathbf{v} = (\beta \alpha_1) \mathbf{v_1} + (\beta \alpha_2) \mathbf{v}_2 + \ldots + (\beta \alpha_n) \mathbf{v_n}$

   Sehingga $\beta \mathbf{v} \in$ Rentang$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

iii. Misal $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ dan $\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n$

   maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n) + (\beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n)$

   $= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n$

   Jadi $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in$ Rentang $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

   Oleh karena itu, Rentang$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$ adalah sebuah ruang bagian dari V(K). ■

Definisi 2.12

Himpunan $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ disebut **himpunan perentang** untuk V(K) jika dan hanya jika setiap vektor dalam V(K) dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$.

Contoh 2.5

Apakah himpunan $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$ merupakan himpunan perentang bagi R^3 ?

Penyelesaian :

Ambil sembarang $(a,b,c)^T \in R^3$ dan $\alpha \in R$. Akan ditunjukkan $(a,b,c)^T \in R^3$ dapat dibuat kombinasi linear dari $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan :
$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= a \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= b \\ \alpha_1 &= c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Karena matriks koefisien dari sistem ini tak singular, sistem ini mempunyai penyelesaian tunggal. Dengan menggunakan metode subtitusi, diperoleh penyelesaian dari sistem persamaan (1) yakni: $\alpha_1 = c$, $\alpha_2 = b - c$, $\alpha_3 = a - b$. Atau dapat ditulis : $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{bmatrix}$

Jadi $$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b-c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a-b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$ adalah himpunan perentang di R^3

Teorema 2.6

i. Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ merentang ruang vektor V(K) dan salah satu dari vektor ini dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari n-1 vektor yang lain, maka ke n-1 vektor itu juga merentang V(K).

ii. Diberikan n vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. Salah satu dari vektor-vektor tersebut merupakan kombinasi linear dari n-1 vektor yang lain jika dan hanya jika ada skalar-skalar $c_1, \ldots c_n$, yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga:

$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

Bukti :

i. Diketahui $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ merentang V(K), maka sebarang vektor $\mathbf{v} \in$ V(K) dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \beta_n \mathbf{v}_n .$$

Diketahui salah satu vektor dari V(K) dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari n-1 vektor yang lain. Andaikan vektor tersebut adalah $\mathbf{v}_n$ maka $\mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \beta_n \mathbf{v}_n \\ &= \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \beta_n(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) \mathbf{v}_1 + (\beta_2 + \beta_n \alpha_2) \mathbf{v}_2 + \ldots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) \mathbf{v}_{n-1}\end{aligned}$$

Jadi setiap $\mathbf{v} \in$ V(K) merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_{n-1}}$ yang berarti vektor –vektor ini merentang V(K).

ii. $\Rightarrow$

Andaikan salah satu vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ katakanlah $\mathbf{v}_n$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Maka

$\mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} \Leftrightarrow \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n = 0$

Jadi terdapat $c_i = \alpha_i$ untuk $i = 1, \ldots, n-1$ dan $c_n = -1$ sedemikian sehingga $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + c_n \mathbf{v}_n = 0$

$\Leftarrow$

Diketahui $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \mathbf{v}_n = 0$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tidak semuanya sama dengan nol. Jadi paling sedikit satu $c_i \neq 0$ misalkan c_n adalah tak nol, maka :

$$v_n = -\frac{c_1}{c_n} v_1 - \frac{c_2}{c_n} v_2 - \cdots - \frac{c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$$

sehingga $\mathbf{v}_n$ merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_{n-1}}$ ■

Definisi 2.13

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V(K) disebut **bebas linear** jika : $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi oleh skalar-skalar $c_1, \ldots, c_n = 0$.

Contoh 2.6

Vektor-vektor $\mathbf{u} = (6,2,3,4)^T$, $\mathbf{v} = (0,5,-3,1)^T$ dan $\mathbf{w} = (0,0,7,-2)^T$ adalah bebas linear.

Akan diperlihatkan bahwa $\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dipenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1\begin{bmatrix}6\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\5\\-3\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\7\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

maka diperoleh sistem persamaan linear :

$$\left.\begin{array}{ll}6\alpha_1 & =0\\ 2\alpha_1+5\alpha_2 & =0\\ 3\alpha_1-3\alpha_2+7\alpha_3 & =0\\ 4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 & =0\end{array}\right\} \quad (1)$$

Dengan menggunakan metode reduksi Gaus Jordan diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\2&5&0&0\\3&-3&7&0\\4&1&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&-3&7&0\\4&1&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-4R_1]{\frac{1}{5}R_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&7&0\\0&1&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&7&0\\0&0&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{7}R_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&7&0\\0&0&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_4+2R_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

penyelesaian dari sistem ini adalah $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Jadi **u**, **v**, **w** adalah bebas linear.

Definisi 2.14

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V(K) disebut **bergantung linear** jika terdapat skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya nol sehingga $c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\,\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

Contoh 2.7

Vektor-vektor $\mathbf{u} = (1,-1,0)^T$, $\mathbf{v} = (1,3,-1)^T$, dan $\mathbf{w} = (5,3,-2)^T$ adalah bergantung linear sebab:

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}5\\3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

diperoleh sistem persamaan:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + 5c_3 &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= 0 \\ -c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

maka penyelesaian dari sistem ini adalah $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ dan $c_3 = -1$

Teorema 2.7

Andaikan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah n vektor dalam R^n dan misalkan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^T$ untuk $i = 1, \ldots, n$.

Jika $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ maka vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah bergantung linear jika dan hanya jika X singular.

Bukti:

Andaikan $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n \in R^n$, $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^T$ untuk $i = 1,\ldots, n$. Diketahui $X = (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Andaikan $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ bergantung linear, berarti terdapat skalar-skalar $c_1,c_2,\ldots,c_n$ yang tidak semuanya nol sehingga : $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = 0$

yang ekuivalen dengan sistem persamaan:

$$c_1 (x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})^T + c_2 (x_{12},x_{22},\ldots, x_{n2})^T + \ldots + c_n(x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{nn})^T = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_{11}+c_2x_{12}+\ldots+c_nx_{1n} = 0 \\ c_1x_{21}+c_2x_{22}+\ldots+c_nx_{2n} = 0 \\ \vdots \\ c_1x_{n1}+c_2x_{n2}+\ldots+c_nx_{nn} = 0 \end{array}\right\}$$

Jika kita misalkan $\mathbf{c} = (c_1,c_2, \ldots ,c_n)^T$, maka sistem ini dapat ditulis sebagai persamaan matriks: $X\mathbf{c} = \mathbf{0}$

Persamaan ini akan memiliki penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika X singular. Jadi $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ akan bergantung linear jika dan hanya jika X singular. ■

Teorema 2.8

Misalkan $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V(K). Suatu vektor $\mathbf{v} \in$ Rentang$(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ secara tunggal jika dan hanya jika $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ bebas linear.

Bukti:

$\Leftarrow$

Diketahui $\mathbf{v} \in$ Rentang $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Andaikan **v** dapat ditulis sebagai kombinasi linear seperti berikut:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \qquad (1)$$

Andaikan v dapat juga ditulis sebagai kombinasi linear

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n \qquad (2)$$

Dengan mengurangkan (1) dengan (2) diperoleh:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Karena kombinasi linear dari **v** tidak tunggal maka $\alpha_i \neq \beta_i$ sehingga $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Sehingga $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bergantung linear. Kontraposisi terbukti.

$\Rightarrow$

Andaikan $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bergantung linear, maka terdapat $c_1, \ldots, c_n$ tidak semuanya sama dengan nol, sehingga

$$\mathbf{0} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_n \mathbf{v}_n \qquad (3)$$

Diketahui $\mathbf{v} \in$ Rentang $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sehingga v dapat ditulis:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \qquad (4)$$

Dengan menjumlahkan (3) dan (4) kita peroleh:

$$\mathbf{v} = (\alpha_1 + c_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + c_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_n + c_n)\mathbf{v}_n$$

$$= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathrm{v}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n \quad \text{dengan } \beta_i = c_i + \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$$

karena $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tidak semuanya sama dengan nol, maka $\beta_i \neq \alpha_i$ untuk paling sedikit satu nilai dari i.

Jadi jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bergantung linear, maka suatu vektor $\mathbf{v} \in$ Rentang $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ secara tidak tunggal.

Dengan kata lain jika $\mathbf{v} \in$ Rentang $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ secara tunggal maka $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bebas linear. Kontraposisi terbukti ■

B.2 Basis dan Dimensi.

Telah ditunjukkan bahwa jika vektor-vektor di dalam suatu himpunan perentang untuk ruang vektor V(K) bebas linear, maka setiap vektor di dalam ruang vektor itu dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear.

Pada bagian ini akan dibahas lebih jauh tentang himpunan perentang yang membentuk basis untuk ruang vektor yakni himpunan perentang yang bebas linear dan merentang. Kemudian berkaitan dengan banyaknya vektor dari himpunan perentang minimal yang membentuk basis, pengertian dimensi suatu ruang vektor akan dibahas.

Definisi 2.15

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merupakan **basis** untuk ruang vektor V(K) jika dan hanya jika:

i. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bebas linear.

ii. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V(K)

Contoh 2.8

Vektor-vektor $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Merupakan basis bagi R^4 sebab setiap vektor **x** di R^4 dapat dituliskan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ yaitu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$$

Jadi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ merentang R^4

Vektor -vektor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ bebas linear karena $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 + c_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dipenuhi oleh $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$

Jadi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ bebas linear.

Teorema 2.9

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis dari ruang vektor V(K), maka himpunan sembarang m vektor di V(K), dengan m>n adalah bergantung linear.

Bukti:

Diketahui $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis, ini berarti $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bebas linear dan merentang V(K).

Misalkan $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m$ adalah m vektor di V(K) dengan m>n.

Karena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V(K), maka kita peroleh:

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{12}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1n}\,\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{21}\,\mathbf{v}_1 + a_{22}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2n}\,\mathbf{v}_n$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_m = a_{m1}\,\mathbf{v}_1 + a_{m2}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\,\mathbf{v}_n \qquad m>n$$

Atau ditulis : $\mathbf{u}_i = a_{i1}\,\mathbf{v}_1 + a_{i2}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{in}\,\mathbf{v}_n$ untuk i = 1,...,m

Sedangkan kombinasi linearnya: $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + c_m\,\mathbf{u}_m$ (1)

Untuk menunjukkan $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m$ bergantung linear, maka kita perlu memperlihatkan bahwa $c_1,c_2,\ldots,c_m$ tidak semuanya nol dari sistem $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + c_m\,\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$

Sebelumnya kita tinjau dulu kombinasi linear dari persamaan (1):

$c_1(a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{12}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1n}\,\mathbf{v}_n) + \ldots + c_m(\,a_{m1}\,\mathbf{v}_1 + a_{m2}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\,\mathbf{v}_n\,)$

dapat ditulis dalam bentuk:

$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\ldots+c_ma_{m1})\mathbf{v}_1+\ldots+(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\ldots+c_ma_{mn})\mathbf{v}_n$

Sekarang kita tinjau persamaan:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1m}c_m=0 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\ldots+a_{2m}c_m=0 \\ \vdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\ldots+a_{nm}c_m=0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Sistem persamaan (2) merupakan persamaan linear homogen dengan lebih banyak peubah dari pada persamaannya, oleh karena itu sistem ini memiliki penyelesaian tak trivial. Jadi terdapat skalar-skalar $c_1,\dots,c_m$ yang tidak semua nol yang memenuhi (2) sehingga :

$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$

Jadi { $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$} bergantung linear. ■

Akibat 2.2

Jika { $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots,\mathbf{v}_n$}dan { $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2, \dots,\mathbf{u}_m$} kedua-duanya adalah basis untuk suatu ruang vektor V(K), maka n = m.

Bukti:

Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots,\mathbf{v}_n$ dan $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2, \dots,\mathbf{u}_m$ kedua-duanya adalah basis untuk V(K). Berarti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots,\mathbf{v}_n$ merentang ruang vektor V(K) dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ bebas linear. Begitu juga $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m$ merentang ruang vektor V(K) dan $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m$ bebas linear. Karena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ basis di V(K) dan $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2, \dots,\mathbf{u}_m$ bebas linear dari teorema 2.9 diperoleh $n \leq m$. Demikian pula, karena $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m$ basis di V(K) dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots,\mathbf{v}_n$ bebas linear, maka $m \leq n$.

Jadi m = n. ■

Definisi 2.16

Misalkan V(K) adalah ruang vektor. Jika V(K) memiliki basis yang terdiri dari n vektor, maka kita katakan bahwa V(K) memiliki **dimensi n.** Ruang bagian {**0**} dari V(K) dikatakan memiliki dimensi 0. V(K) dikatakan memiliki **dimensi hingga** jika terdapat himpunan berhingga vektor yang merentang V(K). Jika tidak demikian, maka kita katakan bahwa V(K) memiliki dimensi tak hingga.

Contoh 2.9

Vektor-vektor dalam contoh 2.8 yakni vektor-vektor

$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ membentuk sebuah basis di R^4.

Sehingga R^4 memiliki dimensi 4.

Contoh 2.10

Tentukan dimensi dari P_3 yang direntang oleh vektor-vektor x, x-1, x^2 +1

Penyelesaian:

Jika $c_1x + c_2(x-1) + c_3(x^2+1) = 0$

$$c_1x + c_2x - c_2 + c_3x^2 + c_3 = 0$$

$$c_3 x^2 + (c_1 + c_2)x + c_3 - c_2 = 0 = 0x^2 + 0x + 0$$

maka diperoleh sistem persamaan:
$$\left.\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_3 - c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sehingga $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Oleh karena itu x, x-1, x^2 +1 bebas linear.

Ambil sebarang $ax^2 + bx + c \in P_3$

$$(ax^2 + bx + c) = \alpha x + \beta(x-1) + \delta(x^2 + 1)$$

$$= \delta x^2 + (\alpha + \beta)x + (\delta - \beta)$$

kita akan peroleh sistem persamaan:

$$\left.\begin{array}{l} \delta = a \\ \alpha + \beta = b \\ \delta - \beta = c \end{array}\right\} \quad (2)$$

Jika $\delta = a$, maka diperoleh $\beta = a - c$, $\alpha = b - \beta = b - a + c$

Jadi $(ax^2 + bx + c) = ax^2 + [(b-a+c)+(a-c)]x + a-(a-c)$

Vektor –vektor x, x-1, x^2 +1 dapat merentang P_3

Karena x, x-1, x^2 +1 bebas linear dan merentang P_3 maka dimensi dari P_3 adalah 3.

Teorema 2.10

Jika V(K)adalah ruang vektor dengan dimensi n>0

I. Sembarang himpunan n vektor yang bebas linear pasti merentang V(K)

II. Sembarang n vektor yang merentang V(K) adalah bebas linear.

Bukti:

I. Diketahui ruang vektor V(K) berdimensi n. Berarti ruang vektor V(K) memiliki basis yang terdiri dari n vektor dan vektor-vektor ini merentang V(K).

   Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ basis dan $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor lain di V(K). Berdasarkan teorema 2.9 maka $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}$ pasti bergantung linear. Jadi terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ yang tidak semuanya nol sehingga :

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_n \mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$c_{n+1} \neq 0$ sebab jika nol maka persamaan di atas akan menyebabkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bergantung linear. Kontradiksi dengan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ basis.

Jadi persamaan (1) dapat ditulis:

$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$

dengan $\alpha_i = -\dfrac{c_i}{c_{n+1}}$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$. Karena $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor di V(K), maka $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V(K).

II. Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V(K). Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bergantung linear, maka salah satu dari $\mathbf{v}_i$, katakanlah $\mathbf{v}_n$, dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya yakni : $\mathbf{v}_n = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$, sehingga $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ masih tetap merentang V(K). Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ bergantung linear kita dapat menghilangkan satu vektor lagi dengan menuliskan salah satu vektor sebagai kombinasi vektor-vektor yang lain dan vektor-vektor yang tersisa masih merentang V(K). Kita dapat melanjutkan menghapus vektor-vektor dengan cara ini sampai kita memperoleh himpunan perentang yang bebas linear dengan k elemen dengan $k<n$. Tetapi hal ini kontradiksi dengan dimensi V(K) adalah n. Oleh karena itu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ pasti bebas linear. ∎

Teorema 2.11

Andaikan V(K) merupakan suatu ruang vektor berdimensi n>0. Bila r adalah bilangan positif dengan r<n, dan bila $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ adalah elemen yang bebas linear pada V(K). Maka dapat ditemukan elemen $\{\mathbf{v}_{r+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ sedemikian sehingga : $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ adalah basis pada V(K).

Bukti:

Diketahui V(K) berdimensi n dan adalah elemen yang bebas linear pada V(K) dengan r<n.

$\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ tidak dapat membentuk basis di V(K) sehingga bisa dikatakan bahwa $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ belum membentuk himpunan bebas linear yang maksimal di V(K).

Maka kita dapat menemukan $\mathbf{v}_{r+1}$ di V(K) sedemikian sehingga: $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+1}\}$ adalah bebas linear. Karena r+1 <n , maka $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+1}\}$ belum bisa membentuk basis. Dengan cara yang sama kita dapat mengembangkan sebuah himpunan yang terdiri dari r+2 yang bebas linear. Tetapi r+2 <n, sehingga $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+2}\}$ belum membentuk basis. Ini dapat dilanjutkan sampai memperoleh $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r,\mathbf{v}_{r+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ dari n vektor yang bebas linear. Dengan teorema 2.10 maka teorema ini terbukti.

■

C. Transformasi Linear

Definisi 2.17

Jika L adalah transformasi linear yang memetakan ruang vektor V(K) ke dalam W(K), maka berlaku:

(1) $L(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2)$ dan

(2) $L(\alpha\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$

Contoh 2.11

Misalkan L adalah pemetaan yang didefinisikan oleh:

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1,x_2)^T$ dalam R^2 . Maka L adalah transformasi linear.

karena : $$L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta\, y_1 \\ -\alpha x_2 - \beta\, y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} = \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y})$$

Teorema 2.12

Andaikan V(K) dan W(K) adalah ruang vektor. Bila $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ basis pada V(K) dan $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ elemen di W(K), maka ada dengan tunggal transformasi linear $L: V(K) \rightarrow W(K)$ sedemikian sehingga : $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, L(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$

jika $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ adalah suatu skalar, maka :

$$L(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n$$

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V(K)$, maka $\mathbf{v}$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear :

$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$.

dengan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ adalah suatu skalar

Sehingga $L(\mathbf{v}) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n$

Sekarang akan diperlihatkan bahwa $L : V(K) \rightarrow W(K)$ adalah tranformasi linear.

- Ambil sebarang $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}' = \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n \in V(K)$ dengan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dan $\beta_1, \ldots, \beta_n$ adalah suatu skalar, maka

  $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) + (\beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n)$

  $= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n$

  Sehingga $L(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{w}_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{w}_n$

  $= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \beta_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n + \beta_n\mathbf{w}_n$

  $= (\alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n) + (\beta_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{w}_n)$

  $= L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}')$

- Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V(K)$ dan andaikan α adalah suatu skalar, maka

  $L(\alpha\,\mathbf{v}) = L(\alpha x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha x_n\mathbf{v}_n) = \alpha x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha x_n\mathbf{w}_n$

  $= \alpha(x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n) = \alpha\, L(\mathbf{v})$.

  Jadi L adalah transformasi linear.

  Akan diperlihatkan bahwa $L : V(K) \rightarrow W(K)$ adalah tunggal

- Andaikan ada F: V(K) $\rightarrow$W(K) sedemikian sehingga F($\mathbf{v}_i$) = $\mathbf{w}_i$, (i = 1,..., n). Berarti bila diambil sebarang $\mathbf{v} \in$ V(K), dengan $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n \in$ V(K) maka $F(\mathbf{v}) = \alpha_1 F(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n F(\mathbf{v}_n)$

$$= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n = \alpha_1 L(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n L(\mathbf{v}_n) = L(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n)$$
$$= L(\mathbf{v})$$

Jadi pemetaan L: V(K)$\rightarrow$W(K) adalah tunggal. ■

C.1 Kernel.

Definisi 2.18

Misalkan L:V(K) $\rightarrow$ W(K) adalah transformasi linear. Ruang nol (kernel) dari L, dilambangkan dengan Ker(L), didefinisikan oleh

$$\text{Ker}(L) = \{ \mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}$$

C.2 Jangkauan.

Definisi 2.19

Misalkan L: V(K) $\rightarrow$ W(K) adalah transformasi linear dan misalkan S adalah ruang bagian V(K). ***Jangkauan*** (***image***) dari S, dilambangkan dengan L(S), didefinisikan dengan

$$L(S) = \{ \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \text{ untuk suatu } \mathbf{v} \in S \}$$

Teorema 2.13

Jika L: V(K) $\rightarrow$ W(K) adalah suatu transformasi linear dan S suatu ruang bagian dari V, maka

i. Ker(L) adalah ruang bagian dari V(K)

ii. L(S) adalah ruang bagian dari W(K)

Bukti:

i. $L(\mathbf{0}_v) = \mathbf{0}_w$ karena $L(\mathbf{0}_v) = L(0\ \mathbf{v}) = 0L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_w$, berarti $\mathbf{0} \in$ Ker (L). Jadi Ker(L) $\neq \varnothing$

Jika α suatu skalar dan $\mathbf{v} \in$ Ker (L), maka $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Sehingga: $L(\alpha\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{0}_w = \mathbf{0}_w$

Oleh karena itu, $\alpha\mathbf{v} \in$ Ker(L)

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in$ Ker(L), maka $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$

Sehingga: $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_w + \mathbf{0}_w = \mathbf{0}_w$.

Oleh karena itu, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in$ Ker(L)

Sehingga Ker(L) adalah suatu ruang bagian dari V(K).

ii. Vektor $\mathbf{0}_w \in$ L(S) karena $L(\mathbf{0}_v) = \mathbf{0}_w$ dengan $\mathbf{0}_v \in$ S. Jadi L(S) $\neq \varnothing$

Jika α skalar dan $\mathbf{w} \in$ L(S) maka ada $\mathbf{v} \in$ S sehingga $\mathbf{w} = L(\mathrm{v})$.

Jadi $\alpha\mathbf{w} = \alpha L(\mathbf{v}) = L(\alpha\mathbf{v})$

Karena $\alpha\mathbf{v} \in$ S, maka $\alpha\mathbf{w} \in$ L(S) sehingga L(S) tertutup di bawah perkalian dengan skalar.

Jika $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in$ L(S) maka terdapat $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in$ S sehingga $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ dan $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Jadi: $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$

Karena $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in$ S, maka $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in$ L(S)

sehingga L(S) tertutup di bawah penjumlahan.

Jadi L(S) ruang bagian dari W(K) ■

C.3 Isomorfisma Ruang Vektor.

Definisi 2.20

Ruang vektor V(K) dikatakan isomorfis dengan ruang vektor W(K), jika ada transformasi linear yang bijektif $L : V(K) \to W(K)$. Transformasi linear itu disebut **isomorfisma** dari V(K) kepada W(K).

Transformasi linear $L : V(K) \to W(K)$ **bijektif** jika:

1. Transformasi linear T injektif atau satu-satu, yaitu:

   $(\forall x, y \in V(K))\, L(x) = L(y) \Rightarrow x = y$

2. Transformasi linier T surjektif, yaitu:

   $(\forall y \in W(K))\,(\exists x \in V(K))\, L(x) = y$

Teorema 2.14

Dua ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan yang sama adalah isomorfis bila dan hanya bila dua ruang vektor tersebut memiliki dimensi yang sama.

Bukti:

$\Leftarrow$

Andaikan U(K) dan V(K) adalah dua ruang vektor atas lapangan K dan memiliki dimensi n. Misalkan $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ adalah basis pada U(K) dan $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ adalah basis pada V(K).

Dengan demikian untuk sebarang elemen di U(K) dapat dinyatakan secara tunggal sebagai : $a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$.

Didefinisikan pemetaan f dari U(K) ke V(K) sebagai berikut:

$f(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n) = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ atau $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, untuk $1 \leq i \leq n$.

- Dengan teorema 2.12 f adalah transformasi linear.
- Akan diperlihatkan bahwa f adalah injektif

  Ambil $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$ dan $\mathbf{y} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n \in$ U(K) dengan

  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Leftrightarrow f(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n) = f(b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n)$

  $\Leftrightarrow f(\sum_i a_i\mathbf{u}_i) = f(\sum_i b_i\mathbf{u}_i)$, $1 \leq i \leq n$

  $\Leftrightarrow \sum_i a_i\,\mathbf{v}_i = \sum_i b_i\,\mathbf{v}_i \Leftrightarrow \sum_i (a_i - b_i)\,\mathbf{v}_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

  Diketahui $\mathbf{v}_i$ untuk $1 \leq i \leq n$ adalah basis di V(K) sehingga $a_i - b_i = 0$

  $\Leftrightarrow a_i = b$ dan diperoleh $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

  Jadi f injektif.

- Akan diperlihatkan bahwa f adalah surjektif.

  Setiap elemen di V(K) dapat dinyatakan secara tunggal sebagai :

  $b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\,\mathbf{v}_n = \sum_i b_i\mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq n$

  f memiliki jangkauan karena ada $\sum_i b_i\mathbf{u}_i$ di U(K), sedemikian sehingga : $f(\sum_i b_i\mathbf{u}_i) = \sum_i b_i\mathbf{v}_i$. Jadi f adalah surjektif.

  $\therefore$ U(K) isomorfis denganV(K)

$\Rightarrow$

Andaikan $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ adalah basis pada U(K), maka akan diperlihatkan bahwa himpunan vektor $\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\}$ adalah basis pada ruang V(K).

- Akan diperlihatkan bebas linear.

  $a_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + a_n f(\mathbf{u}_n) = 0$,

  karena f adalah transformasi linear, maka persamaan di atas ekuivalen dengan:

  $f(a_1\mathbf{u}_1) + \ldots + f(a_n\mathbf{u}_n) = 0 \Leftrightarrow f(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n) = 0$.

  Diketahui bahwa f adalah satu-satu dan $f(\mathbf{0}) = 0$ dengan $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, maka diperoleh: $a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ basis, maka $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

  Jadi $f(\mathbf{u})_1, \ldots, f(\mathbf{u}_n)$ bebas linier.

- Akan diperlihatkan bahwa $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)$ merentang V(K)

  Diketahui bahwa f surjektif, berarti $\forall \mathbf{v} \in V(K)$ ada $\mathbf{u} \in U(K)$ sedemikian sehingga: $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

  Bila $\mathbf{y} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n \in U(K)$ maka akan diperoleh:

  $\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) = f(b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n) = b_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + b_n f(\mathbf{u}_n)$.

  Jadi $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)$ merentang V(K).

$\therefore$ dim V = n = dim U. ■

Contoh 2.12

Misalkan V(K) ruang vektor dengan basis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, kemudian didefinisikan pemetaan $T : R^n \rightarrow V(K)$ dengan aturan:

$$T(x_1, \ldots, x_n)^T = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \qquad (1)$$

maka R^n isomorfis dengan V(K).

Penyelesaian:

T merupakan tranformasi linear sebab:

Ambil sebarang $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)^T \in R^n$

Akan diperlihatkan $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$

Berarti

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T((x_1,\dots, x_n)^T + (y_1,\dots,y_n)^T) \\
&= T((x_1+y_1)+\dots+(x_n+y_n)) \\
&= (x_1+y_1)\mathbf{v}_1+\dots+(x_n+y_n)\mathbf{v}_n \\
&= x_1\mathbf{v}_1+y_1\mathbf{v}_1+\dots+x_n\mathbf{v}_n+y_n\mathbf{v}_n \\
&=(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) + (y_1\mathbf{v}_1+\dots+y_n\mathbf{v}_n) \\
&=T(x_1,\dots, x_n)^T+T(y_1,\dots,y_n)^T \\
&=T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

Ambil sebarang $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)^T \in R^n$ dan α suatu skalar.

Akan diperlihatkan $T(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\, T(\mathbf{x})$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{x}) &= T(\alpha x_1,\dots \alpha x_n)^T \\
&= \alpha x_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha x_n\mathbf{v}_n = \alpha\,(x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_n\mathbf{v}_n) = \alpha\, T(x_1,\dots,x_n)^T = \alpha\, T(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Jadi T adalah transformasi linear.

Kemudian karena $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ merupakan basis, setiap vektor $\mathbf{v}$ di V(K) dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari basis tersebut, misalkan:

$$\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1+\dots+ s_n\mathbf{v}_n \qquad (2)$$

Dengan demikian $\mathbf{v}$ merupakan jangkauan dari $(s_1,\dots,s_n)^T$ karena

$$T(s_1,\dots,s_n)^T = s_1\mathbf{v}_1+\dots+ s_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

Jadi T adalah surjektif karena untuk setiap $\mathbf{v} \in V(K)$, ada $(s_1, \ldots, s_n)^T$ sedemikian sehingga: $T(s_1, \ldots, s_n)^T = s_1\mathbf{v}_1 + \ldots + s_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$.

T adalah satu-satu sebab jika diambil sebarang $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in R^n$ sedemikian sehingga :

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \Leftrightarrow (x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n) = (y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Karena $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis maka $x_1 - y_1 = \ldots = x_n - y_n = 0$. Sehingga diperoleh $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

Jadi R^n isomorfis terhadap ruang vektor V(K).

BAB III

RUANG VEKTOR DARI TRANSFORMASI LINEAR

Pada bagian ini akan diperlihatkan konsep-konsep matematika yang terkait dengan ruang vektor dari transformasi linear seperti konsep pada ruang dual dari ruang vektor, annihilator dari suatu ruang bagian. Tetapi sebelumnya kita akan melihat bahwa himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor U(K) ke ruang vektor V(K) akan membentuk ruang vektor dengan lapangan yang sama yakni K.

A. Pengertian Ruang Vektor dari Transformasi linear

Misalkan U(K), V(K) adalah dua ruang vektor atas lapangan K. Semua transformasi linear dari U(K) ke V(K) dinotasikan dengan L(U,V).

Dengan menggunakan definisi penjumlahan dan perkalian skalar pada L(U,V), dapat diperlihatkan bahwa L(U,V) membentuk ruang vektor atas lapangan yang sama.

Definisi 3.1 (Penjumlahan)

Bila $f,g \in$ L(U,V), pemetaan U ke V yang dinotasikan dengan $f + g$ didefinisikan dengan : $(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in U$

Definisi 3.2(Perkalian skalar)

Bila $\mathbf{u} \in U$, $a \in K$, $f \in L(U,V)$ didefinisikan pemetaan yang dilambangkan dengan af dari U ke V sebagai berikut:

$$(af)\,\mathbf{u} = a\,[f(\mathbf{u})]$$

Teorema 3.1

Jika U(K) dan V(K) adalah ruang vektor atas lapangan K maka L(U,V) merupakan ruang vektor.

1. Ambil sebarang $f,g \in L(U,V)$

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(\mathbf{u}) &= \underbrace{f(\mathbf{u})}_{\in V} + \underbrace{g(\mathbf{u})}_{\in V} \\ &= g(\mathbf{u}) + f(\mathbf{u})\end{aligned}\right\} \text{Sifat komutatif dalam V(K)}$$

$$= (g+f)(\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in U(K)$$

$$(f+g) = (g+f)$$

2. Ambil sebarang $f,g,h \in L(U,V)$

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(\mathbf{u}) &= (f+g)(\mathbf{u}) + h(\mathbf{u}) \\ &= (f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})) + h(\mathbf{u}) \\ &= f(\mathbf{u}) + (g(\mathbf{u}) + h(\mathbf{u})) \qquad \forall \mathbf{u} \in U(K) \\ ((f+g)+h) &= f + (g+h)\end{aligned}$$

3. Didefinisikan $\mathbf{0}$ sebagai berikut $\mathbf{0}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_v\ \forall \mathbf{u} \in U(K)$, sedemikian sehingga untuk setiap $f \in L(U,V)$ berlaku :

   $(f+\mathbf{0})(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{0}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{0}_v = f(\mathbf{u})$.

   Jadi ada $\mathbf{0} \in L(U,V)$ untuk setiap $f \in L(U,V)$ berlaku $(f+\mathbf{0})(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$.

4. Didefinisikan $-f$ sebagai berikut: $(-f)(\mathbf{u}) = -[f(\mathbf{u})];\ \forall \mathbf{u} \in U(K)$.

   Sehingga untuk setiap $f \in L(U,V)$, ada $-f \in L(U,V)$ berlaku:

   $$\begin{aligned}(f+(-f))(\mathbf{u}) &= f(\mathbf{u}) + (-f)(\mathbf{u})\\ &= f(\mathbf{u}) - [f(\mathbf{u})]\\ &= f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{u})\\ &= 0\\ (f+(-f)) &= 0\end{aligned}$$

5. Ambil sebarang $\mathbf{u} \in U(K)$, $a \in K$, $f, g \in L(U,V)$

   $$\begin{aligned}[a(f+g)](\mathbf{u}) &= a\,[(f+g)\mathbf{u}]\\ &= a\,[f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})]\\ &= a\,[f(\mathbf{u})] + a\,[g(\mathbf{u})]\\ &= (af)(\mathbf{u}) + (ag)(\mathbf{u})\\ &= (af+ag)(\mathbf{u})\\ [a(f+g)] &= (af+ag)\end{aligned}$$

6. Ambil sebarang $\mathbf{u} \in U(K)$, $a \in K$, $b \in K$ $f \in L(U,V)$

$$[(a+b)f]\,(\mathbf{u}) = (a+b)\,[f(\mathbf{u})]$$
$$= a[f(\mathbf{u})] + b[f(\mathbf{u})]$$
$$= (af)(\mathbf{u}) + (bf)\,(\mathbf{u})$$
$$= (af + bf)\,(\mathbf{u})$$
$$[(a+b)f] = (af + bf)$$

7. Ambil sebarang $\mathbf{u} \in U(K)$, $a \in K$, $b \in K$, $f \in L(U,V)$

$$[(ab)f]\,(\mathbf{u}) = (ab)\,f(\mathbf{u})$$
$$= a[b\,f(\mathbf{u})]$$
$$= [a(bf)](\mathbf{u})$$
$$(ab)f = a(bf)$$

8. $(1f)(\mathbf{u}) = 1f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$

$1f = f$, untuk setiap $f \in L(U,V)$.

$\therefore$ Himpunan semua transformasi linear $L(U,V)$ dari ruang vektor $U(K)$ ke ruang vektor $V(K)$ adalah ruang vektor atas lapangan K ■

B. Ruang Dual dari Suatu Ruang Vektor

Definisi 3.3

Bila U(K) ruang vektor atas lapangan K, maka ruang vektor yang terbentuk dari semua transformasi linear dari U(K) ke K disebur ***Dual*** dari U dan dilambangkan U^*

Transformasi linear dari U(K) ke K biasa juga disebut dengan ***fungsional linear*** atau ***bentuk linear*** pada ruang U.

Fungsional linear f pada U adalah pemetaan yang mengawankan setiap elemen $\mathbf{u} \in$ U(K) ke elemen $f(\alpha) \in$ K, sedemikian rupa sehingga:

$$f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2),\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \in U$$

$$f(a\,\mathbf{u}) = a[f(\mathbf{u})], \qquad a \in K,\ \mathbf{u} \in U$$

Contoh 3.1

Diketahui $\phi : R^2 \to R$ dan $\sigma : R^2 \to R$ adalah fungsional linear yang didefinisikan oleh $\phi(x,y) = x + 2y$ dan $\sigma(x,y) = 3x - y$.

Tentukan : (i) $\phi + \sigma$, (ii) 4ϕ, (iii) $2\phi - 5\sigma$.

Penyelesaian:

(i) $(\phi + \sigma)(x,y) = \phi(x,y) + \sigma(x,y) = x+2y+3x-y = 4x+y$

(ii) $(4\phi)(x,y) = 4\phi(x,y) = 4(x+2y) = 4x+8y$

(iii) $(2\phi - 5\sigma)(x,y) = 2\phi(x,y) - 5\sigma(x,y) = 2(x+2y) - 5(3x-y) = -13x+9y$

Teorema 3.2

Ruang dual V^* dari ruang V(K) yang berdimensi n, memiliki dimensi n juga.

Bukti:

Diketahui V(K) berdimensi n.

Andaikan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis pada V(K). (1)

Elemen pada V(K) dapat ditulis secara tunggal sebagai $\sum_i a_i \ \mathbf{v}_i$

Sekarang kita definisikan n fungsional linear pada V(K) yakni

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ (2)

Menurut teorema 2.12, untuk setiap i = 1,...,n ada f_j fungsional linear pada V(K) sedemikian sehingga: $f_j(\mathbf{v}_i) = \begin{cases} 1 & \text{jika } j = i \\ 0 & \text{jika } j \neq i \end{cases}$

sehingga $f_j(\sum_i a_i \ \mathbf{v}_i) = \sum_i a_i \ f_j(\mathbf{v}_i) = a_j$

Akan dibuktikan bahwa $f_1, f_2, \ldots, f_n$ basis pada V^*

Ambil $f \in V^*$ dan misalkan $f(\mathbf{v}_i) = c_i$, $1 \leq i \leq n$,

akan diperlihatkan bahwa $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = \sum_j c_j \ f_j$

$f(\sum_i a_i \ \mathbf{v}_i) = \sum_i a_i \ f_j(\mathbf{v}_i) = \sum_i a_i \ c_i$ (3)

Di lain pihak: $\sum_j c_j \ f_j \ \sum_i a_i \ \mathbf{v}_i = \sum_j \sum_i a_i \ c_j \ f_j(\mathbf{v}_i) = \sum_i a_i \ c_i$ (4)

Dari (3) dan (4) didapat $f(\sum_i a_i \ \mathbf{v}_i) = \sum_i a_i \ c_i = \sum_j c_j \ f_j \ \sum_i a_i \ \mathbf{v}_i$

Sehingga $f = \sum_j c_j \ f_j$

Jadi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ merentang di V^*.

Akan diperlihatkan bahwa $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bebas linear

Untuk membuktikan bahwa $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bebas linear, misalkan $\sum_i b_i f_i = \mathbf{0}$

Perhatikan bahwa $\sum_i b_i f_i(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}(\mathbf{v}_j) = 0$ untuk $1 \leq j \leq n$.

Di lain pihak $\sum_i b_i f_i(\mathbf{v}_j) = b_j$. Sehingga diperoleh $b_j = 0$, untuk $1 \leq j \leq n$.

Jadi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bebas linear.

Kesimpulan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ merupakan basis untuk V^*, sehingga V^* memiliki dimensi n juga. ■

Definisi 3.4

V(K) adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, dengan notasi pada teorema 3.2 persamaan (2), elemen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ yang merupakan basis pada V* disebut dengan **dual** untuk basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di V(K). Dalam basis dual berlaku : $f_j(\mathbf{v}_i) = \begin{cases} 1 & \text{jika } j = i \\ 0 & \text{jika } j \neq i \end{cases}$

Contoh 3.2

Diketahui basis dari R^2 $\{\mathbf{v}_1 = (2,1)^T, \mathbf{v}_2 = (3,1)^T\}$

Tentukan basis dual dari $\{f_1, f_2\}$!

Penyelesaian:

Akan dicari fungsional linear $f_1(x,y)^T = ax + by$ dan $f_2(x,y)^T = cx + dy$ sedemikian sehingga $f_1(\mathbf{v}_1) = 1$, $f_1(\mathbf{v}_2) = 0$, $f_2(\mathbf{v}_1) = 0$, $f_2(\mathbf{v}_2) = 1$.

$$\text{Sehingga: } \left.\begin{aligned} f_1(\mathbf{v}_1) &= f_1(2,1)^T = 2a+b = 1 \\ f_1(\mathbf{v}_2) &= f_1(3,1)^T = 3a+b = 0 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

sistem persamaan 1 memberikan $a = -1$, $b = 3$.

$$\text{Sedangkan : } \left.\begin{aligned} f_2(\mathbf{v}_1) &= f_2(2,1)^T = 2c + d = 0 \\ f_2(\mathbf{v}_2) &= f_2(3,1)^T = 3c + d = 1 \end{aligned}\right\} \quad 2$$

sistem persamaan 2 memberikan $c = 1$, $d = -2$.

Jadi basis dual adalah $\{ f_1(x,y)^T = -x + 3y, f_2(x,y)^T = x - 2y\}$

Teorema 3.3

Andaikan V berdimensi n, $\mathbf{v} \in V$ dan $f \in V^*$. Didefinisikan f fungsional linear nol yakni $f(\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in V$ dengan $f = 0$.

Sekarang akan ditunjukkan jika $f(\mathbf{v}) = 0, \forall f \in V^*$ maka $\mathbf{v} = 0$.

Bukti:

Misalkan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis pada V dan basis dualnya adalah $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ pada V^*. Andaikan $\mathbf{v} = \sum_i a_i \mathbf{v}_i \in V$. Di lain pihak kita miliki $f_j(\sum_i a_i \mathbf{v}_i) = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$, untuk $\forall f \in V^*$ dan $1 \leq j \leq n$. Sehingga diperoleh $\mathbf{v} = 0$.

■

Definisi 3.5

Jika V adalah ruang vektor , maka dual dari dual disebut dengan **bidual** pada V, dilambangkan dengan V^{**} sehingga $V^{**} = (V^*)^*$.

Dengan menggunakan teorema 3.2, maka kita peroleh bahwa jika V ruang berdimensi n ,maka V^* berdimensi n, dan V^{**} berdimensi n juga. Teorema di bawah ini akan membuktikan bahwa V dan V^{**} adalah isomorfis.

Teorema 3.4

Pemetaan $V \rightarrow V^{**}$, dengan $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{v}^{**}$ adalah fungsional linear pada V^* yang didefinisikan sebagai; $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{**}(f); f \in V^*$.

Dengan definisi di atas, V dan V^{**}adalah isomorfis.

Bukti:

Sebelumnya kita perlu mengetahui bila $\mathbf{v} \in V$, $f \in V^*$, $\mathbf{v}^{**} \in V^{**}$ maka $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{**}(f) \in K$.

Akan diperlihatkan bahwa $\mathbf{v}^{**}$ adalah linear.

Ambil f_1, $f_2 \in V^*$, $\mathbf{v} \in V$ dan a adalah suatu skalar, maka

$$\mathbf{v}^{**}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}) + f_2(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{**}(f_1) + \mathbf{v}^{**}(f_2) \text{ dan}$$

$$\mathbf{v}^{**}(af_1) = (af_1)(\mathbf{v}) = a\,\{f_1(\mathbf{v})\} = a\,\{\mathbf{v}^{**}(f_1)\}.$$

Jadi $\mathbf{v}^{**}$ adalah transformasi linear.

Akan diperlihatkan bahwa $V \rightarrow V^{**}$ adalah injektif atau satu-satu.

Ambil $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, sedemikian sehingga $\mathbf{u}^{**} = \mathbf{v}^{**}$, maka akan diperlihatkan bahwa $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Sekarang $\forall f \in V^*$, $\mathbf{u}^{**} = \mathbf{v}^{**}$

$$\mathbf{u}^{**}(f) = \mathbf{v}^{**}(f)$$

$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, karena $f(\mathbf{v}) \in K$ sehingga $-f(\mathbf{v}) \in K$ sehingga.

$$f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$$

Dengan teorema 3.3 kita peroleh $\mathbf{u} - \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Jadi $\forall \alpha, \beta \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u}^{**} = \mathbf{v}^{**} \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Akan diperlihatkan bahwa $V \to V^{**}$ adalah surjektif.

Ambil sebarang $\mathbf{v}^{**} \in V^{**}$. Bila $f \in V^{*}$ maka $\mathbf{v}^{**}(f) \in K$. Didefinisikan $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{**}(f)$ untuk $\mathbf{v} \in V$, $f \in V^{*}$. Jadi ada $\mathbf{v} \in V$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{**}(f)$.

Jadi f surjektif.

Kesimpulannya bahwa V isomorfis V^{**} . ■

C. Annihilator dari Suatu Ruang Bagian.

Definisi 3.6

Bila W merupakan ruang bagian pada ruang vektor U(K). Fungsional linear disebut dengan annihilator pada W bila $f(\mathbf{u}) = 0$ untuk setiap $\mathbf{u} \in W$. Himpunan semua annihilator pada W dilambangkan dengan W^0.

$W^0 = \{ f \in V^{*} \mid f(\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in W \}$.

Contoh 3.3

Diketahui W adalah ruang bagian dari R^4 yang direntang oleh $\mathbf{v}_1 = (1,2,-3,4)^T$ dan $\mathbf{v}_2 = (0,1,4,1)^T$.

Tentukan basis annihilator pada W.

Penyelesaian:

Untuk menentukan basis annihilator pada W, berarti akan dicari himpunan fungsional linear $f(x,y,z,w)^T = ax + by + cz + dw$ dengan $f(\mathbf{v}_1) = 0$ dan $f(\mathbf{v}_2) = 0$.

Sehingga :

$$\left.\begin{aligned} f(1,2,-3,4)^T &= a+2b-3c+4d=0 \\ f(0,1,4,1)^T &= b+4c-d=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Penyelesaian dari sistem persamaan (1) memberikan c,d sebagai variabel bebas.

Himpunan c=1, d=0 memberikan a=11,b = –4,c=1,d=0 dan fungsional linear $f_1(x,y,z,w)^T = 11x - 4y + z$.

Himpunan c=0, d = –1 memberikan a=6,b=–1,c=0,d=–1 dan fungsional linear $f_2(x,y,z,w)^T = 6x - y - w$.

Jadi himpunan fungsional linear $\{f_1, f_2\}$ adalah basis pada W^0.

Teorema 3.5

W^0 adalah ruang bagian dari V^*.

Bukti:

- Ambil sebarang $\mathbf{v} \in W$ dan $\mathbf{0} \in V^*$ maka $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = 0$. Jadi $\forall \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{0} \in W^0$.

  $W^0 \neq \varnothing$.

- Bila diambil sebarang $f_1 \in W^0$ dan $a \in K$,

  maka : $(a f_1)(\mathbf{v}) = a\,\{f_1(\mathbf{v})\} = a\,0 = 0$

  Jadi $(a f_1) \in W^0$.

  Sehingga W^0 adalah ruang bagian dari V^*. ■

- Bila diambil sebarang $f_1, f_2 \in W^0$ dan $\mathbf{v} \in W$,

  maka : $(f_1 + f_2)(\mathbf{v}) = (f_1)(\mathbf{v}) + (f_2)(\mathbf{v}) = 0+0 = 0$.

  Jadi $(f_1 + f_2) \in W^0$.

Teorema 3.6

Misalkan V(K) ruang vektor berdimensi n dan W ruang bagian dari V(K) yang berdimensi m maka W^0 berdimensi n–m.

Bukti:

Andaikan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ adalah basis pada W .

Andaikan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis pada V(K).

Misalkan $\{f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ adalah basis dual pada V^*.

Akan diperlihatkan bahwa W^0 yang merupakan ruang bagian dari V^* itu memiliki basis $\{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$.

Ambil sebarang $f^0 \in W^0 \subset V^*$ dengan $f^0 = b_1f_1 + \ldots + b_mf_m + b_{m+1}f_{m+1} + \ldots + b_nf_n$, maka untuk sebarang $\mathbf{v}_i \in W$, $1 \le i \le m$ diperoleh:

$f^0(\mathbf{v}_i) = (b_1f_1 + \ldots + b_mf_m + b_{m+1}f_{m+1} + \ldots + b_nf_n)(\mathbf{v}_i) = 0.$

Di lain pihak $(b_1f_1 + \ldots + b_mf_m + b_{m+1}f_{m+1} + \ldots + b_nf_n)(\mathbf{v}_i) = b_i f_i(\mathbf{v}_i) = b_i$.

Sehingga $b_i = 0$ untuk $1 \le i \le m$, maka $f^0 = b_{m+1}f_{m+1} + \ldots + b_nf_n$.

Jadi $\{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ merentang W^0.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa $\{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ bebas linear.

Bila $c_{m+1}f_{m+1} + \ldots + c_nf_n = \mathbf{0}$, maka harus diperlihatkan $c_i = 0$, $m+1 \le i \le n$.

Ambil $\mathbf{v}_{m+1} \in V$, maka: $(c_{m+1}f_{m+1} + \ldots + c_nf_n)(\mathbf{v}_{m+1}) = \mathbf{0}(\mathbf{v}_{m+1}) = 0$. Di lain pihak $(c_{m+1}f_{m+1} + \ldots + c_nf_n)(\mathbf{v}_{m+1}) = c_{m+1}f_{m+1}(\mathbf{v}_{m+1}) = c_{m+1}$. Sehingga diperoleh $c_{m+1} = 0$.

Ambil $\mathbf{v}_{m+2} \in V$, maka: $(c_{m+1}f_{m+1} + \ldots + c_nf_n)(\mathbf{v}_{m+2}) = \mathbf{0}(\mathbf{v}_{m+2}) = 0$.

Di lain pihak $(c_{m+1} f_{m+1}+\ldots+c_n f_n)(\mathbf{v}_{m+2}) = c_{m+2} f_{m+2}(\mathbf{v}_{m+2})=c_{m+2}$. Sehingga diperoleh $c_{m+2}=0$.

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $c_{m+3} = \ldots = c_n = 0$

Kesimpulannya $\{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ adalah basis dari W^0.

Dengan kata lain dimensi $W^0 = n - m$. ■

Teorema 3.7

Bila W_1, W_2 adalah ruang bagian dari V(K) dan W_1^0, W_2^0 berturut-turut menyatakan himpunan annihilator dari W_1 dan W_2, maka $(W_1+W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ dan $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Bukti:

1. $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

   ekuivalen dengan $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$ dan $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$.

   Akan diperlihatkan $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$.

   W_1 dan W_2 adalah ruang bagian yang berdimensi hingga pada V(K).

   Bila $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$, maka ada $\mathbf{v}_1 \in W_1$ dan $\mathbf{v}_2 \in W_2$ sedemikian sehingga $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

   Bila $f \in W_1^0 \cap W_2^0$, maka $f \in W_1^0$ dan $f \in W_2^0$.

   Sekarang : $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = 0 + 0 = 0$.

   Jadi $f \in (W_1 + W_2)^0$.

   Sehingga $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$.

Akan diperlihatkan $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$

Ambil $f \in (W_1 + W_2)^0$. Misalkan $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$.

- Bila $\mathbf{v}_1 \in W_1$ maka $\mathbf{v}_1 \in W_1 + W_2$ karena $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + 0$ sehingga $f(\mathbf{v}_1) = 0$. Jadi $f \in W_1^0$. (1)
- Bila $\mathbf{v}_2 \in W_2$ maka $\mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$ karena $\mathbf{v}_2 = 0 + \mathbf{v}_2$ sehingga $f(\mathbf{v}_2) = 0$. Jadi $f \in W_2^0$. (2)

Bila (1) dan (2) dikonjungsikan, maka diperoleh $f \in W_1^0$ dan $f \in W_2^0 \Leftrightarrow f \in W_1^0 \cap W_2^0$.

Sehingga $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$

Kesimpulan: $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

2. $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

ekuivalen dengan $(W_1 \cap W_2)^0 \subset W_1^0 + W_2^0$ dan $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$.

Akan diperlihatkan $(W_1 \cap W_2)^0 \subset W_1^0 + W_2^0$.

Jika diambil sebarang $f \in (W_1 \cap W_2)^0$ maka untuk setiap $\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ diperoleh $f(\mathbf{v}) = 0$.

$\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ ini berarti $\mathbf{v} \in W_1$ dan $\mathbf{v} \in W_2$. Akan diperlihatkan $f \in W_1^0 + W_2^0$.

- Bila $f \in W_1^0$ dan karena $f = f + 0$ maka $f(\mathbf{v}) = 0$ dengan $\mathbf{v} \in W_1$
- Bila $f \in W_2^0$ dan karena $f = 0 + f$ maka $f(\mathbf{v}) = 0$ dengan $\mathbf{v} \in W_2$

Sehingga bila $f = f_1 + f_2$ dengan $f_1 \in W_1$ dan $f_2 \in W_2$ maka $f(\mathbf{v}) = (f_1 + f_2)(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}) + f_2(\mathbf{v}) = 0+0=0$.

Jadi $f \in W_1^0 + W_2^0$.

$\therefore (W_1 \cap W_2)^0 \subseteq W_1^0 + W_2^0$

Andaikan $f \in W_1^0 + W_2^0$, berarti ada $f_1 \in W_1^0$ dan $f_2 \in W_2^0$ sedemikian sehingga $f = f_1 + f_2$.

Bila $\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$,maka $\mathbf{v} \in W_1$ dan $\mathbf{v} \in W_2$. Sehingga diperoleh $f_1(\mathbf{v}) = 0$ dan $f_2(\mathbf{v}) = 0$.

Jadi $f(\mathbf{v}) = (f_1 + f_2)(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}) + f_2(\mathbf{v}) = 0 + 0 = 0$.

Sehingga $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$

Kesimpulan $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$ ■

BAB IV

JUMLAH LANGSUNG DAN RUANG PEMBAGI

A. Jumlah Langsung (*Direct Sum*)

Definisi 4.1

Bila V adalah ruang vektor atas lapangan K, U dan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V. Didefinisikan **jumlah** U dan W yang merupakan himpunan bagian dari V yaitu $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ dengan $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$. Himpunan bagian ini dilambangkan dengan U+W .

$$U+W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

Teorema 4.1:

Bila U dan W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V(K) maka U + W merupakan ruang bagian dari V(K)

Bukti:

1. $U + W \neq \varnothing$, karena ada $\mathbf{0} \in U + W$ yakni $\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in U$ dan $\mathbf{0} \in W$
2. Ambil sebarang $k \in K$ dan $\mathbf{z} \in U + W$ Jadi $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ dengan $\mathbf{u} \in U$ dan $\mathbf{w} \in W$ maka $k\mathbf{z} = k(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{w}$.

   Karena U dan W adalah ruang bagian dari V maka $k\,\mathbf{u} \in U$ dan $k\,\mathbf{w} \in W$. Sehingga $k\mathbf{u} + k\mathbf{w} \in U + W$.

   Jadi $k\,\mathbf{z} \in U + W$. ■

3. Ambil sebarang $\mathbf{z_1} \in U + W$ dan $\mathbf{z_2} \in U + W$, maka $\mathbf{z_1} = \mathbf{u_1} + \mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{z_2} = \mathbf{u_2} + \mathbf{w_2}$ dengan $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in U$ dan $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in W$.

   Karena U dan W ruang bagian dari V maka $\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2} \in U$ dan $\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2} \in W$.

   Jadi $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = (\mathbf{u_1}+ \mathbf{w_1}) + (\mathbf{u_2}+ \mathbf{w_2}) = (\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}) + (\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) \in U + W$

   Kesimpulan : Bila $\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2} \in U + W$ maka $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} \in U + W$.

   Jadi U + W merupakan ruang bagian dari V(K)

Teorema 4.2:

Apabila U dan W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V(K) maka $U \cap W$ merupakan ruang bagian dari V(K).

Bukti:

1. $U \cap W \neq \emptyset$, karena ada $\mathbf{0} \in U$ dan $\mathbf{0} \in W$ sehingga $\mathbf{0} \in U \cap W$.
2. Ambil $\mathbf{x} \in U \cap W$ maka $\mathbf{x} \in U$ dan $\mathbf{x} \in W$ sehingga jika $k \in K$ maka $k\mathbf{x} \in U$ dan $k\mathbf{x} \in W$. Jadi $k\,\mathbf{x} \in U \cap W$ ■
3. Ambil $\mathbf{x},\mathbf{y} \in U \cap W$ maka $\mathbf{x},\mathbf{y} \in U$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y} \in W$. Sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ dan $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$. Jadi $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cap W$.

Jadi $U \cap W$ merupakan ruang bagian dari V(K).

Definisi 4.2

Jika U dan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V sedemikian sehingga $U \cap W = \{0\}$, maka $U + W$ disebut **jumlah langsung** (*Direct sum*) dan dilambangkan $U \oplus W$.

Teorema 4.3

Misalkan U dan W ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K.

$V = U \oplus W$ jika dan hanya jika setiap $\mathbf{v} \in V(K)$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ dengan $\mathbf{u}_1 \in U$ dan $\mathbf{w}_1 \in W$.

Bukti :

$\Rightarrow$

Diketahui $V = U \oplus W$. Akan dibuktikan $\mathbf{v} \in V(K)$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ dengan $\mathbf{u}_1 \in U$ dan $\mathbf{w}_1 \in W$.

Andaikan $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ dan $v = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$ dengan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ dan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$.

Ini berarti $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (-\mathbf{w}_1) = (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) + (-\mathbf{w}_1) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u}_1 + (\mathbf{w}_1 + (-\mathbf{w}_1)) = \mathbf{u}_2 + (\mathbf{w}_2 + (-\mathbf{w}_1)) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + (\mathbf{w}_2 + (-\mathbf{w}_1)) \\
&\Leftrightarrow -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 + (\mathbf{w}_2 + (-\mathbf{w}_1)) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1
\end{aligned}$$

Maka $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$.

Karena $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in U$ dan $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \in W$ maka ada $\mathbf{t} \in U \cap W$ dengan $\mathbf{t} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$.

Sehingga $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 0$ dan $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = 0$.

Jadi $\mathbf{u}_1 = u_2$ dan $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$.

Kesimpulan $\forall \mathbf{v} \in V$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ dengan $\mathbf{u}_1 \in U$ dan $\mathbf{w}_1 \in W$.

$\Leftarrow$

Diketahui bahwa $\forall \mathbf{v} \in V(K)$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ dengan $\mathbf{u}_1 \in U$ dan $\mathbf{w}_1 \in W$.

Akan dibuktikan $V = U \oplus W$

Andaikan $U \cap W \neq \{0\}$, maka ada $\mathbf{x} \neq 0 \in U \cap W$

Sehingga $\mathbf{v} + \mathbf{x} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + \mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}$, dengan $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{x}$

Di lain pihak:

$\mathbf{v} + \mathbf{x} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + \mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} + \mathbf{w}_1) = (\mathbf{u}_1 + \mathrm{x}) + \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{w}_1$, dengan $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}$.

Jadi ada elemen dalam U + W yang tidak dapat dinyatakan secara tunggal. Kontraposisi terbukti. ■

Contoh 4.1

Diketahui $U = \{(a,b,0)^T \mid a,b \in R\}$ dan $W = \{(0,0,c)^T\ c \in R\}$ adalah ruang bagian dari R^3.

Apakah R^3 adalah jumlah langsung dari U dan W?

Penyelesaian:

Untuk sebarang $(a,b,c)^T \in R^3$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai:

$$(a,b,c)^T = (a,b,0)^T + (0,0,c)^T,\ a,b,c \in R.$$

Jadi R^3 adalah jumlah langsung dari U dan W, sehingga $R^3 = U \oplus W$.

Contoh 4.2

Diketahui $U = \{(a,b,0)^T | \ a,b \in R\}$ dan $W = \{(0,b,c)^T | \ b,c \in R\}$ adalah ruang bagian dari R^3 .

Apakah R^3 adalah jumlah langsung dari U dan W ?

Penyelesaian:

R^3 bukan jumlah langsung dari U dan W karena ada $(3,5,7)^T \in R^3$ sedemikian sehingga $(3,5,7)^T$ tidak dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $U + W$, misalnya:

$(3,5,7)^T = (3,1,0)^T + (0,4,7)^T$ dengan $(3,1,0)^T \in U$, $(0,4,7)^T \in W$ dan juga $(3,5,7)^T = (3,-4,0)^T + (0,9,7)^T$ dengan $(3,-4,0)^T \in U$, $(0,9,7)^T \in W$.

Teorema 4.4

Bila V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan K dan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V, maka ada ruang bagian U sedemikian sehingga V adalah **jumlah langsung** dari W dan U.

Bukti:

Andaikan V(K) berdimensi n.

Bila $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_r\}$ adalah basis pada W, dengan teorema 2.11 kita dapat temukan himpunan $\{\mathbf{w}_{r+1},\ldots,\mathbf{w}_n\}$ pada V(K) yang merupakan basis dari U sehingga $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_{r+1},\ldots,\mathbf{w}_n\}$ adalah basis pada V(K). ■

Teorema 4.5

Jika U dan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V yang berdimensi hingga atas lapangan K sedemikian sehingga $V = U \oplus W$, maka $\dim V = \dim U + \dim W$.

Bukti:

Andaikan $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ adalah basis dari U dan $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ adalah basis dari W. Setiap elemen pada U dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear: $x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_r\mathbf{u}_r$, $x_i \in K$, $1 \leq i \leq r$ dan setiap elemen pada W dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear : $y_1\mathbf{w}_1 + \ldots + y_s\mathbf{w}_s$, $y_j \in K$, $1 \leq j \leq s$.

Berdasarkan teorema 4.3, maka setiap elemen pada V dapat ditulis secara tunggal sebagai kombinasi linear :

$x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_r\mathbf{u}_r + y_1\mathbf{w}_1 + \ldots + y_s\mathbf{w}_s$

dengan demikian bahwa $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ adalah basis pada V(K).

Jadi $\dim V = \dim U + \dim W$. ■

Contoh 4.3

Diketahui V_1, V_2 adalah ruang bagian dari R^4. Bila V_1 direntang oleh $\mathbf{v}_1 = (1,-1,1,-1)^T$, $v_1' = (1,1,1,1)^T$ dan V_2 direntang oleh $\mathbf{v}_2 = (1,2,1,3)^T$, $v_2' = (1,1,0,0)^T$ maka ditunjukkan bahwa $R^4 = V_1 + V_2$. Carilah komponen dari $(1,-1,-2,-2)^T$ di V_1 dan V_2.

Penyelesaian:

Dengan bentuk eselon baris tereduksi :

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\1&2&1&3\\1&1&0&0\end{bmatrix}\underset{R_2-R_4}{\overset{R_1-R_4}{\longrightarrow}}\begin{bmatrix}0&-2&1&-1\\0&0&1&1\\1&2&1&3\\1&1&0&0\end{bmatrix}\overset{R_3-R_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}0&-2&1&-1\\0&0&1&1\\0&1&1&3\\1&1&0&0\end{bmatrix}\underset{R_4-R_3}{\overset{R_1+2R_3}{\longrightarrow}}\begin{bmatrix}0&0&3&5\\0&0&1&1\\0&1&1&3\\1&0&-1&-3\end{bmatrix}\underset{R_3-R_2}{\overset{R_1-3R_2}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&0&1&1\\0&1&0&2\\1&0&-1&-3\end{bmatrix}\underset{\frac{1}{2}R_1}{\overset{R_4+R_2}{\longrightarrow}}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&2\\1&0&0&-2\end{bmatrix}\underset{R_3-2R_1}{\overset{R_2-R_1}{\longrightarrow}}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&-2\end{bmatrix}\overset{R_4+R_1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

ini menunjukkan bahwa keempat vektor tersebut bebas linear dan pasangan $\mathbf{v}_1, \mathrm{v}_1'$ merentang V_1 dan $\mathbf{v}_2, \mathrm{v}_2'$ merentang V_2. Diperoleh $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Selain itu $\mathbf{v}_1, \mathrm{v}_1', \mathbf{v}_2, \mathrm{v}_2'$ juga merentang di R^4 .

Sehingga dimensi $R^4 = 4 = \dim V_1 + \dim V_2$. Jadi $R^4 = V_1 \oplus V_2$

Untuk menentukan komponen $(1,-1,-2,-2)^T$ di V_1 dan V_2 , ditulis $(1,-1,-2,-2)^T = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ dengan $\mathbf{v}_i \in V_i$.

$(1,-1,-2,-2)^T=[x(1,-1,1,-1)^T+y(1,1,1,1)^T]+[z(1,2,1,3)^T+w(1,1,0,0)^T]$

diperoleh sistem persamaan:

$1 = x+y+z+w$

$-1= -x+y+2z+w$

$-2= x+y+z$

$-2= -x+y+3z$

yang memberikan penyelesaian $x = 2$,$y = -6$, $z = 2$,$w = 3$, sehingga $\mathbf{v}_1 = (-4,-8,-4,-8)$, $\mathbf{v}_2 =(5,7,2,6)$.

Proposisi 4.1

Bila V ruang vektor atas lapangan K yang merupakan jumlah langsung dari ruang bagian U dan W maka jumlah langsung $U \oplus W$ isomorfis dengan V.

Bukti :

Kita definisikan pemetaan $L: V \rightarrow U \oplus W$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa L adalah transformasi linear.

Ambil sebarang $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, maka:

$L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$ dan $\alpha \in K$, maka :

$L(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \alpha L(\mathbf{v})$.

Jadi $L : V \rightarrow U \oplus W$ adalah transformasi linear. (1)

Dari teorema 4.3 diperoleh bahwa setiap $\mathbf{v} \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ dengan $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$. Berarti L satu –satu.

Di lain pihak kita mempunyai $L(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ (dari definisi). Jadi untuk setiap $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U \oplus W$ ada $v \in V$ sedemikian sehingga $L(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Jadi L surjektif.

Sehingga $L: V \rightarrow U \oplus W$ bijektif. (2)

Kesimpulan : dari (1) dan (2) maka $U \oplus W$ isomorfis dengan V. ■

B. Ruang Pembagi

Definisi 4.3

Bila W ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K dan $\mathbf{v} \in V$ maka ruang pembagi V/W adalah himpunan yang berbentuk $(\mathbf{v} + W) \subseteq V$ yakni: $\mathbf{v} + W = \{ \mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in W\}$.

Penjumlahan dirumuskan dengan :

$(\mathbf{v} + W) + (\mathbf{v}' + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{v}' + W) \in \mathbf{v} + W$ dan

Perkalian dengan skalar dirumuskan:

$k(\mathbf{v} + W) = (k\mathbf{v} + W) \in \mathbf{v} + W$; untuk $k \in K$.

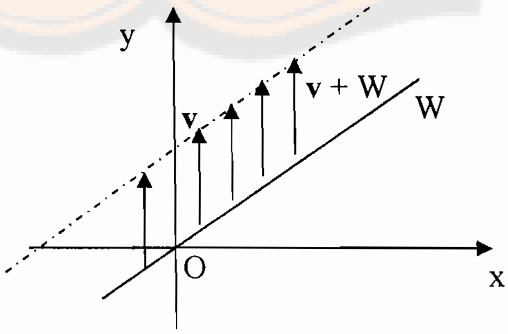
Contoh 4.4

Jika W adalah ruang bagian dari R^2 yang didefinisikan dengan:

$W = \{ (a,b)^T \mid a = b, a,b \in R\}$

W merupakan garis yang diberikan oleh persamaan $x - y = 0$. Kita dapat pandang bahwa $\mathbf{v} + W$ sebagai translasi garis yang terdiri dari penjumlahan vektor $\mathbf{v} \in R^2$ dengan titik-titik dalam W.

Sehingga $\mathbf{v} + W$ adalah semua garis yang sejajar dengan W . Lihat gambar 4.1 di bawah ini!



Gambar 4.1

Teorema 4.7

Misalkan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K.

i. Jika $(\mathbf{u} + W) \cap (\mathbf{v} + W) \neq \varnothing$ maka $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$, dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

ii. $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$ bila dan hanya bila $\mathbf{u} \in \mathbf{v} + W$, dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Bukti:

i. Diketahui $(\mathbf{u} + W) \cap (\mathbf{v} + W) \neq \varnothing$, akan dibuktikan $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$.

Untuk membuktikan $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$ berarti dibuktikan $\mathbf{u}+W \subseteq \mathbf{v} + W$ dan $\mathbf{v} + W \subseteq \mathbf{u}+W$.

Karena $(\mathbf{u} + W) \cap (\mathbf{v} + W) \neq \varnothing$, berarti ada $\mathbf{a} \in (\mathbf{u} + W) \cap (\mathbf{v} + W)$ sedemikian sehingga $\mathbf{a} \in (\mathbf{u} + W)$ dan $\mathbf{a} \in (\mathbf{v} + W)$. Akibatnya $\mathbf{a}=\mathbf{u} +\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}_2$ untuk $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned}\mathbf{u} +\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{w}_2 &\Leftrightarrow (\mathbf{u} +\mathbf{w}_1) +(-\mathbf{w}_1)= (\mathbf{v} + \mathbf{w}_2)+ (-\mathbf{w}_1)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} +(\mathbf{w}_1 +(-\mathbf{w}_1))= \mathbf{v}+(\mathbf{w}_2+ (-\mathbf{w}_1))\\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}_3, \text{ dengan } \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2+ (-\mathbf{w}_1) \in W\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} +\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{w}_2 &\Leftrightarrow (\mathbf{u} +\mathbf{w}_1) +(-\mathbf{w}_2)= (\mathbf{v} + \mathbf{w}_2)+ (-\mathbf{w}_2)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} +(\mathbf{w}_1 +(-\mathbf{w}_2))= \mathbf{v}+(\mathbf{w}_2+ (-\mathbf{w}_2))\\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_4, \text{ dengan } \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_1+ (-\mathbf{w}_2) \in W.\end{aligned}$$

Sekarang ambil $\mathbf{x} \in \mathbf{u} + W$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_5$, dengan $\mathbf{w}_5 \in W$

$$\begin{aligned}&= (\mathbf{v} + \mathbf{w}_3) + \mathbf{w}_5\\ &= \mathbf{v} + (\mathbf{w}_3+ \mathbf{w}_5)\\ &= \mathbf{v} + \mathbf{w}_6 \text{ , dengan } \mathbf{w}_6= \mathbf{w}_3+ \mathbf{w}_5 \in W.\end{aligned}$$

Jadi $\mathbf{x} \in \mathbf{v} + W$ ini berarti $\mathbf{u} + W \subseteq \mathbf{v} + W$. (1)

Sekarang ambil $\mathbf{y} \in \mathbf{v} + W$ maka $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{w}_7$, dengan $\mathbf{w}_7 \in W$

$$= (\mathbf{u} + \mathbf{w}_4) + \mathbf{w}_7$$

$$= \mathbf{u} + (\mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_7)$$

$= \mathbf{u} + \mathbf{w}_8$,dengan $\mathbf{w}_8 = \mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_7 \in W$.

Jadi $\mathbf{y} \in \mathbf{u} + W$ ini berarti $\mathbf{v} + W \subseteq \mathbf{u} + W$. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$.

ii. $\Rightarrow$

Diketahui $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$ akan dibuktikan $\mathbf{u} \in \mathbf{v} + W$.

Perhatikan bahwa $\mathbf{u} \in \mathbf{u} + W$ sebab $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ dengan $\mathbf{0} \in W$. Karena $\mathbf{u} \in \mathbf{u} + W$ dan $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$ maka $\mathbf{u} \in \mathbf{v} + W$.

$\Leftarrow$

Diketahui $\mathbf{u} \in \mathbf{v} + W$ akan dibuktikan $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$.

Perhatikan bahwa $\mathbf{u} \in \mathbf{u} + W$ karena $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ dengan $\mathbf{0} \in W$.

Jadi $\mathbf{u} \in (\mathbf{u} + W) \cap (\mathbf{v} + W)$ menurut (i) didapat $\mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$.

■

Teorema 4.8

Andaikan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K dan $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$.

$(\mathbf{v} + W) = (\mathbf{v}' + W)$ bila dan hanya bila $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in W$.

Bukti:

$\Leftarrow$

Diketahui $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in W$ akan dibuktikan $(\mathbf{v} + W) = (\mathbf{v}' + W)$.

Ambil sebarang $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \in (\mathbf{v} + W)$.

$\mathbf{u}$ dapat juga ditulis: $\mathbf{u} = \mathbf{v}' + (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + \mathbf{w} \in (\mathbf{v}' + W)$.

Sehingga $\mathbf{u} \in (\mathbf{v} + W) \cap (\mathbf{v}' + W)$ menurut teorema 4.7(i) diperoleh $(\mathbf{v} + W) = (\mathbf{v}' + W)$

$\Rightarrow$

Diketahui $\mathbf{v} + W = \mathbf{v}' + W$ menurut teorema 4.7(ii) diperoleh $\mathbf{v} \in (\mathbf{v}' + W)$ sehingga $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} \in W$.

Jadi $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in W$. ■

Teorema 4.9

Andaikan W adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K maka himpunan V′ yang terdiri dari semua koset v + W dengan operasi yang didefinisikan :

$(\mathbf{v} + W) + (\mathbf{v}' + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{v}' + W)$ dan

$k(\mathbf{v} + W) = (k\mathbf{v} + W)$ untuk $k \in K$

adalah *well defined*.

Bukti:

i. Akan diperlihatkan $(\mathbf{v} + W) + (\mathbf{v}' + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{v}' + W)$ adalah tunggal.

Ambil sebarang $\mathbf{v} + W = \mathbf{u} + W$, $\mathbf{v}' + W = \mathbf{u}' + W \in V'$.

Bila $\mathbf{v} + W = \mathbf{u} + W$ menurut teroema 4.8 maka $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in W$.

Bila $\mathbf{v}' + W = \mathbf{u}' + W$ menurut teorema 4.8 maka $\mathbf{v}' - \mathbf{u}' \in W$.

Sehingga : $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + (\mathbf{v}' - \mathbf{u}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}') - (\mathbf{u} + \mathbf{u}') \in W$

Jadi $(\mathbf{v} + \mathbf{v}') + W = (\mathbf{u} + \mathbf{u}') + W$

Akan diperlihatkan $k(\mathbf{v} + W) = (k\mathbf{v} + W)$ untuk $k \in K$ adalah tunggal

Ambil $\mathbf{v} + W = \mathbf{u} + W \in V'$. Menurut teorema 4.8 diperoleh $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in W$, sehingga $k(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{u} \in W$.

Jadi $k\mathbf{v} + \mathbf{W} = k\mathbf{u} + W$.

$\therefore$ ketunggalan dipenuhi

ii. Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan di atas adalah tertutup.

Bila diambil sebarang $\mathbf{u} + W$, $\mathbf{v} + W \in \mathbf{V}'$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ maka:

$(\mathbf{u} + W) + (\mathbf{v} + W) = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + W) \in V'$ karena $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.

Sekarang ambil sebarang $\mathbf{v} + W \in \mathbf{V}'$ dengan $\mathbf{v} \in V$dan $k \in K$ maka:

$k(\mathbf{v} + W) = k\mathbf{v} + W \in V'$ karena $k\mathbf{v} \in V$.

$\therefore$ Operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan di atas adalah tertutup.

Sehingga operasi pada V′ *well defined*. ■

Teorema 4.10

Jika W adalah ruang bagian dari ruang vektor V(K) maka L:V $\rightarrow$ V/W pemetaan.

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Akan ditunjukkan bahwa $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$.

Sekarang $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 + W = \mathbf{v}_2 + W \Leftrightarrow L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$.

$\therefore \forall(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V)(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$.

Sekarang ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$, ada $\mathbf{v} + W \in V/W$ sedemikian sehingga $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + W$.

$\therefore \forall(\mathbf{v} \in V) \exists(\mathbf{v} + W \in V/W)(L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + W)$

Kesimpulan L: V $\rightarrow$ V/W pemetaan.

Teorema 4.11

Jika W adalah ruang bagian dari ruang vektor V(K) maka V/W merupakan ruang vektor atas lapangan K.

Bukti :

1. Ambil sebarang $(\mathbf{v}_1 + W), (\mathbf{v}_2 + W) \in V/W$. Akan diperlihatkan bahwa $(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W) = (\mathbf{v}_2 + W) + (\mathbf{v}_1 + W)$.

   Sekarang :

   $(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + W)$ definisi 4.3

   $= (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 + W)$ karena $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \in V(K)$

   $= (\mathbf{v}_2 + W) + (\mathbf{v}_1 + W)$.

Jadi $\forall$ $(\mathbf{v}_1 + W), (\mathbf{v}_2 + W) \in V/W$ berlaku

$(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W) = (\mathbf{v}_2 + W) + (\mathbf{v}_1 + W)$.

2. Ambil sebarang $(\mathbf{v}_1 + W),(\mathbf{v}_2 + W),(\mathbf{v}_3 + W) \in V/W$.

   Akan diperlihatkan:

   $[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)]+(\mathbf{v}_3 + W) = (\mathbf{v}_1 + W) + [(\mathbf{v}_2 + W)+(\mathbf{v}_3 + W)]$

   Sekarang $[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)]+(\mathbf{v}_3 + W)$

   $= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + W)+(\mathbf{v}_3 + W)$ definisi 4.3

   $= ((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)+ \mathbf{v}_3 + W)$

   $= (\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + W)$ $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 ,\mathbf{v}_3 \in V(K)$

   $= (\mathbf{v}_1 + W)+((\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + W)$

   $= (\mathbf{v}_1 + W)+ [(\mathbf{v}_2 + W) +(\mathbf{v}_3 + W)]$.

   Jadi $\forall(\mathbf{v}_1 + W),(\mathbf{v}_2 + W),(\mathbf{v}_3 + W) \in V/W$ berlaku

   $[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)]+(\mathbf{v}_3 + W) = (\mathbf{v}_1 + W) + [(\mathbf{v}_2 + W)+(\mathbf{v}_3 + W)]$

3. Ada $(\mathbf{0} + W) \in V/W$ sedemikian sehingga untuk $\forall(\mathbf{v} + W) \in V/W$ berlaku $(\mathbf{v} + W)+ (\mathbf{0} + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{0} + W) =(\mathbf{v} + W)$ dengan $\mathbf{0},\mathbf{v} \in V$.

4. Untuk $\forall(\mathbf{v} + W) \in V/W$, ada $(-\mathbf{v} + W) \in V/W$ sedemikian sehingga $(\mathbf{v} + W)+ (-\mathbf{v} + W) = (\mathbf{v} +(-\mathbf{v}) + W) = (\mathbf{0} + W)$ dengan $v, -v \in V(K)$.

5. Ambil sebarang $(\mathbf{v}_1 + W),(\mathbf{v}_2 + W) \in V/W$ dan $k \in K$.

   Akan diperlihatkan :

   $k[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)] = k(\mathbf{v}_1 + W) + k(\mathbf{v}_2 + W)$.

   Sekarang : $k[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)] = k(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + W)$

   $= (k\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 + W)$

$= (k\mathbf{v}_1 + W) + (k\mathbf{v}_2 + W)$

$= k(\mathbf{v}_1 + W) + k(\mathbf{v}_2 + W).$

Jadi $\forall(\mathbf{v}_1 + W),(\mathbf{v}_2 + W) \in V/W$ berlaku

$k[(\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)] = k(\mathbf{v}_1 + W) + k(\mathbf{v}_2 + W).$

6. Ambil sebarang $(\mathbf{v} + W) \in V/W$ dan $k,r \in K$.

   Akan diperlihatkan $(k + r)(\mathbf{v} + W) = k(\mathbf{v} + W) + r(\mathbf{v} + W)$

   Sekarang : $(k + r)(\mathbf{v} + W) = ((k + r)\mathbf{v} + W)$ definisi 4.3

   $= (k\mathbf{v} + W) + (r\,\mathbf{v} + W)$

   $= k(\mathbf{v} + W) + r(\mathbf{v} + W)$

   Jadi $\forall(\mathbf{v} + W) \in V/W$ dan $k, r \in K$ berlaku :

   $(k + r)(\mathbf{v} + W) = k(\mathbf{v} + W) + r(\mathbf{v} + W).$

7. Ambil sebarang$(\mathbf{v} + W) \in V/W$ dan $k,r \in K$.

   Akan diperlihatkan: $k[r(\mathbf{v} + W)] = k\,r\,(\mathbf{v} + W)$

   Sekarang : $k[r(\mathbf{v} + W)] = k(r\,\mathbf{v} + W) = (kr\,\mathbf{v} + W) = kr\,(\mathbf{v} + W)$

   Jadi $\forall(\mathbf{v} + W) \in V/W$ dan $k,r \in K$ berlaku $k[r(\mathbf{v} + W)] = kr\,(\mathbf{v} + W)$

8. $1\,(\mathbf{v} + W) = (\mathbf{v} + W)$ untuk setiap $(\mathbf{v} + W) \in V/W$.

Jadi V/W adalah ruang vektor atas lapangan K. ∎

Teorema 4.12

Jika W adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K maka pemetaan $L: V \to V/W$ yang didefinisikan sebagai : $\mathbf{v} \to \mathbf{v} + W$ dengan $\mathbf{v} \in V$ adalah transformasi linear.

Bukti:

1. Ambil sebarang $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

   Akan diperlihatkan $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(v_2)$

   Sekarang $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + W = (\mathbf{v}_1 + W) + (\mathbf{v}_2 + W)$

   $= L(\mathbf{v}_1) + L(v_2)$

2. Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$, $k \in K$.

   Akan diperlihaatkan $L(k\mathbf{v}) = k\,L(\mathbf{v})$

   Sekarang : $L(k\,\mathbf{v}) = k\mathbf{v} + W$, $\quad k\mathbf{v} \in V$

   $= k\,(\mathbf{v} + W) = k\,L(\mathbf{v})$.

   Jadi L adalah transformasi linear. ■

Teorema 4.13

Jika M dan N adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas lapangan K sedemikian sehingga $V = M \oplus N$, maka relasi dari N ke V/M yang didefinisikan $L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + M$ dengan $\mathbf{y} \in N$ adalah isomorfis.

Bukti:

(i)Akan dibuktikan L injektif

Bila diambil sebarang $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in N$ sedemikian hingga $L(\mathbf{y}_1)=L(y_2) \Leftrightarrow$ $\mathbf{y}_1 + M = \mathbf{y}_2 + M$ maka $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{y}_2 + M$ menurut teorema 4.7.(ii)

Jadi $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in M$

Di lain pihak $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \mathbf{x} \in N$ karena $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in N$. Dan diketahui M dan N saling asing sehingga $x = 0$ akibatnya $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$.

Jadi $\forall\,(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in N)\,(L(y_1) = L(y_2) \Rightarrow \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2)$. (1)

(ii) Akan dibuktikan L surjektif

Ambil sebarang $\mathbf{z} + M \in V/M$, $\mathbf{z} \in V$.

Dari $V = N \oplus M$ maka bisa kita tulis $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in N$, $\mathbf{x} \in M$..

Ini menunjukkan bahwa : $\mathbf{z} + M = \mathbf{y} + \mathbf{x} + M$ karena $(\mathbf{x} + M = M)$

$$\mathbf{z} + M = \mathbf{y} + M$$

hal ini menunjukkan bahwa setiap koset di M dapat diperoleh dengan menggunakan elemen di N.

Jadi $(\forall\ \mathbf{z} + M \in V/M)\ (\exists\ \mathbf{y} \in N)\ (L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + M = \mathbf{z} + M)$ (2)

(iii)Akan dibuktikan L adalah transformasi linear.

Ambil sebarang $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2 \in N$, $k_1, k_2 \in K$

Akan dibuktikan $L(k_1\, \mathbf{y}_1 + k_2\, \mathbf{y}_2) = k_1\, L(\mathbf{y}_1) + k_2\, L(\mathbf{y}_2)$.

Sekarang : $L(k_1\, \mathbf{y}_1 + k_2\, \mathbf{y}_2) = (k_1\, \mathbf{y}_1 + k_2\, \mathbf{y}_2) + M$

$$= (k_1\, \mathbf{y}_1 + M) + (k_2\, \mathbf{y}_2 + M)$$

$$= k_1(\mathbf{y}_1 + M) + k_2(\mathbf{y}_2 + M)$$

$$= k_1\, L(\mathbf{y}_1) + k_2\, L(\mathbf{y}_2).$$

Jadi L adalah transformasi linear. (3)

Dari (1) , (2) dan (3) diperoleh N isomorfis terhadap V/M. ■

Teorema 4.14

Bila M adalah ruang bagian berdimensi m dari ruang vektor V yang berdimesi n, maka V/M berdimensi n – m.

Bukti:

Diketahui ruang vektor V berdimensi n dan M adalah ruang bagian berdimensi m dari ruang vektor V.

Dengan menggunakan teorema 4.4, kita dapat menemukan N sedemikian sehingga $M \oplus N = V$. Sehingga kita peroleh dimensi dari N yakni $n - m$. Menurut teorema 4.13 N isomorfis dengan V/M. Maka dapat disimpulkan bahwa V/M berdimensi $n - m$ (teorema 2.14) ■

Teorema 4.15

Jika W adalah ruang bagian dari ruang vektor V, didefinisikan transformasi linear $L: V \rightarrow V/W$, maka V isomorfis dengan V/W.

Bukti:

Menurut teorema 4.12 didapat L adalah transformasi linear.

L bijektif karena:

- Bila diambil sebarang $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ sedemikian sehingga $L(\mathbf{x})=L(\mathbf{y}) \Leftrightarrow$ $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

  Maka $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Ambil sebarang $\mathbf{x}+W \in V/W$, ini berarti ada $\mathbf{x} \in V$.

Contoh 4.5

Andaikan U adalah ruang bagian dari R^2.

Didefinisikan $L: R^2 \rightarrow R^2/U$ yakni $L(x,y)^T = (x,y)^T + U$. Buktikan bahwa R^2 isomorfis R^2/U .

Penyelesaian:

Menurut teorema 4.12 diperoleh L: $R^2 \rightarrow R^2/U$ adalah transformasi linear dan menurut teorema 4.15 R^2 dengan R^2/U isomorfis.

Contoh 4.6

Diketahui transformasi linear L : $R^3 \rightarrow R^3$ yakni $L(x_1,x_2,x_3)^T = (x_2, x_1, x_3)^T$ untuk $\forall (x_1,x_2,x_3)^T \in R^3$ dengan $x_1,x_2,x_3 \in R$.

W, U adalah ruang bagian dari R^3 dan U berisi L(W) dengan $W=\{(0,0,x_3)^T \mid x_3 \in R\}$

Diketahui bahwa diagram di bawah ini komutatif ($\delta' L = L' \delta$) dengan $L'((a,b,c)^T + W) = (b,a,c)^T + U$, a ,b ,c $\in$ R

$$\begin{tikzcd} R^3 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\delta"'] & R^3 \arrow[d, "\delta'"] \\ R^3/W \arrow[r, "L'"] & R^3/U \end{tikzcd}$$

Gambar 4.2

Tunjukkan bahwa R^3/W isomorfis R^3/U!

Penyelesaian:

Dapat ditunjukkan $\delta' L = L' \delta$ yaitu:

Ambil sebarang $(x,y,z)^T \in R^3$, sehingga diperoleh

$\delta' L(x,y,z)^T = \delta'(y,x,z)^T = (y,x,z)^T + U$

sedangkan

$L'\,\delta(x,y,z)^T = L'((x,y,z)^T + W) = =(y,x,z)^T + U$

Sehingga $\delta\,'\,L = L'\,\delta$.

Menurut teorema 4.15 diperoleh R^3/W isomorfis R^3 dan R^3 isomorfis R^3/U sehingga R^3/W isomorfis R^3/U.

Dari contoh 4.6, L adalah transformasi linear yang memetakan suatu ruang vektor ke suatu ruang vektor yang sama dan diketahui diagram gambar 4.2 komutatif sehingga dapat ditemukan suatu isomorfisma antara ruang pembagi dari dua ruang vektor tersebut. Tetapi bila transformasi linear L memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor yang berbeda, maka ada dengan tunggal transformasi linear yang terjadi pada ruang pembagi dari dua ruang vektor tersebut sedemikian sehingga diagram seperti pada gambar 4.3 komutatif. Teorema di bawah ini akan memperlihatkannya.

Teorema 4.16

Andaikan $L: V \rightarrow V_1$ merupakan transformasi linear dan W ruang bagian dari V dan W_1 ruang bagian dari V_1 yang berisi L(W). Maka ada dengan tunggal transformasi linear $L' : V/W \rightarrow V_1/W_1$ sedemikian sehingga :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi"'] & V_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ V/W \arrow[r, "L'"] & V_1/W_1 \end{tikzcd}$$

Gambar 4.3

diagram di atas komutatif atau $L'\pi = \pi_1 L$.

Bukti:

Diketahui $L: V \rightarrow V_1$ adalah transformasi linear dan W ruang bagian dari V, W_1 ruang bagian dari V_1 yang berisi L(W).

Akan dibuktikan ada dengan tunggal transformasi linear $L': V/W \rightarrow V_1/W_1$, berarti ada 3 hal yang harus dibuktikan:

1. Akan dibuktikan L' pemetaan.

   Ambil sebarang $\pi(\mathbf{u}), \pi(\mathbf{v}) \in V/W$ sedemikian sehingga $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}'$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Akan dibuktikan $L'\pi(\mathbf{u}) = L'\pi(\mathbf{v})$.

   Perhatikan bahwa $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{u} + W = \mathbf{v} + W$, menurut teorema 4.8 diperoleh $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in W$ sehingga $L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) \in L(W) \subset W_1$.

   Karena $L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) \in L(W) \subset W_1$ mengakibatkan $L(\mathbf{u}) + W_1 = L(\mathbf{v}) + W_1 \in V_1/W_1$. Ini berarti $\pi_1 L(\mathbf{u}) = \pi_1 L(\mathbf{v})$.

   Karena $\pi_1 L(\mathbf{u}) = L'\pi(\mathbf{u})$ dan $\pi_1 L(\mathbf{v}) = L'\pi(\mathbf{v})$ sehingga $L'\pi(\mathbf{u}) = L'\pi(\mathbf{v})$.

Sekarang ambil sebarang $\pi(\alpha) \in V/W$. Akan dibuktikan ada $L'\,\pi(\alpha) \in V_1/W_1$.

Bila diambil sebarang $L(\mathbf{u}) \in V_1$ maka menurut teorema 4.10 ada $\mathbf{u}' \in V_1/W_1$ sedemikian sehingga $\pi_1 L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$. Padahal diketahui $\pi_1 L(\mathbf{u}) = L'\,\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$.

Jadi $\forall\ (\pi(\mathbf{u}) \in V/W)\ \exists(\ L'\,\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}')$.

$\therefore$ L′ adalah pemetaan .

2. Akan dibuktikan L′ adalah transformasi linear .

   Didefinisikan $L' : V/W \rightarrow V_1/W_1$ sedemikian sehingga $L'\pi(\mathbf{u}) = \pi_1 L(\mathbf{u})$ untuk setiap $\mathbf{u} \in V$.

   (i) Ambil sebarang $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V/W$ sedemikian sehingga $\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$ dan $\pi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_2$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

   Akan dibuktikan $L'(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L'(\mathbf{u}_1) + L'(\mathbf{u}_2)$.

   Sekarang :

   $L'(\mathbf{u}_1) + L'(\mathbf{u}_2) = L'\pi(\mathbf{u}) + L'\pi(\mathbf{v}) = \pi_1 L(\mathbf{u}) + \pi_1 L(\mathbf{v})$

   $= \pi_1(L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}))$ karena π_1 transformasi linear lihat teorema 4.12

   $= \pi_1(L(\mathbf{u}+\mathbf{v}))$ karena L transformasi linear

   $= \pi_1 L(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

   $= L'\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

   $= L'(\pi(\mathbf{u}) + \pi(\mathbf{v}))$ karena π transformasi linear lihat teorema 4.12

$= L'(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$

$\therefore \forall\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V/W)$ berlaku $L'(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L'(\mathbf{u}_1) + L'(\mathbf{u}_2)$.

(ii) Ambil sebarang $\mathbf{u}' \in V/W$ sedemikian sehingga $\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$.

Andaikan $k \in K$, maka akan dibuktikan bahwa $L'(k\,\mathbf{u}') = kL'(\mathbf{u}')$.

Sekarang: $k\,L'(\mathbf{u}') = k\,L'\pi(\mathbf{u}) = k\,\pi_1 L(\mathbf{u}) = \pi_1\,k\,L(\mathbf{u}) = \pi_1 L(k\,\mathbf{u})$

$= L'\pi(k\,\mathbf{u}) = L'k\,(\pi(\mathbf{u}')) = kL'(\mathbf{u}')$

$\therefore \forall(\mathbf{u}' \in V/W)\ (k \in K)$ berlaku $L'(k\,\mathbf{u}') = k\,L'(\mathbf{u}')$.

Jadi L' transformasi linear.

3. Akan dibuktikan L' tunggal.

Andaikan ada $L'' : V/W \to V_1/W_1$. Akan dibuktikan $L' = L''$.

Misalkan $L'' : V/W \to V_1/W_1$ merupakan transformasi linear dan $L''(\pi) = \pi_1 L$. Ambil sebarang $\mathbf{u}' \in V/W$, pilih $\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga $\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$. Diperoleh: $L''(\mathbf{u}') = L''\,\pi(\mathbf{u}) = \pi_1 L(\mathbf{u}) = L'\pi(\mathbf{u}) = L'(\mathbf{u}')$

Sehingga $L' = L''$. Jadi L' tunggal.

Kesimpulan : ada dengan tunggal transformasi linear $L' : V/W \to V_1/W_1$.

■

Contoh 4.7

Diketahui transformasi linear $L : R^2 \to R^1$ yakni $L(x,y)^T = x + y,\ x,y \in R$

W adalah ruang bagian dari R^2 dengan $W = \{(0,y)^T |\ x,y \in R\}$ dan U adalah ruang bagian dari R^1 yang berisi $L(W)$.

$$
\begin{tikzcd}
R^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi"'] & R^1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
R^2/W \arrow[r, "L'"] & R^1/U
\end{tikzcd}
$$

Gambar 4.4

Tunjukkan bahwa ada tunggal transformasi linear L': $R^2/W \to R^1/U$ yakni $L'((a,b)^T+W) = a + U$ sedemikian sehingga diagram di atas komutatif atau $L'\pi = \pi_1 L$.

Penyelesaian:

Sekarang akan diperlihatkan bahwa dengan $L'((a,b)^T+W) = (a+U)$ diagram di atas komutatif atau $L'\pi = \pi_1 L$.

Ambil sebarang $(x,y)^T \in R^2$, diperoleh:

$L'\pi(x,y)^T = L'((x,y)^T+W) = x + U$

sedangkan

$\pi_1\ L(x,y)^T = \pi_1(x+y) = (x+y) + U = x + (y + U) = x + U$ karena $y + U \in U$.

Jadi $L'\pi = \pi_1 L$

Karena diagram di atas komutatif, menurut terorema 4.16 diperoleh ada tunggal transformasi linear L'.

BAB V

KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dibuktikan bahwa himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor U atas lapangan K ke ruang vektor V atas lapangan K yang dilambangkan dengan L(U,V) membentuk ruang vektor atas lapangan yang sama yakni K.

Pada konsep dualitas ruang vektor, annihilator dari suatu ruang bagian, jumlah langsung (*direct sum*) dan ruang pembagi dapat ditemukan bentuk transformasi linear yang isomorfisma.

Himpunan semua transformasi linear dari U(K) ke K disebut dengan **dual** dari U dan dilambangkan U^*. Transformasi U(K) ke K disebut juga dengan fungsional linear atau bentuk linear pada U. Bila U(K) berdimensi n maka U^* juga berdimensi n. Akibatnya U^{**} juga memiliki dimensi yang sama yakni n, sehingga U dengan U^{**} adalah isomorfis.

Fungsional linear $f \in U^*$ disebut **annihilator** bila $f(\mathbf{u}) = 0$, $\mathbf{u} \in W$ dengan W adalah ruang bagian dari ruang vektor U. Himpunan semua annihilator dilambangkan dengan W^0 adalah ruang bagian dari U^*. Jika U(K) berdimensi n dan W ruang bagian dari U(K) yang berdimensi m maka W^0 berdimensi n – m.

Andaikan U,W adalah ruang bagian dari V(K) sedemikian sehingga $U \cap W = \{0\}$, maka U + W disebut **jumlah langsung** (d*irect sum*) dan dilambangkan dengan $U \oplus W$. $V = U \oplus W$ bila dan hanya bila untuk setiap $v \in V$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ dengan $\mathbf{u} \in U$ dan $\mathbf{w} \in W$.

Pemetaan $L:V \rightarrow U \oplus W$ merupakan transformasi linear. Jumlahan dari U dan W serta irisannya merupakan ruang bagian dari V, sehingga $L: V \rightarrow U \oplus W$ merupakan transformasi linear dari V ke V. Jika $V = U \oplus W$ maka dim V = dim U + dim W, akibatnya transformasi linear $L: V \rightarrow U \oplus W$ adalah isomorfisma.

Ruang pembagi V/W dengan W merupakan ruang bagian dari V(K) adalah himpunan yang berbentuk $(\mathbf{v}+W) \subseteq V$ yakni $\mathbf{v}+W = \{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w} \in W\}$. Pemetaan dari $V \rightarrow V/W$ merupakan transformasi linear yang isomorfima. Bila M adalah ruang bagian yang berdimensi m dari ruang vektor V(K) yang berdimensi n maka V/W berdimensi n – m.

Jika W adalah ruang bagian dari ruang vektor V dan didefinisikan $L:V \rightarrow V/W$, maka V isomorfis dengan V/W. Sedangkan bila M dan N adalah ruang bagian dari V(K) sedemikian sehingga $V= M \oplus N$ maka relasi dari N ke V/M yang didefinisikan $L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + M$ dengan $\mathbf{y} \in N$ memberikan isomorfisme N dengan V/M .

Bila $L: V \rightarrow V_1$ merupakan transformasi linear dan W ruang bagian dari ruang vektor V dan W_1 ruang bagian dari ruang vektor V_1 yang berisi L(W). Maka ada dengan tunggal transformasi linear L' :$V/W \rightarrow V_1/W_1$ sedemikian sehingga :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi"'] & V_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ V/W \arrow[r, "L'"] & V_1/W_1 \end{tikzcd}$$

Gambar 4.4

diagram di atas komutatif atau $L' \pi = \pi_1 L$ .Tetapi bila transformasi linear L memetakan antara dua ruang vektor yang sama, misal $L: V \to V$ sedemikian sehingga diagram di atas komutatif maka ruang pembagi dari dua ruang vektor tersebut yakni V/W dengan V/W_1 isomorfis.

DAFTAR PUSTAKA

1. Narayan, Shanti. (1979). *Modern Abstract Algebra*, S. Chand & company LTD .
2. Halmos, Paul R. *Finite – Dimensional Vector Spaces.*
3. Jacob, Bill. (1990). *Linear Algebra*, W.H. Freeman And Company, New York.
4. Gardiner, C. F. (1985). *Modern Algebra: A Natural Approach With Applications*, John Wiley & Sons,1985.
5. Leon, Steven J. *Linear Algebra With Applications.*, Prentice Hall International, Inc.
6. Lang,Serge. (1970).*Linear Algebra.* New York
7. D.Suryadi H.S dan S,Harini Macmudi. (1984). *Aljabar Linear*. Ghalia Indonesia.
8. Anton, Howard. (1987) *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
9. Nomizu, Katsumi. (1996) *Fundamentals of Linear Algebra*. Mc Graw-hill Book Company.
10. Suhakso. (1978). *Aljabar Abstrak.* Yogyakarta : Fakultas Ilmu Pasti dan Alam UGM.
11. White, Paul A. (1996). *Linear Algebra*. California: Dickenson Publishing Company, Inc.
12. Lipschutz, Seymour. (1968). *Theory and problem of Linear Algebra*. New York : McGraw-Hill, Inc.