

KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF KAWASAKI FS03 ROBOT

TUGAS AKHIR

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat sarjana S-1

Program studi Teknik Mesin
Jurusan Teknik Mesin



Diajukan oleh :

Aris Anggoro
NIM : 995214081

Kepada

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2004

TUGAS AKHIR

KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF KAWASAKI FS03 ROBOT

Dipersiapkan dan disusun oleh :

Aris Anggoro
NIM : 995214081

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada tanggal 22 Desember 2004

Susunan Dewan Penguji :

Pembimbing I

Dosen Penguji

Budi Sugiharto S.T.,M.T.

I Gusti Ketut Puja S.T.,M.T

Pembimbing II

Dodi Purwadiyanto S.T.,M.T

Ir. Greg. Heliarko Sj.,
S.S.,B.S.T.,M.A.,M.Sc.

Wibowo Kusbandono S.T.,M.T.

Tugas Akhir ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik.

Yogyakarta, 22 Desember 2004

Fakultas Teknik

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Ir. Greg. Heliarko Sj. S.S.,B.S.T.,M.A.,M.Sc.

TUGAS AKHIR

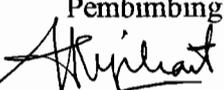
KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF KAWASAKI FS03 ROBOT

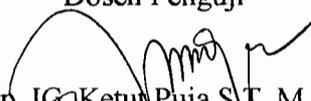
Dipersiapkan dan disusun oleh

Aris Anggoro
NIM : 995214081

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada tanggal 22 Desember 2004

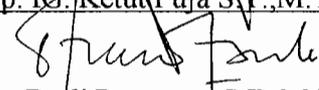
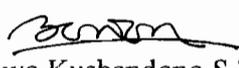
Susunan dewan penguji :

Pembimbing I

Bp. Budi Sugiharto S.T.,M.T.

Dosen Penguji

Bp. IG. Ketut Puja S.T.,M.T.

Pembimbing II

Bp. Greg. Heliarko Sj.,
S.S.,B.S.T.,M.A.,M.Sc.


Bp. Dodi Purwanto S.T.,M.T.

Bp. Wibowo Kusbandono S.T.,M.T.

Tugas Akhir ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik.

Yogyakarta, 22 Desember 2004

Fakultas Teknik

Universitas Sanata Dharma

Dekan,




Bp. Greg. Heliarko Sj. S.S.,B.S.T.,M.A.,M.Sc.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 22 Desember 2004

Penulis

Aris Anggoro

INTI SARI

Tugas akhir dengan judul: "Analisis Kinematik dan Dinamik pada Robot Kawasaki FS 03" ini, bertujuan untuk menerapkan metode dinamika benda jamak dalam penyelesaian masalah kinematik dan dinamik pada robot kawasaki FS03.

Permasalahan yang dianalisis dikhususkan pada gerak pengelasan diatas bidang xy dengan lintasan garis lurus dari titik terjauh sampai titik terdekat dari dasar robot dan posisi *end efektor* sebagai fungsi waktu ($x = f(t)$). Penyelesaian dilakukan dengan perangkat lunak MATLAB[®]. Analisis kinematik dan dinamik dilakukan dengan metode *augmented* menggunakan sistem perhitungan Ode (*ordinary deferential equation*). Kondisi awal yang dikaji yaitu :

1. $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 335^\circ$, $\theta_3 = 280^\circ$
2. $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 325^\circ$, $\theta_3 = 275^\circ$
3. $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 315^\circ$, $\theta_3 = 270^\circ$

Hasil penyelesaian kinematik berupa perubahan sudut masing-masing batang yang dilukiskan pada gambar simulasi gerak batang. Hasil analisis dinamik berupa grafik momen-waktu. Dari hasil analisis dinamik dapat dilihat bahwa pada kondisi 1 terjadi momen terbesar pada masing-masing sendi, sehingga dari kondisi 1 dapat ditentukan daya penggerak pada kondisi kerja yang diamati berdasarkan momen yang terjadi pada setiap sendi.

ABSTRACT

This paper of 'Kinematic and Dynamic Analysis of Kawasaki FS 03 Robot' is proposed to apply a multibody Dynamics Method in solving the kinematic and dynamic problems of Kawasaki FS 03 Robot.

The motions observed are the motions of welding process on the x-y plane with a straight-line path from a point closest to the base of the robot to the farthest stretch point of the arm as a function of time.

Augmented method with ordinary differential equation is applied in Kinematik and Dynamic analysis. Whereas MATLAB is applied to do the calculation.

The result of the kinematik analysis is presented in a simulation of the motion of the bar and the dynamic analysis in a tosion-time chart.

HALAMAN PERSEMBAHAN.

Puji dan syukur saya panjatkan kehadiran Allah Bapa penguasa alam semesta, sumber pemuas dahagaku dan kepada Yesus sang juru selamatku yang telah memberikan kesempatan padaku untuk belajar, serta ibunda Maria sang pengantara segala doa dan permohonanku, sehingga saya berhasil meraih gelar Sarjana Teknik. Keberhasilan ku ini saya persembahkan untuk:

- Keluargaku tercinta; Pake' dan Make' (Kusno dan Rubiati) yang sudah berjuang keras agar saya dapat belajar. Masku dan keluarga(Heru P., mbak Ambar dan Jovanca)Trimakasih atas suportnya. Adik-adikku: Arif, Indri
- Bangsa dan negaraku tercinta Indonesia.
- Almamaterku Universitas Sanata Dharma.

Saya menyadari betul bahwa selama proses belajar banyak sekali orang-orang yang mendukung saya, sehingga saya dapat berhasil dan berkembang menjadi seorang yang lebih baik . Untuk itu saya ingin mengucapkan banyak terima kasih atas segala kasih sayang, persahabatan, perhatian, kritik dan sarannya, kebersamaan kita dan kerjasama yang telah kita lakukan dalam suka dan duka serta semua yang telah diberikan kepadaku, kepada :

1. Sr. L. Yunitri M. SCJ. ST. Terima kasih suster, atas semua kasih sayang, perhatian, persahabatan, kebersamaan, bimbingan dan semuanya yang telah Suster berikan kepada saya, sehingga saya bisa menjadi pribadi yang lebih dewasa.
2. Sahabat-sahabatku dalam Komunitas paingan. Agung, Anas, Citra martanti, Berta, Iwen, Endah, Aan, Jhon, Stevi P., Sukalista, Nina, Siska, Desi bebek, Asti, Anas Kuningan.
3. Teman-teman baruku yang baru kukenal di akhir masa studiku: Sudarto Ningrum, Indah, Leo noya, Rosa, ciciel, Nita, Tiwi., Sr. Mariati, Rm. Andalas.
4. Teman-teman Kost Wisma santi; Bowi, Wawan, si ninuk, si Jo, Yanto, Tomo, Andre, Kelik, Tito, Ricard,Heru, Supri.
5. Semua teman-teman yang kenal sama aku dan pernah berinteraksi, trimakasih semuanya, maaf kalo aku kadang bikin kalian marah.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur saya panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Kuasa karena atas berkat dan rahmat-Nya dan atas karunia kasih cinta-Nya saya dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir ini dengan baik. Namun saya menyadari bahwa tanpa adanya bantuan dari orang lain dan semua pihak, saya tidak akan dapat menyelesaikan pembuatan tugas akhir ini. Oleh karena itu pada kesempatan yang baik ini, dengan segala kerendahan hati saya mengucapkan banyak terima kasih kepada semua yang telah membantu dalam proses pengerjaan tugas akhir ini baik dalam berupa kritikan, masukan saran dan nasehat serta bantuan material sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini terutama kepada :

1. Bapak dan ibu tercinta (Y. Kusno dan Ch. Rubiati) yang selalu mengiringi penulis dengan doa dan yang menjadi sumber semangat dan motivasi bagi penulis untuk terus melangkah.
2. Kakak dan adik-adik tercinta atas segala dukungan yang sudah diberikan
3. Bapak Budi Sugiharto ST. MT. selaku dosen pembimbing pertama dalam pengerjaan tugas akhir ini.
4. Rm. Greg. Heliarko Sj.,S.S.,B.S.T.,M.A., M.Sc. selaku dosen pembimbing kedua pada proses pengerjaan tugas akhir ini dan selaku Dekan Fak. Teknik.
5. Bapak Y. Agung Cahyanta ST. MT. Selaku ketua jurusan Teknik Mesin.
6. Semua dosen-dosen yang telah memberikan ilmu dan bimbingan kepada saya.

7. Teman-teman Kost Wisma Santi atas persahabatan dan kebersamaan kita.
8. Teman-teman Teknik Mesin angkatan 1998, 1999, 2000, atas kerjasama dan dukungan.
9. Semua karyawan, dan teman-teman serta semua saja yang telah membantu yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu. Trimakasih atas kerja samanya.

Saya menyadari betul bahwa dalam melaksanakan proses pengerjaan tugas akhir ini masih banyak kekurangan di sana-sini. Untuk itu saya terbuka untuk menerima saran dan kritik yang membangun guna mengembangkan tugas akhir saya ini, sehingga tugas akhir ini dapat dimanfaatkan untuk bahan pembelajaran.

Akhir kata, saya mengucapkan banyak terima kasih atas perhatiannya, dan semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi banyak orang.

Yogyakarta , Desember 2004

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	iii
INTISARI	iv
ABSTRACT	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Maksud dan Tujuan	3
1.3. Robot Industri	4
1.4. Robot Kawasaki FS 03	4
1.5. Pembatasan Masalah	6
1.6. Sistematika Penulisan	7
BAB II DASAR TEORI	8
2.1. Pemodelan Sistem	10
2.2. Koordinat Umum	13
2.3. Analisis Matrik Transformasi	17
2.4. Turunan Matrik Transformasi Terhadap Waktu	21
2.5. Kecepatan Sudut dan Kecepatan Sudut Bagian	22
2.6. Turunan Waktu Matrik Transformasi dan Percepatan Sudut	23
2.7. Kecepatan dan Percepatan Pusat Masa pada Batang Bersambungan	23
2.8. Gaya-gaya yang Bekerja pada Batang	27
2.8.1. Gaya gravitasi bumi	27
2.8.2. Gaya kontak	29
2.8.3. Gaya Luar	29
2.9. Inersia Massa dan Teori Sumbu Sejajar	29
2.10. Persamaan Gerak Kane	35
2.11. Persamaan dan Gaya Konstrain	36
2.12. Metode Augmented	37
2.13. Analisis Dinamik	40
BAB III ANALISIS KINEMATIK DAN DINAMIK GERAK KERJA	41
3.1. Pemodelan Robot Kawasaki FS 03	41
3.2. Analisis Persamaan Konstrain	44
3.3. Analisis Gaya-gaya yang Bekerja pada Sistem	47
3.4. Analisis Inersia Masa dan Massa Batang	47
3.5. Analisis Kinematik	57
3.6. Analisis Dinamik	65



BAB IV PENUTUP	69
4.1. Kesimpulan	69
4.2. Saran	71
DAFTAR PUSTAKA	72
LAMPIRAN	73

DAFTAR TABEL

	Halaman
TABEL 1.1 Spesifikasi Robot Kawasaki Tipe FS.....	5
TABEL 2.1 Array Batang Gambar 2.4.....	13
TABEL 3.1 Hasil Kinematik Kondisi Awal 1	62
TABEL 3.2 Hasil Kinematik Kondisi Awal 2	63
TABEL 3.3 Hasil Kinematik Kondisi Awal 3	64
TABEL 3.4 Sifat-sifat Bahan Logam.....	Lamp

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
GAMBAR 1.1 Sistem Konfigurasi Benda Jamak Terbuka.....	2
GAMBAR 1.2 Sistem Konfigurasi Benda Jamak Tertutup.....	3
GAMBAR 1.3 Robot Kawasaki Tipe Fs03.....	4
GAMBAR 1.4 Lingkup Kerja Robot.....	5
GAMBAR 2.1 Sistem Koordinat Kartesian.....	6
GAMBAR 2.2 Sistem Koordinat Silinder.....	9
GAMBAR 2.3 Sistem Koordinat Bola.....	9
GAMBAR 2.4 Contoh Tree Like Sistem.....	13
GAMBAR 2.5 Analisis Dua Batang Kaku.....	14
GAMBAR 2.6 Transformasi Pada Sumbu X.....	18
GAMBAR 2.7 Transformasi Pada Sumbu Y.....	19
GAMBAR 2.8 Transformasi Pada Sumbu Z.....	20
GAMBAR 2.9 Sistem Sambungan Batang Tanpa Translasi.....	24
GAMBAR 2.10 Analisis Inersia Batang.....	30
GAMBAR 2.11 Analisis Momen Kedua.....	32
GAMBAR 3.1a Pemodelan Robot Kawasaki Fs03.....	41
GAMBAR 3.1b Pemodelan Robot Kawasaki Fs03.....	42
GAMBAR 3.2 Pemodelan Pengelasan $x = y$ pada 3D.....	42
GAMBAR 3.3 Pemodelan Pada sumbu xy	44
GAMBAR 3.4 Sketsa Batang 1.....	48
GAMBAR 3.5 Sketsa Batang 2.....	50
GAMBAR 3.6 Sketsa Batang 3.....	54
GAMBAR 3.7 Simulasi Pada Kondisi Awal $\theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = 335^\circ, \theta_3 = 280^\circ$	62
GAMBAR 3.8 Simulasi Pada Kondisi Awal $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 325^\circ, \theta_3 = 275^\circ$	63
GAMBAR 3.9 Simulasi Pada Kondisi Awal $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 315^\circ, \theta_3 = 270^\circ$	64
GAMBAR 3.10 Grafik Pada Sambungan 1.....	65
GAMBAR 3.11 Grafik Pada Sambungan 2.....	66
GAMBAR 3.12 Grafik Pada Sambungan 3.....	66

BAB I

PENDAHULUAN

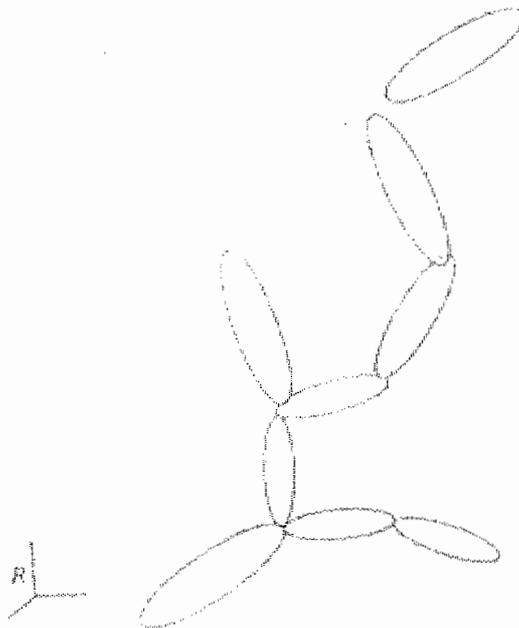
1.1. Latar Belakang.

Salah satu bagian penting pada teknik perancangan mesin modern adalah analisis dan prediksi atas kelakuan dinamik dan penampilan luar dari suatu sistem, yang secara umum sangat kompleks dan sulit dianalisa. Dalam banyak kasus, tampilan suatu sistem terdiri dari sejumlah komponen yang juga disebut batang atau segmen/bagian yang bekerja bersama-sama sebagai satu kesatuan. Untuk mempelajari dan menganalisis sistem seperti itu, komponen yang beraneka ragam harus dikenali dan ciri-cirinya harus dicari dan diketahui. Apabila karakteristik komponen-komponen sudah diketahui maka dapat dibentuk suatu persamaan matematik yang dapat mewakili kondisi ideal pada sistem yang sebenarnya. Untuk sistem dengan struktur yang sama, dapat dibentuk beberapa model matematika, akan tetapi yang paling banyak diminati adalah model matematika yang paling mudah dan mengandung karakteristik komponen-komponen yang ada sesuai dengan keadaan yang sebenarnya.

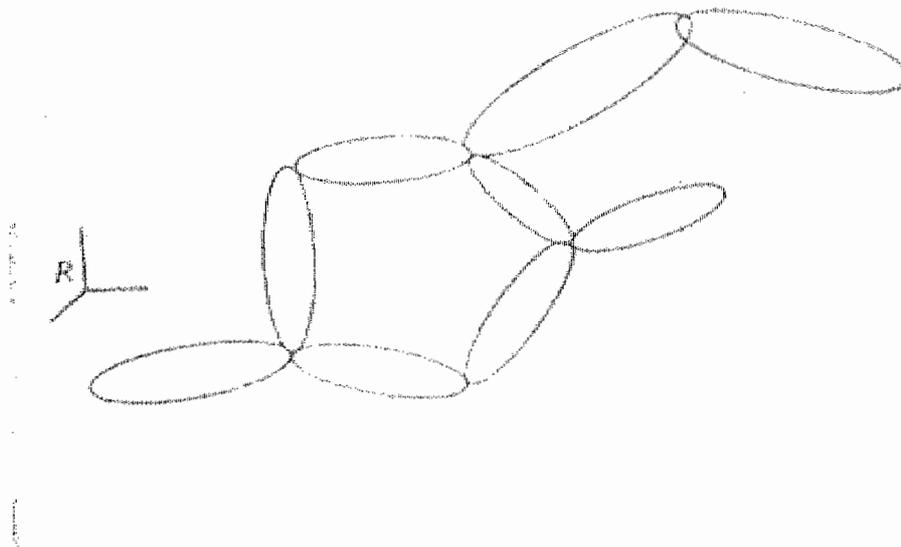
Dinamika adalah ilmu yang mempelajari hubungan antara gerak suatu sistem dengan gaya-gaya yang menyebabkan gerakan tersebut, sedangkan “Benda Jamak” adalah suatu sistem mekanis yang terdiri dari beberapa batang/bagian yang saling dihubungkan dengan sambungan menjadi satu kesatuan yang dapat digambarkan sebagai konfigurasi dari bentuk percabangan pohon. Jadi dinamika benda jamak adalah adalah ilmu yang mempelajari hubungan antara

gerak suatu sistem dengan gaya-gaya yang menyebabkan gerakan pada sistem mekanis yang terdiri dari beberapa batang/bagian yang saling dihubungkan dengan sambungan menjadi satu kesatuan yang dapat digambarkan sebagai konfigurasi dari bentuk percabangan pohon.

Apa bila konfigurasi dari bagian terminal sistem tersebut bebas, maka sistem tersebut disebut sistem terbuka (*open loop*) seperti ditunjukkan pada Gambar 1.1. Dan dikatakan sebagai konfigurasi tertutup (*close loop*), jika bagian dari sistem berbentuk kurva tertutup, seperti ditunjukkan Gambar 1.2



Gambar 1.1 Sistem konfigurasi terbuka benda jamak.



Gambar 1.2 Sistem konfigurasi tertutup benda jamak.

Beberapa sambungan dalam sebuah struktur, secara kinematik, dapat digerakkan dari 0 sampai dengan 6 derajat kebebasan, tergantung pada tipe sambungan yang menghubungkan ke bagian terdekat.

1.2. Maksud dan Tujuan.

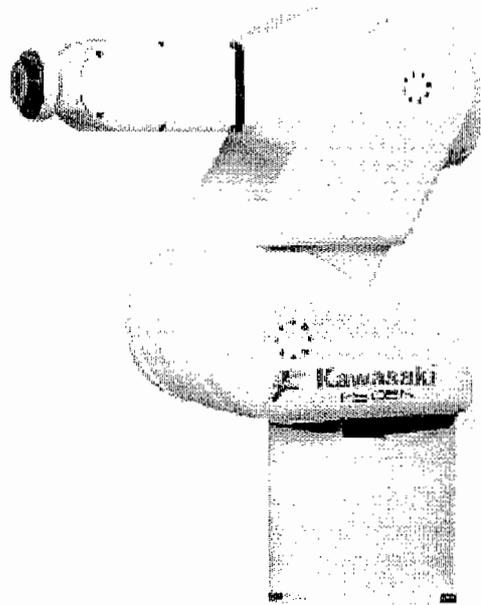
Maksud dan tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Untuk mencoba menerapkan sistem dinamika benda jamak pada suatu sistem di bidang robotika.
2. Untuk mengetahui sejauh mana sistem dinamika benda jamak ini dapat membantu penyelesaian masalah kinematik dan dinamik yang terjadi pada bidang robotika beserta kendala.
3. Untuk mengetahui besar torsi yang dialami oleh sebuah sambungan robot pada permasalahan yang dianalisis sehingga membantu dalam pemilihan sumber penggerak robot yang efektif.

1.3. Robot Industri.

Dalam tugas akhir mata kuliah Dinamika Benda Jamak ini, sistem dinamika benda jamak akan digunakan untuk menganalisis kinematika dan dinamika pada sistem robotika yaitu pada robot industri produksi dari Kawasaki inc. Robot industri adalah peralatan otomatis dengan menggunakan kontrol servo yang dapat diprogram sesuai dengan tujuan. Robot yang akan dianalisis adalah Robot tipe FS03 yang menggunakan *Geometri Revolute* dimana lengan robot menyerupai gerakan lengan manusia, dan tiap bagian dihubungkan dengan sendi-sendi sehingga sering disebut *anthropomorphic* robot. Geometri ini, mempunyai kemampuan manufer yang paling besar.

1.4. Robot Kawasaki FS 03.



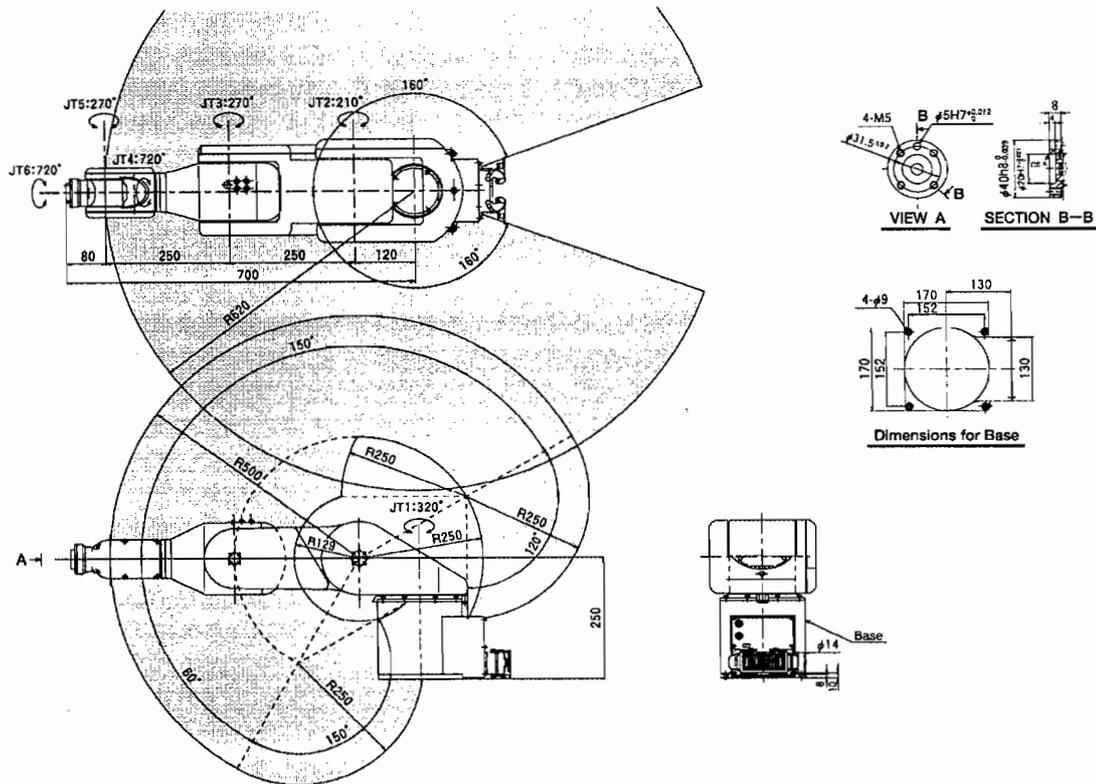
Gambar 1.3 Gambar Robot Kawasaki Tipe FS.

Robot kawasaki tipe ini adalah robot seri terkecil dari semua robot produksi Kawasaki Inc. yang mempunyai 6 derajat kebebasan dan 6 sumbu lengan juga mempunyai kecepatan tinggi dengan beban angkat maksimal sebesar 3 kg. Robot ini dirancang untuk pekerjaan-pekerjaan di tempat yang sulit dan tempat yang tidak dapat dijangkau oleh manusia, dimana semua rangkaian kabel tersembunyi di dalam struktur robot. Robot ini sangat fleksibel sehingga dapat di tempatkan di mana saja dalam jangkauan operasi manusia.

Robot ini banyak digunakan untuk pengelasan, pengangkat, peletakan barang pada tempat tertentu (*paletizing*), *assembly*, pemeriksaan bagian-bagian kecil, dan untuk pendidikan serta penelitian, yang tergantung pada *end efektor* yang digunakan. Bentuk robot dapat dilihat pada Gambar 1.3 dengan spesifikasi ditunjukkan pada Tabel 1.1

Tabel 1.1 Tabel Spesifikasi Robot Kawasaki Tipe FS.

		FS02N	FS03N
Arm Type		Articulated Type	
Degrees of Freedom		6 Axes	
Axis Work Envelope	Axis	Max. Stroke	Max. Speed
	JT1: Arm rotation	±160°	250°/s
	JT2: Arm out-in	+150°~-60°	180°/s
	JT3: Arm up-down	+120°~-150°	180°/s
	JT4: Wrist swivel	±360°	600°/s
	JT5: Wrist bend	±135°	300°/s
	JT6: Wrist twist	±360°	600°/s
Max. Reach		620mm (Distance from JT1 to JT5)	
Max. Payload		2kg	3kg
Moment	JT4: Wrist swivel	4.0N·m	5.8N·m
	JT5: Wrist bend	4.0N·m	5.8N·m
	JT6: Wrist twist	2.0N·m	2.9N·m
Moment of Inertia	JT4: Wrist swivel	0.078kg·m ²	0.12kg·m ²
	JT5: Wrist bend	0.078kg·m ²	0.12kg·m ²
	JT6: Wrist twist	0.020kg·m ²	0.03kg·m ²
Position Repeatability		±0.03mm(At Wrist Flange Surface)	±0.05mm(At Wrist Flange Surface)
Max. Linear Speed		3,800mm/s(At Wrist Flange Surface)	2,400mm/s(At Wrist Flange Surface)
Mass		20kg (Excluding Option)	
Body Color		Munsell 10GY9/1 equivalent	
Installation		Floor, Ceiling or Shelf mount	
Environmental Condition	Ambient Temperature	0~45°C	
	Relative Humidity	35~85% (No Dew, Nor Frost Allowed)	
	Vibration	Less than 0.5G	
Option	Others	Inflammable or corrosive liquid or gas electric noise interference	
		Wall Mounting(FS02 only)	2 Double Solenoid Valves
		Restriction of Motion Range (Mechanical):JT1(45°Pitch)	1 Single Solenoid Valve
		1 Double Solenoid Valve	2 Single Solenoid Valves
			External Sensor Harness (4 Circuits)



Gambar 1.4 Lingkup kerja robot.

1.5. Pembatasan Masalah.

Melihat begitu kompleksnya permasalahan yang ada pada robotika yang meliputi sistem mekanik, sistem kinematik dinamik, sensor, aktuator, end efektor, kontrol, dan masih banyak lagi, maka dalam tugas akhir ini dibatasi pada analisis kinematik dan dinamik pada gerak pengelasan pada bidang xy dengan lintasan garis lurus dari titik terjauh sampai titik terdekat dari dasar robot dan posisi *end efektor* sebagai fungsi waktu ($x = f(t)$).

1.6. Sistematika Penulisan.

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari empat bab yaitu :

Bab I. Pendahuluan.

Pendahuluan berisi latar belakang, tujuan, pembatasan masalah, sistematika penulisan. selain itu juga berisi teori singkat tentang robot sebagai objek analisis dalam pengerjaan tugas akhir ini.

Bab II. Dasar Teori.

Dasar teori berisi tentang teori-teori yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan.

Bab III. Penyelesaian Permasalahan dan Analisis.

Penyelesaian dan analisis berisi penyelesaian-penyelesaian permasalahan yang ada sehingga mempermudah analisis persoalan yang ada.

Bab IV. Penutup.

Bab penutup berisi kesimpulan dari hasil analisis dan saran-saran.

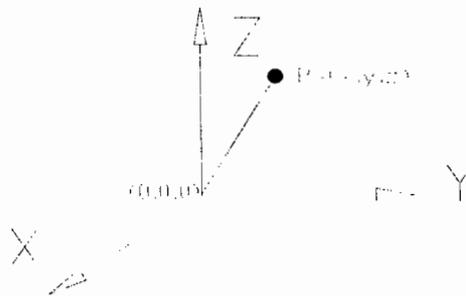
Pada proses penyelesaian persoalan, digunakan software komputer MATLAB^R, yang merupakan salah satu alat komputasi yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan, dengan menggunakan program perhitungan Ode15s beserta simulasinya.

BAB II

DASAR TEORI

Ada tiga macam sistem koordinat yang sering kita gunakan yaitu koordinat Kartesian, koordinat *cylindrical* (silindris), koordinat *spherical* (bola).

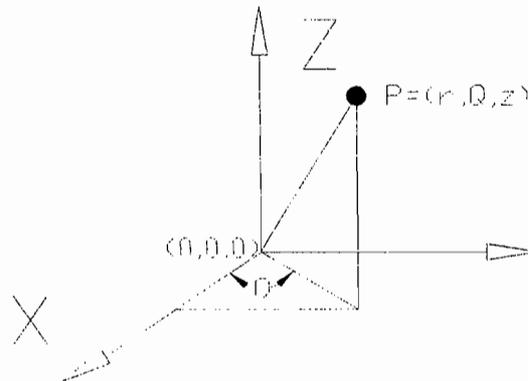
Koordinat kartesian adalah koordinat yang menggunakan tiga sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain, dengan titik referensi $(0,0,0)$ pada perpotongan ketiga sumbu.



Gambar 2.1 Sistem Koordinat Kartesian.

Titik $P(x,y,z)$ adalah vektor posisi dengan jarak x sepanjang sumbu X , jarak y sepanjang sumbu Y , dan jarak z sepanjang sumbu Z dari titik $O(0,0,0)$, seperti ditunjukkan pada Gambar 2.1.

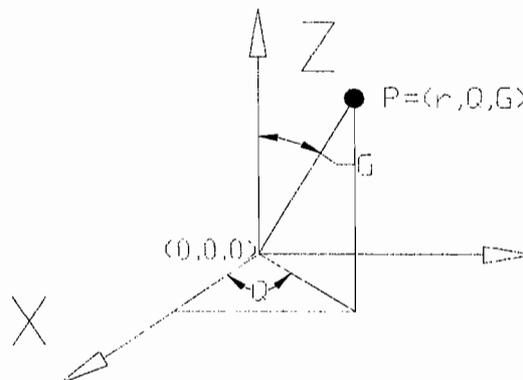
Koordinat silinder adalah sebuah sistem koordinat yang menggambarkan sebuah vektor posisi suatu titik P , yang dinyatakan dengan variabel (r,θ,z) , dimana r adalah jarak proyeksi titik P pada bidang XY ke titik referensi, yang besarnya adalah $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan θ adalah besar sudut antara sumbu X dan r . Sedangkan z adalah jarak titik P dari titik referensi sepanjang sumbu Z , seperti ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Sistem Koordinat Silinder

Koordinat bola adalah koordinat yang menggambarkan posisi sebuah titik P menggunakan vector posisi P yang dinyatakan dengan variable (r,θ,ϕ) , dimana r adalah jarak titik P ketitik referensi. Sedangkan θ adalah besarnya sudut antara sumbu X dan proyeksi r pada bidang XY. Dan ϕ adalah besarnya sudut antara sumbu Z dan r seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.3. Atau secara matematis dapat ditulis :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \phi = \text{cos}^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$



Gambar 2.3 Sistem Koordinat Bola.

Dalam penulisan ini dipakai sistem koordinat kartesian.

Selain sistem koordinat dalam dinamika benda jamak harus juga diperhatikan banyaknya derajat kebebasan (DOF) yang dimiliki setiap batang.

2.1. Pemodelan Sistem.

Dengan berkembangnya komputer dan program-program perangkat lunaknya sebagai salah satu alat penyelesaian persamaan matematika, maka prosedur analisis adalah syarat awal yang harus dilakukan dengan menjabarkannya secara detail dalam bentuk matematis. Struktur dasar yang kompleks dapat disederhanakan analisis matematikanya dengan cara membuat sebuah model dari struktur dasar yang ada, yang mana kompleksitas dari pemodelan tergantung dari kompleksitas struktur. Apapun hasilnya, akurasi model tersebut sangat penting guna tercapainya tujuan rancangan.

Pada perancangan mekanisme robot yang terdiri dari rangkaian berbagai macam lengan/batang yang dihubungkan dengan sambungan (*manipulator*) dan digerakkan oleh penggerak lengan/batang (*aktuator*) membentuk sebuah sistem yang saling berhubungan satu sama lain, harus diketahui performa dari tiap-tiap batang dan sambungan. Guna mengetahui performa dari robot tersebut maka digambarkan sebuah rangkaian sederhana yang mewakili sistem yang biasanya membentuk suatu sistem benda jamak dengan sistem terbuka dan bersamaan dengan itu digambarkan pula sumbu-sumbu referensi relatif pada setiap sambungan batang. Dengan demikian analisis dan simulasi dapat dengan mudah dicari dari persamaan-persamaan umum. Dengan menggunakan pemodelan sistem

banyak sistem robot yang rumit dapat dirancang dan dianalisis dengan lebih mudah.

Di dalam sistem dinamika benda jamak ada 3 tipe sambungan yang menghubungkan batang satu dengan yang lainnya. Sambungan tersebut akan membatasi gerakan setiap batang yang disambung terhadap batang sambungannya. Ketiga jenis sambungan itu adalah sambungan revolute, Ball-and socket (*spherical*) dan *free joint* (sambungan bebas).

Sambungan bebas (*free joint*) adalah sambungan yang memungkinkan setiap batang bergerak bebas dalam pergerakan tiga rotasi dan tiga translasi atau dengan kata lain mempunyai 6 derajat kebebasan. Sambungan ball-and socket (*spherical*) adalah sambungan yang memungkinkan batang untuk bergerak translasi dan rotasi pada tiap sumbu poros. Sambungan revolut adalah sambungan dengan menggunakan sendi-sendi seperti pada lengan manusia atau disebut *anthrophomorphic/articulated* yang banyak digunakan pada lengan robot.

Pada sistem pemodelan, penomoran batang yang diuraikan secara umum tanpa pengulangan yang digambarkan seperti sistem rantai terbuka atau sering dikenal dengan sistem percabangan pohon (*treelike system*), pertama-tama adalah memilih batang yang diam dan diberi nomor 0 atau disebut titik referensi tetap. Selanjutnya penomoran batang diberikan dalam deret naik menjauh dari batang pertama, kemudian batang-batang percabangan yang diberi nomor dengan bergerakkan dari cabang ke cabang sampai semua batang dinomori. Penomoran pada percabangan dimulai dari batang yang terdekat dari titik referensi tetap

sampai semua batang dinomori dan dilanjutkan ke percabangan batang berikutnya yang terdekat dari nomor batang terkecil.

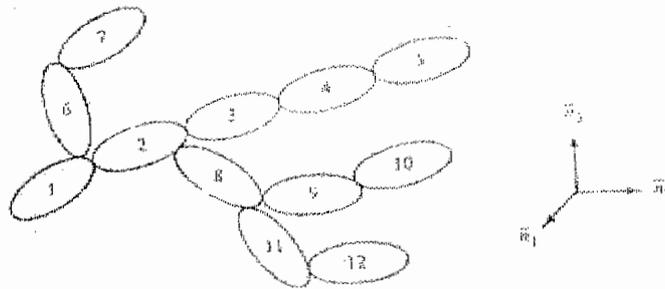
Setelah penomoran selesai, dapat digambarkan dalam susunan yang diberi tanda $\Gamma_0(k), \Gamma_1(k), \Gamma_2(k)$ dan seterusnya. $\Gamma_0(k)$ menggambarkan susunan batang yang terdiri dari semua nomor batang yang ada pada sistem atau dengan kata lain mencatat semua nomor batang dalam sistem. Sedangkan $\Gamma_1(k)$ menggambarkan turunan susunan batang yang artinya diuraikan dengan berdasarkan jumlah sambungan yang menghubungkan batang-batang yang digambarkan $\Gamma_0(k)$ pada sistem.

Dari Gambar 2.4, dapat kita lihat bahwa $\Gamma_0(k) = 12$ dan $\Gamma_1(k) = 11$, dengan catatan batang satu dihubungkan dengan kerangka tetap O.

Dengan menggunakan susunan $\Gamma_i(k)$ dapat dengan mudah menemukan susunan batang lainnya dan akan berhenti jika harga $\Gamma_m(k)$ sampai pada angka nol, sehingga dapat digambarkan sebuah sistem yang disebut susunan pohon. Angka nol pada setiap susunan pohon pada kolom yang berbeda dari setiap $\Gamma_i(k)$ ($i = 1, 2, 3$) menunjukkan banyaknya sambungan dari sebuah sistem melalui banyaknya baris dari setiap susunan k ($k = 1, 2, \dots, n$) terhadap R. Banyaknya sambungan batang untuk setiap k diberi tanda $H(k)$.

Contoh :

Contoh :



Gambar 2.4. Contoh Tree Like Sistem.

Dari Gambar didapat array pohon dalam Tabel :

Tabel 2.1, Tabel Array Batang untuk Gambar 2.4

$\Gamma_0(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Gamma_1(k)$	0	1	2	3	4	1	6	2	8	9	8	11
$\Gamma_2(k)$	0	0	1	2	3	0	1	1	2	8	2	8
$\Gamma_3(k)$			0	1	2		0	0	1	2	1	2
$\Gamma_4(k)$				0	1				0	1	0	1
$\Gamma_5(k)$					0					0		0
$H(k)$	1	2	3	4	5	2	3	3	4	5	4	5

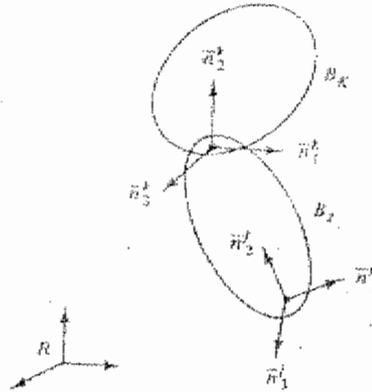
2.2. Koordinat Umum.

Dalam dinamika benda jamak sistem koordinat umum di pakai untuk menggambarkan posisi batang terhadap sebuah titik referensi tetap tertentu. Hal ini disebabkan dengan menggunakan sistem koordinat umum dapat diperoleh model matematika yang paling sederhana yang dapat mewakili sistem yang ada dengan menggunakan parameter yang paling sedikit. Koordinat umum

didefinisikan sebagai seperangkat yang mampu menggambarkan posisi setiap titik dari sebuah sistem pada sebuah titik referensi tetap.

Pada sistem dinamika benda jamak, koordinat yang dipakai adalah koordinat kartesian yang mempunyai tiga sumbu ortogonal x, y, z dengan vektor satuan i, j, k , sehingga sebuah batang kaku maksimal mempunyai 6 derajat kebebasan yaitu 3 untuk rotasi dan 3 untuk translasi, dimana gerak translasi dan gerak rotasi secara bebas berturut-turut, berpusat pada tiga sumbu dalam sebuah ruang. Maka dengan demikian posisi sebuah ujung batang dapat ditentukan dari banyaknya putaran dan pergeseran dengan menggunakan sistem koordinat relatif antar batang.

Misalnya untuk menguraikan batang B_K terhadap suatu kerangka inersia yang tetap R seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.5, kita ketahui bahwa :



Gambar 2.5 Analisis Dua Batang Kaku.

\bar{n}_i^1 ($i = 1, 2, 3$) adalah arah sumbu relatif pada batang B_K dan \bar{n}_i^2 ($i = 1, 2, 3$) adalah arah sumbu relatif pada batang B_J , sedangkan \bar{n}_i ($i = 1, 2, 3$) adalah arah sumbu-sumbu kerangka tetap R . Jika kita ijin kan batang K mempunyai 6 derajat kebebasan yaitu bergerak rotasi pada sumbu $\bar{n}_1^1, \bar{n}_2^1, \text{ dan } \bar{n}_3^1$ secara berturut-turut

sebesar α_1 , β_1 dan γ_1 , serta bergerak translasi pada sumbu yang sama berturut-turut sebesar ξ_{1x} , ξ_{1y} dan ξ_{1z} , serta jika batang 2 dapat mengalami perlakuan yang sama seperti batang 1 yaitu bergerak rotasi pada sumbu \bar{n}_1 , \bar{n}_2 , dan \bar{n}_3 sebesar α_2 , β_2 dan γ_2 , dan bergerak secara translasi sebesar ξ_{2x} , ξ_{2y} dan ξ_{2z} , maka dari pergerakan batang di atas dapat di tunjukan posisi koordinat umumnya (X_i) yaitu :

$$x_l = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \xi_{1x} \\ \xi_{1y} \\ \xi_{1z} \\ \xi_{2x} \\ \xi_{2y} \\ \xi_{2z} \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas dapat diperluas jika terjadi kasus pada N batang saling berhubungan satu sama lain, dimana koordinat umumnya x_l ($l= 1, \dots, 6N$) dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 2.1.

$$x_l = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_{3N-2} \\ x_{3N-1} \\ x_N \\ x_{3N+1} \\ x_{3N+2} \\ x_{3N+3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{6N-2} \\ x_{6N-1} \\ x_{6N} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.1)$$

dengan :

x_1-x_3 , menguraikan posisi koordinat relatif gerak rotasi batang B_1 terhadap R.

x_3-x_6 , menguraikan posisi koordinat relatif gerak rotasi batang B_2 terhadap B_1 .

$x_{3N-2}-x_{3N}$, menguraikan posisi koordinat relatif gerak rotasi batang B_N terhadap B_{N-1} .

$x_{3N+1}-x_{3N+3}$, menguraikan posisi koordinat relatif gerak translasi batang B_1 terhadap R

$x_{6N-2}-x_{6N}$, menguraikan posisi koordinat relatif gerak translasi batang B_N terhadap B_{N-1} .

2.3. Analisis Matrik Transformasi.

Di dalam permasalahan dimanika, khususnya dalam dinamika benda jamak, untuk menggambarkan perputaran gerak batang-batang menggunakan kerangka-kerangka sumbu berdempetan pada batang dan kerangka tetap, dengan cara memutar kerangka sumbu tersebut pada setiap sumbu kerangka.

Jika ketiga perputaran berturut-turut diberi notasi α , β , dan γ , kita definisikan sebuah matrik yang disebut R dalam arah matrik satuan n_i dengan $i = 1, 2, 3$, maka akan didapat matrik R seperti :

1. Diputar pada sumbu n_1 atau x , searah jarum jam, dengan sudut sebesar α .

Maka akan didapat hubungan antara n_1, n_2, n_3 dengan $n_1^\alpha, n_2^\alpha, n_3^\alpha$ yaitu :

$$n_1^\alpha = n_1$$

$$n_2^\alpha = n_2 \cos \alpha + n_3 \sin \alpha$$

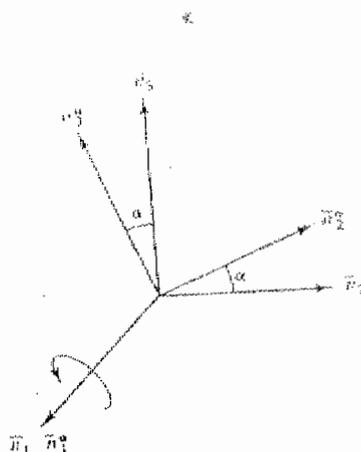
$$n_3^\alpha = -n_2 \sin \alpha + n_3 \cos \alpha$$

sehingga dapat ditulis secara matriks seperti :

$$\begin{Bmatrix} n_1^\alpha \\ n_2^\alpha \\ n_3^\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots 2.2)$$

secara singkat dapat ditulis :

$$\{n^\alpha\} = [R_\alpha] \{n\}$$



Gambar 2.6 Tranformasi Matrik pada Sumbu n_1 .

2. Kemudian diputar pada sumbu n_2 atau y , searah jarum jam, dengan sudut sebesar β .

Maka dari perputaran itu akan didapat hubungan antara $n_1^\alpha, n_2^\alpha, n_3^\alpha$ dengan

$n_1^\beta, n_2^\beta, n_3^\beta$ yaitu :

$$n_1^\beta = n_1 \cos \beta - n_3 \sin \beta$$

$$n_2^\beta = n_2^\alpha$$

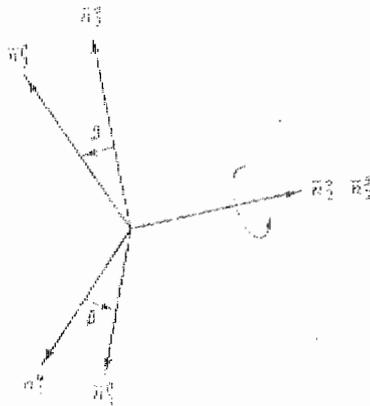
$$n_3^\beta = n_1 \sin \beta + n_3 \cos \beta$$

sehingga dapat ditulis secara matriks seperti :

$$\begin{Bmatrix} n_1^\beta \\ n_2^\beta \\ n_3^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^\alpha \\ n_2^\alpha \\ n_3^\alpha \end{Bmatrix} \dots\dots\dots 2.3)$$

secara singkat dapat ditulis :

$$\{n^\beta\} = [R_\beta] \{n^\alpha\}$$



Gambar 2.7 Transformasi Matrik pada Sumbu n_2 .

3. Kemudian diputar pada sumbu n_3 atau z , searah jarum jam, dengan sudut sebesar γ .

Sehingga didapat hubungan antara $n_1^\beta, n_2^\beta, n_3^\beta$ dengan $n_1^\gamma, n_2^\gamma, n_3^\gamma$ yaitu :

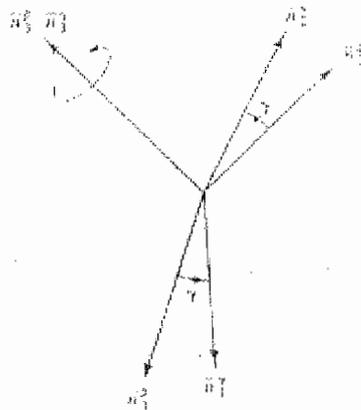
$$\begin{aligned} n_1^\gamma &= n_1^\beta \cos \gamma + n_2^\beta \sin \gamma \\ n_2^\gamma &= -n_1^\beta \sin \gamma + n_2^\beta \cos \gamma \\ n_3^\gamma &= n_3^\beta \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis secara matriks seperti :

$$\begin{Bmatrix} n_1^\gamma \\ n_2^\gamma \\ n_3^\gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^\beta \\ n_2^\beta \\ n_3^\beta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots 2.4)$$

secara singkat dapat ditulis :

$$\{n^\beta\} = [R_\gamma] \{n^\alpha\}$$



Gambar 2.8 Tranformasi Matrik pada Sumbu n₃.

hubungan antara ketiga matrik di atas adalah :

$$\{n^r\} = [S^{AO}] \{n\} \dots\dots\dots 2.5)$$

dengan :

$$[S^{AO}] = [R_\gamma] [R_\beta] [R_\alpha]$$

Analisis matrik transformasi pada batang yang saling berhubungan dapat diperoleh berdasarkan penurunan susunan batang ($\Gamma_i(k)$) atau jumlah sambungan antar batang, dengan cara menggambarkan vektor-vektor satuan pada bingkai poros tiap batang yang kemudian dikombinasi lurus (*linear*) /ditransformasikan pada sumbu-sumbu bingkai poros batang lainnya, $n_i^S = S_{ij}^{sr} \bar{n}_j^r$ atau secara matrik dapat ditulis,

$$\{n^r\} = [S^{sr}] \{\bar{n}_j^r\} \dots\dots\dots 2.6)$$

dengan catatan, $[S^{Sr}]$ adalah matrik transformasi pada tiap batang.

Misalnya, untuk 3 batang yang bersambungan, matrik transformasi tiap batang dapat diperoleh :

$$n_i^3 = S_{ij}^{32} \bar{n}_j^2, \text{ untuk sumbu batang 3 terhadap sumbu referensi batang 2}$$

$$n_i^2 = S_{ij}^{21} \bar{n}_j^1, \text{ untuk sumbu batang 2 terhadap sumbu referensi batang 1}$$

$$n_i^1 = S_{ij}^{10} \bar{n}_j^0, \text{ untuk sumbu batang 1 terhadap sumbu referensi batang tetap R}$$

sehingga vektor-vektor dari tiap batang dapat digambarkan dalam matrik kerangka tetap R,

$$n_i^3 = S_{ij}^{32} . S_{ij}^{21} . S_{ij}^{10} . \bar{n}_j^0 \dots\dots\dots 2.7)$$

2.4. Turunan Matrik Transformasi Terhadap Waktu.

Transformasi matrik dari sumbu referensi K terhadap sumbu referensi J adalah $[S^{KJ}]$ sehingga turunannya dapat diperoleh seperti :

$$\frac{d[S^{JK}]}{dt} = \left[S^{JK} \right] = [\Omega^{KJ}] [S^{KJ}] \dots\dots\dots 2.8)$$

dengan $[S^{KJ}]$ adalah matrik transformasi batang k terhadap referensi J, sehingga skew matrik (Ω) dapat diperoleh dengan :

$$[\Omega^{KJ}] = \left[S^{JK} \right] \left[S^{KJ} \right]^T \dots\dots\dots 2.9)$$

Ω adalah skew matrik yang dibentuk dari komponen-komponen kecepatan sudut batang K terhadap batang J.

2.5. Kecepatan Sudut dan Kecepatan Sudut Parsial.

Kecepatan sudut bagian bagian untuk batang kaku ke k yang terhubung satu dengan yang lain dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 {}^R \omega^k &= {}^R \omega^1 + {}^1 \omega^2 + {}^2 \omega^3 + \dots + {}^{K-1} \omega^k \\
 &= \sum_{i=1}^k {}^{i-1} \omega^i \dots\dots\dots 2.10) \\
 &= \sum_{i=1}^k \{\dot{x}\}^T \cdot [S^{i-1,0}] \left\{ \dot{n} \right\}
 \end{aligned}$$

dengan k = jumlah batang.

Persamaan 2.10), secara matrik dapat ditulis dengan :

$${}^R \omega^K = \{\dot{x}\}^T \cdot [\omega^k] \{n\} \dots\dots\dots 2.11)$$

\dot{x} adalah turunan pertama dari matrik posisi koordinat umum dan ω^k adalah kecepatan sudut parsial dengan ukuran \dot{x} dan ω^k diperoleh dari nomor batang pada struktur dan nomor koordinat umum yang digunakan.

Pada sebuah sistem yang mempunyai n batang, maka kecepatan sudut parsial pada batang ke K dapat diperoleh dengan persamaan :

$$\omega^k = \begin{bmatrix} I \\ S^{1,0} \\ S^{2,0} \\ S^{3,0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S^{(k-1),0} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.12)$$

dengan I adalah matrik identitas 3x3

2.6. Turunan Waktu Matrik Transformasi dan Percepatan Sudut.

Percepatan sudut pada batang kaku untuk n batang pada suatu sistem benda jamak dapat dihitung dengan rumus persamaan,

$${}^R \alpha^k = \{ \ddot{x} \}^T [\omega^k] + \{ \dot{x} \}^T [\dot{\omega}^k] \{ n \} \dots\dots\dots 2.13)$$

yang dinotasikan dari percepatan sudut batang k pada referensi R, dengan $\dot{\omega}^k$

adalah turunan pertama terhadap waktu dari $\omega^k = \begin{bmatrix} \dot{S}^{kj} \end{bmatrix}$ sehingga didapat :

$$\dot{\omega}^k = \begin{bmatrix} q \\ \Omega^{10} . S^{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Omega^{n0} . S^{n0} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.14)$$

dengan

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$[\ddot{x}]^T$ adalah turunan kedua dari posisi koordinat umum.

2.7. Kecepatan dan Percepatan Pusat Masa pada Batang Bersambungan.

Untuk mengembangkan ungkapan kecepatan pusat masa batang kaku pada sistem benda jamak, dibutuhkan definisi vektor posisi relatifnya. Untuk menggambarkan vektor posisinya kita tempatkan titik referensi sumbu tetap pada setiap batang dengan label $o_1, o_2, o_3, \dots, o_i$ pada setiap titik sambungan. Vektor posisi jarak antara sumbu poros sambungan batang satu dengan yang lainnya yang

dihubungkan satu dengan garis vektor, diberi notasi $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i$ dan $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i$ adalah vektor posisi pusat masa batang G_i ($i=1,2,3,\dots,K$) seperti ditunjukkan pada Gambar 2.9. Maka, jika P_i ($i = 1,2,3$) adalah posisi vektor pusat massa G_i relatif terhadap referensi sumbu inersial R , maka vektor posisi P_i didapat :

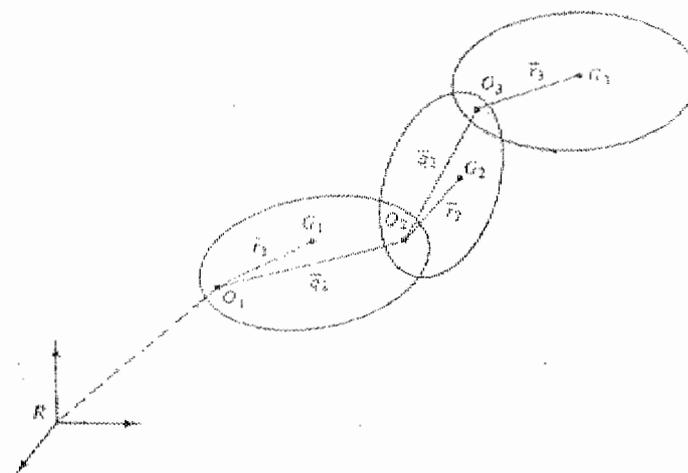
$$\begin{aligned}
 P_1 &= \bar{\xi}_1 + \bar{r}_1 \\
 P_2 &= \bar{\xi}_1 + \bar{q}_2 + \bar{r}_2 \\
 P_3 &= \bar{\xi}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{r}_3 \\
 P_j &= \bar{\xi}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_j + \bar{r}_j
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots 2.15)$$

\bar{n}_1^1, \bar{n}_i^2 dan \bar{n}_i^3 adalah vektor satuan dari sumbu-sumbu titik tetap o_i , maka vektor-vektor yang digunakan untuk menggambarkan posisi P_i adalah :

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_1 &= 0 & \bar{r}_1 &= r_{1m} \bar{n}_m^1 & \bar{\xi}_1 &= \xi_1 \bar{n}_m \\
 \bar{q}_2 &= q_{2m} \bar{n}_m^1 & \bar{r}_2 &= r_{2m} \bar{n}_m^2 & & \\
 \bar{q}_3 &= q_{3m} \bar{n}_m^1 & \bar{r}_3 &= r_{3m} \bar{n}_m^3 & & \\
 & & & & m &= 1,2,3
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots 2.16)$$

dari persamaan 2.7.a)

$$P_j = \bar{\xi}_1 + \sum_{i=1}^j \bar{q}_i + \bar{r}_j \dots\dots\dots 2.17)$$



Gambar 2.9 Sistem Sambungan 3 Batang Tanpa Translasi.

Vektor posisi P_j dapat digambarkan terhadap vektor satuan pada sumbu referensi tetap R yaitu :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_j &= \xi_1 \bar{n}_m \\ \bar{r}_j &= r_{jm} S_{nm}^{j,0} \bar{n}_m \dots\dots\dots 2.18) \\ \bar{q}_j &= q_{jm} S_{nm}^{j-1,0} \bar{n}_m \end{aligned}$$

dengan memasukan persamaan 2.17) pada persamaan 2.18) dapat diperoleh :

$$P_j = \xi_1 \bar{n}_m + \sum_{i=1}^j q_{im} S_{nm}^{i-1,0} \bar{n}_m + r_{jm} S_{nm}^{j,0} \bar{n}_m \dots\dots\dots 2.19a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$P_j = \left(\{\xi\}^T + \sum_{i=1}^j \{q_i\}^T [S^{i-0,0}] + \{r_j\}^T [S^{j,0}] \right) \{n\} \dots\dots\dots 2.19b)$$

Kecepatan pusat massa G_k terhadap R dapat diperoleh dari turunan pertama vektor posisi P_j , sehingga dapat diperoleh persamaan:

$$\bar{v}_j = \frac{d\bar{p}_j}{dt} = \left[\dot{\xi}_{im} + \sum_{i=1}^j q_{im} \dot{S}_{nm}^{i-1,0} + r_{jm} \dot{S}_{nm}^{j,0} \right] \bar{n}_m \dots\dots\dots 2.20a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$\bar{v}_j = \left(\{\xi\}^T + \sum_{i=1}^j \{y\}^T [S_{q_i}] [S^{i-1,0}] + \{y\}^T [S_{r_j}] [S^{j,0}] \right) \{n\} \dots\dots\dots 2.20b)$$

dengan y adalah koordinat kecepatan yang dihubungkan dengan skew matrik, sedangkan $[S_{q_i}]$ dan $[S_{r_j}]$ adalah skew matrik vektor q_i dan r_j yang diperoleh dari persamaan :

$$[S_{q_i}] = \begin{bmatrix} 0 & -q_{i3} & q_{i2} \\ q_{i3} & 0 & -q_{i1} \\ -q_{i2} & q_{i1} & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.21.a)$$



$$[Sri] = \begin{bmatrix} 0 & -rj_3 & rj_2 \\ rj_3 & 0 & -rj_1 \\ -rj_2 & rj_1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.21.b)$$

dan ξ adalah besarnya gerak translasi antara frame tetap R dengan batang 1, sehingga kecepatan pusat massa batang ke j (v_j) dapat dituliskan:

$$v_j = \left\{ \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix} \right\}^T + \{y\}^T [v^j] \{n\} \dots\dots\dots 2.22.a)$$

atau

$$v_j = \left\{ \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix} \right\}^T + \{\dot{x}\}^T [W] [v^j] \{n\} \dots\dots\dots 2.22.b)$$

dengan $[V^j]$ adalah matrik kecepatan parsial yang diperoleh dari :

$$v^j = \begin{bmatrix} [Sq_2] [S^{1,0}] \\ [Sq_3] [S^{2,0}] \\ \vdots \\ \vdots \\ [Sq_j] [S^{j-1,0}] \\ [Sr_j] [S^{j,0}] \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.23)$$

sedangkan $[W]$ adalah matrik untuk mengubah $\{y\}$ ke $\{\dot{x}\}$ dan $\{y\}^T$ adalah matrik kecepatan koordinat umum yang didapat dari skew matrik $[\Omega^{Kj}]$.

Dengan menggunakan persamaan 2.22.a) atau 2.22.b), dapat diperoleh kecepatan pada setiap pusat massa dari batang-batang bersambungan.

Percepatan pusat massa pada batang bersambungan dapat diperoleh dengan turunan kedua dari vektor posisi P_j atau turunan pertama dari persamaan kecepatan pusat massa pada sambungan (persamaan 2.22.a) terhadap waktu, sehingga diperoleh persamaan :

$$\bar{a}_j = \frac{d\bar{v}_j}{dt} = (\ddot{\xi}_j) + [v_j]\{\dot{y}\}^T + \{y\}^T \cdot [\dot{v}_j]\{n\} \dots\dots\dots 2.23)$$

dengan \dot{v}_j adalah turunan dari matrik kecepatan parsial yang diperoleh dengan persamaan :

$$[\dot{v}_j] = \begin{bmatrix} [Sq_2] [\Omega^{10}] [S^{10}] \\ [Sq_3] [\Omega^{20}] [S^{20}] \\ \vdots \\ [Sq_j] [\Omega^{j-1,0}] [S^{j-1,0}] \\ [Sr_j] [\Omega^{j0}] [S^{j0}] \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.24)$$

2.8. Gaya-gaya yang Bekerja pada Batang.

Dalam sistem dinamika benda jamak terdapat gaya-gaya yang mempengaruhi sebuah sistem. Gaya-gaya itu adalah gaya luar, gaya kontak, dan gaya gravitasi atau gaya-gaya lainnya.

2.8.1 Gaya gravitasi bumi.

Gaya gravitasi bumi adalah gaya yang terjadi pada sistem sambungan batang kaku yang diakibatkan oleh gaya gravitasi bumi.

$$f_i^G = m_i g \bar{u} \dots\dots\dots 2.25)$$

$i = 1, \dots, N$

Dengan :

- N adalah nomor batang kaku
- m_i adalah notasi massa batang i
- g adalah percepatan gravitasi dan
- u adalah arah unit vektor keatas kebawah.

Gaya gravitasi di dalam sebuah sistem dapat disebut juga sebagai gaya luar karena gaya gravitasi dapat mengakibatkan kerja pada sistem.

$$F_i = \bar{f}_i^G \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{x}_i} \dots\dots\dots 2.26.a)$$

dengan \bar{v}_i adalah percepatan pusat massa batang i terhadap referensi.

Secara matrik dapat ditulis :

$$\{f\} = \sum_{k=1}^i [V_w^k] \{F_k\} \dots\dots\dots 2.26.b)$$

$\{F_k\}$ adalah penulisan secara matrik dari percepatan gravitasi f_i^G ,

sedangkan $[V_w^k]$ (kecepatan parsial) adalah matrik hasil perkalian matrik W

dengan matrik V^j ,

$$[V_w^k] = [W][V^j] \dots\dots\dots 2.27)$$

misalnya untuk kecepatan parsial batang 1:

$$[V_w^1] = [W][V^1]$$

$$[V_w^1] = [W] \begin{bmatrix} [S_{r1}][S^{10}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka gaya $\{f\}$ untuk batang 1 adalah :

$$\{f\} = [V_w^1] \{F_1\}$$

$$\{f\} = [W] \begin{bmatrix} [S_{r1}][S^{10}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad -m_1 g]^T$$

2.8.2 Gaya kontak.

Gaya kontak adalah gaya yang terjadi akibat adanya kontak antara batang dengan permukaan yang kaku yang besarnya gaya aksi akan sama dengan gaya reaksi dengan arah yang berlawanan.

2.8.3 Gaya Luar.

Adalah gaya yang terjadi akibat adanya pengaruh dari luar seperti, dorongan atau apa saja yang membuat batang mengalami.

Gaya luar dijabarkan secara matriks sebagai berikut :

$$\{f\} = \sum_{k=1}^i [V_w^k] \{F_k\} + \sum_{k=1}^i [\omega^k] [M_k] \dots\dots\dots 2.28)$$

F_k = Gaya luar total

M = momen luar total

2.9. Inersia Massa dan Teori Sumbu Sejajar.

Inersia massa dapat diperoleh dari inersia luasan yang dikalikan dengan besarnya massa jenis bahan (ρ) dan tebal dari bahan (t).

Inersia luasan diperoleh dari :

$$Ia_{xx} = \int_0^l y^2 \cdot da \dots\dots\dots 2.29.a)$$

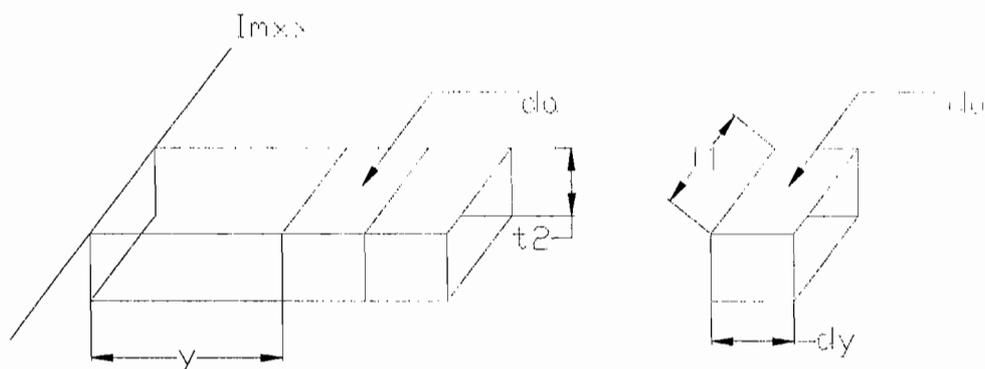
dengan y adalah jarak dari sumbu xx sampai da , sedangkan da adalah bagian luas daerah luasan. Inersia massa dapat diperoleh dengan :

$$\begin{aligned} Im_{xx} &= Ia_{xx} \rho \cdot t_2 \\ &= \int_0^l y^2 \cdot da \cdot \rho \cdot t_2 \dots\dots\dots 2.29.b) \end{aligned}$$

sedangkan massa (m) adalah :

$$M = \text{panjang} \times \text{luas bahan} \times \text{massa jenis} \\ = l.A.\rho$$

contoh :



Gambar 2.10 Analisis Inersia Batang.

$$\begin{aligned} I_m &= \left(\int_0^y y^2 \cdot da \right) \cdot \rho \cdot t_2 \\ &= \left(\int_0^y y^2 \cdot t_1 \cdot dy \right) \cdot \rho \cdot t_2 \\ &= \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^l \cdot t_1 \cdot \rho \cdot t_2 \\ &= \frac{1}{3} l^3 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \rho \end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} M &= l \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \rho \\ &= l \cdot A \cdot \rho \end{aligned}$$

maka

$$I_m = \frac{1}{3} M l^2$$

Dalam gerak rotasi, sebuah beban yang diputar melewati titik pusat massa dari batang, mempunyai inersia terhadap sumbu putar yang besarnya adalah inersia massa ditambah massa dikalikan kuadrat jarak terhadap sumbu yang akan menjadi pusat rotasi atau sering dikenal dengan teori sumbu sejajar. Teori tersebut dapat ditulis,

$$I_t = I_m + (\text{Massa} \times \text{jarak}^2) \dots\dots\dots 2.29.c)$$

Momen inersia juga dapat diperoleh dengan menganalisis momen kedua (*second moment*) dari sebuah batang dengan cara menganalisis *second moment* dari sebuah batang yaitu sebuah vektor \bar{I}_a .

Sebuah vektor \bar{I}_a disebut momen kedua dari sebuah batang S relatif terhadap titik tetap O untuk vektor satuan \bar{n}_a jika,

$$\bar{I}_a = \sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i \times (\bar{n}_a \times \bar{r}_i) \dots\dots\dots 2.30)$$

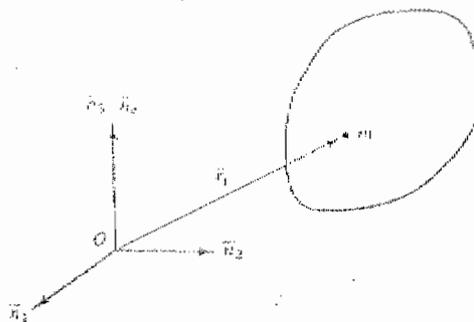
dengan

m_i = massa partikel i

r_i = vektor posisi dari titik O ke pusat massa partikel.

\bar{n}_a = vektor satuan yang melewati titik O.

Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 2.11 Analisis Momen Kedua.

\bar{n}_i ($i=1,2,3$) adalah garis-garis vektor satuan saling tegak lurus yang bertemu pada satu titik (O) dan \bar{n}_a adalah vektor satuan yang paralel pada \bar{n}_3 atau $\bar{n}_a = \bar{n}_3$ sehingga dapat diperoleh momen kedua dari massa m relatif terhadap titik O.

$$I_a = m\bar{r}_i \times (\bar{n}_a \times \bar{r}_i) \dots\dots\dots 2.31.a)$$

dengan

$$\bar{r}_i = r_1\bar{n}_1 + r_2\bar{n}_2 + r_3\bar{n}_3 \dots\dots\dots 2.31.b)$$

dengan memasukan persamaan b) ke persamaan a) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 I_a = I_3 &= m\bar{r}_i \times (\bar{n}_a \times (r_1\bar{n}_1 + r_2\bar{n}_2 + r_3\bar{n}_3)) \\
 I_a = I_3 &= m\bar{r}_i \times \begin{vmatrix} \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \bar{n}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \\
 I_a = I_3 &= m\bar{r}_i \times (-r_2\bar{n}_1 + r_1\bar{n}_2) \\
 I_a = I_3 &= \begin{vmatrix} \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \bar{n}_3 \\ mr_1 & mr_2 & mr_3 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 2.31.c) \\
 &= -mr_1r_3\bar{n}_1 - mr_2r_3\bar{n}_2 + (mr_2^2 + mr_1^2)\bar{n}_3
 \end{aligned}$$

menggunakan cara yang sama untuk \bar{n}_a adalah vektor satuan yang paralel pada \bar{n}_2 atau $\bar{n}_a = \bar{n}_2$ diperoleh I_2 dan untuk \bar{n}_a adalah vektor satuan yang paralel pada \bar{n}_1 atau $\bar{n}_a = \bar{n}_1$ diperoleh I_3 seperti persamaan :

$$\begin{aligned} I_a = I_2 &= -mr_1r_2\bar{n}_1 + m(r_1^2 + r_2^2)\bar{n}_2 - mr_2r_3\bar{n}_3 \\ I_a = I_1 &= m(r_1^2 + r_2^2)\bar{n}_1 - mr_1r_2\bar{n}_2 - mr_1r_3\bar{n}_3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 2.31.d)$$

dari persamaan di atas vektor I_a menggambarkan momen kedua terhadap titik O untuk \bar{n}_a seperti digambarkan pada persamaan 2.30) yang digunakan untuk mendapatkan skalar I_{ab} yang disebut produk dari kelembaman S relatif terhadap titik O. Untuk \bar{n}_a dan \bar{n}_b harga I_{ab} diperoleh dari :

$$I_{ab} = I_a \cdot \bar{n}_b \quad \dots\dots\dots 2.32.a)$$

secara simpel produk dari kelembaman adalah proyeksi dari momen kedua pada vektor satuan \bar{n}_b . Perlu dicatat bahwa \bar{n}_a dan \bar{n}_b tidak perlu berbeda satu sama lain sebab jika $\bar{n}_a = \bar{n}_b$ dapat diperoleh skalar I_{aa} sebagai produk dari kelembaman yang disebut momen inersia. Dengan memasukan persamaan 2.31.c) dan 2.31.d), kedalam persamaan 2.32.a), dapat diperoleh matrik inersia batang,

$$[I_{ij}] = m \begin{bmatrix} (r_2^2 + r_3^2) & -r_1r_2 & -r_1r_3 \\ -r_1r_2 & (r_1^2 + r_3^2) & -r_2r_3 \\ r_3r_1 & -r_2r_3 & (r_1^2 + r_2^2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 2.32.b)$$

atau dapat ditulis :

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{k11} & I_{k12} & I_{k13} \\ I_{k21} & I_{k22} & I_{k23} \\ I_{k31} & I_{k32} & I_{k33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 2.32.c)$$

Jika lokasi koordinat sistemnya simetris atau berada pada pusat batang maka inersia batang akan menjadi :

$$[I_k] = \begin{bmatrix} I_{k11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{k33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.33)$$

Dari persamaan 2.26) inersia dari S relatif pada titik O untuk n_a dan n_b dapat diperoleh persamaan

$$I_{ab} = (\bar{n}_a \cdot \bar{n}_b) I_{jk} (\bar{n}_b \cdot \bar{n}_k) \dots\dots\dots 2.34)$$

dengan catatan I_{ab} adalah inersia matrik dari suatu sistem S relatif terhadap sebuah referensi tetap dan I_{jk} adalah harga matrik batang terhadap titik referensi pada batang.

Persamaan 2.34) secara matrik dapat ditulis :

$$[I_{k0}] = [S^{0k}] [I_k] [S^{k0}] \dots\dots\dots 2.35)$$

dengan catatan,

- $[S^{k0}]$ adalah matrik transformasi batang k ke sumbu referensi 0.
- $[I_k]$ adalah matrik inersia batang ke k
- $[S^{0k}]$ adalah matrik transpos dari $[S^{k0}]$

2.10. Persamaan Gerak Kane.

Persamaan gerak yang mudah digunakan adalah persamaan gerak Kane. Persamaan gerak Kane untuk sebuah sistem benda jamak dengan jumlah batang N dalam koordinat umum X_i ($i=1, \dots, N$) dalam kerangka tetap R diberikan sebagai :

$$f_i + f_i^* = 0 \dots\dots\dots (i = 1, \dots, n) \dots\dots\dots 2.36)$$

dengan f_i dan f_i^* adalah gaya aktif dan gaya inersia umum.

Persamaan gerak Kane secara umum diberikan :

$$[a]\{\ddot{x}\} + [b]\{\dot{x}\} + [c]\{x\} = \{f\} \dots\dots\dots 2.37)$$

dengan :

$\{f\}$ adalah gaya aktif yang bekerja pada sistem.

$$[a] = \sum_{k=1}^n m_k [V_w^k] [V_w^k]^T + \sum_{j=1}^n [\omega^k] [I_{k0}] [\omega^k]^T \dots\dots\dots 2.38)$$

$$[b] = \sum_{k=1}^n m_k [V_w^k] \left[\dot{V}_w^k \right]^T + \sum_{j=1}^n [\omega^k] [I_{k0}] [\omega^k]^T \dots\dots\dots 2.39)$$

$$[c] = \sum_{k=1}^n [\omega^k] [\Omega_x^{ok}] [I_{k0}] [\omega^k]^T \dots\dots\dots 2.40)$$

dengan catatan bahwa :

$$[V_w^k] = \text{Kecepatan parsial}$$

$$\left[\dot{V}_w^k \right] = \text{Turunan kecepatan parsial}$$

$$[\omega^k] = \text{Percepatan sudut.}$$

$$[I_{k0}] = \text{Inersia; } [\Omega_x^{ok}] = \text{Skew matrik.}$$

2.11. Persamaan dan Gaya Konstrain.

Konstrain adalah batasan-batasan yang mengakibatkan sebuah sistem tidak bergerak dengan bebas. Apabila suatu sistem benda jamak dibatasi oleh kondisi-kondisi kinematik dan geometrisnya selama siklus geraknya maka sistem tersebut dalam keadaan terkonstrain. Jika n merupakan jumlah total koordinat umum dalam sistem, maka koordinat umumnya x_l ($l = 1, \dots, n$), dan jika m merupakan jumlah persamaan konstrain, maka persamaan konstrain dinyatakan dalam bentuk: $d\phi_i = 0$. ($i = 1, \dots, m$). dengan ϕ_i adalah fungsi waktu x_1, x_2, \dots, x_n terhadap waktu (t). Gaya konstrain dan gaya-gaya lain dalam sistem mempengaruhi gaya aksi yang bekerja pada sistem. Gaya konstrain adalah gaya yang terjadi pada sambungan karena adanya konstrain. Komponen gaya konstrain sama dengan koefisien matriks konstrain Jacobi [B], sehingga gaya konstrain dinyatakan sebagai :

$$f_1^c = \lambda_i \cdot B_{1i}^T \dots\dots\dots 2.41)$$

dengan catatan : λ merupakan *Lagrange undetermined multipliers* sedang B adalah matriks konstrain Jacobi.

$$B_{ii}^T = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$$

Dengan adanya gaya konstrain, persamaan gaya kane menjadi :

$$f_l + f_l^* = f_l^c \text{ atau } f_l + f_l^* - \lambda_i \cdot B_{li}^T = 0 \dots\dots\dots 2.42)$$

Dengan adanya konstrain, menyebabkan jumlah derajat kebebasan sistem berkurang menjadi $n-m$.

2.12. Metode Augmented.

Dengan mensubstitusikan gaya inersia ke persamaan gerak Kane di peroleh persamaan gerak sistem benda jamak dalam referensi R :

$$[a_{lp}]\{\dot{y}_p\} + [b_{lp}]\{y_p\} + [c_{lp}]\{y_p\} = \{f^*\} \dots\dots\dots 2.43)$$

dengan a_{lp} , b_{lp} , c_{lp} , adalah elemen matrik a, b, c, dan f_1 yang merupakan gaya aktif.

Jika sistem benda jamak mempunyai n persamaan konstrain,

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \dots\dots\dots 2.44)$$

turunan dari persamaan konstrain di atas dapat dituliskan fungsi kecepatan umumnya sebagai berikut :

$$B_{il}y_i = g_i \dots\dots\dots 2.45.a)$$

$$(l = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m)$$

dengan catatan B_{ij} adalah komponen matrik konstrain jacobii dan g_i adalah

fungsi kecepatan yang tergantung pada waktu, sedangkan $y = \dot{x}$ atau $y = W \dot{x}$.

Secara matrik dapat ditulis ,

$$[B]\{y\} = \{g\} \dots\dots\dots 2.45.b)$$

Dengan menurunkan kembali persamaan fungsi kecepatan secara umum di atas akan didapatkan persamaan konstrain dalam fungsi percepatan, seperti :

$$B_{il} \dot{y}_i = \dot{B}_{il} y_i + g_i \dots\dots\dots 2.46a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$[B]\{\dot{y}\} = -[\dot{B}]\{y\} + \{\dot{g}\} \dots\dots\dots 2.46b)$$

Jika sistem terkonstrain maka persamaan gerak di atas perlu ditambah gaya konstrain, sehingga persamaan menjadi :

$$[a_{lp}]\{\dot{y}_p\} + [b_{lp}]\{y_p\} + [c_{lp}]\{y_p\} = f_1 - \lambda \cdot B_{lp}^T \dots\dots\dots 2.47a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$[a]\{\dot{y}\} + [b]\{y\} + [c]\{y\} = \{f_1\} - [B_{lp}^T]\{\lambda\} \dots\dots\dots 2.47b)$$

dengan menggabungkan persamaan konstrain dalam fungsi percepatan dengan persamaan gerak dengan gaya konstrain maka akan didapat :

$$\begin{bmatrix} a_{lp} & B_{lp}^T \\ B_{lp} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_c \\ g_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.48a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} a & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.48b)$$

dengan

$$H = [b_{lp}]\{y_p\} + [c_{lp}]\{y_p\} \dots\dots\dots 2.49a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$H = -[b]\{y\} + [c]\{y\} \dots\dots\dots 2.49b)$$

dan

$$G = -\dot{B}_{lp} y_p \dots\dots\dots 2.50a)$$

atau secara matrik dapat ditulis :

$$G = -[\dot{B}]\{y\} \dots\dots\dots 2.50b)$$

Metode *augmented* adalah metode perumusan persamaan diferensial dan aljabar secara bersamaan, dimana baris pertama merupakan persamaan diferensial, sedangkan baris ke dua merupakan persamaan aljabar yang hasil dari penyelesaiannya adalah berupa perubahan sudut pada tiap perubahan waktu.

Dengan bantuan perangkat lunak MATLAB^R penyelesaian metode *augmented* dapat dilakukan dengan metode *integrasi Runge-Kutta* menggunakan sistem perhitungan Ode (*ordinari differential equation*) dengan hasil penyelesaian berupa simulasi dan perubahan sudut tiap batang.

Integrasi Runge-Kutta adalah metode penyelesaian persamaan matematika fungsi diferensial dy/dx dengan syarat awal, secara berulang atau looping dengan dy/dx adalah fungsi x dan y yaitu :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \dots \dots \dots 2.51)$$

dengan syarat awal :

$$y(x_0) = y(0)$$

pada : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h$ dan seterusnya.

Untuk menyelesaikan persoalan dengan syarat awal tersebut, pada :

$$x_n = x_{n-1} + n.h, \dots \dots \dots 2.52)$$

untuk $n = 1$, dengan *runge kutta*, dilakukan perhitungan berulang untuk menentukan harga konstanta k_1, k_2, k_3, k_4 dan K_n berikut ini :

$$k_1 = hf(x_n, y_n), n=1 \dots \dots \dots 2.53)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), n=1 \dots \dots \dots 2.54)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), n = 1 \dots\dots\dots 2.55)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), n = 1 \dots\dots\dots 2.56)$$

$$K_{n-1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), n = 1 \dots\dots\dots 2.57)$$

sehingga :

$$y_n = y_{n-1} + K_{n-1}, n = 1 \dots\dots\dots 2.58)$$

untuk harga pendekatan x_n, y_n untuk $n = 2$ dan seterusnya berlaku prosedur yang sama.

2.1. Analisis Dinamik.

Untuk menganalisis kelakuan dinamik dari sistem, pertama-tama adalah menemukan harga dari *Lagrange undetermined multipliers* (λ) yang dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan yang diturunkan dari persamaan 2.48b) atau dapat diperoleh dengan menggunakan perumusan [Sugiharto B., 2001] :

$$\lambda = (B.a^{-1}.B^T)^{-1} \cdot \left(B.a^{-1} \cdot (f - H) - (g - Ci) \right) \dots\dots\dots 2.59)$$

Pada analisis dinamik juga diselesaikan dengan menggunakan program Matlab dengan hasil yang ditunjukkan adalah Grafik torsi pada setiap sambungan batang sesuai dengan hasil analisis kinematik.

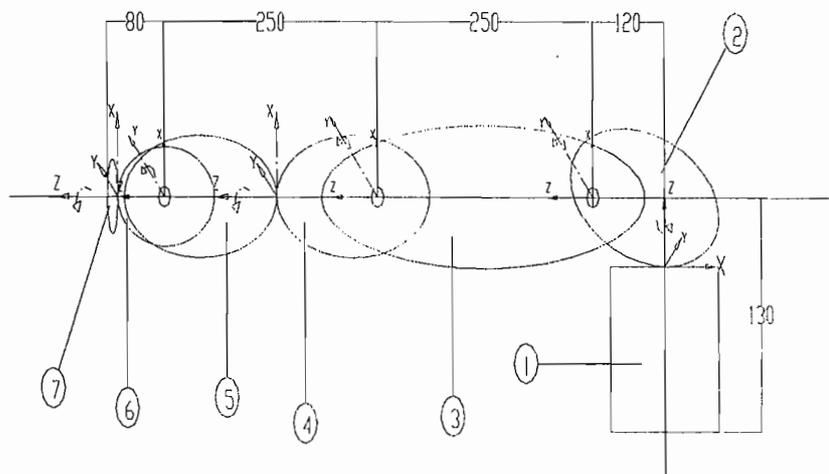
BAB III

ANALISIS KINEMATIK DAN DINAMIK GERAK KERJA

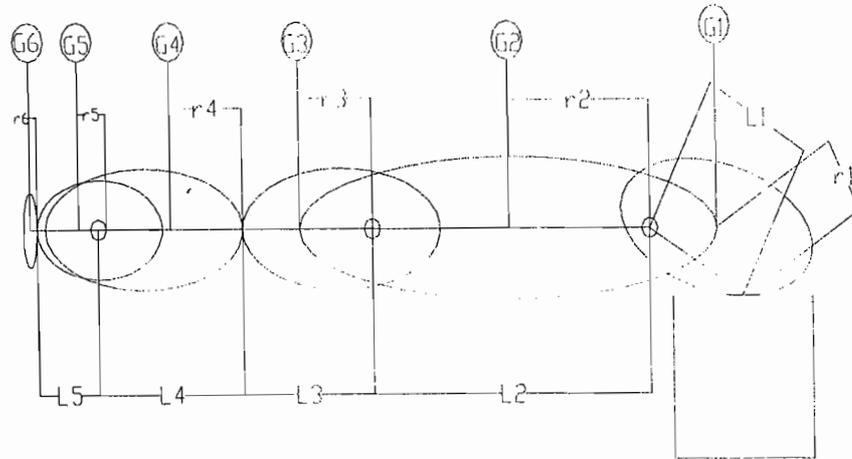
3.1. Pemodelan Robot Kawasaki FS 03.

Untuk mempermudah analisis kinematik dan dinamik ini, maka dibuatlah pemodelan robot Kawasaki yang terdiri dari 0 sampai dengan 6 batang. Masing-masing batang terdapat sistem koordinat lokal batang dengan menggunakan sistem koordinat kartesian tiga dimensi yang diletakan pada setiap sambungan antara batang satu dengan yang lainnya. Robot ini mempunyai 6 derajat kebebasan yang semuanya adalah rotasi. Hal ini disebabkan oleh jenis sambungannya yaitu sambungan revolusi, sehingga setiap sambungan batang hanya mempunyai 1 derajat kebebasan.

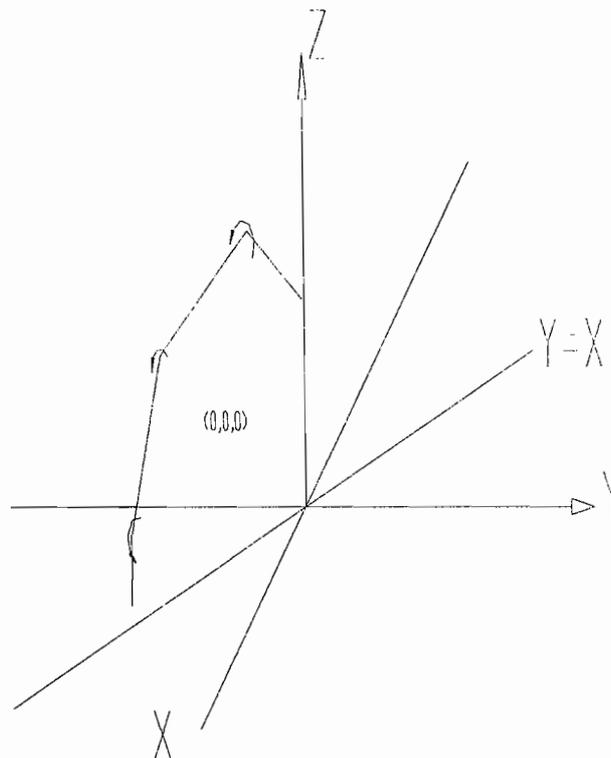
Penempatan sumbu-sumbu referensi relatif pada batang, dalam pemodelan ini ditunjukkan seperti pada Gambar 3.1a dan 3.1b, Pemodelan Batang. Batang 1, 4 dan 6 diputar pada sumbu z, sedangkan untuk batang 2, 3 dan 5 diputar pada sumbu y pada sistem koordinat relatif setiap batang.



Gambar 3.1a Pemodelan Robot Kawasaki FS03



Gambar 3.1b Pemodelan Robot Kawasaki FS03.



Gambar 3.2 Pemodelan Pengelasan $x = y$ pada Tiga Dimensi.

Pada proses pengerjaan pengelasan garis lurus pada bidang x-y dengan konstrain $y = x$, $z = c$, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1a, tidak semua

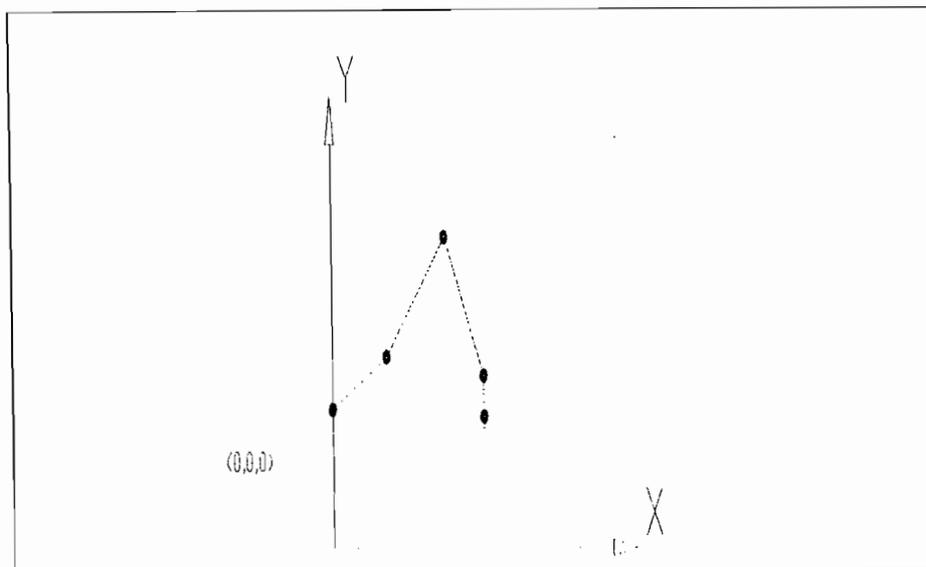
sambungan robot mengalami gerakan rotasi atau mengalami perubahan sudut sehingga dapat lebih disederhanakan dalam proses analisisnya. Sambungan-sambungan yang tidak mengalami perubahan sudut tersebut adalah :

1. Sambungan batang 0 dengan batang 1 dalam proses pengelasan tidak mengalami perubahan sudut sehingga $\theta_1 = \text{konstan}$. Karena konstan maka batang 0 dan 1 dianggap menjadi satu kesatuan batang.
2. Sambungan batang 3 dan 4 tidak mengalami rotasi atau $\theta_4 = 0$ sehingga batang 3 dan 4 dianggap menjadi satu kesatuan batang.
3. Begitu juga dengan sambungan batang 5 dan 6 tidak mengalami rotasi atau $\theta_6 = 0$, maka seperti halnya batang 3 dan 4, batang 5 dan 6 dianggap menjadi satu kesatuan batang.

Dengan adanya beberapa sudut yang tidak mengalami gerak rotasi, maka jumlah batang yang semula 6 dapat disederhanakan menjadi 3 batang kaku seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2.

Selanjutnya untuk mempermudah analisis dan penyelesaian, pemodelan dianalisis dalam 2 dimensi yaitu pada sumbu x dan y, dengan catatan bahwa sumbu z = y dan garis xy dianggap sebagai sumbu x.

Pada proses analisis, penomoran batang dimulai pada nomor 0 yang diberikan pada batang diam yang kemudian dilanjutkan pada batang-batang lainnya secara berurutan 1,2 dan 3.



Gambar 3.3 Pemodelan pada sumbu xy.

3.2. Analisis Persamaan Konstrain.

Dalam pengerjaan pengelasan lurus pada bidang, robot mengalami konstrain.

Persamaan konstrain yang terjadi pada pengelasan yaitu :

1. Persamaan konstrain yang pertama, diperoleh berdasarkan tinggi end effector robot dari dasar sampai pada ujung batang saat robot dalam posisi horisontal sehingga persamaan konstrainnya adalah :

$$l_1 \cdot \sin\theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = C \dots\dots\dots 3.1)$$

2. Persamaan konstrain yang kedua, didapat dari panjang lintasan yang akan dilas oleh robot yaitu pada sumbu $x = f(t)$ dari jangkauan terdekat sampai pada jangkauan terjauh atau sebaliknya, yang besarnya adalah $= P(t)$. Maka persamaan konstrainnya adalah :

$$l_1 \cdot \cos\theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = P(t) \dots\dots\dots 3.2)$$

3. Persamaan konstrain ketiga, diperoleh dari posisi batang 3 tegak lurus pada bidang pengelasan sehingga jumlah total dari ketiga sudut adalah sebesar 270° sehingga persamaan konstrainnya adalah :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 270^\circ \dots\dots\dots 3.3)$$

Kecepatan sudut dari keempat persamaan konstrain yang di dapat di atas, dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan-persamaan di atas terhadap t (waktu) pada turunan pertama yaitu seperti dibawah ini.

1. Turunan pertama dari persamaan 3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \dot{\theta}_1 l_1 \cdot \cos \theta_1 + \dot{\theta}_1 l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta}_2 l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_1 l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \dot{\theta}_2 l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &+ \dot{\theta}_3 l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \dot{\theta}_1 [l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\ &+ \dot{\theta}_2 [l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \dots\dots\dots 3.8) \\ &+ \dot{\theta}_3 l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

2. Turunan pertama dari persamaan 3.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} &= -\dot{\theta}_1 l_1 \cdot \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &- \dot{\theta}_2 l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_1 l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &- \dot{\theta}_2 l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \dot{\theta}_3 l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \dots\dots\dots 3.9) \\ &= -\dot{\theta}_1 [l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\ &- \dot{\theta}_2 [l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\ &- \dot{\theta}_3 l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

3. Turunan pertama dari persamaan 3.3).

$$\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0 \dots\dots\dots 3.10)$$

dengan demikian, dari turunan persamaan konstrain di atas yaitu persamaan 3.8) - 3.10), secara fungsi matrik, dapat ditulis dalam persamaan matrik konstrain Jacobi yang dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

yang secara sederhana dapat ditulis

$$[\mathbf{B}] \{\dot{\theta}\} = \{\dot{g}\}$$

dengan

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\dot{\theta}\} = \{\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3\}^T \quad \text{dan} \quad \{\dot{g}\} = \{0, p, 0\}^T$$

3.3. Analisis Gaya-gaya yang Bekerja Pada Sistem.

Gaya-gaya yang bekerja pada sistem berdasarkan analisis, adalah gaya luar yaitu gaya dari beban sebesar 3 kg, dan gaya dari gravitasi setiap batang. Gaya gravitasi yang bekerja pada sistem adalah :

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \{F_3\} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

Besarnya beban akibat gaya gravitasi yang bekerja pada sistem dapat dianalisis dengan menggunakan persamaan 2.26.b).

Sedangkan beban gaya akibat adanya beban sebesar 3 kg yang bekerja pada sistem, dapat dianalisis dengan persamaan 2.28). Besar beban yang bekerja pada sistem adalah :

$$\{F_3\} = [0 \quad 0 \quad -w]^T$$

Beban pada sistem terdapat pada *end-efektor*, sehingga beban ditempatkan pada ujung batang 3, jadi $F_k = F_3$.

Gaya yang bekerja pada sistem adalah jumlah total dari gaya gravitasi dan gaya luar sebesar 3 kg ,yaitu :

$$\{f\} = \left(\sum_{k=1}^3 [V_w^k] \{F_k\} \right) + [V_w^3] \{F_3\}$$

3.4. Analisis Massa dan Inersia Batang.

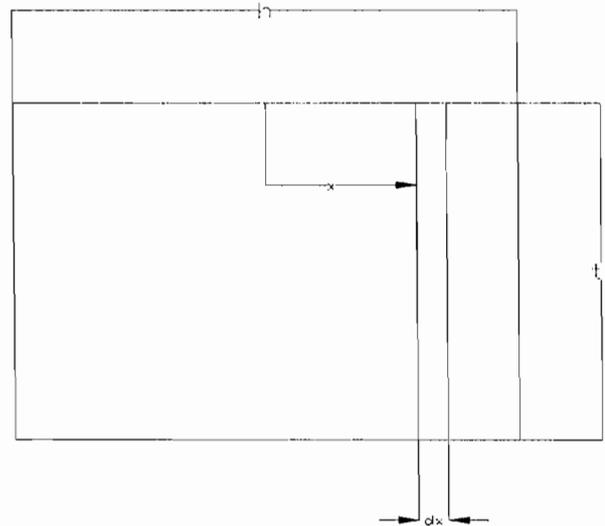
Analisis inersia pada batang dilakukan secara berhubungan satu sama lain, yaitu bahwa batang yang dianalisis pada kondisi yang bersambungan satu sama lain agar mempermudah analisisnya. Batang-batang tersebut dapat diasumsikan sebagai batang berbentuk balok persegi dan tabung, sehingga dengan

menggunakan persamaan-persamaan 2.24) sampai dengan 2.30) inersia lokal pada setiap batang dapat diperoleh.

Dalam analisis inersia batang, batang diasumsikan terbuat dari bahan aluminium murni. Sesuai Tabel 3.4, pada lampiran, aluminium mempunyai massa jenis (ρ) bahan sebesar 2707 kg/m^3 .

Analisis inersia batang, sesuai dengan pemodelan dan peletakan kerangka sumbu relatif, dilakukan terhadap sumbu yang sama yaitu sumbu y. Analisis inersia dan massa yang dilakukan pada batang-batang yang berpengaruh terhadap kinematik dan dinamik pada proses pengelasan seperti ditunjukkan pada Gambar 3.3.

Batang 1 diasumsikan berbentuk balok segi empat, maka inersia batang 1 pada pusat massa batangnya adalah,



Gambar 3.4 Sketsa Batang 1.

$$\begin{aligned}
 I_m &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}h} x^2 \cdot da \right) \cdot \rho \cdot t_2 \\
 &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}h} x^2 \cdot t_1 \cdot dl \right) \cdot \rho \cdot t_2 \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}h} \cdot t_1 \cdot \rho \cdot t_2 \quad \dots\dots\dots 3.1) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}h \right)^3 - 0 \right) \cdot t_1 \cdot \rho \cdot t_2 \\
 &= \frac{1}{24} h^3 \cdot t_1 \cdot \rho \cdot t_2
 \end{aligned}$$

sedangkan inersia untuk batang sepanjang h pada sumbu putar di tengah inersia massanya adalah 2 kali dari inersia massa untuk $\frac{1}{2}$ bagian batang atau untuk $\frac{1}{2}$ h. sehingga inersia massanya adalah :

$$\begin{aligned}
 I_m &= 2 \left(\frac{1}{24} h^3 t_1 \cdot \rho \cdot t_2 \right) \quad \dots\dots\dots 3.2) \\
 I_m &= \left(\frac{1}{12} h^3 t_1 \cdot \rho \cdot t_2 \right)
 \end{aligned}$$

Massa batang adalah :

$$m = h \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \rho \quad \dots\dots\dots 3.3)$$

dengan catatan:

$h = l_{b1} =$ panjang batang.(m)

$t_1 =$ lebar batang.(m)

$t_2 =$ tinggi batang.(m)

$\rho =$ massa jenis bahan. (kg/m^3)

Jadi inersia batang 1 pada titik pusat massanya adalah :

$$Im_1 = \frac{1}{12} h^3 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \rho = \frac{1}{12} m \cdot l_{b1}^2$$

Untuk massa pada batang 1 dengan diketahui besar dimensinya yaitu :

$$H = l_{b1} = \text{panjang batang. (m)} = 0.25 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0.17 \text{ m}$$

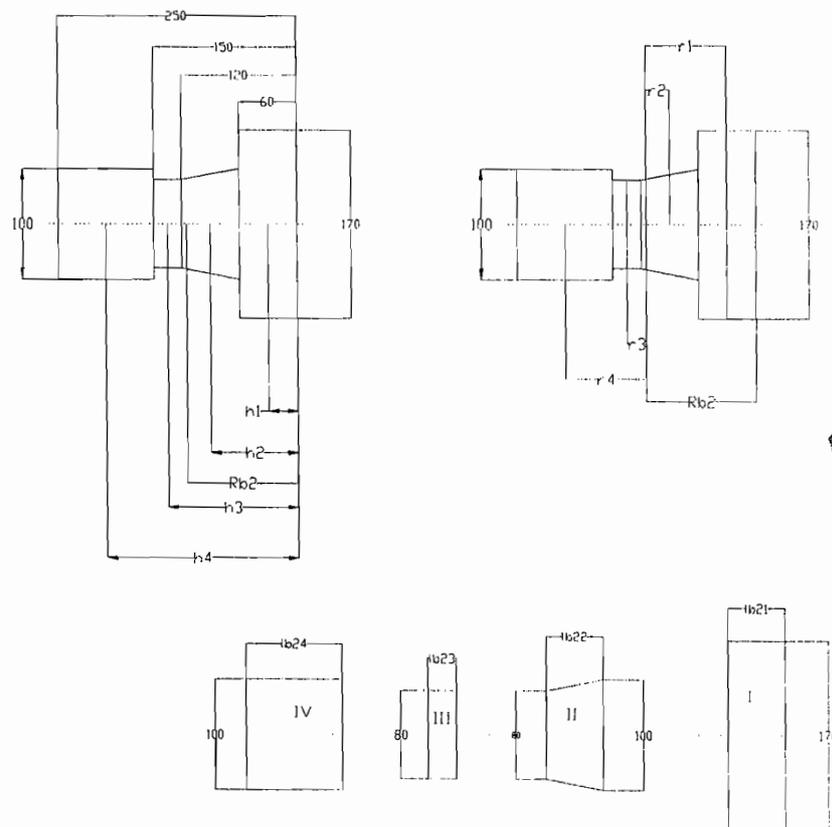
$$t_2 = \text{tinggi batang. (m)} = 0.11 \text{ m}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2.707 \text{ kg/m}^3.$$

Maka massa batang 1 dengan menggunakan persamaan 3.3) adalah :

$$m = 0.25 \times 0.17 \times 0.11 \times 2707$$

$$m = 12,65 \text{ kg}$$



Gambar 3.5 Seketsa Batang 2.

Untuk menganalisis inersia batang 2, yang bentuknya ditunjukkan seperti pada Gambar 3.5, batang 2 dianalisis dengan membagi batang menjadi 4 jenis bentuk batang yang berbeda yang saling bersambungan maka analisis inersia dilakukan pada tiap-tiap bagian batang yang berbeda tersebut.

Dalam analisis bagian batang 2 bagian yang pertama, batang dianggap sebagai sebuah balok, sehingga analisis inersia batang sama dengan batang 1. Akan tetapi dimensi dari batang 2 bagian pertama ini berbeda dengan batang 1. Dimensi dari batang 2 bagian batang pertama ini adalah:

$$l_{b_{21}} = \text{panjang batang. (m)} = 0.06 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0.17 \text{ m}$$

$$t_2 = \text{tebal batang. (m)} = 0.11 \text{ m}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3.$$

sehingga massa batang 2 bagian pertama adalah :

$$m_{b_{21}} = 0,06 \times 0,17 \times 0,11 \times 2707$$

$$m_{b_{21}} = 3 \text{ kg.}$$

Bagian batang yang kedua adalah bagian batang yang berbentuk limas. Untuk mempermudah analisis, bentuk limas disederhanakan menjadi balok sehingga analisis inersianya menjadi sama dengan analisis inersia batang satu atau sama dengan analisis pada batang 2 bagian pertama. Demikian halnya dengan bagian batang yang lainnya juga berbentuk sama dengan bagian batang yang pertama. Yang membedakan dari masing-masing batang adalah dimensi dari batang sehingga dengan demikian setiap batang mempunyai massa yang berbeda.

Massa batang 2 bagian batang yang ke 2 dengan dimensi batang :

$$L_{b22} = \text{panjang batang. (m)} = 0,06 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0,1 \text{ m}$$

$$t_2 = \text{tebal batang. (m)} = 0,11 \text{ m.}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3.$$

Maka massa batangnya adalah :

$$m_{b_{22}} = 0,06 \times 0,1 \times 0,11 \times 2707$$

$$m_{b_{22}} = 1,78 \text{ kg.}$$

Massa batang 2 bagian batang yang ke 3 dengan dimensi batang :

$$l_{b23} = \text{panjang batang. (m)} = 0,03 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0,08 \text{ m}$$

$$t_2 = \text{tebal batang. (m)} = 0,11 \text{ m.}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3.$$

Maka massa batangnya adalah :

$$m_{b_{23}} = 0,03 \times 0,08 \times 0,11 \times 2707$$

$$m_{b_{23}} = 0,7 \text{ kg}$$

Massa batang 2 bagian batang yang ke 4 dengan dimensi batang :

$$L_{b24} = \text{panjang batang. (m)} = 0,1 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0,1 \text{ m}$$

$$t_2 = \text{tebal batang. (m)} = 0,11 \text{ m.}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3.$$

Maka massa batang 2 bagian ketiga adalah :

$$m_{b_{24}} = 0,1 \times 0,1 \times 0,11 \times 2707$$

$$m_{b_{24}} = 2,98 \text{ kg.}$$

jadi massa total dari batang 2 adalah :

$$m_t = m_{b_{21}} + m_{b_{22}} + m_{b_{23}} + m_{b_{24}}$$

$$m_t = 3 + 1,78 + 0,7 + 2,98.$$

$$= 8,5 \text{ kg.}$$

titik pusat massa batang 2 dapat diketahui dengan :

$$r_{b_2} = \frac{m_{b_{21}} \cdot h_1 + m_{b_{22}} \cdot h_2 + m_{b_{23}} \cdot h_3 + m_{b_{24}} \cdot h_4}{m_t}$$

dengan catatan bahwa h adalah jarak dari ujung batang ke titik pusat massa bagian batang. Jadi besarnya jarak titik pusat massa batang 2 (r_{b_2}) adalah :

$$h_1 = 0,03 \text{ m}, h_2 = 0,09 \text{ m}, h_3 = 0,15 \text{ m}, h_4 = 0,2 \text{ m.}$$

$$r_{b_2} = \frac{(3 \times 0,03) + (1,78 \times 0,09) + (0,7 \times 0,15) + (2,98 \times 0,2)}{8,5}$$

$$r_{b_2} = \frac{0,09 + 0,16 + 0,11 + 0,59}{8,5} = \frac{2,764 \cdot 10^{-3}}{8,5} = 0,11 \text{ m}$$

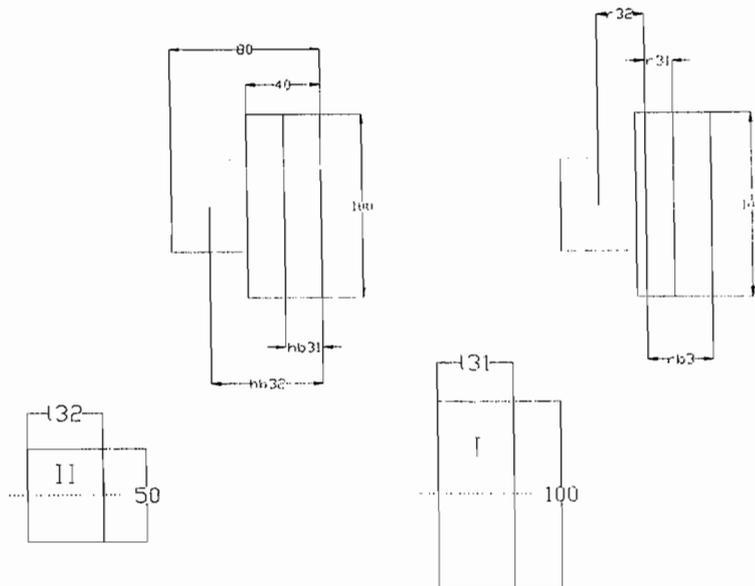
Inersia massa pada pusat massa batang 2 dengan menggunakan teori sumbu sejajar dapat diketahui sebesar :

$$I_{m_2} = \frac{1}{12} \cdot m_{b_1} \cdot l_{b_{21}}^2 + m_{b_1} \cdot r_1^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{b_2} \cdot l_{b_{22}}^2 + m_{b_2} \cdot r_2^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{b_3} \cdot l_{b_{23}}^2 + m_{b_3} \cdot r_3^2 \\ + \frac{1}{12} \cdot m_{b_4} \cdot l_{b_{24}}^2 + m_{b_4} \cdot r_4^2$$

dengan r_n adalah besar jarak dari pusat massa bagian batang ke titik pusat massa batang dua dan $l_{b_{2n}}$ adalah panjang bagian batang ke n ($n=1,2,3,4$). Besarnya jarak dari titik pusat massa bagian batang ke titik pusat massa batang batang 2 (r_n) untuk setiap bagian batang :

$$r_1 = 0,04 \text{ m}, r_2 = 0,02 \text{ m}, r_3 = 0,065 \text{ m}, r_4 = 0,13 \text{ m}$$

Analisis inersia pada batang 3 seperti yang ditunjukkan Gambar 3.6, batang dibagi menjadi dua bagian batang yang berbeda yaitu berbentuk balok dan tabung.



Gambar 3.6 Sketsa Batang 3.

Analisis bagian batang yang pertama, batang dianggap sebagai sebuah balok, sehingga analisis inersia massa batang 3 bagian 1 sama dengan batang 1 yaitu :

$$Im_{31} = \frac{1}{12} h^3 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \rho = \frac{1}{12} m \cdot l b_{31}^2$$

Akan tetapi mempunyai dimensi batang yang berbeda, sehingga massa batang 3 bagian pertama dengan dimensi :

$$l_{b31} = \text{panjang batang. (m)} = 0.04 \text{ m}$$

$$t_1 = \text{lebar batang. (m)} = 0.1 \text{ m}$$

$$t_2 = \text{tebal batang. (m)} = 0.11 \text{ m}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3.$$

massa batangnya adalah :

$$mb_{31} = 0,04 \times 0,1 \times 0,11 \times 2707$$

$$mb_{31} = 1,19 \text{ kg.}$$

Bagian batang yang ke 2 adalah bagian batang yang berbentuk tabung.

Inersia dan massa dari bagian batang pada titik pusat massa adalah :

$$\begin{aligned} I_{m_{32}} &= 2 \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot da \right) \cdot \rho. \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dx \right) \cdot \rho. \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{l}{2}} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot l^3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \end{aligned}$$

dengan

$$m = \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot l$$

maka

$$I_{mb_{32}} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$$

Massa dari bagian batang ini, dengan dimensi :

$$l_{b_{32}} = \text{panjang} = 0,04 \text{ m.}$$

$$r = \text{jari-jari (r)} = 0,025 \text{ m.}$$

$$\rho = \text{massa jenis bahan. (kg/m}^3\text{)} = 2707 \text{ kg/m}^3$$

adalah :

$$\begin{aligned}
 m_{b_{32}} &= \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot l_{b_{32}} \\
 m_{b_{32}} &= 3,14 \times (0,025)^2 \times 2707 \times 0,04 \\
 m_{b_{32}} &= 0,21 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

sehingga massa total batang empat adalah $1,19 + 0,21 = 1,4$ kg.

Jarak titik pusat massa batang 3 dapat diketahui dengan :

$$r_{b_3} = \frac{m_{b_{31}} \cdot h_{31} + m_{b_{32}} \cdot h_{32}}{m}$$

dengan h adalah jarak dari ujung batang ke titik pusat massa bagian batang.

$$h_{31} = 0,02 \text{ m}, h_{32} = 0,06 \text{ m}$$

$$r_{b_3} = \frac{(1,19 \times 0,02) + (0,21 \times 0,06)}{1,4} = \frac{0,0364}{1,4} = 0,026 \text{ m} \approx 0,03 \text{ m}.$$

Inersia massa batang 3 pada pusat massa dapat diperoleh dengan :

$$I_{m_3} = \frac{1}{12} \cdot m_{b_{31}} \cdot l_{b_{31}}^2 + m_{b_{31}} \cdot r_{31}^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{b_{32}} \cdot l_{b_{32}}^2 + m_{b_{32}} \cdot r_{32}^2$$

dengan r adalah jarak pusat massa batang 3 ke pusat massa bagian batang yaitu sebesar 0,01 m jarak r_{31} dan 0,03 m jarak r_{32} .

Selain itu, robot juga mengalami pembebanan sebesar 3 kg, sehingga inersia pada setiap sambungan harus ditambah inersia akibat beban 3 kg tersebut. Dengan menggunakan teori sumbu sejajar (persamaan 2.29.c), inersia massa akibat beban pada tiap sambungan dapat diperoleh. Inersia total pada setiap sambungan dapat diperoleh dengan menambahkan inersia akibat beban ini pada inersia massa batang.

3.5. Analisis Kinematik.

Untuk menyelesaikan persamaan gerak, tahap pertama yang harus dilakukan adalah mencari matriks a , b , c , f_i dengan menggunakan persamaan 2.32) sampai 2.34). Dengan menggunakan bantuan perangkat lunak MATLAB^R, yaitu menggunakan program pada lampiran A, maka dapat diperoleh matriks tersebut secara simbolik sebagai berikut :

1. Matriks gaya F_i .

Gaya yang bekerja pada batang adalah gaya gravitasi dari setiap batang ditambah gaya luar yaitu beban maksimal yang mampu diangkat oleh robot. Dari perhitungan dengan menggunakan bantuan program MATLAB^R pada lampiran A didapat matrik gaya ($F_{9 \times 1}$). Dengan menghilangkan elemen berharga 0, didapat elemen matrik [$F_{3 \times 1}$] yaitu :

$$f(1,1) = 1/2.l_{b1}. \cos(\ddot{\theta}_1 .t) . m_{b1}.g+(l_{b1}. \cos(\ddot{\theta}_1 .t)+r_{b2}. \cos(\theta_2 + \ddot{\theta}_1 .t)). m_{b2}.g+(l_{b1}. \cos(\theta_1)+l_{b2}. \cos(\theta_2 + \theta_1)+ r_{b3}. \cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1)). m_{b3}.g+(l_{b1}. \cos(\theta_1)+ l_{b2}. \cos(\theta_2 + \theta_1)+ l_{b2}. \cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1)).w;$$

$$f(2,1) = r_{b2}. \cos(\theta_2 + \theta_1) . m_{b2}.g+(l_{b2}. \cos(\theta_2 + \theta_1)+ r_{b3}. \cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1)). m_{b3}.g+ l_{b2}.(\cos(\theta_2 + \theta_1)+\cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1)).w;$$

$$f(3,1) = r_{b3}. \cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1) . m_{b3}.g+ l_{b2}. \cos(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1).w$$

2. Koefisien matrik a.

Koefisien matrik \hat{a} dengan menggunakan program yang sama didapat matrik $[a]_{9 \times 9}$. Dengan menghilangkan elemen matrik yang berharga 0, didapat matrik $[a]_{3 \times 3}$ yaitu :

$$\begin{aligned}
 a(1,1) &= m_{b2} \cdot r_{b2}^2 + 2 \cdot m_{b2} \cdot r_{b2} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_2) + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot r_{21}^2 + 1/12 \cdot \\
 & m_{b2} \cdot l_{b22} + m_{b2} \cdot r_{22}^2 + 1/3 \cdot m_{b1} \cdot l_{b1}^2 + 1/12 \cdot m_{b23} \cdot l_{b23} + m_{b23} \cdot r_{23}^2 + 1/12 \cdot \\
 & m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2 + w \cdot p_2^2 + 1/12 \cdot \\
 & m_{b24} \cdot l_{b24} + m_{b24} \cdot r_{24}^2 + m_{b3} \cdot l_{b1}^2 + w \cdot p_1^2 + m_{b3} \cdot l_{b2}^2 + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + \\
 & m_{b2} \cdot l_{b1}^2 + 2 \cdot m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_2) + 2 \cdot m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) + 2 \cdot m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot \\
 & l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) \\
 a(1,2) &= m_{b2} \cdot r_{b2} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_2) + m_{b2} \cdot r_{b2}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot r_{21}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot \\
 & l_{b22} + m_{b2} \cdot r_{22}^2 + 1/12 \cdot m_{b23} \cdot l_{b23} + m_{b23} \cdot r_{23}^2 + 1/12 \cdot m_{b24} \cdot l_{b24} + m_{b24} \cdot \\
 & r_{24}^2 + w \cdot p_2^2 + m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_2) + m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) + m_{b3} \cdot \\
 & l_{b2}^2 + 2 \cdot m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot \\
 & r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2 \\
 a(1,3) &= m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) + m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot \\
 & l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2 \\
 a(2,1) &= m_{b2} \cdot r_{b2} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_2) + m_{b2} \cdot r_{b2}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot r_{21}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot \\
 & l_{b22} + m_{b2} \cdot r_{22}^2 + 1/12 \cdot m_{b23} \cdot l_{b23} + m_{b23} \cdot r_{23}^2 + 1/12 \cdot m_{b24} \cdot l_{b24} + m_{b24} \cdot \\
 & r_{24}^2 + w \cdot p_2^2 + m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_2) + m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) + m_{b3} \cdot \\
 & l_{b2}^2 + 2 \cdot m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot \\
 & r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2 \\
 a(2,2) &= m_{b2} \cdot r_{b2}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot l_{b21} + m_{b2} \cdot r_{21}^2 + 1/12 \cdot m_{b2} \cdot l_{b22} + m_{b2} \cdot \\
 & r_{22}^2 + 1/12 \cdot m_{b23} \cdot l_{b23} + m_{b23} \cdot r_{23}^2 + 1/12 \cdot m_{b24} \cdot l_{b24} + m_{b24} \cdot r_{24}^2 + w \cdot p_2^2 + \\
 & m_{b3} \cdot l_{b2}^2 + 2 \cdot m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot \\
 & r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2
 \end{aligned}$$

$$a(2,3) = m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2$$

$$a(3,1) = m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) + m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2$$

$$a(3,2) = m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b2} \cdot \cos(\theta_3) + m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2$$

$$a(3,3) = m_{b3} \cdot r_{b3}^2 + 1/12 \cdot m_{b31} \cdot l_{b31} + m_{b31} \cdot r_{31}^2 + 1/12 \cdot m_{b32} \cdot l_{b32} + m_{b32} \cdot r_{32}^2 + w \cdot p_3^2$$

3. Koefisien matrik b dengan menggunakan program yang sama didapat matrik

$[b]_{9 \times 9}$ dengan menghilangkan kan elemen matriks berharga 0, didapat matriks

$[b]_{3 \times 3}$ yaitu :

$$b(1,1) = -m_{b2} \cdot l_{b1} \cdot r_{b2} \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot l_{b2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3)$$

$$b(1,2) = -m_{b2} \cdot l_{b1} \cdot r_{b2} \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 - m_{b2} \cdot l_{b1} \cdot r_{b2} \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_1 - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot l_{b2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3)$$

$$b(1,3) = -m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_2 - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1 - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b1} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3)$$

$$b(2,1) = m_{b2} \cdot l_{b1} \cdot r_{b2} \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_1 + m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3) + m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_2)$$

$$b(2,2) = -m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3)$$

$$b(2,3) = -m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1 - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_2 - m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3)$$

$$b(3,1) = m_{b3} \cdot r_{b3} \cdot l_{b1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) + m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_2 + m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1$$

$$b(3,2) = m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_2 + m_{b3} \cdot l_{b2} \cdot r_{b3} \cdot \sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1$$

4. Harga matriks C adalah 0. Hal ini disebabkan oleh karena batang berputar pada arah sumbu yang sama yaitu sumbu y.

Dari hasil perhitungan koefisien matriks a, b, c, dan f, kemudian disusun kedalam persamaan gerak metode *Augmented*, persamaan 2.42),

$$\begin{bmatrix} a & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ G \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \text{ dengan}$$

$$\begin{bmatrix} a & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks massa}$$

$$\text{dan } \begin{Bmatrix} H \\ G \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \text{ matriks gaya.}$$

Dengan menggunakan metode integrasi *Runge-kutta*, pada Matlab yaitu dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial Ode15s, seperti pada program Matlab pada lampiran B, persamaan aljabar tersebut dapat diselesaikan. Hasil dari penyelesaiannya adalah perubahan sudut tiap batang.

Perlengkapan pengelasan yang digunakan pada robot ini adalah las jenis otogen. Dengan menggunakan las otogen ini seorang operator tidak harus berulang-ulang mengganti elektroda sehingga lebih efektif. Mesin las otogen ini juga mempunyai pengaturan kecepatan keluaran elektroda dari 1 sampai 10.

Dalam hal ini lamanya waktu untuk pengelasan sangat tergantung pada kecepatan yang diberikan pada pengelasan, semakin besar kecepatan yang diberikan maka semakin kecil waktu untuk pengelasan dan sebaliknya semakin kecil kecepatan yang diberikan semakin lama waktu yang diperlukan untuk pengelasan.

Dalam analisis ini kecepatan pengelasan yang digunakan (p) adalah sebesar 0,01 m/s dengan asumsi bahwa dengan kecepatan tersebut mampu menghasilkan pengelasan yang optimum dengan mengatur kecepatan keluaran elektroda yang digunakan.

Dengan menggunakan Program penyelesaian integrasi persamaan diferensial Ode15s, dapat diperoleh hasil kinematika dan gerak simulasinya dengan beberapa kondisi awal yang diberikan di atas. Kondisi kinematik digambarkan pada saat 0, 10, 20, 30, 40,50, 60, 70, 80, 90, dan 100 persen dari waktu pengelasan. Waktu pengelasan yang diberikan adalah waktu maksimal yang mampu ditempuh batang untuk melakukan pengelasan. (Sugiharto B, Kaji Teoritik Gerak Manusia Dengan Sistem Benda Jamak, 2001).

Untuk menunjukkan hasil analisis kinematik diambil tiga kondisi awal yang mewakili posisi pengelasan yang efektif yaitu :

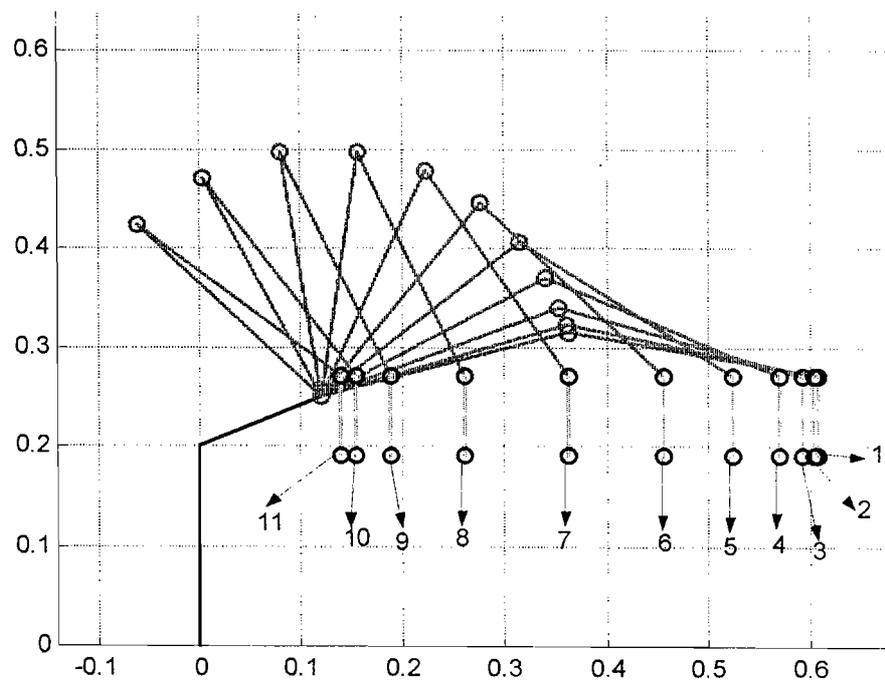
1. $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 335^\circ$, $\theta_3 = 280^\circ$
2. $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 325^\circ$, $\theta_3 = 275^\circ$
3. $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 315^\circ$, $\theta_3 = 270^\circ$

Kondisi awal pengelasan yang diberikan di atas adalah posisi pengelasan pada titik-titik pengelasan terjauh yang mampu di jangkau oleh robot.

Dari ketiga kondisi yang mewakili, dilakukan analisis dengan menggunakan waktu pengelasan yang sama yaitu selama 4,5 s dengan kecepatan yang sama yaitu 0,01 m/s, dan hasilnya disajikan pada Tabel 3.1 sampai 3.3 dan Gambar 3.7 sampai Gambar 3.9 dibawah ini:

Tabel 3.1 Hasil Analisis Kinematik Kondisi Awal 1

Time	teta1	teta2	teta3
0	15.0000	335.0000	280.0000
0.4500	16.5540	331.9238	281.5222
0.9000	21.1541	322.8418	286.0041
1.3500	28.6561	308.1166	293.2273
1.8000	38.8432	288.3355	302.8213
2.2500	51.3924	264.4794	314.1282
2.7000	65.8689	238.2945	325.8366
3.1500	81.8543	213.3577	334.7881
3.6000	99.2347	196.3607	334.4046
4.0500	117.6261	189.1653	323.2085
4.5000	136.2851	186.4213	307.2936



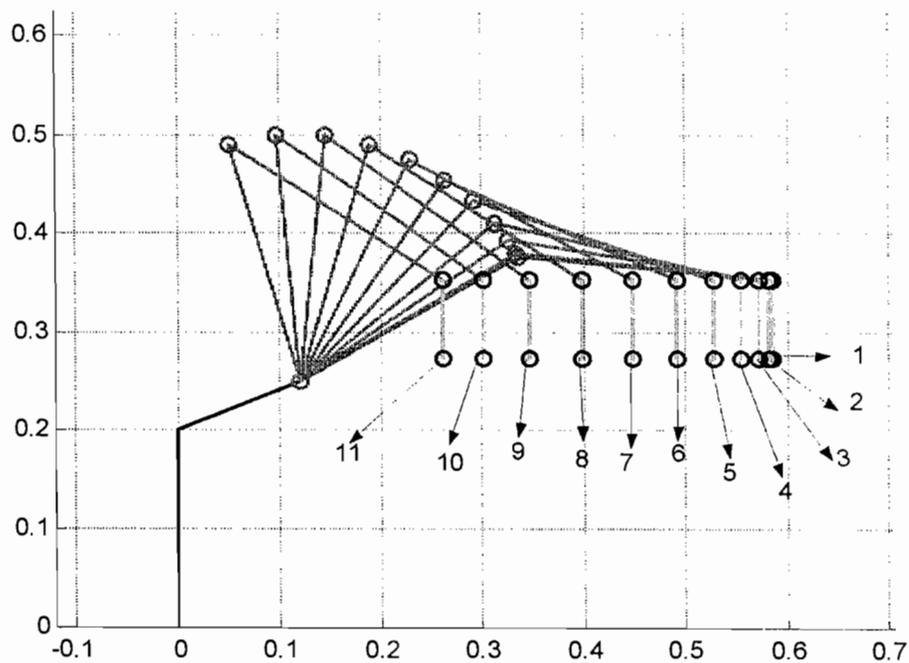
Gambar 3.7 Simulasi Kondisi Awal 1

Keterangan

No	% Waktu	No	% Waktu
1	0	7	60
2	10	8	70
3	20	9	80
4	30	10	90
5	40	11	100
6	50		

Tabel 3.2 Hasil Analisis Kinematik Kondisi Awal 2

Time	teta1	teta2	teta3
0	30.0000	325.0000	275.0000
0.4500	31.1814	322.7970	276.0217
0.9000	34.5701	316.5380	278.8919
1.3500	39.8591	306.9582	283.1827
1.8000	46.7381	294.8779	288.3840
2.2500	54.9093	281.1745	293.9161
2.7000	64.0823	266.8017	299.1160
3.1500	73.9789	252.7695	303.2516
3.6000	84.3465	240.0415	305.6120
4.0500	94.9697	229.3405	305.6898
4.5000	105.6761	220.9597	303.3642



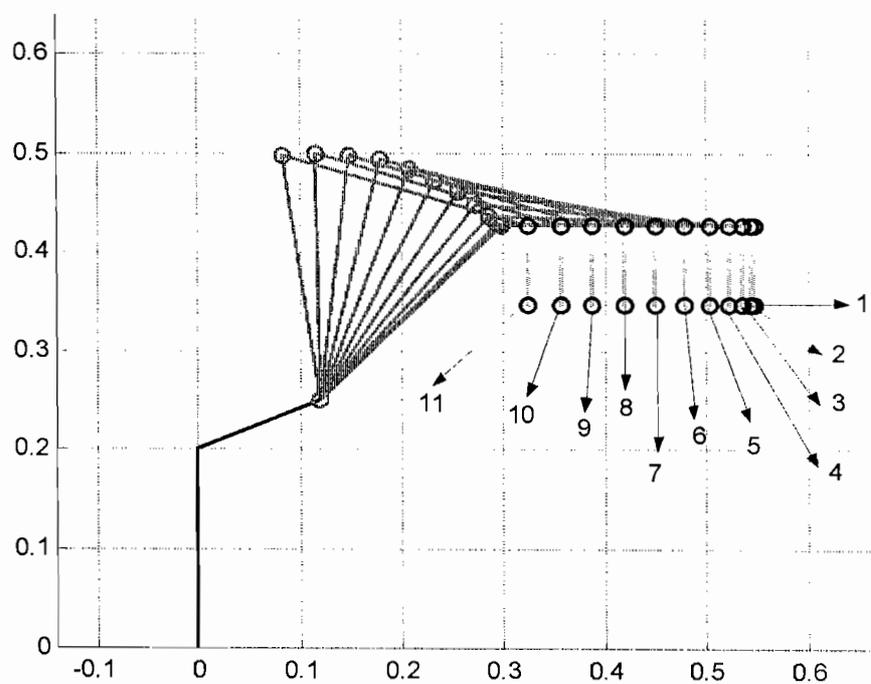
Gambar 3.8 Simulasi Kondisi Awal 2

Keterangan

No	% Waktu	No	% Waktu
1	0	7	60
2	10	8	70
3	20	9	80
4	30	10	90
5	40	11	100
6	50		

Tabel 3.3 Hasil Analisis Kinematik Kondisi Awal 3

Time	teta1	teta2	teta3
0	45.0000	315.0000	270.0000
0.4500	45.8975	313.4728	270.6297
0.9000	48.4502	309.1844	272.3654
1.3500	52.3647	302.7704	274.8649
1.8000	57.3485	294.9009	277.7506
2.2500	63.1516	286.1815	280.6669
2.7000	69.5631	277.1428	283.2942
3.1500	76.4053	268.2351	285.3596
3.6000	83.5305	259.8194	286.6501
4.0500	90.8194	252.1554	287.0252
4.5000	98.1794	245.3979	286.4227



Gambar 3.9 Simulasi Kondisi Awal 3

Keterangan

No	% Waktu	No	% Waktu
1	0	7	60
2	10	8	70
3	20	9	80
4	30	10	90
5	40	11	100
6	50		

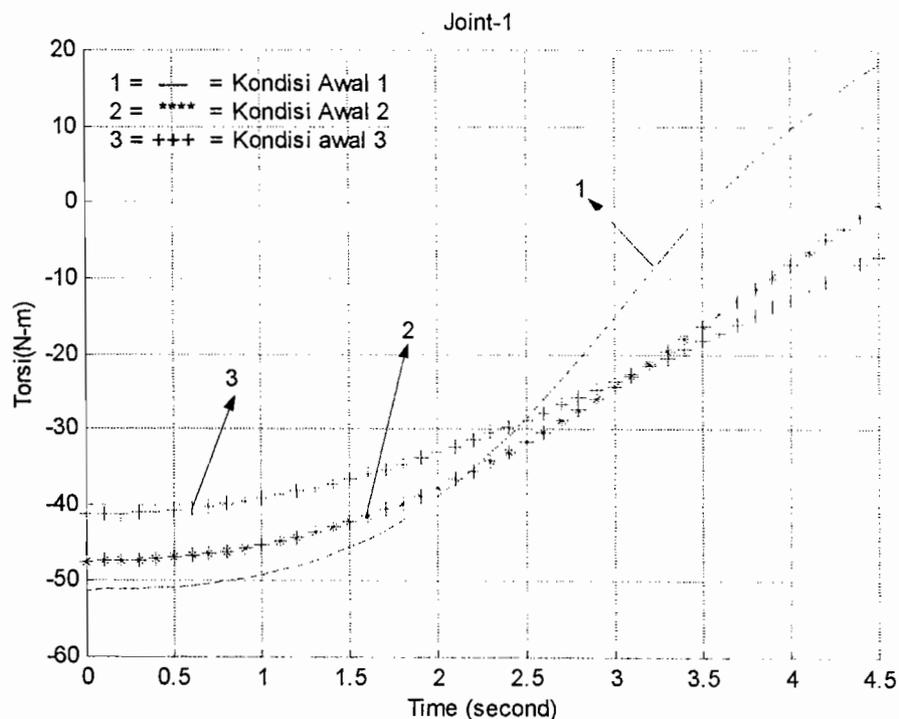
3.6. Analisis Dinamik.

Pada analisis dinamik yang pertama kali dilakukan adalah mencari harga λ (*Lagrange undetermined multipliers*) yang dapat diperoleh dengan mensubsitusikan hasil analisis kinematik ke persamaan 2.49) atau 2.50) ,

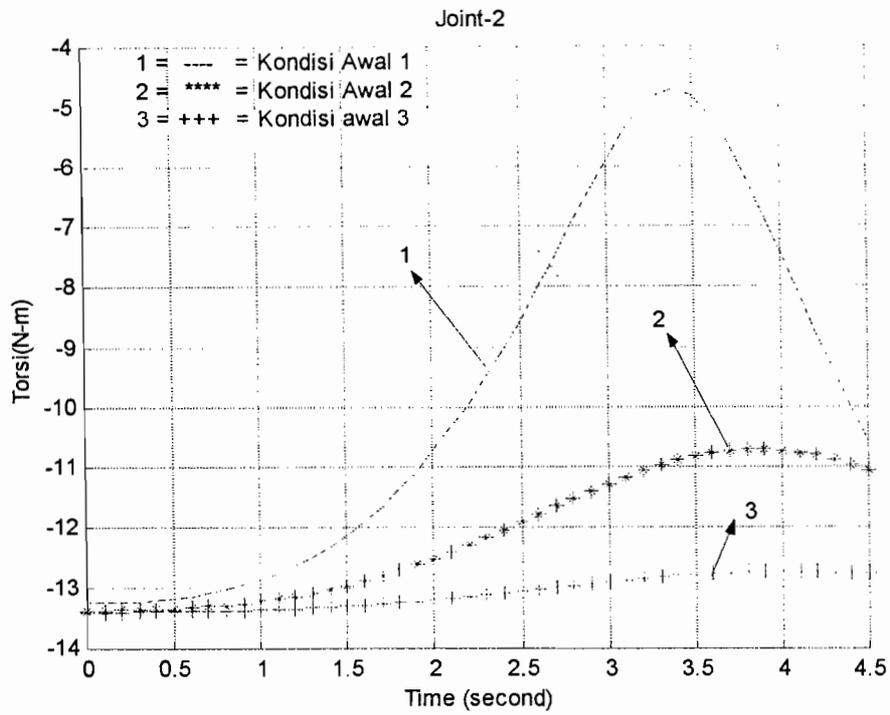
$$\lambda = (B^T)^{-1} \left((f - H) - a \cdot B^T \cdot (g - G) \right)$$

yang kemudian hasilnya disubsitusikan kembali ke persamaan 2.39) sehingga didapatkan besar gaya pada yang bekerja pada sistem. Dari gaya tersebut dapat dapat diperoleh besar torsi yang bekerja pada setiap sambungan.

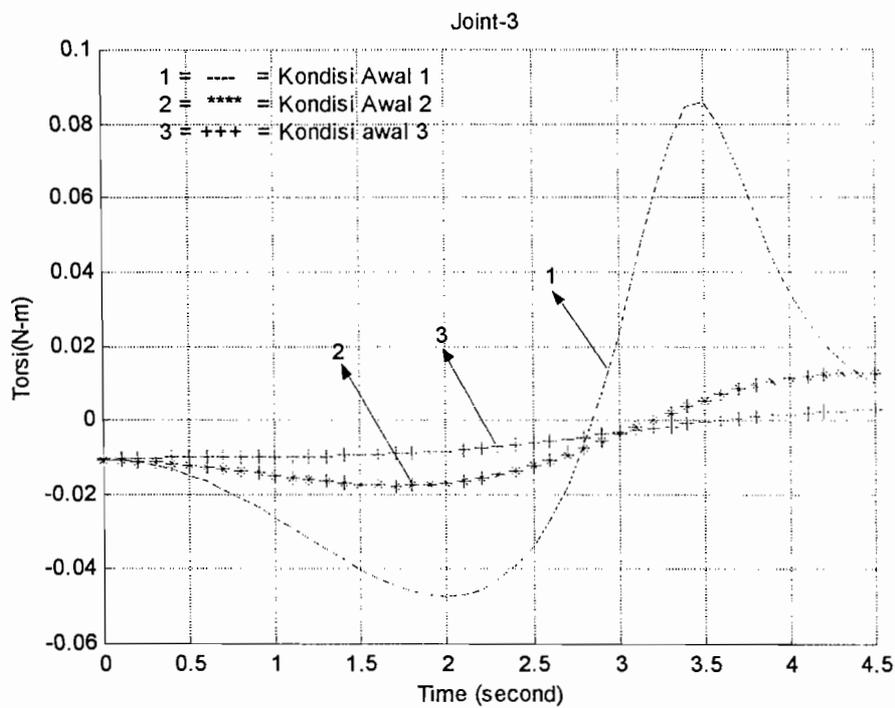
Dari hasil kinematik kondisi awal di atas didapatkan Grafik torsi pada setiap sambungan yang ditunjukkan pada Gambar 3.10 sampai Gambar 3.12.



Gambar 3.10 Grafik Momen Sambungan 1



Gambar 3.11 Grafik Momen Sambungan 2



Gambar 3.12 Grafik Momen Sambungan 3

Dari Grafik ditunjukkan, torsi terbesar yang dialami sistem adalah kondisi awal pengelasan yang pertama.

Perbedaan besarnya harga torsi antara sambungan satu dengan yang lainnya, disebabkan karena besar inersia massa batang yang ditanggung pada setiap sambungan. Torsi pada sambungan 1 menanggung inersia massa dari batang 1,2,dan 3, sedangkan torsi pada sambungan 2 hanya menanggung inersia massa batang 2 dan 3.

Gambar Grafik yang menunjukkan garis lengkung bahkan melewati harga torsi 0, dari harga torsi tertinggi pada waktu $t = 0$ ke harga torsi terendah pada waktu $t = \text{maks}$ disebabkan oleh perubahan sudut yang terjadi pada setiap perubahan waktu yang dialami sehingga menyebabkan perbedaan jarak pengelasan dari titik sambungan batang ke titik pusat massa sebagai beban dan beban *end efektor*.

Harga torsi yang menunjukkan harga yang positif (+), serta negatif (-) pada grafik dikarenakan oleh penggunaan fungsi cosinus dan sinus, dimana besarnya berbeda pada setiap kuadran yaitu antara 1 sampai -1

Untuk torsi pada sambungan 1 pada ketiga kondisi awal mempunyai harga maksimal pada kondisi awal yang pertama sebesar 52 Nm. Dan pada sambungan batang kedua torsi terbesar 13,5.

Dari gambar simulasi yang menunjukkan batang 3 berada pada posisi tegak lurus terhadap bidang maka, seharusnya sambungan 3 tidak mempunyai torsi atau 0. Harga torsi pada sambungan 3 disebabkan oleh adanya perubahan sudut yang

terjadi pada batang 3. Perubahan sudut itu dapat dikarenakan oleh gerakan ayunan batang yang terjadi pada batang 3.

Pada analisis, sambungan ke 1 berarti adalah sambungan batang yang ke 2 pada robot yang dianalisis dan sambungan yang ke 2 berarti sambungan yang ke 3 pada robot yang sesungguhnya.

Besarnya torsi yang didapat pada hasil analisis, apa bila dibandingkan dengan besar torsi pada robot yang sudah ada pada Tabel 1.1 mempunyai harga yang jauh berbeda. Hal ini dapat dilihat berdasarkan harga torsi yang ditunjukkan pada tabel untuk sambungan 4, 5 dan 6. Pada Tabel spesifikasi robot, harga torsi sambungan 1, 2 dan 3 tidak ditunjukkan. Pada analisis, torsi sambungan 1 berarti analisis torsi sambungan 2 pada robot dan torsi sambungan 2 berarti analisis torsi sambungan 3 pada robot sedangkan sambungan 3 berarti analisis torsi sambungan 5 pada robot. Perbedaan besar torsi yang terjadi antara hasil analisis dan torsi yang ditunjukkan pada Tabel, dikarenakan oleh perbedaan dimensi robot yang dianalisis yaitu dimensi robot yang dianalisis lebih besar dari dimensi robot yang sesungguhnya disamping mengabaikan besarnya lubang yang ada pada batang atau dengan kata lain batang dianalisis pada keadaan batang pejal.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. KESIMPULAN.

1. Kecepatan pada pengelasan sangat berpengaruh pada lamanya waktu pengelasan. Pada waktu yang sama, kondisi awal pengelasan yang mampu melakukan pengelasan dengan lintasan terpanjang adalah kondisi awal dengan sudut $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 335^\circ$, $\theta_3 = 280^\circ$.
2. Pada analisis dinamik, torsi yang dialami setiap sambungan untuk pengerjaan pengelasan adalah sebesar 52 Nm untuk sambungan satu, 13,5 untuk sambungan dua dan 0 untuk sambungan tiga.
3. Robot Kawasaki FS 03 mempunyai 6 derajat kebebasan dan 6 batang. Untuk pengelasan, batang dapat disederhanakan menjadi 3 batang dengan 3 derajat kebebasan dan 3 sambungan.
4. Menganalisis robot dengan menggunakan metode dinamika benda jamak sangat membantu dan mempermudah dalam mengetahui karakteristik dari gerakan robot seperti kecepatan percepatan sudut, kecepatan percepatan pusat masa, gaya-gaya yang terjadi pada robot yang mempengaruhi gerakan robot. Akan tetapi ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam menganalisis dengan metode ini yaitu:
 - a. Pembuatan pemodelan dan penempatan sumbu-sumbu referensi relatif pada setiap batang.
 - b. Analisis persamaan dan penurunan persamaan

- c. Pemahaman dasar tentang fungsi trigonometri.
- d. Pemahaman tentang persamaan matrik dan penyelesaiannya.
- e. Pemahaman bahasa pemrograman MATLAB^R untuk matriks guna pembuatan program penyelesaian, terutama dasar pemrograman MATLAB^R untuk operasi persamaan diferensial Ode15s.

Beberapa hal diatas dapat menjadi kendala yang akan menyulitkan dalam proses analisis selain masih banyak lagi yang mungkin akan muncul menjadi kendala.

Secsra umum proses analisis dengan metode dinamika benda jamak dapat di buat sebuah diagram alir yang menunjukkan proses analisis secara manual dan komputer secara bersama-sama yang ditunjukkan pada lampiran E. Sedangkan pada pembuatan program perhitungan dengan metode integrasi *Runge Kutta* dapat dibuat sebuah diagram alir seperti ditunjukkan pada lampiran F.

4.2. SARAN.

Pada analisis kinematik dan dinamika hendaknya memperhatikan dimensi robot tersebut karena dimensi robot dan gaya-gaya yang dialami oleh robot pada saat robot bekerja sangat berpengaruh pada torsi yang dialami pada tiap batang. Analisis juga dilakukan pada keadaan paling kritis dari robot.

Dalam pembuatan program hendaknya pemahaman tentang bahasa pemrograman MATLAB^R harus dikuasai minimal pada taraf bahasa pemrograman untuk perkalian matrik biasa serta bahasa untuk penyelesaian persamaan yang hasilnya adalah simulasi yaitu program penyelesaian Ode terutama Ode15s.

Berdasarkan hasil analisis dinamik hendaknya pemilihan penggerak untuk *manipulator* harus mampu menggerakkan batang-batang dengan torsi terbesar yang dialami sambungan, sehingga robot dapat bekerja secara efektif atau pembebanan pada robot sebaiknya tidak melebihi beban optimal yang mampu diangkat oleh robot.

Untuk tugas akhir mata kuliah ini disarankan agar kedepannya mampu mengembangkan proses analisis ini untuk gerakan robot yang lainnya atau kasus kasus lain yang lebih kompleks dan mengembangkan dari dua dimensi menjadi tiga dimensi sehingga akhirnya proses analisis ini mampu mendukung dunia industri dengan simulasi dan analisis yang tentunya lebih dapat dipertanggung jawabkan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Amirouche, F.M.L., Computational Methods in Multibody Dynamics, Prentice Hall, New Jersey, 1992.
2. Sugiharto, B. Kaji Teoritik Gerak Manusia Dengan Metode Sistem Benda Jamak, Program Pasca Sarjana Institut Teknologi, Bandung, 2001.

LAMPIRAN

Lampiran A, Program Pencarian Koefisien Persamaan Gerak.

```

clc;clear all;
syms t n1 n2 n3
syms g vk1 vk2 vk3 teta1 teta2 teta3 dteta1 dteta2 dteta3
syms mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 w p1 p2 p3
syms mb31 lb1 lb2 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

q=zeros(3);
i=eye(3);
n=[n1;n2;n3];
s10 = [cos(teta1*t) 0 -sin(teta1*t);0 1 0;sin(teta1*t) 0
cos(teta1*t)]
s21 = [cos(teta2*t) 0 -sin(teta2*t);0 1 0;sin(teta2*t) 0
cos(teta2*t)]
s32 = [cos(teta3*t) 0 -sin(teta3*t);0 1 0;sin(teta3*t) 0
cos(teta3*t)]
pause
input('Matrik transformasi (S...0)');
s20=simple(s21*s10)
s30=simple(s32*s20)
pause
input('Turunan pertama dari matrik(ds...)'');
ds1=simple(sk10*s10)
ds2=simple(sk20*s20)
ds3= simple(sk30*s30)
pause
input('Koordinat Umum', 's');
x=[0 teta1*t 0 0 teta2*t 0 0 teta3*t 0]
x1=[0 teta1 0 0 teta2 0 0 teta3 0]
x2=[0 dteta1 0 0 dteta2 0 0 dteta3 0]
pause
input ('Kecepatan Sudut Parsial (w)');
w1=[i;q;q]
w2=[i;s10;q]
w3=[i;s10;s20]
pause
input('Turunan kecepatan sudut parsial(dw...)'');
dw1=[q;q;q]
dw2=[q;ds1;q]
dw3=[q;ds1;ds2]
pause
input('Kecepatan Sudut (ws)');
ws1=x1*w1*n
ws2=x1*w2*n
ws3=x1*w3*n
pause
input('kecepatan koordinat umum');
y1=[0 teta1 0 0 0 0 0 0 0]
dy1=[0 dteta1 0 0 0 0 0 0 0]
y2=[0 teta1 0 0 teta2+teta1 0 0 0 0]
dy2=[0 dteta1 0 0 dteta2+dteta1 0 0 0 0]
y3=[0 teta1 0 0 teta2+teta1 0 0 teta3+teta2+teta1 0]
dy3=[0 dteta1 0 0 dteta2+dteta1 0 0 dteta3+dteta2+dteta1 0]
pause

```

```

input('Percepatan Sudut (aw)');
input('skew matriks (omega) (sk...)');
sk10=simple(diff(s10)*s10.')
sk20=simple(diff(s20)*s20.')
sk30=simple(diff(s30)*s30.')
pause
input('Percepatan Sudutnya(aw...)')
aw1=(x2*w1+x1*dw1)*n
aw2=(x2*w2+x1*dw2)*n
aw3=(x2*w3+x1*dw3)*n
pause
input('Kecepatan Pusat Massa pada Sambungan Batang Kaku');
input('Skew Matrik Vektor Posisi (sq...)');
sq1=[q]
sq2=[0 0 0;0 0 -lb1;0 lb1 0]
sq3=[0 0 0;0 0 -lb2;0 lb2 0]
sr1=[0 0 0;0 0 -lb1/2;0 lb1/2 0]
sr2=[0 0 0;0 0 -rb2;0 rb2 0]
sr3=[0 0 0;0 0 -rb3;0 rb3 0]
pause
input('Matrik Kecepatan Parsial(vp...)');
vp1=[sr1*s10;q;q]
vp2=[(sq2*s10);(sr2*s20);q]
vp3=[(sq2*s10);(sq3*s20);(sr3*s30)]
vp4=[(sq2*s10);(sq3*s20);(sq3*s30)]
pause
input('Turunan Matrik kecepatan parsial(dvp...)')
dvp1=diff(vp1)
dvp2=diff(vp2)
dvp3=diff(vp3)
pause
input('Kecepatan Pusat Masa(v...)')
v1=y1*vp1*n
v2=y2*vp2*n
v3=y3*vp3*n
pause

input('Percepatan Pusat Masa(a...)')
a1=simple((dy1*vp1)+(y1*dvp1))*n
a2=simple((dy2*vp2)+(y2*dvp2))*n
a3=simple((dy3*vp3)+(y3*dvp3))*n
pause
input('Kecepatan Sudut Parsial(wsp...)')
wsp1=[i;q;q]
wsp2=[i;s10;q]
wsp3=[i;s10;s20]
pause
input('Matriks Transfomasi dari Y ke x')
wt1=zeros(9);
wt1(2,2)=1
pause
wt2=zeros(9);
wt2(2,2)=1;
wt2(2,5)=1;
wt2(5,5)=1
pause

```



```

wt3=zeros(9);
    wt3(2,2)=1;
    wt3(2,5)=1;
    wt3(2,8)=1;
    wt3(5,5)=1;
    wt3(5,8)=1;
    wt3(8,8)=1
pause
input('Matrik kecepatan Parsial persamaan gerak (Vk..)')
vk1=wt1*vp1
vk2=wt2*vp2
vk3=wt3*vp3
vk4=wt3*vp4
pause
input('Turunan Matrik kecepatan Parsial persamaan gerak(dvk...)' );
dvk1=diff(vk1)
pause
dvk2=diff(vk2)
pause
dvk3=diff(vk3)
pause
input('Matrik gaya gravitasi(f...)' );
f1=[0 0 -mb1*g]
f2=[0 0 -mb2*g]
f3=[0 0 -mb3*g]
pause
input('Gaya akibat gravitasi bumi(fg...)' );
fg=(simple(vk1*f1.'))+(simple(vk2*f2.'))+(simple(vk3*f3.'))
pause
input('Matrik beban (w)' );
fkw=[0 0 -w]
input('Gaya akibat beban(fk3...)' );
fw=simple(vk4*fkw.')
input('Gaya yang bekerja pada sistim(f)' );
f=fg+fw
pause
input('Inersia batang koordinat lokal (ib...)' )
Ib1=[0 0 0;0 ((mb1*(lb1)^2)/12)+(w*p1^2) 0;0 0 0]
Ib2=[0 0 0;0
((mb21*lb21)/12)+(mb21*r21^2)+((mb22*lb22)/12)+(mb22*r22^2)+((mb23
*lb23)/12)+(mb23*r23^2)+((mb24*lb24)/12)+(mb24*r24^2)+(w*p2^2) 0;0
0 0]
Ib3=[0 0 0;0
((mb31*lb31)/12)+(mb31*r31^2)+((mb32*lb32)/12)+(mb32*r32^2)+(w*p3^
2) 0;0 0 0]
pause
input('Inersia batang Koordinat Global(i...)' )
i10=s10.*Ib1*s10
i20=s20.*Ib2*s20
i30=s30.*Ib3*s30
pause
input('Koefisien Matriks [A] perbatang(ab...)' )
ab1=(mb1*(vk1*vk1.'))+(w1*i10*w1.')
ab2=(mb2*(vk2*vk2.'))+(w2*i20*w2.')
ab3=(mb3*(vk3*vk3.'))+(w3*i30*w3.')
pause

```

```

input('KOEFSIEN MATRIKS ([A].n.,0)')
A10=simple(ab1)
A20=simple(A10+ab2)
A30=simple(A20+ab3)
pause
echo on
input('KOEFSIEN MATRIKS ([A].3.,0).dgn menghilangkan nol')
A30(2,2)
A30(2,5)
A30(2,8)
A30(5,2)
A30(5,5)
A30(5,8)
A30(8,2)
A30(8,5)
A30(8,8)
pause
AA=[A30(2,2) A30(5,2) A30(8,2);A30(2,5) A30(5,5) A30(8,5);A30(2,8)
A30(5,8) A30(8,8)]
echo off
input('Koefisien matrik [B] perbatang (b...))')
b1=(mb1*(vk1*dvk1.))+ (w1*i10*dw1.)
b2=(mb2*(vk2*dvk2.))+ (w2*i20*dw2.)
b3=(mb3*(vk3*dvk3.))+ (w3*i30*dw3.)
pause
input('KOEFSIEN MATRIKS ([B].n.,0)')
B10=simple(b1)
B20=simple(B10+b2)
B30=simple(B20+b3)
pause
echo on
input('KOEFSIEN MATRIKS ([B].3.,0).dgn menghilangkan nol')
B30(2,2)
B30(2,5)
B30(2,8)
B30(5,2)
B30(5,5)
B30(5,8)
B30(8,2)
B30(8,5)
B30(8,8)
pause
BB=[B30(2,2) B30(5,2) B30(8,2);B30(2,5) B30(5,5) B30(8,5);B30(2,8)
B30(5,8) B30(8,8)]
echo off
input('Mencari koefisien matriks [c]perbatang ke(c...))')
c1=w1*sk10.*i10*w1.'
c2=(w2*sk20.*i20*w2.')
c3=(w3*sk30.*i30*w3.')
pause
input('KOEFSIEN MATRIKS ([C].n.,0)')
C10=c1
C20=C10+c2
C30=C20+c3
pause
save robot C30 AA BB f

```

Lampiran B, Program Analisis Kinematik.

```

function varargout = tugas1(t,y,flag)

global g p Tt tetal teta2 teta3
global mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 w p1 p2
p3
global lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

%Data batang 1
mb1 =12;lb1 =0.25;
%Data batang 2
mb2 =8.5;lb2 =0.25;mb21 =3;mb22 =1.78;mb23 =0.7;mb24 =2.98;
lb21 =0.06;lb22 =0.06;lb23 =0.03;lb24 =0.1;
rb2 =0.11;r21 =0.04;r22 =0.02;r23 =0.065;r24 =0.13;
%Data batang 3
mb3 =1.4;lb3 =0.08;mb31 =1.19;mb32 =0.21;
lb31 =0.04;lb32 =0.04;
rb3 =0.26;r31 =0.01;r32=0.03;
p=0.01;
Tt=4.5;

%kondisi awal yang di amati
%Kondisi awal
%Kondisi 1
tetal = 15*pi/180;
teta2 = 335*pi/180;
teta3 = 280*pi/180;
%kondisi 2
%tetal = 30*pi/180;
%teta2 = 325*pi/180;
%teta3 = 275*pi/180;
%Kondisi 3
%tetal = 45*pi/180;
%teta2 = 315*pi/180;
%teta3 = 270*pi/180;
%-----
%Kondisi untuk beban
p1=lb1+lb2+lb3;
p2=lb2+lb3;
p3=lb3;
w=3;
g=9.81;
%waktu yang di tempuh tergantung pada percepatan yang digunakan.
% -----
if nargin == 0
    flag = 'demo';
end
switch flag
case ''
    varargout{1} = f(t,y);           % Return dy/dt = f(t,y).
case 'init'
    [tspan,y0,options].
    [varargout{1:3}] = init;       % Return default
case 'mass'
    % Return mass matrix.

```

```

    varargout{1} = mass(t,y);
case 'demo'                                % Run a demo.
    demo;
otherwise
    error(['Unknown flag '' flag ''.']);
end
% -----
function dydt = f(t,y)
global g p Tt tetal tet2 tet3
global mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23  mb24 mb31 mb32 w p1 p2
p3
global lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

b=zeros(3,3);
b(1,1)=-mb2*lb1*rb2*sin(y(2))*y(5)-mb3*lb1*lb2*y(5)*sin(y(2))-
mb3*lb1*rb3*y(6)*sin(y(3)+y(2))-mb3*lb1*rb3*y(5)*sin(y(3)+y(2))-
mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3));
b(1,2)=-mb2*lb1*rb2*sin(y(2))*y(5)-mb2*lb1*rb2*sin(y(2))*y(4)-
mb3*lb2*lb1*y(4)*sin(y(2))-mb3*lb1*lb2*y(5)*sin(y(2))-
mb3*lb1*rb3*y(6)*sin(y(3)+y(2))-mb3*rb3*lb1*y(4)*sin(y(3)+y(2))-
mb3*lb1*rb3*y(5)*sin(y(3)+y(2))-mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3));
b(1,3)=-mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(5)-mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(4)-
mb3*lb1*rb3*y(6)*sin(y(3)+y(2))-mb3*rb3*lb1*y(4)*sin(y(3)+y(2))-
mb3*lb1*rb3*y(5)*sin(y(3)+y(2))-mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3));
b(2,1)=mb2*lb1*rb2*sin(y(2))*y(4)+mb3*rb3*lb1*y(4)*sin(y(3)+y(2))-
mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3))+mb3*lb2*lb1*y(4)*sin(y(2));
b(2,2)=-mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3));
b(2,3)=-mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(4)-mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(5)-
mb3*lb2*rb3*y(6)*sin(y(3));
b(3,1)=mb3*rb3*lb1*y(4)*sin(y(3)+y(2))+mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(5)+
mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(4);
b(3,2)=mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(5)+mb3*lb2*rb3*sin(y(3))*y(4);

f = zeros(3,1);
f(1,1)=1/2*lb1*cos(y(1))*mb1*g+(lb1*cos(y(1))+rb2*cos(y(2)+y(1)))*
mb2*g+(lb1*cos(y(1))+lb2*cos(y(2)+y(1))+rb3*cos(y(3)+y(2)+y(1)))*m
b3*g+(lb1*cos(y(1))+lb2*cos(y(2)+y(1))+lb2*cos(y(3)+y(2)+y(1)))*w;
f(2,1)=rb2*cos(y(2)+y(1))*mb2*g+(lb2*cos(y(2)+y(1))+rb3*cos(y(3)+y
(2)+y(1)))*mb3*g+lb2*(cos(y(2)+y(1))+cos(y(3)+y(2)+y(1)))*w;
f(3,1)=rb3*cos(y(3)+y(2)+y(1))*mb3*g+lb2*cos(y(3)+y(2)+y(1))*w;

Bdot=zeros(3,3);
Bdot(1,1)=-lb1*sin(y(1))*y(4)-lb2*sin(y(1)+y(2))*(y(4)+y(5))-
lb3*sin(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));
Bdot(1,2)=-lb2*sin(y(1)+y(2))*(y(4)+y(5))-
lb3*sin(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));
Bdot(1,3)=-sin(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));
Bdot(2,1)=-lb1*cos(y(1))*y(4)-lb2*cos(y(1)+y(2))*(y(4)+y(5))-
lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));
Bdot(2,2)=-lb2*cos(y(1)+y(2))*(y(4)+y(5))-
lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));
Bdot(2,3)=-lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3))*(y(4)+y(5)+y(6));

H = b*[y(4);y(5);y(6)];
G = Bdot*[y(4);y(5);y(6)];

```

```

gdot =[0; p; 0];
F = [ f ; gdot] - [ H ; G ];

dydt = [y(4); y(5); y(6); % state space
        F(1);F(2);F(3);F(4);F(5);F(6)]; % real
% -----
function [tspan,y0,options] = init
global g p Tt teta1 teta2 teta3
global mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 w p1 p2
p3
global lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

tspan = [0 0.1*Tt 0.2*Tt 0.3*Tt 0.4*Tt 0.5*Tt 0.6*Tt 0.7*Tt
0.8*Tt 0.9*Tt Tt];
%span = [0:0.1:Tt];
y0 = [teta1 ; teta2 ; teta3 ; 0; 0; 0; 0; 0; 0];

options = odeset('Mass','M(t,y)', 'MassSingular','no',...
                'RelTol',1e-6,...
                'AbsTol',[1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 ,...
                1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 ]);
% -----
function M = mass(t,y)
global g p Tt teta1 teta2 teta3
global mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 w p1 p2
p3
global lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

B=zeros(3,3);
B(1,1)=lb1*cos(y(1))+lb2*cos(y(1)+y(2))+lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3));
B(1,2)=lb2*cos(y(1)+y(2))+lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3));
B(1,3)=lb3*cos(y(1)+y(2)+y(3));
B(2,1)=lb1*sin(y(1))-lb2*sin(y(1)+y(2))-lb3*sin(y(1)+y(2)+y(3));
B(2,2)=lb2*sin(y(1)+y(2))-lb3*sin(y(1)+y(2)+y(3));
B(2,3)=lb3*sin(y(1)+y(2)+y(3));
B(3,1)=1;
B(3,2)=1;
B(3,3)=1;

a=zeros(3,3);
a(1,1)=mb2*rb2^2+2*mb2*rb2*lb1*cos(y(2))+1/12*mb21*lb21+mb21*r21^2
+1/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/3*mb1*lb1^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2
+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2+w*p2^2
+1/12*mb24*lb24+mb24*r24^2+mb3*lb1^2+w*p1^2+mb3*lb2^2+mb3*rb3^2+mb
2*lb1^2+2*mb3*lb1*lb2*cos(y(2))+2*mb3*rb3*lb1*cos(y(3)+y(2))+2*mb3
*rb3*lb2*cos(y(3));
a(1,2)=mb2*rb2*lb1*cos(y(2))+mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21^2+1
/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*lb24+
mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*lb1*lb2*cos(y(2))+mb3*rb3*lb1*cos(y(3)+y(2))
+mb3*lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r
31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(1,3)=mb3*rb3*lb1*cos(y(3)+y(2))+mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+
1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;

```

```

a(2,1)=mb2*rb2*lb1*cos(y(2))+mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21^2+1
/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*lb24+
mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*lb1*lb2*cos(y(2))+mb3*rb3*lb1*cos(y(3)+y(2))
+mb3*lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r
31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(2,2)=mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21^2+1/12*mb22*lb22+mb22*r22
^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*lb24+mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*
lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+
1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(2,3)=mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1
/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,1)=mb3*rb3*lb1*cos(y(3)+y(2))+mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+
1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,2)=mb3*rb3*lb2*cos(y(3))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1
/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,3)=mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32
^2+w*p3^2;

o = zeros(3);
ab = [a      B'
      B      o];

M = [ eye(3)      zeros(3,6)
      zeros(6,3)  ab      ];

% -----
function demo
global g p Tt teta1 teta2 teta3
global mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21 mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 w p1 p2
p3
global lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31 lb32 r21 r22 r23 r24
r31 r32

clc;clf;figure(1);
[T,Y] = odel5s('tugas1');
disp(' -----')
disp('      Time      teta1      teta2      teta3      ')
disp(' -----')
[T,Y(:,1)*180/pi,Y(:,2)*180/pi,Y(:,3)*180/pi]
pause
save tugas1 T Y g p Tt teta1 teta2 teta3 mb1 mb2 mb3 rb3 rb2 mb21
mb22 mb23 mb24 mb31 mb32 lb1 lb2 lb3 lb21 lb22 lb23 lb24 lb31
lb32 r21 r22 r23 r24 r31 r32 w p1 p2 p3

set(gca,'nextplot','replacechildren')
axis([0 0.7 0 0.65]);
hold on;
hold on;
x0 = 0; y0 = 0;
x01= 0; y01 = 0.2;
x1 = 0.12; y1 = 0.25;
for j = 1:length(T)
    teta1 = Y(j,1);
    teta2 = Y(j,2);
    teta3 = Y(j,3);
xvals=[x0 x01
        x01 x1];

```

```

xvals1=[x1    x1+lb1*cos(tetal)
        x1+lb1*cos(tetal)
x1+lb1*cos(tetal)+lb2*cos((tetal)+(teta2))];
xvals2=[x1+lb1*cos(tetal)
x1+lb1*cos(tetal)+lb2*cos((tetal)+(teta2))
        x1+lb1*cos(tetal)+lb2*cos((tetal)+(teta2))
x1+lb1*cos(tetal)+lb2*cos((tetal)+(teta2))+lb3*cos((tetal)+(teta2)
+(teta3))];

yvals=[y0 y01
        y01 y1];
yvals1=[y1 y1+lb1*sin(tetal)
        y1+lb1*sin(tetal)
y1+lb1*sin(tetal)+lb2*sin((tetal)+(teta2))];
yvals2=[y1+lb1*sin(tetal)
y1+lb1*sin(tetal)+lb2*sin((tetal)+(teta2))
        y1+lb1*sin(tetal)+lb2*sin((tetal)+(teta2))
y1+lb1*sin(tetal)+lb2*sin((tetal)+(teta2))+lb3*sin((tetal)+(teta2)
+(teta3))];

hh =
plot(xvals,yvals,xvals,yvals,'b',xvals1,yvals1,'o',xvals1,yvals1,'
r',xvals2,yvals2,xvals2,yvals2,'o');
    set(hh,'lineWidth',2);axis equal;grid;
drawnow
    %M(:,j)=getframe(gcf);
end
%movie(M,1)

```

Lampiran C, Program Analisis Dinamik.

```

clear all ; clc;
load tugas3; %untuk mengambil data dari program simulasi
t = T;
    teta1 = Y(:,1);dteta1 = Y(:,4);
    teta2 = Y(:,2);dteta2 = Y(:,5);
    teta3 = Y(:,3);dteta3 = Y(:,6);

    for i=1:length(T);
b=zeros(3,3);
b(1,1)=-mb2*lb1*rb2*sin(teta2(i))*dteta2(i)-
mb3*lb1*lb2*dteta2(i)*sin(teta2(i))-
mb3*lb1*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb1*rb3*dteta2(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i));
b(1,2)=-mb2*lb1*rb2*sin(teta2(i))*dteta2(i)-
mb2*lb1*rb2*sin(teta2(i))*dteta1(i)-
mb3*lb2*lb1*dteta1(i)*sin(teta2(i))-
mb3*lb1*lb2*dteta2(i)*sin(teta2(i))-
mb3*lb1*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*rb3*lb1*dteta1(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb1*rb3*dteta2(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i));
b(1,3)=-mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta2(i)-
mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta1(i)-
mb3*lb1*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*rb3*lb1*dteta1(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb1*rb3*dteta2(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i));
b(2,1)=mb2*lb1*rb2*sin(teta2(i))*dteta1(i)+mb3*rb3*lb1*dteta1(i)*s
in(teta3(i)+teta2(i))-
mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i))+mb3*lb2*lb1*dteta1(i)*sin(teta
2(i));
b(2,2)=-mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i));
b(2,3)=-mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta1(i)-
mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta2(i)-
mb3*lb2*rb3*dteta3(i)*sin(teta3(i));
b(3,1)=mb3*rb3*lb1*dteta1(i)*sin(teta3(i)+teta2(i))+mb3*lb2*rb3*si
n(teta3(i))*dteta2(i)+mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta1(i);
b(3,2)=mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i))*dteta2(i)+mb3*lb2*rb3*sin(teta3(i
))*dteta1(i);

f = zeros(3,1);
f(1,1)=1/2*lb1*cos(teta1(i))*mb1*g+(lb1*cos(teta1(i))+rb2*cos(teta
2(i)+teta1(i)))*mb2*g+(lb1*cos(teta1(i))+lb2*cos(teta2(i)+teta1(i)
)+rb3*cos(teta3(i)+teta2(i)+teta1(i)))*mb3*g+(lb1*cos(teta1(i))+lb
2*cos(teta2(i)+teta1(i))+lb2*cos(teta3(i)+teta2(i)+teta1(i)))*w;
f(2,1)=rb2*cos(teta2(i)+teta1(i))*mb2*g+(lb2*cos(teta2(i)+teta1(i)
)+rb3*cos(teta3(i)+teta2(i)+teta1(i)))*mb3*g+lb2*(cos(teta2(i)+tet
a1(i))+cos(teta3(i)+teta2(i)+teta1(i)))*w;
f(3,1)=rb3*cos(teta3(i)+teta2(i)+teta1(i))*mb3*g+lb2*cos(teta3(i)+
teta2(i)+teta1(i))*w;

```

```

Bdot=zeros(3,3);
Bdot(1,1)=-lb1*sin(tetal(i))*dtetal(i)-
lb2*sin(tetal(i)+teta2(i))*(dtetal(i)+dteta2(i))-
lb3*sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i)
);
Bdot(1,2)=-lb2*sin(tetal(i)+teta2(i))*(dtetal(i)+dteta2(i))-
lb3*sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i)
);
Bdot(1,3)=-
sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i));
Bdot(2,1)=-lb1*cos(tetal(i))*dtetal(i)-
lb2*cos(tetal(i)+teta2(i))*(dtetal(i)+dteta2(i))-
lb3*cos(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i)
);
Bdot(2,2)=-lb2*cos(tetal(i)+teta2(i))*(dtetal(i)+dteta2(i))-
lb3*cos(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i)
);
Bdot(2,3)=-
lb3*cos(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i))*(dtetal(i)+dteta2(i)+dteta3(i)
);

H = b*[dtetal(i);dteta2(i);dteta3(i)];
G = Bdot*[dtetal(i);dteta2(i);dteta3(i)];
gdot =[0; p; 0];

B=zeros(3,3);
B(1,1)=lb1*cos(tetal(i))+lb2*cos(tetal(i)+teta2(i))+lb3*cos(tetal(
i)+teta2(i)+teta3(i));
B(1,2)=lb2*cos(tetal(i)+teta2(i))+lb3*cos(tetal(i)+teta2(i)+teta3(
i));
B(1,3)=lb3*cos(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i));
B(2,1)=lb1*sin(tetal(i))-lb2*sin(tetal(i)+teta2(i))-
lb3*sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i));
B(2,2)=lb2*sin(tetal(i)+teta2(i))-
lb3*sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i));
B(2,3)=lb3*sin(tetal(i)+teta2(i)+teta3(i));
B(3,1)=1;
B(3,2)=1;
B(3,3)=1;

a=zeros(3,3);
a(1,1)=mb2*rb2^2+2*mb2*rb2*lb1*cos(teta2(i))+1/12*mb21*lb21+mb21*r
21^2+1/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/3*mb1*lb1^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r
23^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2+w*
p2^2+1/12*mb24*lb24+mb24*r24^2+mb3*lb1^2+w*p1^2+mb3*lb2^2+mb3*rb3^
2+mb2*lb1^2+2*mb3*lb1*lb2*cos(teta2(i))+2*mb3*rb3*lb1*cos(teta3(i)
+teta2(i))+2*mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i));
a(1,2)=mb2*rb2*lb1*cos(teta2(i))+mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21
^2+1/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*1
b24+mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*lb1*lb2*cos(teta2(i))+mb3*rb3*lb1*cos(te
ta3(i)+teta2(i))+mb3*lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1
/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(1,3)=mb3*rb3*lb1*cos(teta3(i)+teta2(i))+mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i)
)+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*
p3^2;

```

```

a(2,1)=mb2*rb2*lb1*cos(teta2(i))+mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21
^2+1/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*lb24+mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*lb1*lb2*cos(teta2(i))+mb3*rb3*lb1*cos(teta3(i))+teta2(i))+mb3*lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(2,2)=mb2*rb2^2+1/12*mb21*lb21+mb21*r21^2+1/12*mb22*lb22+mb22*r22^2+1/12*mb23*lb23+mb23*r23^2+1/12*mb24*lb24+mb24*r24^2+w*p2^2+mb3*lb2^2+2*mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(2,3)=mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,1)=mb3*rb3*lb1*cos(teta3(i))+teta2(i))+mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,2)=mb3*rb3*lb2*cos(teta3(i))+mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;
a(3,3)=mb3*rb3^2+1/12*mb31*lb31+mb31*r31^2+1/12*mb32*lb32+mb32*r32^2+w*p3^2;

lamda(:,i) = inv(B*inv(a)*B')*(B*inv(a)*(f - H)-(gdot - G));
fc(:,i) = B.'*lamda(:,i);
M1(i) = -fc(1,i);
M2(i) = -fc(2,i);
M3(i) = -fc(3,i);
[i M1(i) M2(i) M3(i)];

end
figure(2);hold on
plot(t,M1,'r');grid on;
title('Joint1');xlabel('Time (second)');ylabel('Moment (N-m)');

figure(3);hold on
plot(t,M2,'r');grid on;
title('Joint2');xlabel('Time (second)');ylabel('Moment (N-m)');

figure(4);hold on
plot(t,M3,'r');grid on;
title('Joint3');xlabel('Time (second)');ylabel('Moment (N-m)');

```

Lampiran D, Tabel Spesifikasi Bahan.

Tabel 3.4. Tabel Sifat-sifat Bahan Logam

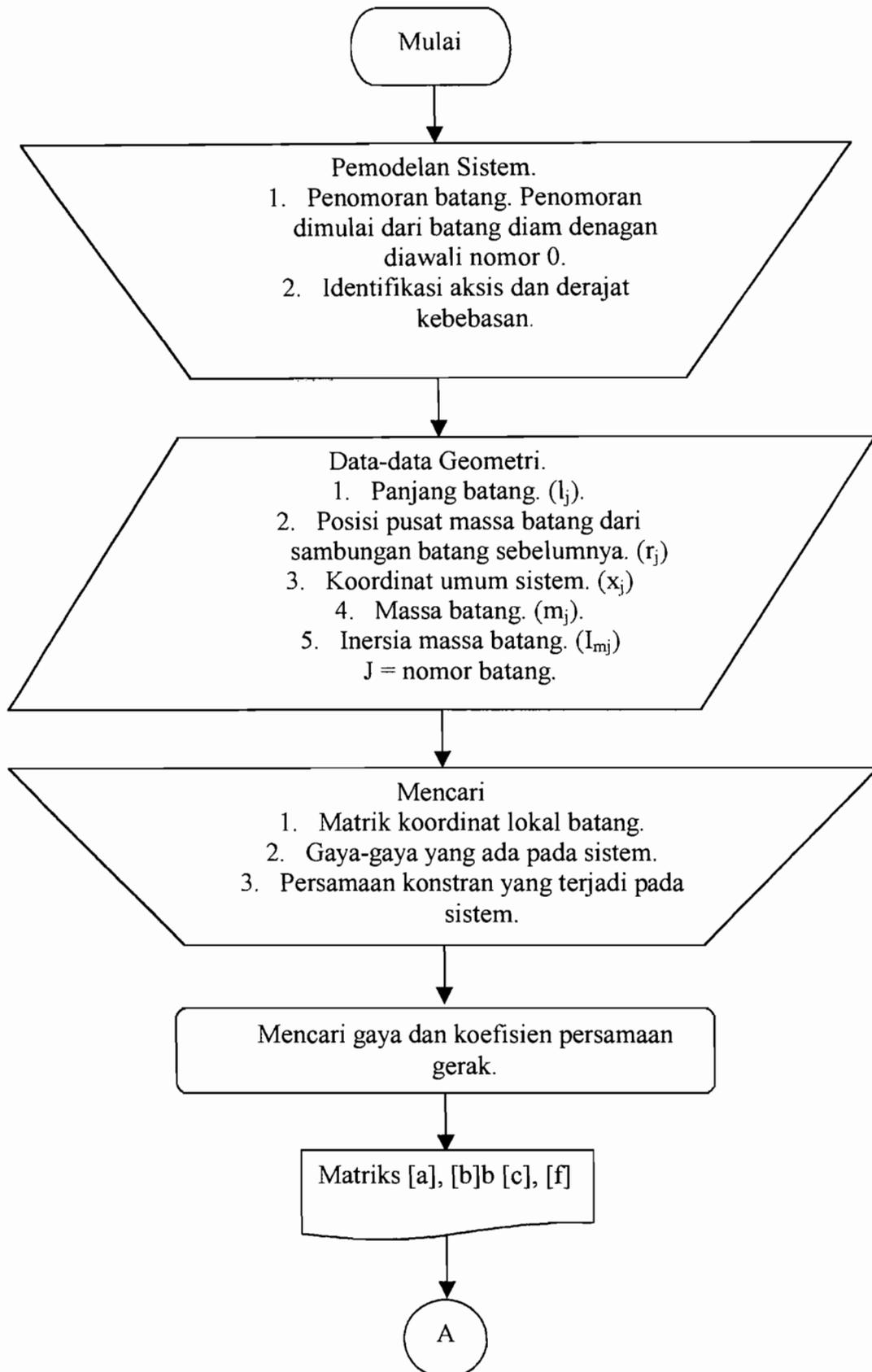
Logam	T		ρ		c_p		k		
	°C	°F	kg/m ³	lbm/ft ³	kJ/(kg·K)	Btu/(lbm·°F)	W/(m·K)	Btu/(h·ft·°F)	
Aluminium, murni	20	68	2.702	169	0,896	0,214	204	118	
	200	392	215	124	
	400	752	249	144	
Titanium	20	68	4.533	283	0,130	0,031	35	20	
	300	572	29,8	17,2	
Besi	Murni	20	68	7.872	491	0,453	0,108	73	42
		300	572	55	32
		1.000	1.832	35	20
Ditempa	Baja karbon (maks. 0,5% C)	20	68	7.849	490	0,46	0,11	59	34
		30	68	7.833	489	0,463	0,111	54	31
Baja karbon (1,5 %)	20	68	7.753	484	0,486	0,118	36	21	
	400	752	33	19	
	1.200	2.192	28	17	
Baja tahan karat	20	68	12-45	7-26	
Tembaga	Murni	20	68	8.954	559	0,383	0,0915	386	223
		300	572	369	211
		600	1.112	353	204
Kuningan (75% Cu, 25% Zn)	20	68	8.666	541	0,343	0,082	26	15	
	Tembaga (70% Cu, 30% Zn)	20	68	8.522	531	0,385	0,092	111	64
Perak, murni	20	68	10.524	657	0,234	0,0559	407	235	
Tungsten	20	68	19.350	1.208	0,134	0,0323	163	94	

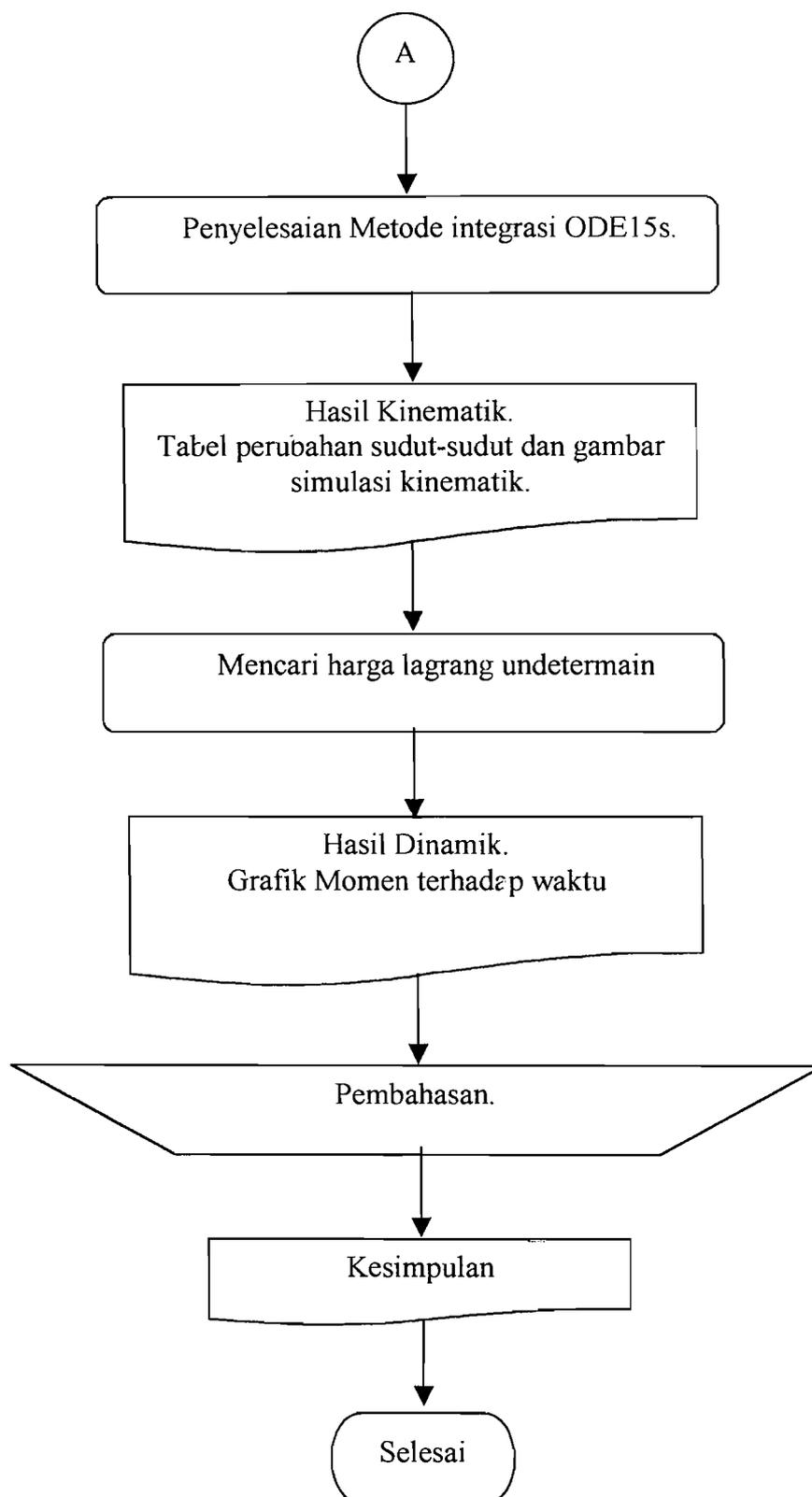
Disesuaikan dari E. R. G. Eckert dan R. M. Drake, *Analisa Perpindahan Kalor dan Massa*, cetakan ketiga, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972. Dengan izin.

Catatan: ft = kaki h = jam

Sumber Termodinamika Teknik, Henry C. Perkins dan William C. Reynolds.

Lampiran E, Diagram alir penyelesaian dengan metode dinamika benda jamak.





Lampiran F, Digram alir program penyelesaian dengan komputer.

